



费曼 物理学讲义

新千年版

套装

共5册

[美] 费曼 (Richard Feynman)
莱顿 (Robert Leighton)
桑兹 (Matthew Sands) / 著

[美] 戈特利布 (Michael A. Gottlieb)
法伊弗 (Rudolf Pfeiffer) / 编
◎ 郑永令 华宏鸣 吴子仪等 / 译

总 目 录

[费曼物理学讲义：新千年版. 第1卷](#)

[费曼物理学讲义：新千年版. 第2卷](#)

[费曼物理学讲义：新千年版. 第3卷](#)

[费曼物理学讲义补编](#)

[费曼物理学讲义习题集：新千年版](#)

第1卷

THE
Feynman
LECTURES ON PHYSICS

Volume I

The New Millennium Edition

费曼

物理学讲义

· 新千年版 ·

[美] 费曼 (Richard Feynman) [美] 莱顿 (Robert Leighton) [美] 桑兹 (Matthew Sands) 著

郑永令 华宏鸣 吴子仪 等译



上海科学技术出版社

The Feynman Lectures on Physics (The New Millennium Edition, Volume I)

费曼物理学讲义

(新千年版)

第 1 卷

[美] 费曼 (Richard Feynman)

莱顿 (Robert Leighton) 著

桑兹 (Matthew Sands)

郑永令 华宏鸣 吴子仪 等 译

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

费曼物理学讲义：新千年版．第1卷／（美）费曼（Richard Feynman），（美）莱顿（Robert Leighton），（美）桑兹（Matthew Sands）著；郑永令等译．—上海：上海科学技术出版社，2020.3

ISBN 978-7-5478-4717-6

I. ①费... II. ①费...②莱...③桑...④郑... III. ①物理学—教材 IV. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2020）第032329号

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS: The New Millennium Edition, Volume I

By Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands

© 1963, 2006, 2010 by California Institute of Technology. Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

Simplified Chinese translation copyright © 2013 by Shanghai Scientific&Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books Group

Through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司
ALL RIGHTS RESERVED

费曼物理学讲义（新千年版）第1卷

[美] 费曼 (Richard Feynman) 莱顿 (Robert Leighton) 桑兹
(Matthew Sands) 著 郑永令 华宏鸣 吴子仪等 译

上海世纪出版(集团)有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行

(上海钦州南路71号 邮政编码200235 www.sstp.cn)

苏州望电印刷有限公司印刷

开本787×1092 1/16 印张36.25

字数800千字

2020年3月第1版 2020年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-4717-6/O·83

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

译者序

20世纪60年代初，美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应，纷纷试行教学改革，加利福尼亚理工学院就是其中之一。该校于1961年9月至1963年5月特请著名物理学家费曼主讲一二年级的基础物理课，事后又根据讲课录音编辑出版了《费曼物理学讲义》。本讲义共分3卷，第1卷包括力学、相对论、光学、气体分子动理论、热力学、波等，第2卷主要是电磁学，第3卷是量子力学。全书内容十分丰富，在深度和广度上都超过了传统的普通物理教材。

当时美国大学物理教学改革试图解决的一个主要问题是基础物理教学应尽可能反映近代物理的巨大成就。《费曼物理学讲义》在基础物理的水平上对20世纪物理学的两大重要成就——相对论和量子力学——作了系统的介绍，对于量子力学，费曼教授还特地准备了一套适合大学二年级水平的讲法。教学改革试图解决的另一个问题是按照当前物理学工作者在各个前沿研究领域所使用的方式来介绍物理学的内容。在《费曼物理学讲义》一书中对一些问题的分析和处理方法，反映了费曼自己以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。全书对基本概念、定理和定律的讲解不仅生动清晰、通俗易懂，而且特别注重从物理上作出深刻的叙述。为了扩大学生的知识面，全书还列举了许多基本物理原理在各个方面（诸如天体物理、地球物理、生物物理等）的应用，以及物理学的一些最新成就。由于全书是根据课堂讲授的录音整理编辑的，它在一定程度保留了费曼讲课的生动活泼、引人入胜的独特风格。

《费曼物理学讲义》从普通物理水平出发，注重物理分析，深入浅出，避免运用高深繁琐的数学方程，因此具有高中以上物理水平和初等微积分知识的读者阅读起来不会感到十分困难。至于大学物理系的师生和物理工作者更能从此书中获得教益。

1989年，为纪念费曼逝世一周年，原书编者重新出版本书，并增加了介绍费曼生平的短文和新的序言。2010年，编者根据50多年来世界各国在阅读和使用本书过程中提出的意见，对全书（3卷）存在的错误和不当之处（885处）进行了订正，并使用新的电子版语言和现代作图软件对全书语言文字、符号、方程及插图进行重新编辑出版，称为新千年版。本书就是根据新千年版翻译的。

本书的费曼自序、前言及本卷第1至10章、15章、16章、37至48章、52章由郑永令在吴子仪译稿的基础上重译，第11章、17至25章由华宏鸣翻译，第12章、49章由诸长生翻译，第13和14章由范膺翻译，第26至34章由郑永令翻译，《费曼物理学讲义》另序、“关于费曼”及第35和36章由潘笃武翻译，第50和51章由钟万衡翻译。原译稿曾由郑广垣、王福山、苏汝铿校阅。由于译者水平所限，错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

译者

2012年10月

关于费曼

理查德·费曼（R.P.Feynman）1918年生于纽约市，1942年在普林斯顿大学获得博士学位。第二次世界大战期间，尽管当时他还很年轻，就已经在洛斯阿拉莫斯的曼哈顿计划中发挥了重要作用。以后，他在康奈尔大学和加利福尼亚理工学院任教。1965年，因在量子电动力学方面的工作和朝永振一郎（Sin-Itiro Tomonaga）及施温格尔（J.Schwinger）同获诺贝尔物理学奖。

费曼博士获得诺贝尔奖是由于成功地解决了量子电动力学的理论问题。他也创立了说明液氦中超流动性现象的数学理论。此后，他和盖尔曼（M.Gell-Mann）一起在 β 衰变等弱相互作用领域内做出了奠基性的工作。在以后的几年里，他在夸克理论的发展中起了关键性的作用，提出了高能质子碰撞过程的部分子模型。

除了这些成就之外，费曼博士将新的基本计算技术及记号法引进物理学，首先是无处不在的费曼图，在近代科学历史中，它比其他任何数学形式描述都更大地改变了对基本物理过程形成概念及进行计算的方法。

费曼是一位卓越的教育家。在他获得的所有奖项中，他对1972年获得的奥斯特教学奖章特别感到自豪。在1963年第一次出版的《费曼物理学讲义》被《科学美国人》杂志的一位评论员描写为“难啃的但却富于营养并且津津有味。25年后它仍是教师和最优秀的初学学生的指导书”。为了使外行的公众增加对物理学的了解，费曼博士写了《物理

定律和量子电动力学的性质：光和物质的奇特理论》。他还是许多高级出版物的作者，这些都成为研究人员和学生的经典参考书和教科书。

费曼是一个活跃的公众人物。他在挑战者号失事调查委员会里的工作是众所周知的，特别是他的著名的O型环对寒冷的敏感性的演示，这是一个优美的实验，除了一杯冰水和C形钳以外其他什么也不需要。费曼博士1960年在加利福尼亚州课程促进会中的工作却很少为人所知，他在会上指责教科书的平庸。

仅仅罗列费曼的科学和教育成就还没有充分抓住这个人物的本质。即使是他的最最技术性的出版物的读者都知道，费曼活跃的多面的人格在他所有的工作中都闪闪发光。除了作为物理学家，他还是无线电修理工，是锁具收藏家、艺术家、舞蹈家、邦戈（bongo）鼓手，甚至玛雅象形文字的破译者。他的世界永远充满了好奇，他是一个典型的经验主义者。

费曼于1988年2月15日在洛杉矶逝世。

新千年版前言

自理查德·费曼在加利福尼亚理工学院讲授物理学导论课程以来，已经过去快50年了。这次讲课产生了这3卷《费曼物理学讲义》。在这50年中，我们对物理世界的认识已经大大改变了，但是《费曼物理学讲义》的价值仍旧存在。由于费曼对物理学独到的领悟和教学方法，费曼的讲义今天仍像第一次出版时那样具有权威性。这些教本已在全世界范围内被初学者，也被成熟的物理学家研读；它们已被翻译成至少12种语言，仅仅英语的印刷就有150万册以上。或许至今为止还没有其他物理学书籍有这样广泛的影响。

新千年版迎来了《费曼物理学讲义（FLP）》的新时代：21世纪的电子出版物时代。FLP改变为eFLP，本文和方程式用 $\text{\LaTeX}$ 电子排字语言表示，所有的插图用现代绘图软件重画。

这一版的印刷本的效果并没有什么特别之处，它看上去几乎完全和学物理的学生都已熟悉并热爱的最初的红色书一样。主要的差别在于扩大并改进了的索引，以前的版本第一次印刷以来的50年内读者们发现的885处错误的改正，以及更方便改正未来的读者可能发现的错误。关于这一点我以后还要谈到。

这一版的电子书版本以及加强电子版不同于20世纪的大多数技术书籍的电子书，如果把这种书籍的方程式、插图、有时甚至包括课文，放大以后都成为多个像素。新千年版的 $\text{\LaTeX}$ 稿本有可能得到最高质量的电子书，书页上的所有的面貌特征（除了照片）都可以无限

制地放大而始终保持其精确的形状和细锐度。带有费曼原始讲课的声音和黑板照相，还带有和其他资源的联接的电子版本是新事物，（假如费曼还在世的话）这一定会使他极其高兴。^[1]

费曼讲义的回忆

这3卷书是一套完备的教科书。它们也是费曼在1961—1964年给本科生上物理学课的历史记录，这是加利福尼亚理工学院的一年级和二年级学生，无论他们主修什么课程，都必须上的一门课。

读者们可能和我一样很想知道，费曼的讲课对听课的学生的影响如何。费曼在这几本书的前言中提供了多少有些负面的看法。他写道：“我不认为我对学生做得很好。”马修·桑兹（Matthew Sands）在他的《费曼物理学讲义补编》的回忆文章中给出了完全正面的观点。出于好奇，2005年春天，我和从费曼1961—1964班级（大约150个学生）中半随机地挑选一组17位学生通过电子邮件或面谈联系——这些学生中有些在课堂上有很大的困难，而有一些很容易掌握课程；他们主修生物学，化学，工程，地理学，数学及天文学，还包括物理学。

经过了这些年，可能已经在他们的记忆中抹上了欣快的色彩，但大约有80%回忆起费曼的讲课觉得是他们大学时光中精彩的事件。“就像上教堂。”听课是“一个变形改造的经历”，“一生的重要阅历，或许是我从加利福尼亚理工学院得到的最重要的东西。”“我是一个主修生物学的学生，但费曼的讲课在我的本科生经历中就像在最高点一样突出……虽然我必须承认当时我不会做家庭作业并且总是交不出作业。”“我当时是课堂上最没有希望的学生之一，但我从不缺一堂课……我记

得并仍旧感觉到费曼对于发现的快乐.....他的讲课具有一种.....感情上的冲击效果，这在印刷的讲义中可能失去了。”

相反，好些学生，主要由于以下两方面问题，而具有负面的记忆。（i）“你无法通过上课学会做家庭作业。费曼太灵活了——他熟知解题技巧和可作哪些近似，他还具有基于经验和天赋的直觉，这是初学的学生所不具备的。”费曼和同事们在讲课过程中知道这一缺陷，做了一些工作，部分材料已编入《费曼物理学讲义补编》：费曼的3次习题课以及罗伯特·莱顿（Robert Leighton）和罗各斯·沃格特（Rochus Vogt）选编的一组习题和答案。（ii）由于不知道下一节课可能会讨论什么内容而产生一种不安全感，缺少与讲课内容有任何关系的教科书或参考书，其结果是我们无法预习，这是十分令人沮丧的.....我发现在课堂上的演讲是令人激动但却是很难懂，但（当我重建这些细节的时候发现）它们只是外表上像梵文一样难懂。当然，有了这3本《费曼物理学讲义》，这些问题已经得到了解决。从那以后的许多年，它们就成了加州理工学院学生学习的教科书，直到今天它们作为费曼的伟大遗产还保持着活力。

改错的历史

《费曼物理学讲义》是费曼和他的合作者罗伯特·莱顿及马修·桑兹非常仓促之中创作出来的，根据费曼的讲课的录音带和黑板照相（这些都编入这新千年版的增强电子版）加工扩充而成^[2]。由于要求费曼、莱顿和桑兹高速度工作，不可避免地有许多错误隐藏在第一版中。在以后几年中，费曼收集了加州理工学院的学生和同事以及世界各地的读者发现的、长长的、确定的错误列表。在20世纪60年代和70

年代早期，费曼在他的紧张的生活中抽出时间来核实第1卷和第2卷中确认的大多数，不是全部错误，并在以后的印刷中加入了勘误表。但是费曼的责任感从来没有高到超过发现新事物的激情而促使他处理第3卷中的错误。^[3]在1988年他过早的逝世后，所有3卷的勘误表都存放到加州理工学院档案馆，它们躺在那里被遗忘了。

2002年，拉尔夫·莱顿（Ralph Leighton）（已故罗伯特·莱顿的儿子，费曼的同胞）告诉我，拉尔夫的朋友迈克尔·戈特里勃（Michael Gottlieb）汇编了老的和长长的新的勘误表。莱顿建议加州理工学院编纂一个改正所有错误的《费曼物理学讲义》的新版本，并将他和戈特里勃当时正在编写的新的辅助材料——《费曼物理学讲义补编》一同出版。

费曼是我心目中的英雄，也是亲密的朋友。当我看到勘误表和提交的新的一卷的内容时，我很快就代表加州理工学院（这是费曼长时期的学术之家，他、莱顿和桑兹已将《费曼物理学讲义》所有的出版权利和责任都委托给她了）同意了。一年半以后，经过戈特里勃细微工作和迈克尔·哈特尔（Michael Hartl）（一位优秀的加州理工学院博士后工作者，他审校了加上新的一卷的所有的错误）仔细的校阅，《费曼物理学讲义》的2005限定版诞生了，其中包括大约200处勘误。同时发行了费曼、戈特里勃和莱顿的《费曼物理学讲义补编》。

我原来以为这一版是“定本”了。出乎我意料的是全世界读者热情响应。戈特里勃呼吁大家鉴别出更多错误，并通过创建的费曼讲义网站 www.feynmanlectures.info 提交给他。从那时起的五年内，又提交了965处新发现的错误，这些都是从戈特里勃、哈特尔和纳特·博德（Nate Bode）（一位优秀的加州理工学院研究生，他是继哈特尔之后

的加州理工学院的错误检查员) 的仔细校对中遗漏的。这些965处被检查出来的错误中80处在《定本》的第四次印刷(2006年8月)中改正了, 余下的885处在这一个新千年版的第一次印刷中被改正(第1卷中332处, 第2卷中263处, 第3卷200处) [\[4\]](#), 这些错误的详情可参看 www.feynmanlectures.info。

显然, 使《费曼物理学讲义》没有错误已成为全世界的共同事业。我代表加州理工学院感谢2005年以来作了贡献的50位读者以及更多的在以后的年代里会作出贡献的读者。所有贡献者的名字都公示在 www.feynmanlectures.info/flp-errata.html 上。

几乎所有的错误都可分为三种类型: (i) 文字中的印刷错误; (ii) 公式和图表中的印刷和数学错误——符号错误, 错误的数字(例如, 应该是4的写成5), 缺失下标、求和符号、括号和方程式中一些项; (iii) 不正确的章节、表格和图的参见条目。这几种类型的错误虽然对成熟的物理学家来说并不特别严重, 但对于初识费曼的学生, 就可能造成困惑和混淆。

值得注意的是, 在我主持下改正的1 165处错误中只有不多几处我确实认为是真正物理上的错误。一个例子是第2卷, 5—9页上一句话, 现在是“.....接地 的封闭导体内部没有稳定的电荷分布不会在外部产生[电]场”(在以前的版本中漏掉了接地一词)。这一错误是好些读者曾向费曼指出过的, 其中包括威廉和玛丽学院(The College of William and Mary) 学生比尤拉·伊丽莎白·柯克斯(Beulah Elizabeth Cox), 她在一次考试中依据的是费曼的错误的段落。费曼在1975年给柯克斯女士的信中写道: “你的导师不给你分数是对的, 因为正像他用高斯定律证明的那样, 你的答案错了。在科学中你应当相信逻辑和

论据、仔细推理而不是权威。你也正确阅读和理解了书本。我犯了一个错误，所以书错了。当时我或许正想着一个接地的导电球体，或别的；使电荷在（导体球）内部各处运动而不影响外部的东西。我不能确定当时是怎样做的。但我错了。你由于信任我也错了。”^[5]

这一新千年版是怎样产生的

2005年11月到2006年7月之间，340个错误被提交到费曼讲义网站 www.feynmanlectures.info。值得注意的是，其中大多数来自鲁道夫·普法伊弗（Rudolf Pfeiffer）博士一个人：当时是奥地利维也纳大学的物理学博士后工作者。出版商艾迪生·卫斯利（Addison Wesley），改正了80处错误，但由于费用的缘故而没有改正更多的错误：由于书是用照相胶印法印刷的，用1960年代版本书页的照相图出版印刷。改正一个错误就要将整个页面重新排字并要保证不产生新的错误，书页要两个不同的人分别各排一页，然后由另外几个人比较和校读。——如果有几百个错误要改正，这确是一项花费巨大的工作。

戈特里勃、普法伊弗和拉尔夫·莱顿对此非常不满意，于是他们制定了一个计划，目的是便于改正所有错误，另一目的是做成电子书的《费曼物理学讲义》的加强电子版。2007年，他们将他们的计划向作为加州理工学院的代理人的我提出，我热心而又谨慎。当我知道了更多的细节，包括《加强电子版本》中一章的示范以后，我建议加州理工学院和戈特里勃、普法伊弗及莱顿合作来实现他们的计划。这个计划得到三位前后相继担任加州理工学院物理学、数学和天文学学部主任——汤姆·汤勃列罗（Tom Tomlrello）、安德鲁·兰格（Andrew Lange）和汤姆·索伊弗（Tom Saifer）——的支持；复杂的法律手续及

合同细节由加州理工学院的知识产权法律顾问亚当·柯奇伦（Adam Cochran）完成。《新千年版》的出版标示着该计划虽然很复杂但已成功地得到执行。尤其是：

普法伊弗和戈特里勃已将所有三卷《费曼物理学讲义》（以及来自费曼的课程并收入《费曼物理学讲义补编》的1 000多道习题）转换成 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 。《费曼物理学讲义》的图是在书的德文译者亨宁·海因策（Henning Heinze）的指导下，为用于德文版，在印度用现代的电子方法重画的。为了将海因策的插图的非独家使用于新千年英文版，戈特里勃和普法伊弗购买了德文版〔奥尔登博（Oldenbourg）出版〕的 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 方程式的非独家的使用权，普法伊弗和戈特里勃不厌其烦地校对了所有 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 文本和方程式以及所有重画的插图，并必要时作了改正。纳特·博德和我代表加州理工学院对课文、方程式和图曾作过抽样调查，值得注意的是，我们没有发现错误。普法伊勃和戈特里勃是惊人的细心和精确。戈特里勃和普法伊弗为约翰·沙利文（John Sullivan）在亨丁顿实验室安排了将费曼在1962—1964年黑板照相数字化，以及乔治·布卢迪·奥迪欧（George Blood Audio）将讲课录音磁带数字化——从加州理工学院教授卡弗·米德（Carver Mead）获得财政资助和鼓励，从加州理工学院档案保管员谢利·欧文（Shelly Erwin）处得到后勤支持，并从柯奇伦处得到法律支持。

法律问题是很严肃的。20世纪60年代，加州理工学院特许艾迪生·卫斯利发表印刷版的权利，20世纪90年代，给予分发费曼讲课录音和各种电子版的权利。在21世纪初，由于先后取得这些特许证，印刷物的权利转让给了培生（Pearson）出版集团，而录音和电子版转让给珀修斯（Perseus）出版集团。柯奇伦在一位专长于出版的律师艾克·威廉

姆斯（Ike Williams）的协助下，成功将所有这些权利和珀修斯结合在一起，使这一新千年版成为可能。

鸣谢

我代表加州理工学院感谢这许多使这一新千年版成为可能的人们。特别是，我感谢上面提到的关键人物：拉尔夫·莱顿、迈克尔·戈特里勃、汤姆·汤勃列罗、迈克尔·哈特尔、鲁道夫·普法伊弗、亨宁·海因策、亚当·柯奇伦、卡弗·米德、纳特·博德、谢利·欧文、安德鲁·兰格、汤姆·索伊弗、艾克·威廉姆斯以及提交错误的50位人士（在 www.feynmanlectures.info 中列出）。我也要感谢米歇尔·费曼（Michelle Feynman）（理查德·费曼的女儿）始终不断的支持和建议，加州理工学院的艾伦·赖斯（Alan Rice）的幕后帮助和建议，斯蒂芬·普奇吉（Stephan Puchegger）和卡尔文·杰克逊（Calvin Jackson）给普法伊弗从《费曼物理学讲义》转为 L^AT_EX 的帮助和建议。迈克尔·菲格尔（Michael Figl）、曼弗雷德·斯莫利克（Manfred Smolik）和安德列斯·斯坦格尔（Andreas Stangl）关于改错的讨论，以及珀修斯的工作人员和（以前版本）艾迪生·卫斯利的工作人员。

基普·S·索恩（Kip S. Thorne）

荣休费曼理论物理教授

加州理工学院

2010年10月

[1] 原文“What would have given Feynman great pleasure”是虚拟式的句子，中文没有相当于英语虚拟式的句法，所以加上括号内的句子。——译者注

[2] 费曼的讲课和这3本书的起源的说法请参阅这3本书每一本都有的《费曼自序》和《前言》，也可参看《费曼物理学讲义补编》中马修·桑兹的回忆以及1989年戴维·古德斯坦（David Goodstein）和格里·诺格鲍尔（Gerry Neugebauer）撰写的《费曼物理学讲义纪念版》特刊前言，它也刊载在2005年限定版中。

[3] 1975年，他开始审核第3卷中的错误，但被其他事情所分心，因而没有完成这项工作，所以没有作出勘误。

[4] 原版如此。——译者注

[5] 《与习俗完全合理的背离，理查德·P·费曼的信件》288～289页，米歇尔·费曼（Michelle Feynman）编，Basic Books，纽约，2005。

费曼自序



这是我前年与去年在加利福尼亚理工学院对一二年级学生讲授物理学的讲义。当然，这本讲义并不是课堂讲授的逐字逐句记录，而是已经经过了编辑加工，有的地方多一些，有的地方少一些。我们的课堂讲授只是整个课程的一部分。全班180个学生每周两次聚集在大教室里听课，然后分成15到20人的小组在助教辅导下进行复习巩固。此外，每周还有一次实验课。

在这些讲授中，我们想要抓住的特殊问题是，要使充满热情而又相当聪明的中学毕业生进入加利福尼亚理工学院后仍旧保持他们的兴趣。他们在进入学院前就听说过不少关于物理学是如何有趣以及如何引人入胜——相对论、量子力学以及其他的新概念。但是，一旦他们学完两年我们以前的那种课程后，许多人就泄气了，因为教给他们意义重大、新颖的现代的物理概念实在太少。他们被安排去学习像斜面、静电学以及诸如此类的内容，两年过去，没什么收获。问题在于，我们是否有可能设置一门课程能够顾全那些比较优秀的、兴致勃勃的学生，使其保持求知热情。

我们所讲授的课程丝毫也不意味着是一门概况性的课程，而是极其严肃的。我想这些课程是对班级中最聪明的学生而讲的，并且可以肯定，这可能是对的，甚至最聪明的学生也无法完全消化讲课中的所有内容——其中加入了除主要讨论的内容之外的有关思想和概念多方面应用的建议。不过，为了这个缘故，我力图使所有的陈述尽可能准确，并在每种场合都指明有关的方程式和概念在物理学的主体中占有什么地位，以及——随着他们学习深入——应怎样作出修正。我还感到，重要的是要向这样的学生指出，他们应能理解——如果他们够聪明的话——哪些是从已学过的内容中推演出来的，哪些是作为新的概念而引进的。当出现新的概念时，假若这些概念是可推演的，我就尽量把它们推演出来，否则就直接说明这是一个新的概念，它根本不能用已学过的东西来阐明，也不可能予以证明，而是直接引进的。

在讲授开始时，我假定学生们在中学已学过一些内容，如几何光学、简单的化学概念，等等。我也看不出有任何理由要按一定的次序来讲授。就是说没有详细讨论某些内容之前，不可以提到这些内容。在讲授中，有许多当时还没有充分讨论过的内容出现。这些内容比较

完整的讨论要到以后学生的预备知识更齐全时再进行。电感和能级的概念就是例子，起先，只是以非常定性的方式引入这些概念，后来再进行较全面的讨论。

在针对那些较积极的学生的同时，我也要照顾到另一些学生，对他们来说，这些外加的五彩缤纷的内容和不重要的应用只会使其感到头痛，也根本不能要求他们掌握讲授中的大部分内容。对这些学生而言，我要求他们至少能学到中心内容或材料的脉络。即使他不理解一堂课中的所有内容，我希望他也不要紧张不安。我并不要求他理解所有的内容，只要求他理解核心的和最确切的面貌。当然，对他来说也应当具有一定的理解能力，来领会哪些是主要定理和主要概念，哪些则是更高深的枝节问题和应用，这些要过几年他才会理解。

在讲课过程中有一个严重困难：在课程的讲授过程中一点也没有学生给教师的反馈来指示讲授的效果究竟如何。这的确是一个很严重的困难，我不知道讲课的实际效果的好坏。整个事件实质上是一种实验。假如要再讲一次的话，我将不会按同样的方式去讲——我希望我不会再来一次！然而，我想就物理内容来说，第一年的情形看来还是十分满意的。

但在第二年，我就不那么满意了。课程的第一部分涉及电学和磁学，我想不出什么真正独特的或不同的处理方法，也想不出什么比通常的讲授方式格外引人入胜的方法。因此在讲授电磁学时，我并不认为自己做了很多事情。在第二年末，我原来打算在电磁学后再多讲一些物性方面的内容，主要讨论这样一些内容如基本模式、扩散方程的解、振动系统、正交函数等等，并且阐述通常称为“数学物理方法”的初等部分内容。回顾起来，我想假如再讲一次的话，我会回到原来的

想法上去，但由于没有要我再讲这些课程的打算，有人就建议介绍一些量子力学——就是你们将在第3卷中见到的——或许是有益的。

显然，主修物理学的学生们可以等到第三年学量子力学。但是，另一方面，有一种说法认为许多听我们课的学生是把学习物理作为他们对其他领域的主要兴趣的背景；而通常处理量子力学的方式对大多数学生来说这些内容几乎是无用的，因为他们必须花费相当长的时间来学习它。然而，在量子力学的实际应用中——特别是较复杂的应用中，如电机工程和化学领域内——微分方程处理方法的全部工具实际上是用不到的。所以，我试图这样来描述量子力学的原理，即不要求学生首先掌握有关偏微分方程的数学。我想，即使对一个物理学家来说，我想试着这样做——按照这种颠倒的方式来介绍量子力学——是一件有趣的事，由于种种理由，这从讲课本身或许会明白。不过我认为，在量子力学方面的尝试不是很成功，这主要是因为在最后我实际上已没有足够的时间（例如，我应该再多讲三四次来比较完整地讨论能带、概率幅的空间的依赖关系等这类问题）。而且，我过去从未以这种方式讲授过这部分课程，因此缺乏来自学生的反馈就尤其严重了。我现在相信，还是应当迟一些讲授量子力学。或许有一天我会有机会再来讲授这部分内容，到那时我将会讲好它。

在这本讲义中没有列入有关解题的内容，这是因为另有辅导课。虽然在第一年中，我的确讲授过三次关于怎样解题的内容，但没有将它们收在这里。此外，还讲过一次惯性导航，应该在转动系统后面，遗憾的是在这里也略去了。第五讲和第六讲实际上是桑兹讲授的，那时我正外出。

当然，问题在于我们这个尝试的效果究竟如何。我个人的看法是悲观的，虽然与学生接触的大部分教师似乎并不都有这种看法。我并

不认为自己在对待学生方面做得很出色。当我看到大多数学生在考试中采取的处理问题的方法时，我认为这种方式是失败了。当然，朋友们提醒我，也有一二十个学生——非常出人意外地——几乎理解讲授的全部内容，并且非常积极地攻读有关材料，兴奋地、感兴趣地钻研许多问题。我相信，这些学生现在已具备了一流的物理基础，他们毕竟是我想要培养的学生。但是，“教育之力量鲜见成效，除非施之于天资敏悟者，然若此又实为多余。”[吉本（Gibbon）^[1]]

但是，我并不想使任何一个学生完全落在后面，或许我曾经这样做的。我想，我们能够更好地帮助学生的一个办法是，多花一些精力去编纂一套能够阐明讲课中的某些概念的习题。习题能够充实课堂讲授，使讲过的概念更加实际，更加完整和更加易于牢记。

然而，我认为要解决这个教育问题就要认识到最佳的教学只有当学生和优秀的教师之间建立起个人的直接关系，在这种情况下，学生可以讨论概念、考虑问题、谈论问题，除此之外，别无他法。仅仅坐在课堂里听课或者只做指定的习题是不可能学到许多东西的。但是，现在我们有这么多学生要教育，因此我们必须尽量找出一种代替理想情况的办法。或许，我的讲义可以作出一些贡献；也许在某些小地方有个别教师和学生会从讲义中受到一些启示或获得某些观念，当他们彻底思考讲授内容，或者进一步发展其中的一些想法时，他们或许会得到乐趣。

理查德·费曼

1963年6月

[1] Edward Gibbon（1737—1794），英国历史学家。——译者注

前言

本书是根据R.P.费曼教授在加利福尼亚理工学院1961—1962学年所讲物理学导论课编写的，它包括全校一二年级学生念的两年导论课的第一年的内容，在1962—1963学年还继续讲授了这门课程的第二年的内容。这些讲授构成四年来对导论课所作的根本性修改的主要部分。

课程要进行彻底的修改，不但是由于近数十年来物理学迅速发展的需要，而且还有鉴于高中数学课内容改进后，入校新生的数学能力有了稳步的提高。我们希望利用有利的条件，并且希望能在课程中介绍足够的现代题材，从而使这门课程能引起学生的注意和兴趣，并能体现出现代物理的状况。

在应当包括哪些内容以及怎样介绍这些内容方面，为了能形成各种想法，我们鼓励物理系的许多教师以提纲的形式对课程的修改提出意见。人们对其中的几种想法进行了详细的讨论和评述。大家几乎立即同意，认为仅仅换一本教科书或者重新写一本教科书，是不可能完成对这门课程的彻底修改的。新的课程应当以每周讲二三次的一系列讲授为中心，而随着课程的进展，相应的教材内容将作为其从属的工作而产生出来，在讲课的同时，也要安排适当的实验来配合讲授内容。据此提出了课程的初步轮廓。但大家也认识到，这是不完全的和试验性的，有待于实际承担讲授工作的人作出相当大的修改。

关于最后究竟以什么方式来实施这门课程，大家考虑过几种方案。这些方案大多类似，由 N 个人进行合作，均匀地分担责任，即每个人负责 $1/N$ 的材料，进行讲授，并使他这部分成文。然而，由于没有足够的教师，同时因为参加者的个性与哲学见解不同，很难保持一致的观点。因此这种方案看来难以实现。

桑兹教授令人鼓舞的想法是他领悟到，我们实际上所拥有的能力不只是可以建立一门新的、不同的物理课程，而且有可能创立一门完全独特的课程。他建议由费曼教授来准备和进行讲授，并用磁带录音。再将这些录音抄写出来并加以编辑，就成为新课程的教科书了。我们所采用的基本上就是这样的方案。

起先我们估计必要的编辑工作不会很多，大体上只是一些补充图画、核对标点、语法之类的事，完全可以由一两个研究生花部分时间去完成。遗憾的是我们很快就发现这种估计是不正确的。事实上，即使对题材不进行重新组织或修改（有时这是必要的），只是把逐字逐句的记录改写成可供阅读的形式，就需要相当多的编辑工作。而且，这不是一个技术编辑或一个研究生就能办得了的事，而是需要一位专业物理工作者对每次讲授的内容专心一致地花上10~20小时才行！

编辑任务的艰巨，再加上要尽快把材料发给学生，这就大大地限制了对材料所能作出的推敲润色工作。因此，我们只能指望完成一本初步的、但专业上保持正确的、立即可以使用的讲义，而不是一本可视为最终的或完备的讲义。由于本校学生急需的份数较多，同时还由于一些外校师生的鼓励和关心，我们决定不再等待进一步的大量修改——这样的工作也许不会再做——就将这些材料以这种初步的形式出版。我们对内容的完整，文体的流畅或组织的逻辑性都不抱幻想；事

实上，我们打算在最近的将来对课程作一些小的修改，并且希望它无论在形式上还是在内容上，都不要停滞不前。

除去构成课程核心部分的讲授外，还有必要向学生提供适当的练习来启发他们的经验和才智，以及提供适当的实验使他们在实验室中能与讲课内容有第一手的接触。这两方面都还没有像讲课内容那样成熟，但也都取得了相当大的进展。在讲授过程中已选编了一些习题，并已进行增补扩充以供下一年使用。然而，我们还不能认为，在应用讲课内容方面，这些习题已具有足够的深度和广度，从而可使学生充分发挥其才智。所以，我们将习题集单独出版，以便鼓励经常的修订。

内尔（H.V.Neher）教授为新课程设计了许多新实验。其中有几个实验利用了空气轴承所显示的极低摩擦，例如新的直线气槽，它可以对一维运动、碰撞和简谐振动作定量测量；利用空气支承、空气驱动的麦克斯韦陀螺可以研究加速转动，回转仪的进动和章动。预计发展新的供实验室用的实验这件事将会持续相当一段时间。

本书的修订计划是在莱顿（R.B.Leighton）、内尔和桑兹（M.Sands）教授指导下进行的。官方参与此计划的有来自物理、数学和天文部门的费曼、诺伊格鲍尔（G.Neugebauer）、萨顿（R.M.Sutton）、斯特布勒（H.P.Stabler）、斯特朗（F.Strong）和沃格特（R.Vogt）教授，以及来自工程科学部门的考伊（T.Caughey）、普莱西特（M.Plesset）和威尔茨（C.H.Wilts）教授。深深感谢所有为本书修订计划作出贡献的极有价值的帮助。我们还要特别感谢福特基金会（Ford Foundation）的资助，没有他们的经济资助，本计划是不可能顺利完成的。

R. B. 莱顿

1963年7月

目 录

[译者序](#)

[关于费曼](#)

[新千年版前言](#)

[费曼自序](#)

[前言](#)

[第1章 原子的运动](#)

[§1-1 引言](#)

[§1-2 物质是原子构成的](#)

[§1-3 原子过程](#)

[§1-4 化学反应](#)

[第2章 基本物理](#)

[§2-1 引言](#)

[§2-2 1920年以前的物理学](#)

[§2-3 量子物理学](#)

[§2-4 原子核与粒子](#)

[第3章 物理学与其他科学的关系](#)

[§3-1 引言](#)

[§3-2 化学](#)

[§3-3 生物学](#)

[§3-4 天文学](#)

[§3-5 地质学](#)

[§3-6 心理学](#)

[§3-7 情况何以会如此](#)

第4章 能量守恒

§4-1 什么是能量

§4-2 重力势能

§4-3 动能

§4-4 能量的其他形式

第5章 时间与距离

§5-1 运动

§5-2 时间

§5-3 短的时间

§5-4 长的时间

§5-5 时间的单位和标准

§5-6 长的距离

§5-7 短的距离

第6章 概率

§6-1 机会和可能性

§6-2 涨落

§6-3 无规行走

§6-4 概率分布

§6-5 不确定性原理

第7章 万有引力理论

§7-1 行星运动

§7-2 开普勒定律

§7-3 动力学的发展

§7-4 牛顿引力定律

§7-5 万有引力

§7-6 卡文迪什实验

§7-7 什么是引力

§7-8 引力与相对论

第8章 运动

§8-1 运动的描述

§8-2 速率

§8-3 速率作为导数

§8-4 距离作为积分

§8-5 加速度

第9章 牛顿的动力学定律

§9-1 动量和力

§9-2 速率与速度

§9-3 速度、加速度以及力的分量

§9-4 什么是力

§9-5 动力学方程的含义

§9-6 方程的数值解

§9-7 行星运动

第10章 动量守恒

§10-1 牛顿第三定律

§10-2 动量守恒

§10-3 动量是守恒的

§10-4 动量和能量

§10-5 相对论性动量

第11章 矢量

§11-1 物理学中的对称性

§11-2 平移

§11-3 转动

§11-4 矢量

§11-5 矢量代数

[§11-6 牛顿定律的矢量表示法](#)

[§11-7 矢量的标积](#)

[第12章 力的特性](#)

[§12-1 什么是力](#)

[§12-2 摩擦力](#)

[§12-3 分子力](#)

[§12-4 基本力、场](#)

[§12-5 膺力](#)

[§12-6 核力](#)

[第13章 功与势能（上）](#)

[§13-1 落体的能量](#)

[§13-2 万有引力所做的功](#)

[§13-3 能量的求和](#)

[§13-4 巨大物体的引力场](#)

[第14章 功与势能（下）](#)

[§14-1 功](#)

[§14-2 约束运动](#)

[§14-3 保守力](#)

[§14-4 非保守力](#)

[§14-5 势与场](#)

[第15章 狭义相对论](#)

[§15-1 相对性原理](#)

[§15-2 洛伦兹变换](#)

[§15-3 迈克耳逊-莫雷实验](#)

[§15-4 时间的变换](#)

[§15-5 洛伦兹收缩](#)

[§15-6 同时性](#)

[§15-7 四维矢量](#)

[§15-8 相对论动力学](#)

[§15-9 质能相当性](#)

[第16章 相对论中的能量与动量](#)

[§16-1 相对论与哲学家](#)

[§16-2 孪生子佯谬](#)

[§16-3 速度的变换](#)

[§16-4 相对论性质量](#)

[§16-5 相对论性能量](#)

[第17章 时空](#)

[§17-1 时空几何学](#)

[§17-2 时空间隔](#)

[§17-3 过去，现在和将来](#)

[§17-4 四维矢量的进一步讨论](#)

[§17-5 四维矢量代数](#)

[第18章 二维空间中的转动](#)

[§18-1 质心](#)

[§18-2 刚体的转动](#)

[§18-3 角动量](#)

[§18-4 角动量守恒](#)

[第19章 质心、转动惯量](#)

[§19-1 质心的性质](#)

[§19-2 质心位置的确定](#)

[§19-3 转动惯量的求法](#)

[§19-4 转动动能](#)

[第20章 空间转动](#)

[§20-1 三维空间中的转矩](#)

[§20-2 用叉积表示的转动方程式](#)

[§20-3 回转仪](#)

[§20-4 固体的角动量](#)

[第21章 谐振子](#)

[§21-1 线性微分方程](#)

[§21-2 谐振子](#)

[§21-3 简谐运动和圆周运动](#)

[§21-4 初始条件](#)

[§21-5 受迫振动](#)

[第22章 代数学](#)

[§22-1 加法和乘法](#)

[§22-2 逆运算](#)

[§22-3 抽象和推广](#)

[§22-4 无理数的近似计算](#)

[§22-5 复数](#)

[§22-6 虚指数](#)

[第23章 共振](#)

[§23-1 复数和简谐运动](#)

[§23-2 有阻尼的受迫振子](#)

[§23-3 电共振](#)

[§23-4 自然界中的共振现象](#)

[第24章 瞬变态](#)

[§24-1 振子的能量](#)

[§24-2 阻尼振动](#)

[§24-3 电瞬变态](#)

[第25章 线性系统及其综述](#)

[§25-1 线性微分方程](#)

[§25-2 解的叠加](#)

[§25-3 线性系统中的振动](#)

[§25-4 物理学中的类比](#)

[§25-5 串联和并联阻抗](#)

[第26章 光学：最短时间原理](#)

[§26-1 光](#)

[§26-2 反射与折射](#)

[§26-3 费马最短时间原理](#)

[§26-4 费马原理的应用](#)

[§26-5 费马原理的更精确表述](#)

[§26-6 最短时间原理是怎样起作用的](#)

[第27章 几何光学](#)

[§27-1 引言](#)

[§27-2 球面的焦距](#)

[§27-3 透镜的焦距](#)

[§27-4 放大率](#)

[§27-5 透镜组](#)

[§27-6 像差](#)

[§27-7 分辨本领](#)

[第28章 电磁辐射](#)

[§28-1 电磁学](#)

[§28-2 辐射](#)

[§28-3 偶极辐射子](#)

[§28-4 干涉](#)

[第29章 干涉](#)

[§29-1 电磁波](#)

[§29-2 辐射的能量](#)

[§29-3 正弦波](#)

[§29-4 两个偶极辐射子](#)

[§29-5 干涉的数学](#)

[第30章 衍射](#)

[§30-1 \$n\$ 个相同振子的合振幅](#)

[§30-2 衍射光栅](#)

[§30-3 光栅的分辨本领](#)

[§30-4 抛物形天线](#)

[§30-5 彩色薄膜、晶体](#)

[§30-6 不透明屏的衍射](#)

[§30-7 振荡电荷组成的平面所产生的场](#)

[第31章 折射率的起源](#)

[§31-1 折射率](#)

[§31-2 物质引起的场](#)

[§31-3 色散](#)

[§31-4 吸收](#)

[§31-5 电波所携带的能量](#)

[§31-6 屏的衍射](#)

[第32章 辐射阻尼、光的散射](#)

[§32-1 辐射电阻](#)

[§32-2 能量辐射率](#)

[§32-3 辐射阻尼](#)

[§32-4 独立的辐射源](#)

[§32-5 光的散射](#)

[第33章 偏振](#)

[§33-1 光的电矢量](#)

[§33-2 散射光的偏振性](#)

[§33-3 双折射](#)

[§33-4 起偏振器](#)

[§33-5 旋光性](#)

[§33-6 反射光的强度](#)

[§33-7 反常折射](#)

[第34章 辐射中的相对论性效应](#)

[§34-1 运动辐射源](#)

[§34-2 求“表观”运动](#)

[§34-3 同步辐射](#)

[§34-4 宇宙中的同步辐射](#)

[§34-5 韧致辐射](#)

[§34-6 多普勒效应](#)

[§34-7 \$\omega\$, \$k\$ 四元矢量](#)

[§34-8 光行差](#)

[§34-9 光的动量](#)

[第35章 色视觉](#)

[§35-1 人眼](#)

[§35-2 颜色依赖于光的强度](#)

[§35-3 色感觉的测量](#)

[§35-4 色品图](#)

[§35-5 色视觉的机制](#)

[§35-6 色视觉的生理化学](#)

[第36章 视觉的机制](#)

[§36-1 颜色的感觉](#)

[§36-2 眼睛的生理学](#)

[§36-3 视杆细胞](#)

[§36-4 \(昆虫的\) 复眼](#)

[§36-5 其他的眼睛](#)

[§36-6 视觉的神经学](#)

[第37章 量子行为](#)

[§37-1 原子力学](#)

[§37-2 子弹实验](#)

[§37-3 波的实验](#)

[§37-4 电子的实验](#)

[§37-5 电子波的干涉](#)

[§37-6 追踪电子](#)

[§37-7 量子力学的基本原理](#)

[§37-8 不确定性原理](#)

[第38章 波动观点与粒子观点的关系](#)

[§38-1 概率波幅](#)

[§38-2 位置与动量的测量](#)

[§38-3 晶体衍射](#)

[§38-4 原子的大小](#)

[§38-5 能级](#)

[§38-6 哲学含义](#)

[第39章 气体分子动理论](#)

[§39-1 物质的性质](#)

[§39-2 气体的压强](#)

[§39-3 辐射的压缩性](#)

[§39-4 温度和动能](#)

[§39-5 理想气体定律](#)

[第40章 统计力学原理](#)

[§40-1 大气的指数变化律](#)

[§40-2 玻尔兹曼定律](#)

[§40-3 液体的蒸发](#)

[§40-4 分子的速率分布](#)

[§40-5 气体比热](#)

[§40-6 经典物理的失败](#)

[第41章 布朗运动](#)

[§41-1 能量均分](#)

[§41-2 辐射的热平衡](#)

[§41-3 能量均分与量子振子](#)

[§41-4 无规行走](#)

[第42章 分子动理论的应用](#)

[§42-1 蒸发](#)

[§42-2 热离子发射](#)

[§42-3 热电离](#)

[§42-4 化学动力学](#)

[§42-5 爱因斯坦辐射律](#)

[第43章 扩散](#)

[§43-1 分子间的碰撞](#)

[§43-2 平均自由程](#)

[§43-3 漂移速率](#)

[§43-4 离子电导率](#)

[§43-5 分子扩散](#)

[§43-6 热导率](#)

[第44章 热力学定律](#)

[§44-1 热机、第一定律](#)

[§44-2 第二定律](#)

[§44-3 可逆机](#)

[§44-4 理想热机的效率](#)

[§44-5 热力学温度](#)

[§44-6 熵](#)

[第45章 热力学示例](#)

[§45-1 内能](#)

[§45-2 应用](#)

[§45-3 克劳修斯-克拉珀龙方程](#)

[第46章 棘轮和掣爪](#)

[§46-1 棘轮是怎样工作的](#)

[§46-2 作为热机的棘轮](#)

[§46-3 力学中的可逆性](#)

[§46-4 不可逆性](#)

[§46-5 序与熵](#)

[第47章 声、波动方程](#)

[§47-1 波](#)

[§47-2 声的传播](#)

[§47-3 波动方程](#)

[§47-4 波动方程的解](#)

[§47-5 声速](#)

[第48章 拍](#)

[§48-1 两列波的相加](#)

[§48-2 拍符和调制](#)

[§48-3 旁频带](#)

[§48-4 定域波列](#)

[§48-5 粒子的概率幅](#)

[§48-6 三维空间的波](#)

[§48-7 简正模式](#)

[第49章 波模](#)

[§49-1 波的反射](#)

[§49-2 具有固有频率的约束波](#)

[§49-3 二维波模](#)

[§49-4 耦合摆](#)

[§49-5 线性系统](#)

[第50章 谐波](#)

[§50-1 乐音](#)

[§50-2 傅里叶级数](#)

[§50-3 音色与谐和](#)

[§50-4 傅里叶系数](#)

[§50-5 能量定理](#)

[§50-6 非线性响应](#)

[第51章 波](#)

[§51-1 肱波](#)

[§51-2 冲击波](#)

[§51-3 固体中的波](#)

[§51-4 表面波](#)

[第52章 物理定律的对称性](#)

[§52-1 对称操作](#)

[§52-2 空间与时间的对称性](#)

[§52-3 对称性与守恒定律](#)

[§52-4 镜面反射](#)

[§52-5 极矢量与轴矢量](#)

[§52-6 哪一只右手](#)

[§52-7 宇称不守恒](#)

[§52-8 反物质](#)

[§52-9 对称破缺](#)

[索引](#)

[附录](#)

[返回总目录](#)

第1章 原子的运动

§1-1 引言

这是一门两学年的物理课程，我们开设这门课程的着眼点是你们，有志成为物理学家的读者们。当然，情况并非一定如此，但是每门学科的教授都是这样设想的！假如你打算成为一名物理学家，就要学习很多东西，因为这是一个200年以来空前蓬勃发展的知识领域。事实上，你会想到，这么多的知识是不可能在四年内学完的，确实不可能，你们还得到研究生院去继续学习。

相当出人意料的是，尽管在这么长时间中做了极其大量的工作，但却有可能把这一大堆成果大大地加以浓缩。这就是说，找到一些概括我们所有知识的定律。不过，即使如此，掌握这些定律也是颇为困难的。因此，在你对科学的这部分与那部分题材之间的关系还没有一个大致的了解之前就让你去钻研这个庞大的课题的话，那就不公平了。根据这一思路，前三章将略述物理学与其他科学的关系、各门学科之间的相互联系以及科学的含义，这有助于你们对本学科产生一种切身的感受。

你们可能会问，在讲授欧几里得几何时，先是陈述公理，然后作出各种各样的推论，那为什么在讲授物理学时不能先直截了当地列出基本定律，然后再就一切可能的情况说明定律的应用呢？（这样一来，如果你不满足于要花四年时间来学习物理，那你是否打算在四分

钟内学完它？）我们不能这样做是基于两个理由。第一，我们还不知道所有的基本定律：未知领域的边界在不断地扩展；第二，正确地叙述物理定律要涉及一些非常陌生的概念，而叙述这些概念又要用到高等数学。因此，即使为了知道词的含义，也需要大量的预备性的训练。的确，那样做是行不通的，我们只能一步一步地来。

大自然整体的每一部分始终只不过是对于整个真理——或者说，对于我们至今所了解的整个真理——的逼近。实际上，人们知道的每件事都只是某种近似，因为我们懂得，到目前为止，我们确实还不知道所有的定律。因此，我们学习一些东西，正是为了要重新忘掉它们，或者更确切地说是为了改正以前对它们的谬见。

科学的原则——或者简直可称为科学的定义为：实验是一切知识的试金石。实验是科学“真理”的唯一鉴定者。但什么是知识的源泉呢？那些要检验的定律又是从何而来的呢？从某种意义上说，实验为我们提供了种种线索，因此可以说是实验本身促成了这些定律的产生。但是，要从这些线索中作出重大的判断，还需要有丰富的想象力去对蕴藏在所有这些线索后面的令人惊讶、简单而又非常奇特的图像进行猜测，然后再用实验来验证我们的猜测究竟对不对。这个想象过程是很艰难的，因此在物理学中有所分工：理论物理学家进行想象、推演和猜测新的定律，但并不做实验；而实验物理学家则进行实验、想象、推演和猜测。

我们说过，大自然的定律是近似的：起先我们找到的是“错”的定律，然后才发现“对”的定律。那么，一个实验怎么可能是“错误”的呢？首先，通常是：仪器上有些毛病，而你又没有注意。但是这种问题是容易确定的，可以通过反复检查。如果不去纠缠在这种次要的问题上，那么实验的结果怎么可能是错误的呢？这只可能是由于不够精

确罢了。例如，一个物体的质量似乎是从来不变的：转动的陀螺与静止的陀螺一样重。结果就发现了一条“定律”：质量是个常数，与速率无关。然而现在发现这条“定律”却是不正确的。质量实际上随着速度的增大而增加，但是要速度接近于光速，才会显著增加。正确的定律是：如果一个物体的速率小于100 mi/s，那么它的质量的变化不超过百万分之一。在这种近似形式下，这就是一条正确的定律。因此，人们可能认为新的定律实际上并没有什么有意义的差别。当然，这可以说对，也可以说不。对于一般的速率我们当然可以忘掉它，而用简单的质量守恒定律作为一种很好的近似。但是对于高速情况这就不正确了：速率越高，就越不正确。

最后，最有趣的是，就哲学上而言，使用近似的定律是完全错误的。纵然质量的变化只是一点点，我们的整个世界图景也得改变。这是有关在定律后面的哲学或基本观念的一件十分特殊的事。即使是极小的效应，有时在我们的观念上也会引起深刻的变化。

那么，我们应该首先教什么呢？是否应先教那些正确的、陌生的定律以及有关的奇特而困难的观念，例如相对论、四维时空等等之类？还是应先教简单的“质量守恒”定律，即那条虽然只是近似的，但并不包含那种困难的观念的定律？前一条定律比较引人入胜，比较奇特和比较有趣，但是后一条定律在开始时比较容易掌握，它是真正理解前一种观念的第一步。这个问题在物理教学中会一再出现，在不同的时候，我们将要用不同的方式去解决它。但是在每个阶段都值得去弄明白：我们现在所知道的是什么？它的正确性如何？它怎样适应其他各种事情？当我们进一步学习后它会有怎样的变化？

让我们按照我们所理解的当代科学（特别是物理学，但是也包括周围有关的其他科学）的轮廓继续讲下去，这当我们以后专门注意某

些特殊问题时，就会对于背景情况有所了解——为什么这些特殊问题是有趣的？它们又是怎样适应整体结构的？

那么，我们世界的总体图像是怎样的呢？

§1-2 物质是原子构成的

假如由于某种大灾难，所有的科学知识都丢失了，只有一句话可传给下一代，那么怎样才能用最少的词汇来传达最多的信息呢？我相信这句话是原子的假设（或者说原子的事实，无论你愿意怎样称呼都行）：所有的物体都是由原子构成的——这些原子是一些小小的粒子，它们一直不停地运动着，当彼此略微离开时相互吸引，当彼此过于挤紧时又互相排斥。只要稍微想一下，你就会发现，在这一句话中包含了大量的有关这个世界的信息。

为了说明原子观念的重要作用，假设有一滴直径为 $1/4$ in的水珠，即使我们非常贴近地观察，也只能见到光滑的、连续的水，而没有任何其他东西，并且即使我们用最好的光学显微镜（大致可放大2000倍）把这滴水放大到40 ft左右（相当于一个大房间那样大），然后再靠得相当近地去观察，我们所看到的仍然是比较光滑的水，不过到处有一些足球状的东西在来回游动，非常有趣。这些东西是草履虫。你们可能就到此为止，对草履虫以及它的摆动的纤毛和卷曲的身体感到十分好奇。也许除了把草履虫放得更大一些，看看它的内部外，就不再进一步观察了。当然这是生物学的课题，但是现在让我们继续观察下去，再次把水放大2 000倍，更近地观察水这种物质本身。这时，水滴已放大到有15 mi那样大了，如果你再十分贴近地观察，你将看到水中充满了某种不再具有光滑外表的东西，而是有些像从远处看过去挤

在足球场上的人群。为了能看出挤满的究竟是些什么东西，我们再把它放大250倍后就会看到某种类似于图1-1所示的情景。这是放大了10亿倍的水的图像，但是在以下这几方面是理想化了的：首先，各种粒子用简单的方式画成有明显的边缘，这是不精确的；其次，为了简便起见，把它们都画成二维的排列，实际上它们当然是在三维空间中运动的。注意在图中有两类“斑点”或圆，它们各表示氧原子（黑色）和氢原子（白色），而每个氧原子有两个氢原子和它连接在一起（一个氧原子与两个氢原子组成的一个小组称为一个分子）。图像中还有一个被理想化的地方是自然界中的真实粒子总是在不停地摇晃跳动，彼此绕来绕去地转着，因而你必须把这幅画面想象成能动的而不是静止的。还有一件不能在图上说明的事实是粒子会“粘在一起”的，它们彼此吸引着，这个被那个拉住等等，可以说，整个一群“胶合在一起”。但同时，这些粒子也不是挤到一块儿，如果你把两个粒子挤得太紧，它们就互相排斥。

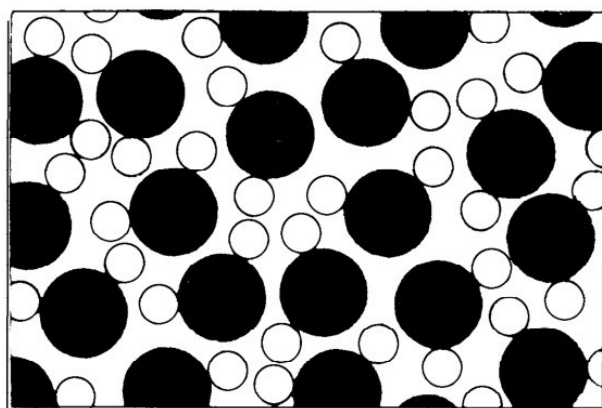


图1-1 放大10亿倍的水

原子的半径为 $1 \times 10^{-8} \sim 2 \times 10^{-8} \text{ cm}$ ， 10^{-8} cm 现在称为1 Å（这只是另一个名称），所以我们说原子的半径为1~2Å。另一个记住原子大小的方法是这样的：如果把苹果放大到地球那样大，那么苹果中的原子就差不多有原来的苹果那样大。

现在，想象这个大水滴是由所有这些跳动着的粒子一个挨一个地“粘合”起来的，水能保持一定的体积而并不散开，因为它的分子彼此吸引。如果水滴在一个斜面上，它能从一个位置移动到另一个位置。水会流动，但是并不会消失——它们并没有飞逝，因为分子之间有吸引力。这种跳动就是我们所说的热运动。当温度升高时，这种运动就增强了。如果我们加热水滴，跳动就增加，原子之间的空隙也增大。如果继续加热到分子间的引力不足以将彼此拉住时，它们就分开来飞散了。当然，这正是我们从水制取水蒸气的方法——提高温度。粒子由于运动的增强而飞散。

图1-2是一幅水蒸气的图像。这张水蒸气图像有一个不足之处：在通常的气压下这样一张图像区域中不可能有三个分子之多。在大多数情况下，这样大小的方块中可能连一个都不会有——不过碰巧在这张图中有两个半或三个分子（只有这样，图像才不会是完全空白的）。现在，比起水来，在水蒸气的情况下，我们可以更清楚地看到水所特有的分子。为了简单起见，将分子画成两个H原子之间具有 120° 的夹角。实际上，这个角是 $105^\circ 3'$ ，氢原子中心与氧原子中心之间的距离是 $0.957 \text{ \AA}$ 。这样，我们对这个分子了解得已很清楚了。

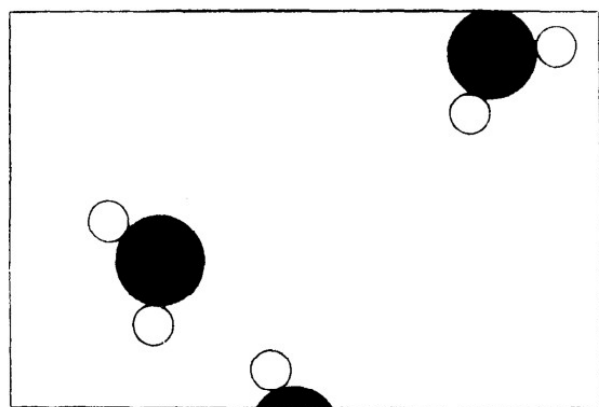


图1-2 水蒸气

让我们来看一下，水蒸气或任何其他气体具有一些什么性质。这些气体分子是彼此分离的，它们打在墙上时，会反弹回来。设想在一个房间里有一些网球（100个左右）不断地来回跳动，当它们打到墙上后，就将墙推离原位（当然，我们必须将墙推回去）。这意味着，气体施加一个“颤动”的力，而我们粗糙的感官（并没有被我们自己放大10亿倍）只感到一个平均的推力。为了把气体限制在一定的范围之内，我们必须施加一个压力。图1-3是一个盛气体的标准容器（所有教科书中都有这种图），一个配有活塞的汽缸，由于不论水分子的形状如何，情况都是一样，因此为简单起见，我们把它们画成网球形状或者小黑点，这些东西沿着所有的方向不停地运动着。由于有这么多的气体分子一直在撞击顶端的活塞，因此要使活塞不被这种不断的碰撞逐渐顶出来必须施加一定的力把活塞压下去，这个力称为压力（实际上，是压强乘以面积）。很清楚，这个力正比于面积，因为如果我们增大面积而保持每立方厘米内的分子数不变的话，那么分子与活塞碰撞次数增加的比例与面积增加的比例是相同的。

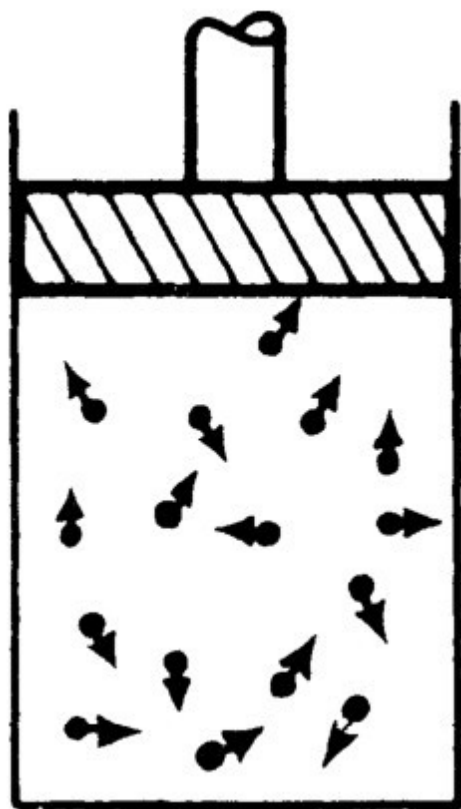


图 1-3

现在，让我们在这个容器内放入2倍的分子，以使密度增加1倍，同时让它们具有同样的速度，即相同的温度。那么，作为一种很好的近似，碰撞的次数也将增加1倍。由于每次碰撞仍然和先前那样“有力”，压力就正比于密度。如果我们考虑到原子之间的力的真实性质，那么由于原子之间的吸引，可以预期压力略有减少；而由于原子也占有有限的体积，则可以预期压力略有增加。无论如何，作为一个很好的近似，如果原子较少，密度足够低，那么，压力正比于密度。

我们还可以看一下其他情况。如果提高温度而不改变气体密度，即只增加原子的速率，那么在压力上会出现什么情况？当然，原子将撞击得更剧烈一些，因为它们运动得更快一些。此外，它们的碰撞更频繁了，因此压力将增加。你们看，原子理论的概念是多么简单！

我们来考虑另一种情况，假定活塞向下移动，原子就慢慢地被压缩在一个较小的空间里。当原子碰到运动着的活塞时，会发生什么情况呢？很显然，原子由于碰撞而提高了速率。例如，你可以试一下乒乓球从一个朝前运动的球拍弹回来时的情况，你会发现弹回的速率比打到球拍上的速率更大一些（一个特例是：如果一个原子恰好静止不动，那么在活塞碰上它以后，当然就运动了）。这样，原子在弹离活塞时比碰上去之前更“热”。因此所有容器中的分子的速率都提高了。这意味着，当我们缓慢压缩气体时，气体的温度会升高。结果，在缓慢压缩时，气体的温度将升高；而在缓慢膨胀时，气体的温度将降低。

现在回到我们的那滴水珠上去，从另一个角度去观察一下。假定现在降低水滴的温度，假定水的原子、分子的跳动逐渐减小。我们知道在原子之间存在着引力，因而过一会儿，它们就不能再跳得那么厉害了。图1-4表示在很低的温度下会出现什么样的情况。这时分子连接成一种新的图像，这就是冰。这个特殊的冰的图像不大正确，因为它只是二维的，但是它在定性上是正确的。有趣的一点是，对于每一个原子，都有它的确定位置。你们可以很容易地设想，如果我们用某种方式使冰粒一端的所有的原子按一定的方式排列，并让每个原子处在一定的位置上，那么由于互相连接的结构很牢固，几英里之外（在我们放大的比例下）的另一端也将有确定的位置。如果我们抓住一根冰棍的一端，另一端就会阻止我们把它拉出去。这种情况不像水那样由于跳动加强以致所有的原子以种种方式到处跑来跑去，因而结构也就被破坏了。固体与液体的差别就在于：在固体中，原子以某种称为晶体阵列的方式排列着，即使在较长的距离上它们的位置也不能杂乱无章。晶体一端的原子位置取决于晶体另一端的与之相距千百万个原子的排列位置。图1-4是一种虚构的冰的排列状况，它虽然包括了冰的许

多正确的特征，但并不是真实的排列情况。正确的特征之一是这里具有一种六边形的对称性。你们可以看到：如果把画面绕一根轴转动 60° 的话，它仍然回到原来的形状，因此，在冰里存在着一定的对称性，这说明为什么雪花具有六边形的外表。从图1-4中还可以看到为什么冰融解时会缩小。在这里列出的冰的晶体图样中有许多“孔”，真实的冰的结构也是如此，在排列打散后，这些孔就可以容纳分子。除了水和活字合金外，许多简单的物质在熔（融）化时都要膨胀，因为在固体的晶体结构中，原子是密集堆积的，而当熔化时，需要有更多的空间供原子活动，但是开放结构则会倒坍，体积反而收缩了，就像水的情况那样。

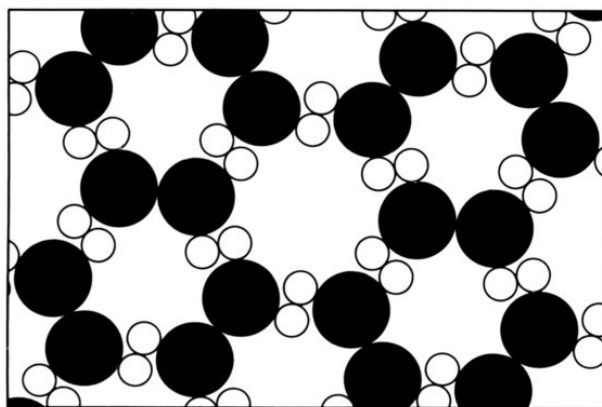


图 1-4 冰

虽然冰有一种“刚性的”结晶形态，它的温度也会变化——冰也储存热量，如果我们愿意的话，就可以改变热量的储存。对冰来说，这种热量指的是什么呢？冰的原子并不是静止不动的，它们不断地摇晃着、振动着，所以虽然晶体存在着一种确定的次序——一种确定的结构，所有的原子仍都“在适当的位置”上振动，当我们提高温度时，它们振动的幅度就越来越大，直到离开原来的位置为止。我们把这个过程称为熔解。当降低温度时，振动的幅度越来越小，直到绝对零度时原子仍能有最低限度的振动，而不是停止振动。原子所具有的这种最

低的振动不足以使物质熔解，只有一个例外，即氦。在温度降低时，氦原子的运动只是尽可能地减弱，但即使在绝对零度时也有足够的运动使之不至于凝固，除非把压力加得这样大，以致将原子都挤在一起。如果我们提高压力，也可以使它凝固。

§1-3 原子过程

关于从原子的观点来描写固体、液体和气体，我们就讲到这里。然而原子的假设也可以描写过程，所以我们现在从原子的观点来考察一些过程。我们要考察的第一个过程与水的表面有关。在水的表面有些什么情况呢？设想水的表面上是空气，现在我们来把图画得更复杂一些——也更实际一些，如图1-5所示。我们看到，水分子仍然像先前那样，组成大量的水，但现在还能看到水的表面。在水面上我们发现一些东西：首先，水面上有水的分子，这就是水的蒸汽，在水面上总是有水蒸气的。（在水蒸气与水之间存在着一种平衡，这种平衡我们以后再讲。）此外，我们还发现一些别的分子：这里是两个氧原子彼此结合在一起组成的一个氧分子，那里是两个氮原子结合在一起组成的一个氮分子。空气几乎完全是由氮气、氧气、水蒸气组成的，此外还有少量的二氧化碳、氩气和其他一些气体。所以在水面上的是含有一些水蒸气的气体。那么，在这种情况下会发生什么事呢？水里的分子不断地晃来晃去。有时，在水面上有个别分子碰巧受到比通常情况下更大的冲击而被“踢”出表面。因为图1-5是静止的画面，所以在图上难以看出所发生的事。但是我们可以想象表面附近的某一个分子刚好受到碰撞而飞了出去，或者也许另一个分子也受到碰撞而飞了出去。分子一个接着一个地跑了出去，水就消失了——蒸发了。但是如果把容器盖上，过了一会儿就会发现在空气分子中有大量的水分子。水蒸

气的分子不时地飞到水面，又回到水中。结果，我们看到那个看来死气沉沉的、无趣的事情——一杯盖好的可能已放了20年的水——实在包含了一直生气勃勃而有趣的现象。对我们这双肉眼而言，看不出有任何变化，但是如果能放大10亿倍来看的话，就能发现情况一直在变化：一些分子离开水面，另一些分子则回到了水面。

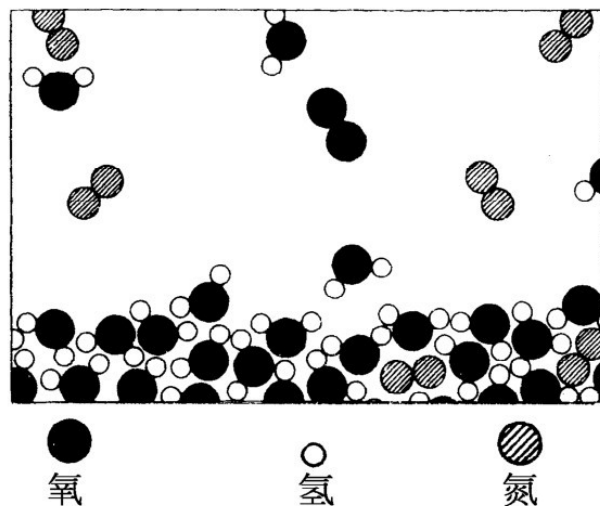


图1-5 空气中水的蒸发

为什么我们看不出变化呢？因为有多少分子离开水面就会有多少分子回到水面！归根到底“没有任何事情发生”。如果现在我们把容器盖打开，使潮湿的空气吹走而代之以干燥空气，那么离开水面的分子数还是如先前那样多，因为这只取决于水分子晃动的程度，但是回到水面的分子数则大大地减少了，因为在水面上的水分子数已极其稀少。因此逸出水面的分子比进入水面的分子多，水就蒸发了。所以，如果你要使水蒸发的话，就打开风扇吧！

这里还有另一件事情：哪些分子会离开？一个分子能离开水面是由于它偶然比通常情况稍微多积累了一些能量，这样才能使它摆脱邻近分子的吸引。结果，由于离开水面的分子带走的能量比平均能量

大，留在水中的分子的运动平均起来就比先前减弱。因此液体蒸发时会逐渐冷却。当然，当一个水蒸气分子从空气中跑向水面时，它一靠近水面就要突然受到一个很强的吸引。这就使它进入水中时具有更大的速度，结果就产生热量。所以当水分子离开水面时，它们带走了热量；而当它们回到水面时，则产生了热量。当然，如果不存在净的蒸发现象的话，什么结果也不会发生——水的温度并不改变。如果我们向水面上吹风，使蒸发的分子数一直占优势，水就会冷却。因此，要使汤冷却就得不不停地吹！

当然，你们应当了解，刚才所说的那个过程实际上要比我们所指出的更为复杂。不仅水分子进入空气，不时还有氧分子或氮分子跑到水里，“消失”在水分子团中，这样空气就溶解在水中；氧和氮的分子进入水中，水里就有了空气。如果我们突然抽走空气，那么空气分子出来的要比进去的来得快，这样就形成了气泡。你们可能知道，这对潜水员是很不利的。

现在我们来考虑另一种过程。在图1-6中，我们从原子的观点来看固体在水中溶解。如果我们把结晶盐粒丢入水中，会出现什么情况呢？食盐是一种固体，一种晶体，并且具有“食盐原子”的有规则的排列。图1-7是普通食盐——氯化钠的三维结构图。严格地说，这种晶体不是由原子而是由我们所谓的离子构成的！离子就是带有额外电子的原子，或失去一些电子的原子。在食盐晶体中我们发现了氯离子（带有一个额外电子的氯原子）和钠离子（失去一个电子的钠原子）。在固态食盐中，所有的离子都由于电的作用而吸引在一起。但是当我们把食盐投到水里后就会发现，由于带负电的氧和带正电的氢对离子的引力，有一些离子离散了。在图1-6中有一个氯离子松开来了，其他的原子则以离子的形式在水中浮动。这张图画得相当仔细。例如，注意

水分子中的氢原子一端大多靠近氯离子，而在钠离子周围所见到的大多是氧原子的那一端，因为钠是正的，而水的氧原子一端是负的，它们之间有电的吸引。我们能不能从这幅图画中看出盐究竟是溶解于水中，还是从水中结晶出来？当然，我们看不出来，因为当某些原子离开晶体时，另一些原子又重新聚集到晶体上。整个过程是一个动态过程，犹如蒸发的情况，它取决于水中的盐的含量是超过还是少于形成平衡所需要的数量。所谓平衡我们指的是这种情况，即原子离开晶体的比率正好与回到晶体的比率相同。假如在水中几乎没有什么盐，离开的原子就比回去的原子多，食盐就溶解。但反过来讲，如果水里的“食盐原子”太多，那么回去的就多于离开的，食盐就结晶。

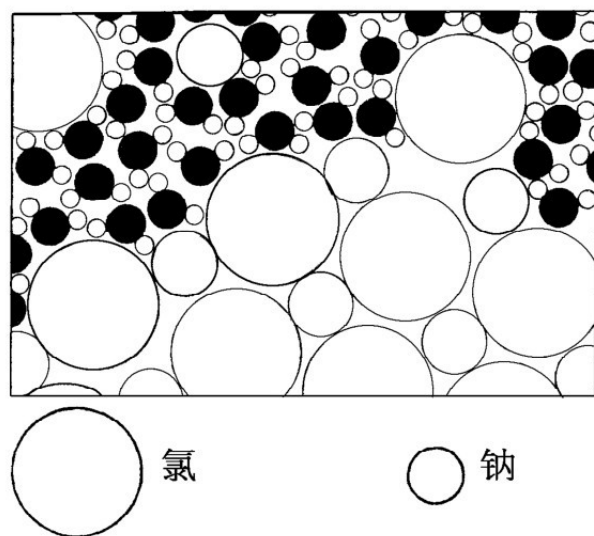


图1-6 盐在水中的溶解

晶体	●	○	$a(\text{\AA})$
岩盐	Na	Cl	5.64
钾钠盐	K	Cl	6.28
	Ag	Cl	5.54
方铅矿	Mg	O	4.20
	Pb	S	5.97
	Pb	Se	6.14
	Pb	Te	6.34

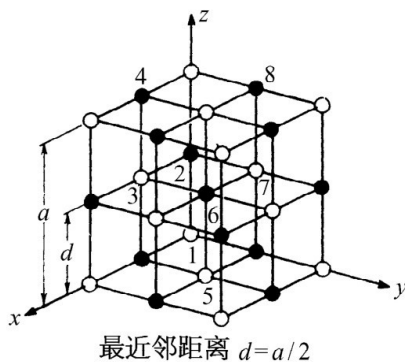


图 1-7

我们顺便说一下，物质的分子这个概念只是近似的，而且只是对某些种类的物质才有意义。很清楚，在水的情况下，三个原子彼此确实粘在一起。但是在固体的氯化钠情况下就不那么明确了。在氯化钠中钠离子和氯离子只是以立方体的形式排列。这里没有一种把它们自然分成“食盐分子”的方式。

现在回到我们的溶解与淀积的讨论上。如果增加食盐溶液的温度，那么原子离开的比率就会增加，而原子回来的比率也会增加。结果是一般很难预言会朝哪一个方向发展，固体溶解得多一些还是少一些。当温度提高时，大多数物质更易溶解，但是某些物质却更不易溶解。

§1-4 化学反应

到现在为止，在我们所描述的一切过程中，原子和离子的伙伴并没有变更，但是当然也有这种情况，原子的组合的确改变了，形成新的分子。图1-8就是说明这一情况的。在一个过程中如果原子的伙伴重新排列，我们就称之为化学反应。其他前面所描述的过程称为物理过程，但是两者之间并没有明显的界限（大自然并不关心我们究竟如何

去称呼，它只知道不断地进行工作）。图1-8表示碳在氧气中的燃烧。在氧气中，两个氧原子紧紧地吸引在一起（为什么不是三个甚至四个吸引在一起？这是此类原子过程的一个很典型的特征。原子是非常特别的：它们喜欢一定的伙伴，一定的方向，等等。物理学的任务就是要分析每一个原子为什么想要它所希望要的东西。无论如何，两个氧原子形成了一个饱和的、适宜的分子）。

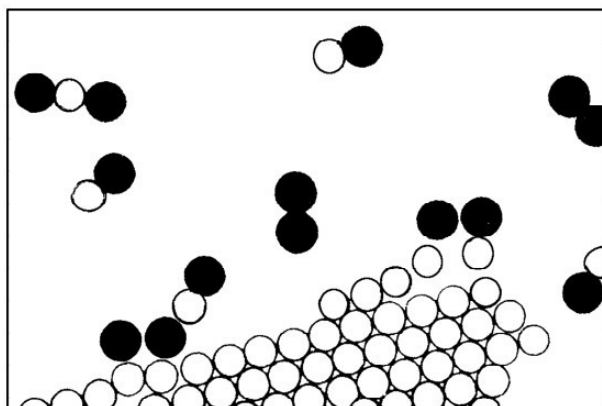


图1-8 碳在氧气中的燃烧

这些碳原子应该处于固态晶体之中（可以是石墨，也可以是金刚石^[1]）。现在，比如说有一个氧分子跑到碳这边来，每个氧原子可以抓住一个碳原子而以一种新的组合——“碳氧”——一起飞走，这就是所谓的一氧化碳气体分子，它的化学名称是CO。这种气体分子很简单：字母“CO”实际上就是这个分子的一个画像。但是碳吸引氧的能力比氧吸引氧或者碳吸引碳的能力更大。因此，在这个过程中氧原子可能在到达时只带有一点点能量，但是氧和碳的结合却是非常彻底而剧烈的，所有靠近它们的原子都吸收能量。于是就产生了大量的分子运动的能量——动能。当然，这就是燃烧。我们从氧和碳的结合得到了热量。这种热量通常是以热气体的分子运动的形式存在的，但是在某些情况下，由于热量非常大而发出了光。这就是产生火焰的过程。

此外，一氧化碳分子并不感到满足。它可能再缚住另一个氧原子，因此，可能出现远为复杂的反应：氧与碳会结合起来，同时偶尔又与一氧化碳分子碰撞。于是一个氧原子可能结合到一个一氧化碳分子上，最终形成另一个分子，它包含一个碳原子和两个氧原子，称为二氧化碳，并以 CO_2 表示。假如我们以很快的速度在很少的氧气中燃烧碳的话（例如，在汽车引擎中，爆炸是如此迅速，以致没有时间形成二氧化碳）就形成了大量的一氧化碳。在许多这种重新排列的过程中，大量的能量被释放出来，依反应条件的不同而形成爆炸、火焰等。化学家研究了这些原子的排列情况，发现每一种物质都是某种类型的原子的排列。

为了说明这个概念，我们来考虑另一个例子。如果我们走到一个紫罗兰花圃里去，我们知道那是一种什么香气。这是某种分子或者说原子排列钻进了我们的鼻子。首先，这种分子是怎样钻进来的呢？这很容易。假如香气是飘浮在空气中的某种分子，它们就会到处晃动，四面八方地撞来撞去，很可能偶尔钻进了我们的鼻子。可以肯定，分子并不想特别进入我们的嗅觉器官。在挤成一堆的分子中，大家都无目的地到处徘徊，而碰巧有一些分子却发现自己原来已到达人的鼻子中了。

现在，化学家可以取一些像紫罗兰香气这样特殊的分子进行分析，然后告诉我们原子在空间的精确排列。我们知道二氧化碳分子的结构是简单而对称的： $\text{O}-\text{C}-\text{O}$ （这也很容易用物理方法来确定）。然而，即使对化学中那些非常复杂的原子排列，人们也可以通过长期的、卓越的探索工作来查明其排列方式。图1-9是空气中紫罗兰香气图。我们再一次发现有氮、氧以及水蒸气（为什么这儿有水蒸气？因为紫罗兰是湿的。所有的植物都会蒸发水气）。然而，我们还看到一

个由碳原子、氧原子及氢原子组成的“怪物”，它也选择了一种特殊的排列形式。这种形式比二氧化碳的排列远为复杂，事实上，它是一种极为复杂的排列。遗憾的是，我们无法画出所有那些在化学上已确实知道的情况，因为所有的原子的精确排列都是三维的，而我们的画面只能是二维的。六个碳原子组成了一个环，但它不是扁平的，而是一种“皱褶”的环。环的所有角度和间距都已知道。所以一个化学式只是这样的分子的一个画像。当一位化学家把它写在黑板上时，粗略地说，他是在二维空间里“画”图。比如，我们见到六个碳原子组成的一个“环”，在一个端点还悬挂着一条碳“链”，链的第二个端点的碳上有一个氧原子，还有三个氢原子连在那个碳原子上，两个氢原子和三个碳原子竖在这儿，等等。

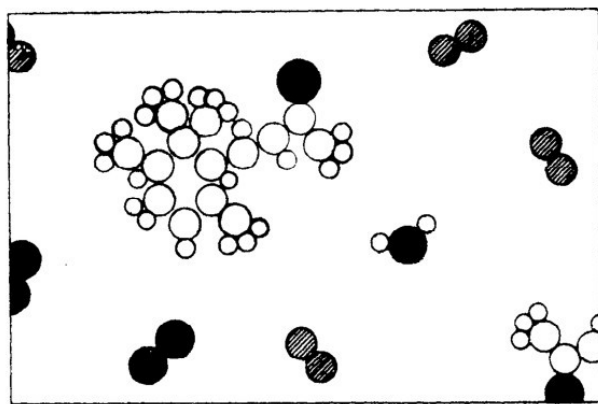


图1-9 空气中的紫罗兰香气分子

化学家是怎样发现这种排列的呢？他把几瓶东西混合起来，如果变红了，就说明，在某处有两个碳原子与一个氧原子联结在一起；如果变蓝了，就说明根本不是那么一回事。这是所做过的最奇妙的探索工作之一——有机化学。为了发现极其复杂的阵列中的原子排列，化学家观察两种不同的物质混合后究竟会发生什么事？当化学家描述原子的排列时，物理学家从来不怎么相信化学家了解他在谈论的是什么。大约在20年前就能在某些情况下用物理方法来研究这些分子的排

列（不完全像我们这个分子那样复杂，只包括了它的一部分），而且能通过测量而不是观察颜色来确定每个原子的位置，嗨！你瞧！化学家几乎总是正确的。

结果，实际上紫罗兰的香气里有三种略为不同的分子，其差别仅在于氢原子的排列不同。

化学的一个任务是给物质命名，从而使我们知道它是什么。给这种形状起个名字看看。这个名称不仅要表明形状，而且还要说出这里是一个氧原子，那里是一个氢原子——确切地说出每个原子的名称和位置。所以我们可以设想，为了全面起见，化学名称一定是十分复杂的。你们看！这个东西的比较完整的名称是4-（2，2，3，6-四甲基-5-环己烯基）-3-丁烯-2-酮，它告诉你这样东西的结构，还告诉你这就是它的排列方式。我们可以意识到化学家所遇到的困难，也懂得这样长的命名的理由。化学家们并不想把名称搞得这样晦涩难解，但在试图用词汇来描写分子时，他们却遇到了非常棘手的问题！

图1-10是 α -鸢尾酮香料的分子结构图。

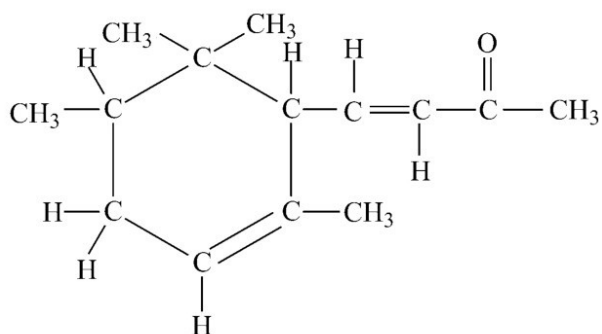


图1-10 紫罗兰香 α -鸢尾酮香料的分子结构图

我们怎么知道存在着原子呢？可以用上面提到过的一种技巧：我们假设存在着原子，而一个又一个的结果与我们的预言相符合，如果

事物真是由原子组成的话，它们就应当如此。此外，也多少有点更为直接的证据，下面就是一个很好的例子。由于原子是如此之小，你用光学显微镜观察不到它，事实上，即使用电子显微镜也不行（用光学显微镜，你们只能看到大得多的东西）。要是原子一直在运动，比如水中的原子，那么如果我们把某种较大的球放到水中去，这个比原子大得多的球就会晃来晃去——就像玩球时，一个很大的球被许多人打来打去一样。人们向各个方向推球，结果球在场地上作不规则的运动。同样，“大球”也将运动，因为它在各方面受到的碰撞不等，在各个时刻受到的碰撞也不等。因此，如果我们用很好的显微镜观察水中很小的粒子（胶粒），就能看到微粒在不停地跳动，这是原子碰撞的结果。这种运动称为布朗运动。

我们在晶体结构上也可看到进一步的证据。在许多情况下，由X射线分析推断出的结构在空间“形状”上与自然界中的晶体实际上显示出来的形状相符合。实际晶体的各个“面”之间的夹角，与从晶体是由多“层”原子构成的假设推断出来的角度之差在秒以下。

一切都由原子构成。这就是关键性的假设。例如，在整个生物学中最重要的假设是：动物所做的每件事都是原子做的。换句话说：没有一件生物所做的事不能从这些生物是用服从物理定律的运动原子组成的这个观点来加以理解。这在开始时并没有认识到：提出这种假设需要做一些实验与推理。但现在它已被接受了，它是在生物学领域内产生新观念的最有用的理论。

如果一块由一个挨一个的原子组成的钢或盐可以具有这种有趣的性质；如果水——它只不过是些小滴，地球上到处都有——可以形成波浪和泡沫，这些波浪冲向水泥堤岸时会产生冲击声和奇妙的浪花；如果一流细水永远只能是一堆原子，那么还会有什么呢？假设我们不

是把原子排成确定的样式，再三重复，不断反复，或者甚至形成像紫罗兰香气那样复杂的东西，而是制造出一种各处都不相同的排列：不同的原子以不同的方式配置，不断改变，从不重复，那么事情会变得更加不可思议吗？——那个在你面前走来走去与你攀谈的东西可能是一大群排列得非常复杂的原子吗？这个东西的彻底复杂性可能动摇你对它产生一些什么想象吗？当我们说，我们是一堆原子，这并不意味着我们只是一堆原子，当你站在镜子面前，你就能在镜子里看到，一堆并非简单地一个一个重复排列的原子所组成的东西将会具有何等丰富而生动的内容！

[1] 金刚石在空气中也可以燃烧。

第2章 基本物理

§2-1 引言

在本章中我们将考察有关物理学的最基本观念，即我们在目前所知道的事物的本性。这里将不去论及我们如何知道所有这些观念是正确的那个认识过程，你们在适当的时候会学习到这些具体的细节。

我们在科学上所关心的事物具有无数的形式和许多属性。举例来说，假如我们站在岸边眺望大海，将会看到：这里有海水、拍击的浪花、飞溅的泡沫以及汹涌的波浪，还有太阳、光线、蔚蓝的天空、白云以及空气的流动——风；在海边有沙粒，不同色纹和硬度的岩石；在海里浮游着生物，此生彼灭；最后，还有我们这些站在海岸边的观察者；甚至还有幸福和怀念。在自然界的其他场合，也同样出现种种纷繁复杂的事物和影响。无论在哪里，到处都是这样错综复杂和变化无穷。好奇心驱使我们提出问题，把事物联系起来，而将它们的种种表现理解为或许是由较少量的基本事物和相互作用以无穷多的方式组合后所产生的结果。

例如，沙粒和岩石是两回事吗？也许沙粒只不过是大量的细小石块？月亮是不是一块巨大的岩石呢？如果我们了解岩石，是否就能了解沙粒和月亮呢？风是否与海洋中的水流相类似，就是一种空气的流动？不同的运动有什么共同特征？不同的声音有什么相似之处？究竟有多少种颜色？等等。我们就是试图这样逐步分析所有的事情，把那

些乍看起来似乎不相同的东西联系起来，希望有可能减少不同类事物的数目，从而能更好地理解它们。

几百年以前，人们想出了一种部分解答这类问题的方法，那就是：观察、推理和实验，这些内容构成了通常所说的科学方法。在这里，我们将只限于对那些有时称为基础物理中的基本观点，或者在科学方法的应用中形成的基本概念作一描述。

现在我们要问：所谓“理解”某种事情指的是什么意思？可以作一想象：组成这个“世界”的运动物体的复杂排列似乎有点像是天神们所下的一盘伟大的国际象棋，我们则是这盘棋的观众。我们不知道弈棋的规则，所有能做的事就是观看这场棋赛。当然，假如我们观看了足够长的时间，总归能看出几条规则来。这些弈棋规则就是我们所说的基础物理。但是，即使我们知道了每条规则，仍然可能不理解为什么下棋时要走某一步棋，这仅仅是因为情况太复杂了，而我们的智力却是有限的。如果你们会下棋，就一定知道，学会所有的规则是容易的，但要选择最好的一着棋，或者要弄懂别人为什么走这一着棋往往就很困难了。在自然界里，情况也正是如此，而且只会更难一些。但是，至少我们能发现所有的规则。实际上我们今天还没有找到所有规则（时而还会出现弈棋中“王车易位”之类的令人费解的情况）。除了我们还不知道所有的规则以外，我们真正能用已知规则来解释的事情也是非常有限的，因为几乎所有的情况都是极其复杂的，我们不能领会这盘棋中应用这些规则的走法，更无法预言下一步将要怎样。所以，我们必须使自己只限于这种游戏规则的比较基本的问题。如果我们知道了这些规则，就认为“理解”了世界。

如果我们不能很好地分析这盘象棋游戏，那么又怎样来辨别我们“猜测”出的规则实际上是否正确呢？大致地讲，可以有三种办法。第

一，可能有这种情况：大自然安排得，或者说我们将大自然安排得十分简单，只有少数几个组成部分，从而使我们能够正确地预测将要发生的事。在这种情况下，我们就能检验我们的规则是怎样起作用的（在棋盘角落里可能只有少数几个棋子在移动，所以我们能够正确地解决）。

第二种检验规则的好办法是，利用那些由已知规则推导出来的较一般性的法则来检验已知规则本身。比如，象在棋盘中移动的规则是只许走对角线，因而我们可以推断，无论象走了多少步，它总是出现在红方块里。这样，即使不能领会细节，我们也总能检验有关象的走法的概念，只要弄清楚它是否一直在红方块里。当然，在相当长的时间里，它都将如此，直到突然发现它出现在黑方块里（显然，这时发生的情况是这个象被俘获了，另一个卒走过来成为皇后，红方块的象就变成黑方块的象）。这也就是物理学中出现的情况，即使我们不能领会其中的细节，但是在相当长的时期内我们仍有在各方面都很好地起作用的规则；但是在某个时候，我们又会发现新的规则。从基本物理的观点来看，最有趣的现象当然是在那些新的 场合——那些已知规则行不通的场合中所出现的现象，而不是在原有规则行得通的地方发生的现象！这是我们发现新规则的一条途径。

第三种鉴别我们的观念是否正确的方法比较粗糙，但或许是所有方法中最为有效的，这就是用粗略的近似方法来加以辨别。我们可能说不出为什么阿莱克因（Alekhine）[\[1\]](#)要走这步棋，但是我们或许能大致认为他或多或少地在调集一些棋子到王的周围来保护它。因为这是在这种情况下明摆着的事。同样，根据我们对这盘棋的理解，即使不能看出每一步棋的作用，也常常能对自然界多少有所理解。

人们首先把自然界中的现象大致分为几类，如热、电、力学、磁、物性、化学、光或光学、X射线、核物理、引力、介子等等现象。然而，这样做的目的是将整个自然界看作是一系列现象的许多不同侧面。这就是今天基础理论物理面临的问题：发现隐匿在实验后的定律；把各类现象综合起来。在历史上，人们总能做到这一点，但随着时间的推移，新的事实发现了；我们曾经将现象综合得很好，突然，发现了X射线，随后我们又融合了更多事实，但是又发现了介子。因此，在弈棋的任何一个阶段，看起来总是相当凌乱。大量事实被归并了，但总还有许多线索向一切方向延伸出去。这就是今天的状况，也就是我们将试图去描绘的现状。

历史上出现过的若干进行综合的情况有如下几个。首先，是热与力学的综合。当原子运动时，运动得越是剧烈，系统所包含的热量就越多，因此，热和所有的温度效应可以用力学定律来说明。另一个巨大的综合是发现了电、磁、光之间的联系，从而知道它们是同一个事物的不同方面，即今天我们称为电磁场的那个东西的不同表现。还有一个综合是把化学现象、各种物质的各种性质以及原子的行为统一起来，这就是量子化学的内容。

显然，现在的问题是：能不能继续把所有事情都综合起来，并且发现整个世界只是体现了一件事情的种种不同方面？无人知道答案如何。我们所知道的只是：这样做下去时，我们发现可以综合一些事实，随后又发觉出现了一些不能综合的事实。我们继续尝试这种拼图游戏。至于是否只有有限数量的棋子，甚至这场拼图游戏是否有底，当然不知道。除非有那么一天终于把图拼成了，否则我们就永远不会知道事情的究竟。在这里我们要做的是，看看哪种综合已进行到什么

程度，在借助于最少的一组原理来理解基本现象方面，现状又是如何。简言之，事物是用什么构成的？总共存在多少基本元素？

§2-2 1920年以前的物理学

一开始就从现在的观点讲起是有点困难的，所以让我们先来看一下在1920年左右人们是怎样看待世界的，然后再从这幅图像中挑出几件事情来。在1920年以前，我们的世界图像大致是这样的：宇宙活动的“舞台”是欧几里得所描绘的三维几何空间，一切事物在被称为时间的一种介质里变化，舞台上的基本元素是粒子，例如原子，它们具有某些特性。首先它具有惯性：如果一个粒子正在运动，它将沿着同一方向继续运动下去，除非有力作用其上。此外，第二个基本元素就是力，当时认为共有两类力。第一类力是一种极其复杂细致的相互作用，它们以复杂的方式将各种各样的原子约束在不同的组合之中，它们决定当温度升高时食盐是溶解得快些还是慢些；另一类已知的力是一种长程的相互作用，它是与距离平方成反比而变化的平缓的吸引力，称为万有引力。这条定律已为我们所知，它是很简单的。当然，为什么 物体的运动一经开始就能保持下去，或者为什么 存在一条万有引力定律，我们则不清楚。

对自然的描述正是我们在这里要关心的。从这个观点出发，气体以及实际上所有 的物质都是无数运动着的原子。这样我们站在海边所见到的许多东西马上可以联系起来了。首先是压力，它来自原子与壁或者某个东西的碰撞；如果原子的运动平均而言都沿着一个方向，这种原子的漂移运动就是风；而无规则的内部运动就是热。某个地方有过多的原子集结在一起时，就形成过剩密度的波，当波前进时，把成

堆的原子推向更远的地方，等等。这种过剩密度的波就是声波。能够理解这么多事情的确是惊人的成就。在前一章里我们已经说明过一些这样的事情。

粒子有哪些种类？在当时认为有92种。那时已发现有92种不同的原子，各按其化学性质而被赋予不同的名称。

其次的问题是，“短程力”是什么？为什么碳吸引一个（有时两个）而不是三个氧？原子间的相互作用的机制是什么？是万有引力吗？答案是否定的。万有引力实在太弱了。于是让我们来设想一种类似于万有引力那样的与距离平方成反比的力，不过它在强度上远远超过前者，此外还有一个差别：在重力作用下，每个物体彼此吸引，但现在我们设想有两类“东西”，而这种新的力（当然就是所谓电力）具有同类相斥而异类相吸的特性。具有这样强的作用的“东西”就称为电荷。

那么，我们会得到什么结果呢？假定我们有两个异类电荷，一正一负，并且彼此十分靠近。现在，在若干距离之外，还有另一个电荷。它会感到吸引吗？实际上它几乎不会感到什么作用，因为如果前两个电荷的大小相等，来自一个电荷的吸引被来自另一个电荷的排斥所抵消，所以，在任何可估计的距离上只有很小的一点作用力。另一方面，如果我们使第三个电荷非常靠近前两个时，就会发生吸引作用。因为同类电荷的斥力与异类电荷的引力倾向于使异类电荷靠近而使同类电荷远离。这样，排斥作用就将小于吸引作用。这就是为什么由正、负电荷组成的原子相互离开较远时只感受到很小一点作用力（重力除外），而当它们彼此靠近时，就能够互相“看到内部”而重新安排其电荷，结果产生极强的相互作用的原因。原子间作用力的最终基础是电的作用。由于这种力是如此巨大，以致所有正的与负的电荷

通常都以尽可能紧密的方式结合在一起。所有的事物，甚至我们自己，都由极精细的和彼此强烈作用着的正、负微粒所组成，所有正的微粒与所有负的微粒正好抵消。有时，碰巧我们“擦”去了一些负电荷或正电荷（通常擦去负电荷较为容易），在这种情况下将会发现电力不再平衡，于是就能看到电的吸引作用。

为了对电力作用究竟比引力作用大多少有个概念，我们举出大小为1 mm，相距为30 m的两粒沙子为例。假如它们之间的作用力没有抵消，每个电荷都吸引所有其他电荷而不考虑同类电荷间的斥力，那么，两颗沙粒之间的作用力会有多大呢？两者间将会产生 $3 \times 10^6 \text{ t}$ 的力！你瞧，只要正电荷或负电荷的数目有一点点极小的过剩或缺，就足以产生可观的电效应。当然，这就是你们为什么不能看出带电体与非带电体之间的差别的原因——所牵涉的粒子数目少得无论在物体的重量上或者形状上都很难造成什么差别。

有了这样的图像，对原子就比较容易理解了。人们认为原子的中心是一个带正电的质量甚大的“原子核”，核周围围绕着一定数量的很轻而带有负电的“电子”。让我们稍稍超前一点提一下：在原子核里也发现了两类粒子——质子和中子，它们的重量几乎相同，并且十分重。质子带正电，中子则呈中性。如果我们有一个原子，其核内有六个质子，从而四周环绕着六个电子（在通常的物质世界中负粒子都是电子，与组成原子核的质子和中子相比，它们是很轻的），在化学周期表上这个原子的序数是6，名称是碳。原子序数为8的物质叫做氧，等等。因为化学性质取决于核外的电子，实际上它只取决于核外有多少个电子，所以一种物质的化学性质只由电子的数目所决定（化学家的全部元素的名称实际上可以用1，2，3，4，5，等等编号来称呼）。我们可以说“元素6”，表示六个电子，以代替“碳”这个名称。当然，在

先前发现元素时，人们并不知道它们可以用这种方式来编号。此外，这又会使事情复杂化，因此，宁可对这些元素定一个名称和符号，这比用编号来称呼元素来得更好。

关于电的作用人们还发现了更多事情。对电相互作用的自然解释是，两个物体简单地互相吸引：正的吸引负的。然而后来发现用这种观点来描述电的相互作用并不妥当。更合适的描述这种情况的观点是：在某种意义上，正电荷的存在使空间的“状况”发生畸变，或者说在空间造成了一种“状况”。于是当我们将负电荷放到这个空间里后，它就会感受到一个作用力。这种产生力的潜在可能性就叫做电场。当把一个电子放入电场时，我们就说它受到“拉曳”。于是我们就有了两条规则：（1）电荷产生电场；（2）电荷在电场中会受到力的作用而运动。如果我们讨论下述现象的话，建立这两条规则的理由就清楚了：假如我们使某物体（比方说梳子）带电，然后把一张带电的纸片放在一定距离之外，当我们来回移动梳子时，纸片就会有反应，并且总是指向梳子。如果我们使梳子晃动得快些，就会发现纸片的运动有一点滞后，即作用有所延迟（起先，当我们相当慢地晃动梳子时，我们发现一种错综复杂的现象，这就是磁。磁的影响与作相对运动的电荷有关，所以磁力和电的作用力实际上可以归之于一个场，就像同一件事的两个不同的方面。变化的电场不能离开磁而存在）。假如我们把纸片移得更远，滞后就更大，这时能观察到一件有趣的事：虽然两个带电体之间的作用力应当与距离平方成反比，但是我们发现，当摇动一个电荷时，电作用的影响范围要比起初所猜想的大得多。这就是说，作用的减弱要比反平方的规则来得慢。

这里有一个类比：如果我们在水池里，而在近处漂浮着一个软木塞，我们可以用另一个软木塞划水来“直接”移动那个木塞。如果现在

你只注意两个软木塞，你能看到的将是一个立即响应另一个的运动——在软木塞之间存在着某种“相互作用”。当然，我们实际上所做的只是搅动了水；然后水又去扰动另一个木塞。于是我们就能提出一条“定律”：如果稍微划一下水，那么水中附近的物体就会移动。当然，假若第二个软木塞离得较远，则它将几乎不动，因为我们只是局部地搅动水。另一方面，假如我们晃动木塞，就会产生一个新的现象，即这部分水推动了那部分水，等等，于是波就传播开去，这样，由于晃动，就有一种波及十分远的影响和一种振荡的影响，这是无法用直接相互作用来理解的。所以那种直接作用的概念必须用水的存在来代替，或者，对于电的情形，用我们所谓的电磁场来代替。

电磁场能传送各种波，其中的一些就是光波，另一些波用在无线电广播里，但它们的总名称是电磁波。这些振荡的波可以有各种频率，一种波和另一种波之间的唯一的真正差别只是振荡的频率。假如我们越来越快地来回晃动电荷，并且注视着所产生的效应时，我们将得到一系列不同的效应，只要用一个数，即每秒钟振荡的次数，就能把这些效应统一起来。通常在我们住房墙上电路里流动的电流所产生的扰动约为100 Hz。如果我们把频率提高到500 kHz或1 000 kHz，我们就“在空气中了”^[2]，因为这正是无线电广播所用的频率范围（当然，广播与空气毫无关系！没有任何空气也能进行广播）。假如再提高频率，那么就进入调频广播和电视所用的波段。再上去，我们使用一种极短的波，比如雷达所用的波。频率再增高，我们就无需用仪器来“看”这种波了，而用眼睛就能够看到它。在频率范围为 $5 \times 10^{14} \sim 1 \times 10^{15}$ Hz的时候，只要有可能使带电的梳子晃动得这样快，我们的眼睛就能见到带电梳子的振动，像红光、蓝光或紫光，视振动的频率而定。低于上述频率范围的称为红外，高于此范围的称为紫外。从物理

学家的观点来看，我们能看见某种频率范围的波这个事实并不使这一部分电磁波谱比其他部分有什么更令人注意的地方，但是从人类的观点来看，这当然是更有趣的。如果我们把频率提得更高，于是就得到X射线。X射线不是别的，只是频率极高的光而已。如果再提高频率，就得到 γ 射线。X射线与 γ 射线这两个名称在使用时几乎是同义的，通常将原子核发出的电磁射线称为 γ 射线，而从原子中发出的这种高能的电磁射线就称为X射线。但是不论它们的起源如何，当频率相同时，它们在物理上是无法区别的。如果我们进到更高的频率，比如说 10^{24} Hz，我们发现可以人工制造这样的波，例如用加利福尼亚理工学院的同步加速器。我们还可以在宇宙线里发现频率出奇得高的电磁波——具有甚至比它还快1 000倍的振荡，而这些波目前还不能由我们来控制。

表2-1 电磁波谱

频率(Hz)	名 称	大略行为
10^2	电扰动	场
$5 \times 10^5 \sim 5 \times 10^6$	无线电广播	
10^8	FM—TV	
10^{10}	雷达	
$5 \times 10^{14} \sim 1 \times 10^{15}$	可见光	
10^{18}	X 射线	波
10^{21}	γ 射线(核)	
10^{24}	γ 射线(“人造”)	
10^{27}	γ 射线(宇宙线中)	

§2-3 量子物理学

说明了电磁场概念和电磁场能传送波后，我们很快就认识到，这些波的行为实际上十分奇怪，看起来完全不像波。在频率较高时它们的行为更像粒子！正是在1920年后发展起来的量子力学解释了这种奇怪的行为。在1920年之前，爱因斯坦就已改变了把空间看作是三维空

间，把时间看成单独存在的这种图像。他首先把它们组合在一起，并且称之为时空，然后又进一步用弯曲的时空来描绘万有引力，这样，“舞台”就变为时空，而万有引力则大概是时空的一种调整。以后，人们又发现有关原子运动的规则也是有问题的：在原子世界中，“惯性”与“力”的力学法则是不正确的——牛顿定律已不再成立。人们发现小尺度范围内事物的行为与大尺度范围内事物的行为没有任何相似之处。这给物理学造成困难——但又十分有趣。之所以困难，是由于事物在小尺度范围内的表现如此“反常”，我们对之没有直接的经验。在这里，事物的表现完全不像我们所知道任何事情，因而除了用解析的方式，用任何其他方法都不可能描写这种特性。这的确是困难的，需要作大量的想象。

量子力学有许多观点。首先，一个粒子既有确定的位置也有确定的速度这种概念已被抛弃，那是不正确的想法。表明经典物理是怎样不正确的一个例子是，在量子力学中有这样一条定则：不可能既知道某个粒子在什么地方，又知道它运动得多快。动量的不确定性与位置的不确定性是并协的，两者的乘积局限于某个常数宽度的微小范围内。我们可以把这条定律写成 $\Delta x \Delta p \geq \hbar / 2$ ，在以后将会更详尽地解释它。这条定则解释了这样一个十分神秘的佯谬：如果原子是由正负电荷所构成，那么为什么负电荷不是简单地处于正电荷的顶端（它们彼此是吸引的），从而彼此靠拢以至于完全抵消？为什么原子这么大？为什么原子核在中心，而其周围环绕着一些电子？起先曾认为原子核很大，但事实并非如此，它是非常小的。一个原子的直径约为 10^{-8} cm，一个原子核的直径约为 10^{-13} cm。如果我们有一个原子，为了看到原子核，就要把整个原子放大到一个大房间那样大，这时原子核才是一个刚刚可以用眼睛分辨出来的斑点，但是原子的几乎所有重量都集中在这个无比小的原子核上。是什么原因使电子没有直接落入原子

核呢？正是由于上述的原理。如果电子在原子核里出现，我们会精确地知道它们的位置，而不确定性原理则要求它们具有很大的（不过是不确定的）动量，即很大的动能。电子具有这样大的能量就要脱离原子核。然而这些电子作出了让步：由于不确定性，它们为自己留下一个狭小的空间，于是以由这个定则所决定的最小的运动晃动着（记得我们曾经说过，当晶体冷却到绝对零度时，原子并没有停止运动，它们仍然在晃动，为什么？如果它们停止运动，我们就能知道它们在什么地方，而且它们不运动，这就违反了不确定性原理：我们不能既知道它们在哪里，又知道它们以什么速度运动，所以它们必须在那里不断地摆动）。

另一个由量子力学带来的在科学的观念和哲学方面最有趣的变化是，在任何情形下要精确地预言会发生什么事都是不可能的。比如我们有可能使一个原子处于准备发光的状态，在原子发光时，可以利用探测光子的方法进行测量（这一点我们马上就要讲的），但是，我们无法预计它将在什么时候发光，或者在有几个原子的情况下，究竟哪一个原子将发光。你们可能说，这是由于某种我们还没有足够仔细观察过的内部“转轮”在起作用。然而，这里根本没有什么内部的转轮。按照我们今天的理解，大自然的表现是这样的：根本不可能精确地预言在一定的实验中究竟会发生什么事情，这是一件糟透了的事。事实上，哲学家曾经声称：科学所必需的基本东西之一就是，每当你安排了同样的条件时，那么发生的必定是同一件事。但是，这完全不正确，它并不是科学的基本条件。事实是所发生的并不是同一件事，我们所能得到的只是发生一些什么的统计平均。不过，科学并没有完全崩溃。顺便说一下，哲学家们讲了一大套科学之绝对必需是什么，但就像人们所能看到的那样，这些总是相当天真的，甚至还是错误的。例如，某个哲学家宣称，对科学的成就来说十分重要的是，如果同一个

实验先在某处（比如说在斯德哥尔摩）做，然后在另一处（比如说在基多）做，那么必定会出现同样的结果。完全错了。对科学来说，这并不是必然的。它可能是一个经验事实，但并不是必然的情况。比如有一个实验是在斯德哥尔摩观察天空，这时会看到北极光，如果在基多则看不到这种现象，这就是出现了不同的情况。“但是”，你会说：“这是一件与外部情况有关的事，如果你把自己关在斯德哥尔摩的一个房间里，拉下窗帘的话，那么会发现什么差别吗？”肯定会。假如我们在一个万向接头上挂一个摆，让它开始摆动，它就会差不多在一个平面里摆动，但也并不完全如此。在斯德哥尔摩，平面会缓慢地转动着。但是在基多就不会。在那里，窗帘也是垂下的。这件事的发生并没有引起科学的毁灭。科学的基本假设，它的基本哲学观念是什么呢？我们在第1章里讲到过：实验是任何观念的正确性的唯一试金石。假如结果是在基多所做的大多数实验与在斯德哥尔摩所做的实验效果一样，那么这“大多数实验”就可用来提出某种一般性的定律，至于对那些效果不同的实验我们就将说：“这是由于斯德哥尔摩周围的环境不同所引起的。”我们将能想出一些办法来概括实验结果，而没有必要在事先就被告诫说，这些办法看起来像什么。假如有人告诉我们说，同样的实验总是产生同样的结果，这固然很好。但是当我们试了一下后，发现并非如此，因而结论的确就是并非如此。我们正是必须相信自己所看到的，然后才能借助于实际的经验来形成我们的一切其他观念。

现在让我们回到量子力学和基本物理上来。当然，我们在此刻还不能详细叙述量子力学的原理，因为它们是颇难理解的。我们将假定它们成立，然后叙述一下某些结果。其中一个，我们通常视作为波的那些事物也具有粒子的特性，而粒子则具有波的特性。实际上，每一种事物的行为都是一样的，不存在波和粒子的区别。这样，量子力

学就将场的概念与场的波与粒子统一起来。的确，频率低时，现象的场的特性比较明显，或者说作为日常经验的近似描写时比较有用。但当频率增加时，现象的粒子特性对于我们通常用来作测量用的仪器来说更为明显。实际上，虽然我们提到过许多频率，但目前还没有探测到任何直接涉及频率在 10^{12} Hz以上的现象，我们只是在假定了量子力学的波粒二象性概念是正确的之后，根据有关规则从粒子的能量来推断出这些较高的频率的。

于是，我们对电磁相互作用有了新的见解。我们把一种新类型的粒子加入电子、质子及中子的行列，这种新的粒子称为光子。而这种电子与光子相互作用的新的见解被称为量子电动力学，它就是电磁理论，不过其中的一切在量子力学上都是正确的。这是光和物质，或电场与电荷之间相互作用的基本理论，就物理学来说它是我们最伟大的成就。在这个理论中，我们得到了除万有引力与原子核过程之外的所有一般现象的根本规则。比如，从量子电动力学可以得出所有已知的电学、力学和化学定律：弹子碰撞的定律、导线在磁场中运动的定律、一氧化碳的比热、霓虹灯的色彩、盐的密度，以及氢与氧形成水的反应等全都是这一理论的推论。所有这些细节，如果简单到能使我们运用近似方法的话，都可以得出，这实际上当然不可能，不过我们总能对发生的事多少有所理解。目前，在原子核外面还没有发现量子电动力学定律有什么例外，对于原子核我们不知道是否会有例外，因为对于核内的过程我们简直还不太清楚。

这样，在原则上，量子电动力学是一切化学以及生命的理论——如果生命最后归结为化学，因而也就归结为物理的话（因为化学本身已经归结为物理，涉及化学中的那部分物理早就知道了）。不仅如此，量子电动力学这个伟大的理论还预言了许多新的事实。首先，它

说明了甚高能光子、 γ 射线等的性质。它还预言了另一个十分出乎意外的事：除电子外，还应当有同样质量、但带有正电荷的称为正电子的粒子，并且这两种粒子碰在一起时，会彼此湮没而放出光或 γ 射线（其实，光与 γ 射线完全是一回事，只是频率不同而已）。这件事情的推广——即对每个粒子总有一个反粒子——现在知道是正确的。电子的反粒子有另一个名称，即正电子，但其他大多数反粒子，就称反某某子，如反质子、反中子。在量子电动力学中，提出了两个基本数据——电子质量与电荷，所有世界上其他的数被认为可以从这两个数据推导出来。实际上，这不完全正确，因为化学还有一整套数据，它告诉我们原子核是多重，这就把我们引导到下一部分内容中去了！

§2-4 原子核与粒子

原子核是由什么组成的，这些东西又是怎样结合在一起的？人们发现，原子核是靠巨大的作用力结合在一起的，当这种力释放时，其放出来的能量比化学能大得多，前者与后者之比就好像原子弹爆炸与TNT炸药的爆炸相比一样。当然，这是因为原子弹爆炸时与原子核里的变化有关，而TNT的爆炸则与原子外层的电子变化有关。问题是，究竟是什么力使原子核中的质子与中子结合在一起呢？汤川秀树提出，就好像电相互作用可以与一种粒子——光子联系起来一样，中子与质子之间的作用力也有某种场，当这个场晃动时，就好像一个粒子一样。所以除去中子与质子外，在世界上应当有一些别的粒子，而汤川能从已知的核力特征推导出这些粒子的性质。比如，他预言它们应当有二三百个电子那样大的质量。你瞧！在宇宙间竟然真的发现了这样质量的粒子！但是，后来发现这并不正是预言的粒子，它被称为 μ 子。

然而，没有过多少时候，在1947年或1948年就发现了另一个粒子—— π 介子，它满足汤川的判据。这样，除去质子与中子外，为了得到核力，我们还必须加上 π 介子。你可能会说，“太好了！借助这个理论就可以像汤川所希望的那样建立起利用 π 介子的量子核动力学，然后看看它是否成立。如果成立的话，那么每件事都可得到解释了。”不幸的是，包含在这种理论中的计算是如此困难，以至于一直到今天，已将近20年了，从来还没有一个人能够从这个理论中得出什么结果来，或者能够用实验去验证一下。

所以我们被这个理论难住了，我们不知道它究竟是正确的还是错误的，但却知道它有点小小的错误，或者至少是不完全的。正当我们在理论上徘徊并且试图用这个理论计算出结果时，实验物理学家发现了一些事情。比如，他们早已发现了 μ 子，而我们却还不知道把它归到哪里去。而且，在宇宙线里，还发现了大量的其他“额外”粒子。今天，我们已发现了大约30种粒子。理解所有这些粒子的相互关系是非常困难的——大自然要它们来干什么？这一个粒子与另一个粒子之间的联系是什么？我们今天并没有把这些不同的粒子理解为同一件事情的不同的方面。我们有这么多相互无关的粒子这件事本身就表明，我们还没有一个能够说明这么多相互无关的信息的良好理论。由于量子电动力学的伟大成功，我们具备了一定的核物理知识，它是一种粗糙的半经验半理论的知识，假设一种质子与中子间的力的类型，然后看看会发生什么事情，但是并不确切知道力的来源。除此以外，我们很少取得进展。在化学上，人们曾搜集大量的化学元素，以后突然在元素之间显现出一种没有预期到的关系，它就体现在门捷列夫元素周期表中。比如，钠和钾的化学性质几乎是相同的，它们就在周期表的同一行里。对于新粒子而言，我们一直也在探索着这种门捷列夫式的表。有一张这样的新粒子表是由美国的盖尔曼与日本的西岛各自独立

做出的。他们分类的基础是一个新的数，类似于电子的电荷，这种新的数叫做“奇异数” S ，对每个粒子都指定了这样一个数，它像电荷一样是守恒的，即在核力的反应中保持不变。

表2-2列出了所有的粒子。眼下我们对之还无法讨论得更多。但是这张表至少向你们表明我们不知道的东西有多少。每个粒子下写着它的质量，其单位是兆电子伏（ MeV ）。1 MeV 等于 $1.782 \times 10^{-27} \text{ g}$ 。选取这种单位的理由是出自历史的原因，我们现在不去说它。质量大的粒子在表中放在较高的位置。可以看到，中子与质子的质量是差不多相同的，在垂直的列内放置有同样电荷的粒子，所有的中性粒子都放在同一列内，所有带正电的粒子在这一列的右边，所有带负电的粒子则在左边。

表2-2 基本粒子

质量(GeV)	-e	电荷 0	+e	分类与奇异性
1.4	$\gamma_1^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$	$\gamma_1^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$	$\gamma_1^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$ 1395	$S = -2$
1.3	Ξ^- 1 319	Ξ^0 1 311		$S = -2$
1.2	Σ^- 1 196	Σ^0 1 191	Σ^+ 1 189	$S = -1$
1.1		Λ^0 1 115		$S = -1$
1.0		n 939	p 938	$S = 0$
0.8		$\omega^0 \rightarrow \pi + \pi + \pi$		$S = 0$
0.7	$\rho^- \rightarrow \pi + \pi$	$\rho^0 \rightarrow \pi + \pi$	$\rho^+ \rightarrow \pi + \pi$	$S = 0$
0.6				
0.5	K^- 494	$K^0 \bar{K}^0$ 498	K^+ 494	$S = \begin{smallmatrix} -1 \\ +1 \end{smallmatrix}$
0.4				
0.3				
0.2	π^- 139.6	π^0 135.0	π^+ 139.6	$S = 0$
0.1	μ^- 105.6			
0	e^- 0.51	ν^0 0		

重子

介子

轻子

表2-2中实线标出的是粒子，虚线标明的是“共振态”。表中略去了几个粒子，包括重要的零质量、零电荷的粒子，即光子与引力子，它们并不属于重子-介子-轻子分类图。此外，还有某些较新的共振态（ K^* ， ϕ ， η ）也不包括在这里。介子的反粒子已列在本表内，但轻子与重子的反粒子就需要另列一张表了，它看起来正好是目前这张表对零电荷列的反演。虽然除去电子、中微子、光子、引力子和质子外，所有的粒子都是不稳定的，但是在这里只列出了共振态的衰变产物。奇异数并不适用于轻子，因为它们与核之间并没有强作用。

所有与中子、质子放在一起的粒子统称为重子。共存在着以下几种： Λ 介子，质量为1115 MeV。另外还有三个： Σ^+ 介子、 Σ^- 介子和 Σ^0 介子，质量是相近的。这里还有成群或者说成多重态的粒子，带有差不多相同的质量，相差不到1%或2%。在多重态内的每个粒子都有同样的奇异数。第一个多重态是质子-中子二重态，以后是单重态（ Λ 介子），再以后是 Σ 三重态，最后是 Ξ 二重态。最近，在1961年，又发现少数几个粒子，但它们都是重子吗？它们的寿命是如此短暂，当刚形成时，几乎就立刻蜕变了，所以我们不知道它们究竟应被认为是新的粒子，还是在它们蜕变成 Λ 介子及 π 介子时后两者之间某种确定能量的“共振”作用呢？

除去重子外，其他包括在核内相互作用中的粒子称为介子。首先是 π 介子，有三种形态：正、负及中性，它们组成了另一多重态。我们还发现一些新的称为K介子的粒子，它们作为 K^+ 及 K^- 而出现。其次，每个粒子都有反粒子，除非一个粒子是它自己的反粒子。例如 π^- 和 π^+ 是一对反粒子，但是 π^0 是它自己的反粒子； K^- 及 K^+ 是反粒子对， K^0 及 $\bar{K}^0$ 也是反粒子对。附带说一下，在1961年我们又发现了一些介子或可能的介子，它们几乎即刻就蜕变了，有一个称为 ω 的东西带有780 MeV的质量，分解为三个 π 介子，有一个还不怎么确定的东西分解为两个 π 介子。那些被称为介子与重子的粒子与介子的反粒子放在同一张表里，但重子的反粒子必须放到另一张通过零电荷列“反射”而来的表里去。

门捷列夫周期表是很完美的，除去有一些稀土元素挂在外面。同样，这里也有一些粒子挂在表外，它们在核内的相互作用不强，跟核相互作用根本无关，跟核之间也没有强相互作用（我们所指的是那种强的核能相互作用）。它们被称为轻子，主要有如下几种：电子，其

质量很小，只有0.510 MeV；然后是 μ 子，质量约为电子的206倍。根据所有的实验，我们今天所能说的电子与 μ 子之间的差别仅仅是质量不同而已，除了 μ 子比电子重外，两者在其他方面都完全一样。为什么一个比另一个重？ μ 子有什么用？我们不知道。此外，有一种轻子是中性的，叫做中微子，具有零质量，事实上，现在知道有两类中微子，一类与电子有关，另一类与 μ 子有关。

最后，还有两种与核内其他粒子间没有强作用的粒子：一个是光子，另一个（或许）是具有零质量的引力子——假如引力场也有类似量子力学的原理的话（引力的量子化理论还没有建立）。

什么是“零质量”？这里所标示的质量是粒子在静止时的质量。事实上，一个粒子具有零质量在某种程度上就意味着它不可能静止。光子是永远不会静止的，它一直以 $186\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ （即 $300\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ）的速度运动。当我们在适当的时候学习了相对论的内容后，对于质量就会理解得更多一些。

这样，我们就面对着一大群粒子，它们看来都是物质的基本组成部分。幸运的是，这些粒子彼此之间的相互作用并不全都是不同的。事实上，粒子之间的相互作用看来可以分为四类，按强度降低的顺序排列时，它们就是：核力、电相互作用、 β 衰变作用以及引力。光子与所有带电粒子会发生耦合，作用的强度用某个数（ $1/137$ ）来度量。这种耦合的详细定律已经知道，那就是量子电动力学。引力和所有的能量发生耦合，但它的耦合是非常弱的，远远小于电的作用，这条定律也已经知道了。然后，还存在着所谓的弱衰变—— β 衰变，它使中子蜕变为质子、电子及中微子，其过程是比较慢的，这种作用的定律只是部分地知道。还有所谓的强相互作用——介子-重子相互作用，其强度

为1，它的规律完全不知道，虽然已经知道几条法则，比如重子的数目在任何反应中都不改变。

表2-3 基本相互作用

耦合关系	强度 ^[3]	定律
光子对带电粒子	$\sim 10^{-2}$	已知
引力对所有其他能量	$\sim 10^{-40}$	已知
弱衰变	$\sim 10^{-5}$	部分已知
介子对重子	~ 1	不知（部分法则已知）

这些就是当代物理学的惊人的状况。总结一下，我可以这样说：在核外，看来一切都知道了；在核内，量子力学是正确的，还没有发现量子力学原理失效的情况。可以说：容纳我们所有知识的舞台是相对论性时空；也许引力也包括在时空之中。我们不知道，宇宙是怎样开始的，我们从来没有做过实验来精确地检查在某个微小距离下的时空观念，所以只知道在那个距离以上我们的时空观念行得通。我们还应当补充说：这个伟大的国际象棋赛的规则就是量子力学的原理，到现在为止我们可以说，这些原则应用于新的粒子时与应用于过去已发现的粒子一样成功。核力的起源将我们引向新的粒子，但是遗憾的是出现的粒子实在太多，以至于使我们感到迷惑不解。虽然我们已知知道在它们之间存在着一些非常出人意料的关系，但对它们的相互关系缺乏完整的理解。看来我们正摸索着前进，逐渐趋近于对亚原子粒子

世界的理解；但是，我们实在不清楚，在这种摸索中我们还必须走多远。

[1] 世界著名弈棋名手，系国际象棋特级大师，曾多次获得国际象棋世界冠军。——译者注

[2] 原文为“On the air”，直译为“在空气中”，亦作电台“正在广播”解，作者在这里用的是双关语，故有下文的“广播与空气毫无关系”。——译者注

[3] 这里的“强度”是包含在每种相互作用中的耦合常数的一无量纲的量（“ $\sim$ ”在这里取“数量级”之意）。

第3章 物理学与其他科学的关系

§3-1 引言

物理学是最基本的、包罗万象的一门学科，它对整个科学的发展有着深远的影响。事实上，物理学是与过去所谓的“自然哲学”相当的现代名称，现代科学大多数就是从自然哲学中产生的。许多领域内的学生都发现自己正在学习物理学，这是因为它在所有的现象中起着基本的作用。在本章中我们试图说明其他科学中的基本问题是什么。当然，在这么一点篇幅内要真正地处理这些领域中的复杂、精致而美妙的事情是不可能的。正因为篇幅较少，使我们不能讨论物理学与工程、工业、社会和战争之间的关系，甚至不能讨论数学与物理之间的最令人注目的关系（按照我们的观点，从数学不是一门自然科学这个意义上来说，它不是一门科学。它的正确性不是用实验来检验的）。顺便提一下，我们必须从一开始就说清楚：如果一件事情不是科学，这并不一定不好。例如，爱好就不是科学。所以，如果说某件事不是科学，这并不意味着其中有什么错误的地方，这只是意味着它不是科学而已。

§3-2 化学

也许受物理学影响最深的科学就是化学了。在历史上，早期的化学几乎完全讨论那些现在称为无机化学的内容，即讨论那些与生命体

不发生联系的物质。人们曾经进行了大量的分析才发现许多元素的存在以及它们之间的关系——即它们是怎样组成在矿石、土壤里所发现的简单化合物的，等等。早期的化学对于物理学是很重要的。这两门科学间的相互影响非常大，因为原子的理论在很大程度上是由化学实验来证实的。化学的理论，即化学反应本身的理论，在很大程度上总结在门捷列夫周期表里，周期表体现了各种元素之间的许多奇特的联系，它汇总了有关的规则：哪一种物质可以与哪一种物质化合，怎样化合，等等，这些就组成了无机化学。原则上，所有这些规则最终可以从量子力学得到解释，所以理论化学实际上就是物理。但是，必须强调的是，这种解释只是原则上的。我们已经讨论过了解下棋规则与擅长下棋之间的差别。也就是说，我们可能知道有关的规则，但是下得不很好。我们知道，精确地预言某个化学反应中会出现什么情况是十分困难的；然而，理论化学的最深刻部分必定会归结到量子力学。

还有一门由物理学与化学共同发展起来的极其重要的分支，这就是把统计学的方法应用于力学定律起作用的场合，这被恰当地称为统计力学。在任何化学状态中都要涉及大量的原子，我们已经看到原子总是以复杂而毫无规则的方式不停地晃动。假如我们能够分析每一次碰撞，并且跟踪每一个分子的运动细节的话，就能判断出将会发生一些什么。但是要记录所有这些分子的运动就需要许许多多数据，这远远超过了任何计算机的容量，当然也一定超过人脑的容量，所以为了处理这样复杂的情况，重要的是要采取一种有效的方法。统计力学就是关于热现象或热力学的理论。作为一门科学，无机化学现在基本上已归结为所谓物理化学和量子化学。物理化学研究反应率和所发生的详细变化（分子间如何碰撞？哪一些分子先飞离？等等），而量子化学则帮助我们根据物理定律来理解所发生的事。

化学的另一个分支是有机化学，它研究与生命体有关的物质。人们曾一度相信与生命有关的物质极其神秘，因此不可能用我们的手从无机材料中制造出这种物质。这根本不对——它们与无机化学中制成的物质完全一样，只是包括了更复杂的原子排列。很明显，有机化学与提供有机物质的生物学之间有十分密切的关系，与工业也有密切的联系，而且许多物理化学和量子化学的定律不仅适用于无机化合物的情况，而且也适用于有机化合物。然而，有机化学的主要任务并不在于这些方面，而是在于分析、综合那些在生物系统以及在生命体中所形成的物质。这样就不知不觉地逐步引向了生物化学，然后是生物学本身，或分子生物学。

§3-3 生物学

我们就这样进入了生物学，它研究的是生命体。在生物学发展的早期，生物学家必须进行单纯的说明性工作——找出有哪些生物，所以他们会数数跳蚤足上的细毛之类的东西。当他们以很大的兴趣完成这种工作后，就进而考虑在生命体内部的机制问题，起先自然是从十分粗略的观点出发的，因为要知道更详细的情况是需要经过一番努力的。

在物理学与生物学的早期关系中有过一件很有趣的事，生物学曾经帮助物理学发现了能量守恒定律，迈耶（J.R.Mayer）最先在关于生物吸收和放出的热量问题上证实了这条定律。

假如我们更仔细地观察动物的生物学过程，就会看到许多物理现象：血液的循环、心脏的跳动、血压，等等。这里还有神经：如果我们踩在一块尖锐的岩石上，就会知道发生了什么事情，这个信息不知

怎么地就从我们的脚底传递上来。有趣的是这个信息是怎样传递的。在研究神经时，生物学家得到了这样的结论：神经是非常精细的小管道，有十分薄而复杂的管壁。细胞通过这样的管壁吸进离子，所以在外面有正离子，而在里面则有负离子，就像一个电容器一样。这层薄膜还有一个有趣的性质：如果它在某个地方“放电”，即一些离子能够通过这个地方，那么该处的电压就减小，它会影响到邻近地方的离子，而这又会影响那里的薄膜，使它也让离子通过。接着这又要影响更远的薄膜，等等，于是在薄膜中就出现一系列“穿透性变动”波，当神经末梢的一端由于碰到尖锐的岩石而受到“刺激”后，这种波就沿着神经传开来。它有点像一长列垂直放置的多米诺骨牌，如果末端的一个被推倒，邻近的一个也就被它带动，等等。当然，除非把多米诺骨牌再重新排好，不然这时只有一个信息传递过去。类似地，在神经元里，也有排出离子的缓慢过程，使神经又处于准备接收下一个脉冲的状态。这就是为什么我们会知道正在做什么（或者至少知道我们在哪里）。当然我们可以用电子仪器测出这种与神经冲动有关的电的效应，因为这里存在着电的作用。十分明显，电效应的物理知识对理解这个现象很起作用。

相反的效应是从大脑中某个地方沿着神经发出一个信息。这时在神经的末梢会出现什么情况呢？神经在末梢处分成了细微的小纤维，这些小纤维与肌肉附近的一种称为端板的结构相连接。由于一些现在还不完全理解的原因，当脉冲信号抵达神经末梢后，射出一小团一小团称为乙酰胆碱的化学物质（每次5~10个分子），它们影响了肌肉纤维而使其收缩——这一切多么简单！什么东西使肌肉会发生收缩呢？肌肉是由极多的彼此紧贴的纤维所组成的，它含有两种不同的物质：肌球蛋白和肌动球蛋白。但是由乙酰胆碱所引起的那种改变肌肉大小

的化学反应机制现在还不清楚，因而在肌肉中引起机械运动的基本过程也未被我们所知。

生物学的领域是如此广泛，有许多问题我们根本无法叙述。比如视觉是如何产生的（即光在眼睛里做什么）？听觉是如何产生的？等等（思维是如何进行的这一个问题将在后面心理学中讨论）。但是从生物学的观点来说，我们刚才所讨论的这些关于生物学的事情实在并不是基本的，并且不是生命的根源——即使我们理解了它们，仍然不能理解生命本身。举一个例子：研究神经的人感到他们的工作是很重要的，因为无论如何不存在没有神经的动物，但是没有神经仍然可以有生命。植物既无神经也无肌肉，但是它们照样活动着，照样生存着。所以我们对于生物学的基本问题必须更仔细地研究一下。如果我们这样做，就会发现所有的生命体中存在着许多共同的特征。最普遍的特征是它们都由细胞组成，每个细胞内都有起化学作用的复杂机制。例如，在植物细胞中就存在着接收光线而产生蔗糖的机构，植物在夜间消耗蔗糖以维持其生存。当动物摄取植物后蔗糖在动物体内就产生了一系列化学反应，这些反应与植物体内的光合作用（以及在夜间的相反作用）有很密切的关系。

在生命系统的细胞里有许多复杂的化学反应，在反应中一种化合物变成另一种化合物，然后再变成一种化合物。为了对生物化学研究中所付出的巨大的努力有某种印象，我们在图3-1中总结了到此刻为止所知道的在细胞中出现的反应，这些反应只是所有反应中的很小一部分，只占1%左右。

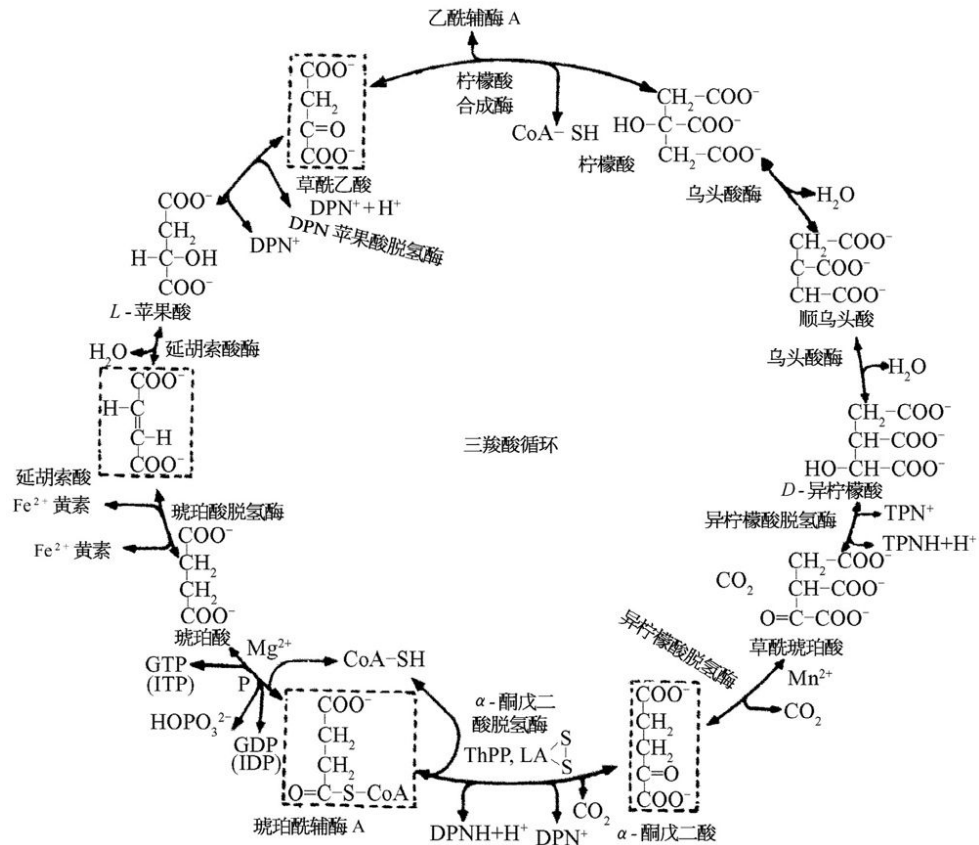


图 3-1 三羧酸循环

这里我们可以看到整整一系列分子，它们在一连串相当小的步骤组成的循环中从一个变到另一个。这个循环称为三羧酸循环或呼吸循环。如果从分子发生的变化来说，每一种化合物和每一步反应都是相当简单的，但是——这是生物化学中非常重要的发现——这些变化在实验室里比较难以完成。假如我们有一种物质，还有另一种十分类似的物质，那么前一种物质并不就转变成后一种物质，因为这两种形式通常由一个能量屏障或“势垒”隔开。考虑这样一个类似的情况：如果我们要把一个物体从一个地方拿到另一个地方，而这两个地方处在相同的水平高度，但是分别在一座小山的两边，那么我们可以把物体推过山顶，但是要做到这一点需要一些附加的能量。由于这种原因，大多数化学反应都不会发生，因为有一种所谓的活化能妨碍这一反应的

进行。为了在一种化合物中增加一个额外的原子，就要使这个原子靠得足够紧，以便能出现某种重新排列，这样它就结合到那个化合物上去了。但是如果我们不能给它足够的能量使之靠得足够近，它就不会越过势垒，只是上去了一部分路程后又倒退回来。然而，假如我们真的能把分子拿在手中，把其中的原子推来推去使它出现一个缺口，让新原子进入，然后又使缺口一下子合拢，我们就找到了另一个办法，即绕过势垒，这不需要额外的能量，因此反应就较容易进行。现在，在细胞里确实存在着一些很大的分子，比起我们刚描述过其变化的分子要大得多，它们以某种复杂的方式使较小的分子处于恰当的状态，从而使反应易于发生。这些很大的、复杂的分子称为酶（它们起先被叫做酵素，因为最早是在糖发酵时发现的。事实上三羧酸循环的某些反应最初就是在发酵中发现的）。由于有酶存在，反应就会进行。

酶是由另一种称为蛋白质的物质构成的。酶分子族是非常庞大而复杂的，每一种酶互不相同，并且都控制着一定的特殊反应。图3-1中每个反应中都写上了酶的名称（有时同一种酶可以控制两种反应）。我们要强调指出：酶本身并不直接参与反应，它们并没有变化，只是使一个原子从一个地方跑到另一个地方。干完了这件事后，它又准备对下一个原子做同样的事，犹如工厂里的机器一样。当然，必须对某种原子进行补充，并且可以处理另一些原子。比如，以氢为例，有些酶具有特殊的结构单元，能在各种化学反应中运送氢原子。例如，有三种或四种脱氢酶在我们整个循环的各个地方都用到。有趣的是，有一种机构使一个地方释放某些氢原子并将其取走，然后用到其他的地方去。

图3-1的循环中最重要的是GDP转变为GTP（鸟苷二磷酸转变为鸟苷三磷酸），因为GTP比GDP含有更多的能量。就像在某些酶中存在

着一种运送氢原子的“盒子”一样，在酶中也有特殊的携带能量的“盒子”，三磷酸基就是这样的“盒子”。所以GTP比GDP具有更多的能量，而且如果循环是朝某个方向时，我们就产生具有附加能量的分子，它可以推动另一个需要能量的循环，比如肌肉的收缩。除非存在着GTP，肌肉就不会收缩。我们可以拿几根肌肉纤维，把它们浸到水里，加一些GTP，只要这里存在着适当的酶，肌肉纤维就会收缩，GTP就变为GDP。所以真实的系统是在GDP-GTP转变中，在晚上就用白天贮藏起来的GTP使整个循环往另一个方向进行。你们可以看到酶对反应进行的方向并不介意，因为倘若不是如此，就会违反一条物理定律。

物理学对于生物学和其他科学之所以极为重要还在于另一个原因，这与实验技术有关。事实上，如果不是由于实验物理的巨大发展，这些生物化学的循环图今天就不可能知道。其理由是：分析这种极其复杂的系统的最有效的方法就是要辨认在反应过程中所用到的原子。例如，如果我们能把一些带有“绿色标记”的二氧化碳引到循环中去，然后测量3 s后绿色标记的位置，在10 s后再测量一次，等等，我们就能描绘出反应的过程。那么“绿色标记”是什么呢？它们就是同位素。我们可以回顾一下：原子的化学性质是由电子的数量而不是原子核的质量所决定的。但是有这种可能，比如在碳原子中，可能有6个或7个中子与每个碳原子核都具有的6个质子在一起。这两个原子碳12和碳13在化学上是相同的，但它们的重量不同，在核的性质上也有差别，因而是可以区分的。利用这些不同重量的同位素，或者甚至利用放射性同位素如碳14，就有可能跟踪反应的过程，这是比较灵敏的探查极少量物质的方法。

现在，让我们回到酶和蛋白质的描述。并不是所有的蛋白质都是酶，但是所有的酶都是蛋白质。蛋白质有许多种，比如说肌肉中的蛋白质、结构蛋白质，它们存在于软骨、头发和皮肤中，等等，这些蛋白质本身并不是酶。但是，蛋白质是生命的非常具有代表性的物质。首先，它们组成了所有的酶；其次，它们构成了大部分其余的生命的物质。蛋白质具有十分有趣而简单的结构。它们是一系列不同的氨基酸。有20种不同的氨基酸，它们全都能互相组合而形成链，其骨架是 CO—NH ，等等。蛋白质不是别的，正是这20种氨基酸形成的各种各样的链。每一种氨基酸可能起某种特定的作用。比如，有一些氨基酸在一定的位置上有一个硫原子；当同一蛋白质内有两个硫原子时，它们就形成一个键，也就是说，它们用链在这两点上连接起来形成一个环。另一种氨基酸有一个额外的氧原子，因而使它变为酸性物质，再有一种则呈碱性的特征。有些氨基酸在一边悬挂着一个大基团，因此占有许多空间。有一种称为脯氨酸的氨基酸实际上并不是氨基酸，而是亚氨基酸。这里稍微有些差别，因为当脯氨酸在链上时，就会出现扭曲。如果我们想制造一种特殊的蛋白质，就应当按照这样的规则：这里先放一个硫钩；然后加进某种东西来占据空位；再加入某种东西以形成链上的扭曲。这样，我们将得到一个外观上复杂的链，它们互相勾连在一起，具有某种复杂的结构。这可能就是所有的酶形成的方式。1960年以来，我们所获得的伟大成就之一就是终于发现了某些蛋白质的原子的精确空间排列。在这些蛋白质中，一条链上就含有56个或60个左右的氨基酸链，在两种蛋白质的复杂图样中已经确定了1 000个以上的原子（如果把氢原子计入，那么就接近于2 000个）的位置。第一种阐明结构的蛋白质就是血红蛋白。这个发现的不足之处是我们从这样的图样中不能看出任何东西，我们不理解它为什么会具有那样的功能。当然，这是下一步需要解决的问题。

另一个问题是，酶怎么会知道该成为什么？一个红眼蝇会生出一个小的红眼蝇，这样产生红色素的整个酶组信息必定从一代传到下一代。这是由细胞核中的一种称为DNA（脱氧核糖核酸的缩写）的物质所完成的，它不是蛋白质。这种关键的物质从一个细胞传到另一个细胞（例如，精虫细胞主要由DNA组成），并且携带了关于如何形成酶的信息。DNA是一张“蓝图”。那么这张蓝图看来像什么？它又如何起作用？首先，这张蓝图必须能加以复制。其次，它必须能给蛋白质以指令。说到复制，我们可能会认为这种过程像细胞的复制。但细胞只是简单地长大，然后一分为二。那么DNA分子也必须如此吗？它们也是长大以后一分为二吗？每一个原子当然不会长大并一分为二！因此，除非有一种更聪明的办法，否则就不可能复制出一个分子来。

对DNA这种物质的结构已经进行了很长时间的研究，首先用化学方法找出它的成分。然后又用X射线法找出它在空间的图像。结果得到如下值得注意的发现：DNA分子是一对彼此缠绕在一起的链。这些链与蛋白质的链类似，但化学结构上是完全不同的，每条链的骨架是一列糖与磷酸基，如图3-2所示。现在我们看出链是怎样容纳指令的，因为如果我们把这个链从中间劈开，就可以得到一个BAADC.....系列，而每个生命体都可以有一个不同的系列。这样，也许为制造蛋白质所需的特殊指令已以某种方式包括在DNA的特殊系列里。

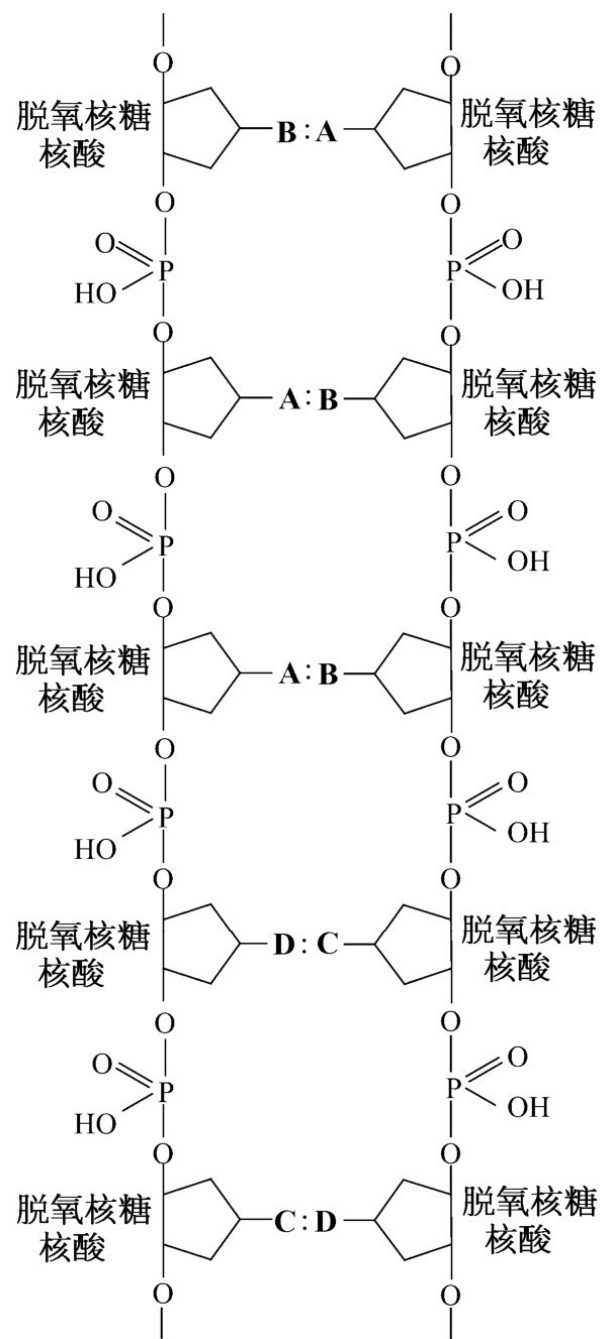


图3-2 DNA结构示意图

与链上的每一个糖相结合，并把两条链连接在一起的是一些交叉链对。然而它们并不都是相同的，总共有四种：腺嘌呤、胸腺嘧啶、胞嘧啶及鸟嘌呤。现在让我们称它们为A、B、C和D。有趣的是，只

有一定的配对才能彼此处于相对的位置，例如A对B，C对D。当这些对放在两列链上时，它们“彼此对合”，并具有强大的相互作用能。然而C不适合于A，B也不适合于C；它们的适合配对是A对B，C对D。所以假如有一个是C，另一个就一定是D，等等。在一条链上无论是什么字母，在另一条链上则必须有特定的与之配对的字母。

那么，复制又是怎么回事呢？假设我们把这整条链一分为二，我们怎么能制造出另一个正好与它一样的链呢？如果在细胞的物质中有一种加工部门，产生了磷酸盐、糖以及没有连在一个链上的A、B、C、D单元，那么唯一能与我们那个分开的链相连的单元必须是正确的，是BAADC.....的互补体，即ABBCD.....。于是，当细胞分裂时，链亦从中间裂开，一半最终与其中一个细胞在一起，而另一半则留在另一个细胞内；当它们分离后，每个半链都会形成一个新的补足的链。

接下来的问题是，A、B、C、D单元的次序究竟怎样精确地决定蛋白质中氨基酸的排列？这是今天生物学中没有解决的一个中心问题。然而，初步的线索，或者说一点信息是：细胞中存在一种叫做核糖体的小粒子，现已知道那就是制造蛋白质的地方。但是核糖体并不在细胞核内，而DNA及它的指令却在细胞核内。看来是有某种原因的。然而，现在也知道从DNA分出的小分子，不像携带有全部信息的大DNA分子那样长，而像它的一小部分，它叫RNA。但这无关紧要，RNA是一种DNA的拷贝——一个简短的拷贝。RNA不知怎么地携带了关于要制造那种蛋白质信息，跑到核糖体中，这一点我们已经知道了。当它到达那里后，在核糖体中就合成出蛋白质，这一点也已经知道了。不过，氨基酸怎样进入蛋白质，又怎样根据RNA上的密码来排列，等等，这些细节还不太清楚。我们不知道如何去解这种密码。比

方说，假如我们知道了一排字母ABCCA，我们也无法告诉你要制造的是什麼蛋白质。

今天，无疑没有一个学科或领域在这样多的前沿上比生物学取得更大的进展。如果我们要作出引导着人们在探索生命的努力中不断前进的最有成效的假说，这就是：所有的物质都是由原子组成的，并且生命体所做的每一件事都可以从原子的摆动和晃动中来理解。

§3-4 天文学

在我们对整个世界非常概括的描绘中，现在必须转到天文学上。天文学是一门比物理学更古老的学科。事实上，正是天文学向物理学提出了解释星体运动得如此美妙而又简单的问题，对于这个问题的理解，就构成了物理学的开端。但是在所有的天文学发现中，最值得注意的是：星体是由同地球上一样的原子组成的^[1]。那么这是怎么知道的呢？原子释放具有确定频率的光，这有点像乐器的音色是具有确定的音调或频率的声音。当我们听见几种不同的音调时，可以分别说出它们来，但是当我们用眼睛观察混合的颜色时，却无法说出它由哪几种颜色组成，因为眼睛的辨别能力在这一点上远远比不上耳朵。然而，利用分光镜我们可以分析光波的频率，这样就可以看见各个不同星体上的原子所发出的真正“音调”。事实上，有两种化学元素在地球上被发现之前就已经在星体上发现了。氢是在太阳上发现的，它的名称就是由此而来的^[2]；镓是在一种冷却的星体上发现的。这当然使我们在理解星体方面取得了一定的进展，因为它们也是由跟地球上同样的原子组成的。今天，我们已经知道了许多有关原子的知识，特别是它们在高温而密度不太大的条件下的行为，这样我们就能用统计力学

的方法来分析星体物质的性能。即使我们无法在地球上复现有关的条件，但是应用基本的物理定律往往能精确地或十分接近地说出会发生什么事情。这就是物理学帮助了天文学。看来令人奇怪的是，我们对太阳内部物质的分布情况的了解远胜于对自己脚下的地球内部情况的了解。我们对星体内部发生的情况的了解要比在人们必须通过望远镜来观察小小的光点这种困难的情况下可能推测出更多一些，因为在大多数情况下，我们可以计算出星体里的原子应当做些什么。

给人印象最深的发现之一是使星球不断发出光和热的能量来源问题。有一个参与这项发现的人，在他认识到要使恒星发光，就必须在恒星上不断地进行核反应之后的一天晚上和他的一位女朋友出去散步。当这个女朋友说：“看这些星星闪烁得多美啊！”他说：“是的，在此刻我是世界上唯一知道为什么它们会发光的人。”他的女朋友只不过对他笑笑。她并没有对于同当时唯一知道恒星发光原因的人一起散步产生什么深刻的印象。的确，孤单是可悲的，不过在这个世界上就是这个样子。

正是氢原子核的“燃烧”给太阳提供了能量，这时氢也就转变成了氦，而且，最终从氢制造出各种化学元素的过程是在恒星的中心进行的。组成我们身体的各种元素在一个星体上被“烹调”好后，就被抛出，存在于宇宙之中。我们是怎么知道的呢？因为这里有一条线索。化学反应永远改变不了不同的同位素的比例——多少碳12，多少碳13，等等，因为化学对两者而言都是大致相同的。这个比例纯粹是核反应的结果。看看，在熄灭的、冷却的余烬——比如我们自己就是这样的产物——里同位素的比例，就可以发现在构成我们身体材料的形成时期熔炉像什么样子。这个熔炉很像恒星，所以我们的元素很可能是在恒星上“制造”出来，而在我们称为新星和超新星的爆炸中被

喷吐出来的。正是因为天文学与物理学是这样密切相关，所以我们学下去时将要研究许多有关天文学的知识。

§3-5 地质学

我们现在转到所谓的地球科学或地质学。首先是气象学和天气。当然气象学的仪器是物理仪器，就像前面所说的那样，实验物理学的发展使得提供这些仪器成为可能。然而，物理学家从来没有得出满意的气象学理论。“怎么！”你们会说：“这里除了空气以外什么东西都没有，而我们已经知道了空气的运动方程。”我们的确知道。“那么，如果我们知道了今天的空气状态，为什么就不能计算出明天的空气状态？”首先，我们并不真正知道今天的状态究竟是怎样的，因为空气到处旋转。结果它非常敏感，甚至不稳定。假如你们看到过水流平稳地流过水坝，然后当它下落时一下子变成大量的水珠和水滴的话，你就会懂得我所说的不稳定是什么意思了。你们知道水在流出溢水口之前的情况，它是十分平滑的；但是在它开始下落的一瞬间，水滴从哪里开始溅出？决定水滴将会有多大，并且在哪里的因素是什么？这些都无法知道，因为这里水是不稳定的。而对于空气来说，即使是平稳地运动着，但当它越过一座山时就变成了复杂的旋涡。在许多领域中都出现这种湍流现象，我们在今天还无法对之进行分析。现在，赶快离开天气问题，回到地质学上去吧！

对于地质学而言，它的基本问题是，究竟是什么使地球成为现在这个样子？最明显的过程就在你们的眼前，这就是河流、风等的侵蚀过程。要理解这些事是相当容易的，但是要知道，对于每一片侵蚀都有等量的另外一些东西出现。平均而言，今天的山脉并不比过去的

低，因此必定有一种造山过程。假如你们学过地质学，你们就会知道，确实存在着造山过程以及火山作用，这些现象没有人懂得，但却占了地质学的一半内容。实际上，火山的本质并没有被人们所理解。造成地震的原因是什么最终也未被人们所了解。我们所知道的是，如果一个东西推动另外一些东西，那么就会突然断裂，并且产生滑动，这当然是对的。但是什么东西在推？为什么会这样？有一种理论认为，在地球内部存在着环流，它是由于内外温度上的差别而造成的，也就是它们在运动过程中轻微地推着地球的表层，这样，假如有两股相对的环流在某个地方碰上的话，物质就会在这个区域里堆积起来而形成山脉，这些山脉处于非常不相宜的受到应力的状态，这样就会引起火山爆发，或造成地震。

那么地球内部的情况是怎样的呢？关于地震波在地球里的传播速度以及地球的密度分布已经了解得很多。然而，关于物质处于我们预期在地球中心所应有的压强之下会有怎样的密度，物理学家没有能够提出一种有效的理论。换句话说，我们还不能很好地解决在这种情况下物质的性质问题。我们在地球方面所做的事比在星体的物质条件下所做的事要差得多。这里所包含的数学到现在为止看来似乎过于复杂，但是也许不要很长时间就会有人认识到这是一个重要的问题，并且着手解决这个问题。当然，另一方面，即使我们确实知道了密度，还是不能判断环流，也不能真正得知高压下的岩石的性质。我们无法说出岩石要多快才会“融化”，这必须通过实验来解决。

§3-6 心理学

接下来，我们考虑心理科学。顺便提一下，心理分析并不是一门科学，它充其量不过是一个医学过程，也许更像巫术。它有一个疾病起源的理论——据说有许多不同的“幽灵”等。巫医有一个理论说，像疟疾那样的疾病是由进入空气中的幽灵所引起的，但是医治疟疾的药方并不是将一条蛇在病人头上晃动，而是奎宁。所以，如果你的身体感到有什么不舒服，我倒劝你到巫医那儿去，因为他是对疾病知道得最多的那批人中的一个。然而，他的知识不是一种科学。心理分析没有用实验仔细地检验过，因此没有办法知道，在哪些情况下它是有效的，在哪些情况下则是无效的，等等。

心理学的其他一些分支，包括感觉的生理学——在眼睛里出现一些什么情况，在大脑中出现一些什么情况——可以说，是并不会令人感兴趣的。但是在它们的研究中取得了一些微小的然而真正的进展。有一个最有趣的技术性问题可以归为心理学，也可以不归之为心理学，即有关大脑——如果你愿意的话，或者说神经系统的中心问题是：当某种动物学到了某件事后，它就能做一些以前不会做的事，所以它的大脑细胞也一定会有变化——只要大脑细胞是由原子构成的。那么，差别表现在哪里呢？当一件事情被记在大脑里后，我们不知道在哪儿去找它，或者去找些什么东西。如果一件事情被学到了，它意味着什么？或者说神经系统有些什么变化？我们都不知道。这是一个很重要的问题，但根本没有解决。然而，假设存在着某种记忆的物质性的话，那么大脑恰恰就是这么多的连线和神经的集合体，这种集合体大概是无法用简单的方式来分析的。这和计算机以及计算单元很类似，它们也有大量的布线，有某种单元，大概就类似于神经元触点，或者说一根神经到另一根神经的联结点。思维和计算机之间的联系是一个非常有趣的课题，但我们在这里没有时间作进一步的讨论。当然，必须懂得，这个课题在有关人们一般行为的真正复杂性上所告诉

我们的东西是非常之少的。人与人之间存在着如此巨大的差别，为了要达到那种理解将需要很长的时间，我们必须把研究起点退到更后面的地方。假如我们总算能够解决狗是怎样活动的，我们就已经走得够远了。狗是比较容易理解的，但是今天还没有一个人懂得狗是怎样活动的。

§3-7 情况何以会如此

为了使物理学不仅在仪器的发明方面，而且在理论方面对其他科学也有所裨益，有关的科学就必须向物理学家提供用物理学家的语言描述的研究对象。人们或许会问：“青蛙为什么会跳跃？”物理学家对此就回答不出。如果人们告诉他青蛙是什么，这里有这么多的分子，那里有神经，等等，情况就不同了。假如人们或多或少地告诉我们地球或者星星是怎样的，那么我们就能够把它们想象出来。要使物理理论有点用处，我们就必须知道原子的位置。要理解化学，就应当确切知道存在着哪些原子，不然就无法分析。当然，这只是限制因素之一。

在物理学的姐妹科学中存在着另一种物理学中不存在的问题，因为没有更好的措辞，我们可以称它为历史问题。情况何以会如此？假如我们懂得了生物学的一切，就会想要知道现在地球上的所有生物是怎样发展过来的。这就是生物学的一个重要部分——进化论。在地质学中，我们不仅要知道山脉正在怎样形成，而且要知道整个地球最初是怎样形成的，太阳系的起源，等等。当然，这就会使我们想要知道在宇宙的彼时有什么样的物质。恒星是怎样演化的？初始状态又是如何？这些都是天体的历史问题。今天我们已经弄清楚许多有关恒星的

形成及有关组成我们身体的元素的形成的知识，甚至还知道一些有关宇宙起源的事。

目前在物理学中还没有这种历史问题要研究。我们不会问：“这里是物理学的定律，它们是怎样变化而来的？”我们此刻不去想象物理定律以某种方式随时间而变化，不认为它们在过去与现在是有差别的。当然，不能排除这种可能，而且我们一旦发现果真如此，物理学的历史问题就将与宇宙发展的其余历史问题交织在一起，于是物理学家就要谈论天文学家、地质学家和生物学家同样的问题。

最后，在许多领域中普遍存在着一个物理问题，这是一个很古老的问题，但是还没有得到解决。这并不是寻找新的基本粒子的问题，而是好久之前——大约100多年前就遗留下来的一件事情。在物理学上没有一个人能够真正令人满意地对它进行数学的分析，尽管它对于姐妹科学来说是一个重要问题。这就是环流或湍流的分析。如果我们注视着一个恒星的演化，就会发现这样的情形，我们就可以推断出将要出现对流，但在这以后我们就再也无法推断会有什么事发生了。几百万年后这个星体会发生爆炸，但是我们想不出是什么道理。我们不能分析气候，也不知道地球内部的运动。这类问题的最简单的形式就是取一根很长的管子，使水高速通过。我们问：使一定量的水通过管子需要多大的压力？没有人能从基本原理和水的性质出发来分析它。如果水流得非常慢，或者用的是蜂蜜那样的黏性物质，那么我们可以分析得很不错。在你们的教科书上就有这方面的内容。我们真正不能处理的是实际的水流过管子的问题。这是一个我们有朝一日应当解决的中心问题，但是现在还没有解决。

有一位诗人曾经说过：“整个宇宙就存在于一杯葡萄酒中。”我们大概永远不可能知道他是在什么含义上这样说的，因为诗人的写作并

不是为了被理解。但是真实的情况是，当我们十分接近地观察一杯葡萄酒时，我们可以见到整个宇宙。这里出现了一些物理学的现象：弯弯的液面，它的蒸发取决于天气和风；玻璃上的反射；而在我们的想象中又添加了原子。玻璃是地球上的岩石的净化产物，在它的成分中我们可以发现地球的年龄和星体演化的秘密。葡萄酒中所包含的种种化学制品的奇特排列是怎样的？它们是怎样产生的？这里有酵素、酶、基质以及它们的生成物。于是在葡萄酒中就发现了伟大的概括：整个生命就是发酵。任何研究葡萄酒的化学的人也必然会像巴斯德（L.Pasteur）所做过的那样发现许多疾病的原因。红葡萄酒是多么的鲜艳！让它深深地留在人们美好的记忆中去吧！如果我们微不足道的有限智力为了某种方便将这杯葡萄酒——这个宇宙——分为几个部分：物理学、生物学、地质学、天文学、心理学，等等，那么要记住，大自然是并不知道这一切的。所以让我们把所有这些仍旧归并在一起，并且不要忘记这杯酒最终是干什么用的。让它最后再给我们一次快乐吧！喝掉它，然后把它完全忘掉！

[1] 在这里我是讲得多么匆促啊！在这个简短的叙述中，每一句话包含了多么丰富的内容！“星体和地球都由同样的原子组成。”我通常挑选跟这一样的小题目来讲课。据诗人们说，科学使星星失去了美丽——它们只不过是气体原子组成的球体。但事实上远不是这么一回事。我也会在荒凉的夜晚仰望星空，并感受它们。但我看到的比诗人少还是更多呢？无垠的天空丰富了我的想象，我那小小的眼睛扫遍这回转的天穹，就能注视这欢乐的天空，并能捕获100万年前发出的星光。宇宙是一幅无边无际的图案——我也是其中的一部分——也许组成我的身体的材料正是从某个已被遗忘的星球上喷射出来的，就像现正在那儿喷射的某个星球一样。假若我通过帕洛玛（Palomar）的巨大眼睛〔指安装在美国威尔逊（Wilson）山帕洛玛天文台的200 in光学望远镜——译者注〕来观察夜空，那么就会看到原来或许紧靠在一起的星群从某个共同的起点往四面八方奔驰而去。宇宙的模式，或者说它的含义，它的成因是什么？人们对这些问题有点了解是不会有损于宇宙的奥秘的。真理远比以往任何艺术家的想象更为奇妙！为什么现在的诗人不去歌颂它？为什么如果朱庇特（木星）像一个人，诗人就会歌颂它，但如果朱庇特是一个由甲烷和氨组成的旋转的巨大球体，诗人就默不作声了呢？

[2] 氦的英文名helium来自Helios（太阳神）。——译者注

第4章 能量守恒

§4-1 什么是能量

讲完对事物的一般性描述后，从这一章起，我们开始比较详细地研究物理学中各个方面的问题。为了说明理论物理学中可能用到的概念和推理的类型，我们现在来考察能量守恒定律，它是物理学最基本的定律之一。

有一个事实，如果你愿意的话，也可以说一条定律，支配着至今我们所知道的一切自然现象。没有发现这条定律有什么例外——就我们所知，它是完全正确的。这条定律称为能量守恒定律。它指出，在自然界所经历的种种变化之中，有一个称为能量的物理量是不变的。那是一个最抽象的概念，因为它是一种数学原理，说的是在某种情况发生时，有一个数量是不变的。它并不是一种对机制或者具体事物的描写，而只是一件奇怪的事实。起先我们可以计算某种数值，当我们看完了大自然耍弄的技巧表演后，再计算一次数值，其结果是相同的（有点类似于在红方格中的象，移动了几步后——具体步骤并不清楚——它仍然在某个红方格里。我们这条定律就是这种类型的定律）。由于这是一种抽象的概念，我们将用一个比喻来说明它的含义。

设想有一个孩子，或许就叫他“淘气的丹尼斯（Dennis）”，他有一堆积木，这些积木是绝对不会损坏的，也不能分成更小的东西。每一块都和其余的相同。让我们假定他共有28块积木。每天早上他的母

亲把他连同28块积木一起留在一个房间里。到了晚上，母亲出于好奇心很仔细地数了积木的数目，于是发现了一条关于现象的规律——无论丹尼斯怎样玩积木，积木数目仍然是28块！这种情况继续了好几天。直到有一天她发现，积木只有27块了，但是稍许调查一下就发现地毯下面还有一块——为了确信积木的总数没有改变，她必须到处留神。然而，某一天积木的数目看来有些变化，只有26块了！仔细的调查表明：窗户已经打开，再朝窗外一看，就发现了另外的两块积木。又有一天，经过仔细的清点表明总共有30块积木！这使她相当惊愕。以后才了解到有个叫布鲁斯（Bruce）的孩子曾带着他的积木来玩过，并留下了几块在丹尼斯的房间里。自从丹尼斯的母亲拿走了多余的积木，把窗关上，并且不再让布鲁斯进来以后，一切都归正常，直到有一次，她清点时发现只有25块积木。然而，在房间里有一个玩具箱，母亲走过去要打开这个箱子，但是孩子大声叫喊道：“不，别打开我的箱子”，不让她打开玩具箱。这时他母亲十分好奇，也比较机灵，她想出了一种办法，她知道一块积木重3 oz，有一次当她看到积木有28块时曾经称过箱子的重量为16 oz，这一次她想核对一下，就重新称一下箱子的重量，然后减去16 oz，再除以3，于是就发现了以下的式子接着，又好像出现了某种新的偏差，但是仔细的研究又表明，浴缸里脏水的高度发生了变化，孩子正在把积木扔到水里去，只是她看不见这些积木，因为水很混浊，不过在她的公式里再添上一项她就可以查明在水中有几块积木了。由于水的高度原来是6 in，每一块积木会使水升高1/4 in，因而这个新的公式将是

$$(\text{所见到的积木数}) + \frac{(\text{箱重}) - 16 \text{ oz}}{3 \text{ oz}} = \text{常数}. \quad (4.1)$$

$$(\text{见到的积木数}) + \frac{(\text{箱重}) - 16 \text{ oz}}{3 \text{ oz}} + \frac{(\text{水的高度}) - 6 \text{ in}}{1/4 \text{ in}} = \text{常数}. \quad (4.2)$$

在她的这个复杂性逐渐增加的世界里，她发现了用一系列的项来计算积木的方法，这些积木藏在不准她去的那些地方。结果，她得出了一个用于计算某个量的复杂公式，无论孩子怎样玩耍，这个量总是不变的。

这件事情和能量守恒有什么相似的地方呢？抽象地说，必须从这个图像中除去的最显著的一点就是，根本没有积木。在式（4.1）及式（4.2）中取走第一项，我们就会发现自己是在计算多少是有点抽象的东西。上述比较的相似之处在于以下几点。第一，当我们计算能量时，有时其中的一部分离开系统跑掉了，有时又有另一些能量进入这个系统。为了验证能量的守恒，必须注意我们没有把能量引入系统中或从系统中取走。第二，能量有许多不同的形式，对每一种形式都有一个公式。这些不同形式的能量是：引力能、动能、热能、弹性能、电能、化学能、辐射能、核能、质能。假如我们把表示这些能量的公式全都加在一起，那么，除非有能量逸出或有其他能量加入，否则其总和是不会改变的。

重要的是要认识到：在今天的物理学中，我们不知道能量究竟是什么。我们并不把能量想象成为以一定数量的颗粒物形式出现。它不是那样的。可是有一些公式可以用来计算某种数量，当我们把这些数量全部加在一起时，结果就是“28”——总是同一个数目。这是一个抽象的对象，它一点也没有告诉我们各个公式的机制或者理由是什么。

§4-2 重力势能

只有当我们的公式包含了所有形式的能量时才能理解能量守恒。我想在这里讨论一下地球表面附近的重力势能的公式，并用一种与历

史无关的方式来导出它，这种推导方式只是为这节课想出来的，也就是说一种推理思路，为的是要向你们说明一个值得注意的情况：从几个事实和严密的推理出发可以推断出很多有关大自然的知识。它也表明了理论物理学家是投身于怎样的一类工作。我们这里的推理仿照了卡诺讨论蒸汽机效率时所使用的极其杰出的论证方式^[1]。

让我们考虑一种起重的机械，它有这样的特点：用降低一个重物的方法来提高另一个重物。此外还假设：在这种起重机械中不可能有永恒的运动（事实上，根本不存在什么永恒运动，这正是能量守恒定律的一般表述）。在定义永恒运动时必须特别小心。首先，我们定义起重机械的永恒运动。假如我们提起和放下一些重物并使机械回复到原来的状态后，发现最后的结果是提升了一个重物，于是我们就有了永恒运动的机械，因为我们可以利用被提起的重物使另外的一些东西运转。这就是说，提起重物的机械精确地回到原来的状态，而且是完全独立完成的——它没有从外界（就像布鲁斯的积木）取得能量来抬高这个重物。

图4-1所示是一台很简单的起重机械。这台机械举起三个单位的重物。我们把这三个单位的重物放在一个秤盘里，在另一端秤盘内则放置一个单位的重物。但是，为了使机械实际上能工作，我们必须在左边减去一点点重量。另一方面，我们可以通过降低三个单位的重物来升高一个单位的重物，只要我们在右边的盘子里提起一点点重量。当然，我们认识到，对于任何实际的起重机械来说，为了使它运行，必须施加一点额外的作用。这一点我们暂时不去考虑。理想的机械并不需要额外的作用，然而它们事实上是不存在的。我们实际使用的机械在某种含义上可以说几乎是可逆的，即假如降低一个单位的重物能使

这种机械提升三个单位的重物的话，那么降低三个单位的重物也能使这种机械把一个单位的重物提升到接近原来的高度。



图 4-1 简单的起重机械

我们设想存在着两类机械：一类是不可逆的，它包括所有的真实的机械；另一类是可逆的。当然实际上它是不可能达到的，不管我们怎样仔细地去设计轴承、杠杆，等等。但是，我们假设有这样的东西——一台可逆机，在它使一个单位（1 lb 或任何其他单位）重的物体降低一个单位距离的时候提起了三个单位的重物。把这台可逆机称为 A 机。假定它使三个单位的重物升高的距离是 x 。此外，假设还有另一台机械——B 机，它不一定是可逆机，并且也使一个单位的重物降低一个单位距离，不过使三个单位的重物升高的距离是 y 。我们现在可以证明 y 不会高于 x ，这就是说，不可能建造这样一种机械，能把重物提得比可逆机所提到的高度还要高。让我们来看看为什么是这样。假设 y 大于 x 。我们用 B 机使一个单位的重物降低一个单位距离，这使三个单位的重物升高距离 y 。然后，我们可以使这个重物从 y 降到 x ，获得自由的能量，再利用可逆机 A 反向运转，使三个单位的重物降低 x 而使一个单位的重物升高一个单位距离。这样，一个单位的重物回到了原来的高度，而这两台机械又处于初始的备用状态！因此，假如 y 高于 x ，那么就会有永恒运动，但我们已经假设这是不可能的。于是利用这些假定，我们就能够推导出 y 不会比 x 高，因此在所有可能设计的机械中，可逆机是最好的。

我们还可以看出所有的可逆机提升的高度一定完全相同。假定B的确也是可逆的。当然，前面关于 y 不会高于 x 的论据现在同样成立，但是我们也可以把这两台机械的工作顺序倒过来，即反之论证 x 不高于 y 。这一点是很值得注意的，因为它使我们能够在不考察内部机制的情况下分析不同的机械对物体可以提升的高度。我们立刻知道，如果有一个人制作了一组极其精巧的杠杆，利用这组杠杆使一个单位的重物降低一个单位距离就可以把三个单位的重物提升到某一个高度，把这组杠杆和一个具有同样用途的简单的可逆的杠杆作比较就可以知道，它不会比简单的可逆的杠杆提得更高，而是或许还会低一些。假如这个人的机械是可逆的，我们也能精确地知道它可以提得多高。概括地说就是：每一台可逆机械无论怎样运转，当它使一个单位的重物下降一个单位距离时，总是会使三个单位的重物提升同样的距离 x 。很清楚，这是一条非常有用的普遍定律。接下来的问题自然是 x 是多少？

假如我们有一台可逆机，它能在3对1时提升距离 x 。在图4-2中，我们在一个固定的多层架子上放置三个球。另外有一个球放在离地面1 ft的台上。这台机械可以使一个球降低1 ft来抬高三个球。现在，我们来这样安排：设容纳三个球的升降台有一层底板和两层架子，间隔正好是 x 。其次，容纳球的多层架的间隔也是 x [图4-2 (a)]。首先我们使小球从多层架水平地滚到升降台上的架子中去 [图4-2 (b)]，我们假设这并不需要能量，因为高度并没有改变。于是开动可逆机进行工作：它使一个球降到底层，而使升降台升高距离 x [图4-2 (c)]。由于我们已经巧妙地安排了多层架，于是这些球又和架子相平。接着我们把球卸到了多层架上 [图4-2 (d)]。卸了球以后，我们可以使机械回复到初始状态。现在在上面三层架子上有三个球，在底部有一个球，但奇怪的是从某种观点上讲，我们根本没有使其中

两个升高，因为，无论如何第二层和第三层架子像以前一样里面装着球。因此，最后的效果是使一个球升高了 $3x$ 距离。假如 $3x$ 超过1 ft，那么我们就可以把小球放下来使机械回到初始状态 [图4-2 (f)]，这样就能使这个装置再次运转。所以 $3x$ 不可能超过1 ft，因为如果 $3x$ 超过1 ft，我们就能创造出永恒运动。同样，使整台机械反向运行，我们可以证明，1 ft不能超过 $3x$ ，因为这是一台可逆机。所以 $3x$ 既不大于也不小于1 ft，这样我们只是通过论证就发现了一条规律， $x = 1/3$ ft。显然，这条规律可以推广为：开动一台可逆机使1 lb重物降下一定距离，那么这台机械可以使 p lb重物提高那段距离的 $1/p$ 。另一种表示结果的说法是：3 lb乘以所提高的距离（在我们的问题中是 x ），等于1 lb乘以所降低的距离（在这种情况下是1 ft）。如果我们先把所有的球的重量分别乘以它们现在所在的高度，然后使机械运转，再把所有的球的重量乘以它们所在的高度，得出的前后结果不会有任何改变（我们必须把例子中只移动一个重物的情况推广到当我们降低一个重物就能提升几个不同的重物的情况——但这是不难的）。

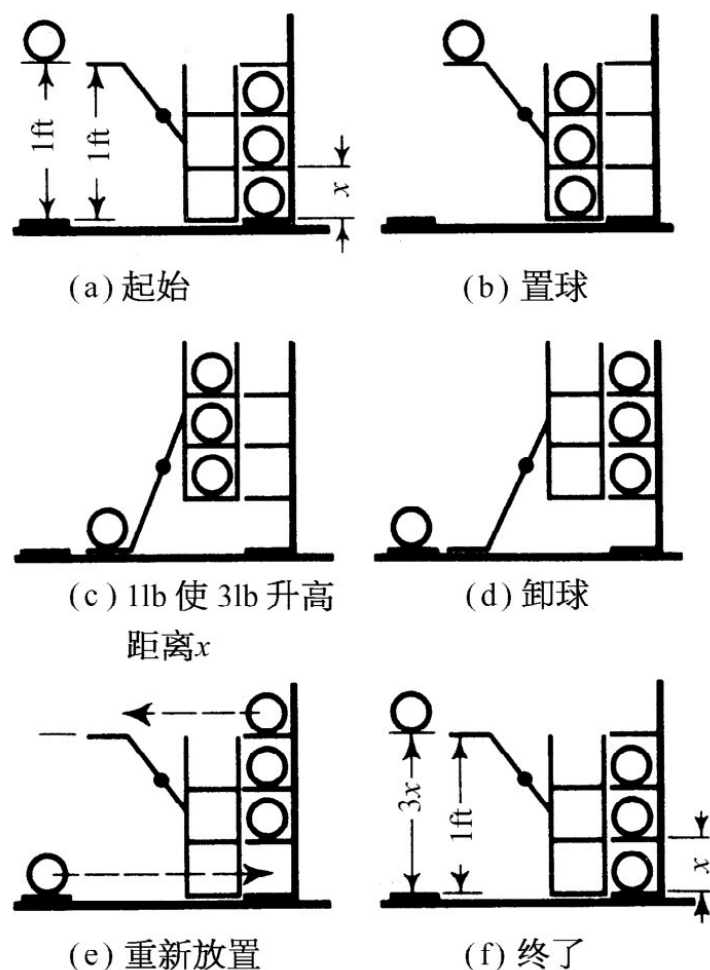


图4-2 一种可逆机

我们把重量和高度的乘积之和称为重力势能——这是一个物体在空间上与地球之间的相互关系而具有的能量。那么，只要我们离地球不是太远（当位置很高时重力要减弱），重力势能的公式就是

$$(\text{一个物体的重力势能}) = (\text{重量}) \times (\text{高度}) . \quad (4.3)$$

这是一条十分优美的推理思路。唯一的问题在于，或许这并不是实际的情形（无论如何，大自然无须按我们的推理行事）。例如，也许永恒运动事实上是可能的。某些假设可能是错误的，我们的推理或许有错误，所以验证总是必要的。事实上，实验证明它是正确的。

那种与物体间相对位置有关的能量的一般名称就称为势能。当然，在上面的特殊情况中，我们则称它为重力势能。如果我们克服电力做功，而不是克服重力做功，即用许多杠杆“提升”一些电荷使之离开其他的电荷，那么所包含的能量就称为电势能。一般的原理是能量的变化为有关的力乘以力所推过的距离，而且这是一般的能量变化

$$(\text{能量的变化}) = (\text{力}) \times (\text{力的作用所通过的距离}) . \quad (4.4)$$

随着课程的进展我们还要讲到其他的种种势能。

在许多情况下能量守恒原理对于推断会发生什么事都是非常有用的。在高中你们已学过许多有关不同用途的滑轮和杠杆的定律。我们现在可以看到所有这些“定律”都是一回事，并且不需要记住75条法则。一个简单的例子是如图4-3所示的一个光滑斜面，很巧，这是一个边长为3—4—5的三角形。我们在斜面上用滑轮挂上一个1 lb重的物体，而在滑轮的另一端悬挂一个重物 W 。我们想知道为了平衡在斜面上的1 lb重物， W 必须是多重？怎样来求出答案呢？假如我们说情况正好是平衡的话，那就是可逆的，因而可以使重物上下移动。所以，我们可以考虑下述情况。起初，如图4-3（a）所示，1 lb重物在斜面底部，而重物 W 在斜面的顶端。当 W 以一种可逆的方式滑下去后，1 lb的物体就在斜面顶部，而 W 经过的距离就是斜边的长度，如图4-3（b）所示，即5 ft。我们使1 lb重的重物只提高了 3 ft而使 W 降低了5 ft，所以， $W=3/5$ lb。注意，我们是从能量守恒，而不是从力的分解来得出这个结论的。然而在这里，巧妙总是相对的。可以用另一种更高明的方法来推导这个结果，这个由斯蒂维纳斯所发现的方法就铭刻在他的墓碑上。图4-4说明这个重物一定是3/5 lb，因为这个圆球链并没有转动，很明显，链条的下端的部分是为自身所平衡的，所以一边

三个重物的拉力必须与另一边五个重物的拉力平衡，即按边长的比例。从图中你们可以看到， W 一定是 $3/5\text{ lb}$ 。

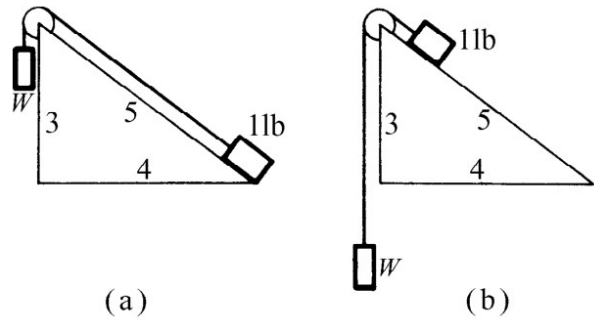


图 4-3 斜面

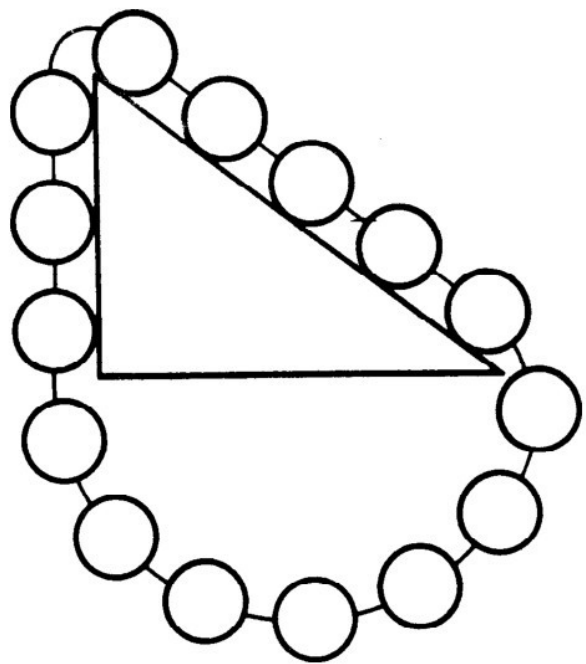


图 4-4 斯蒂维纳斯的墓志铭

现在用图4-5所示的螺旋起重器这个比较复杂的问题来说明能量原理。转动螺旋的把柄长为 20 in ，螺纹为每英寸 10 圈（即 10 in^{-1} ）。我们想知道，为了举起 1 t （约 $2\,000\text{ lb}$ ）的重物，在把柄上要施加多大的

力？假如我们要使1 t重物升高1 in，就必须使把柄转10圈。把柄转一次时大约走过126 in，所以它总共要走过1 260 in。如果我们利用各种滑轮之类的机械，就可以用加在柄的端点上的一个未知的小重物 W 来举起1t的重物。我们发现， W 大约是1.6 lb。这就是能量守恒的一个结果。

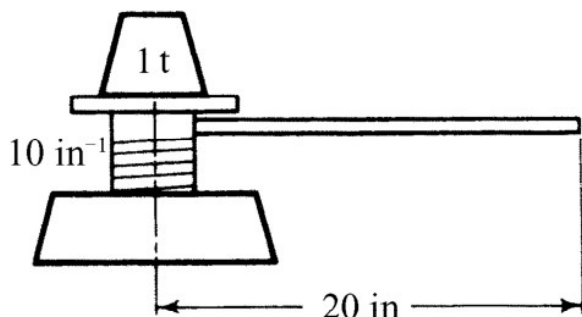


图4-5 螺旋起重器

在图4-6中我们举一个稍为更复杂一点的例子。一根8 ft长的棒，一端被支撑着，在棒的中间有一个60 lb的重物，离支点2 ft处还有一个100 lb的重物。假如不考虑棒的重量，为了保持它的平衡，我们要在棒的另一端加多大的力？假设在棒的那一端放上一个滑轮，并在滑轮上悬挂一个重物 W ，为了使棒平衡， W 应当是多重？我们设想 W 落下任意一段距离，为了简便起见，设它下降了4 in，那么这两个重物要升高多少呢？棒的中心升高了2 in，而离固定端2 in处的那一点升高了1 in，所以，各个重物与高度的乘积之和不变。这个原理告诉我们， W 乘以下降的4 in，加上60 lb乘以升高的2 in，再加上100 lb乘以升高的1 in，其和必定是零

$$-4W + 2 \times 60 + 1 \times 100 = 0, \quad W = 55 \text{ lb.} \quad (4.5)$$

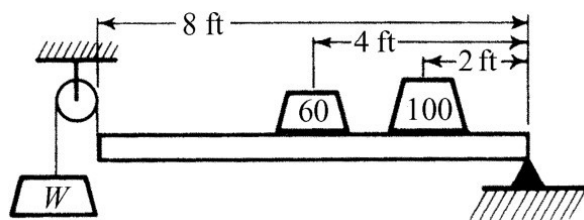


图4-6 一端支撑着的荷重杆

这就是说，为了使棒平衡，必须加上一个55 lb的重物。用这种方法，我们可以得出“平衡”定律——复杂的桥梁建筑的静力学，等等。这种处理问题的方法称为虚功原理，因为为了进行这种论证，我们必须设想系统移动一下——即使它实际上没有移动，甚至不能移动。为了运用能量守恒的原理，我们用了很小的假想的运动。

§4-3 动能

为了说明另一种形式的能量，我们来考虑一个单摆（图4-7）。假如我们把它拉向一边，再把它放开，它就会来回摆动。在这种运动中，每当从端点跑向中点时，它的高度降低了，这时势能跑到哪里去了呢？当摆降到底部时，势能就消失了，不过，它将再次爬上来。可见重力势能必定转变为另一种能量形式。很明显它是依靠了自己的运动才能重新爬上来的。所以，当它到达底部时，重力势能就转变为某种其他形式的能量。

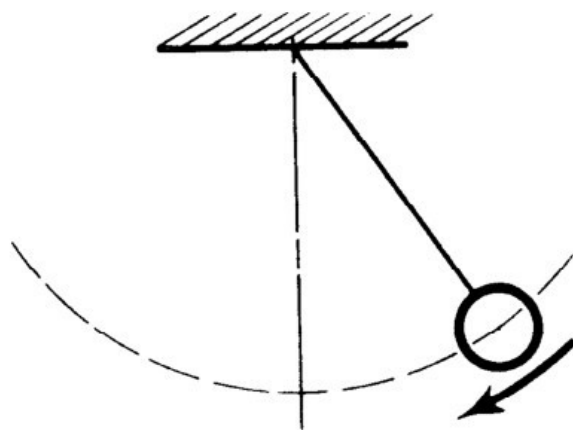


图4-7 单摆

我们应当得出一个运动能量的公式。现在，回想一下关于可逆机的论证，很容易看出，在底部的运动必定具有一定量的能量，可使摆升高到一定高度，这个能量与摆上升的机制无关，或者说与上升的路径无关，所以与我们对孩子玩积木的情形所写出的公式一样，这里也有一个（两种能量间的）等价公式。我们有另一种表示能量的形式，要说明它是不难的。摆在底部的动能等于重量乘以它能升高的高度： $K.E.=W \cdot H$ 。现在需要的是一个利用某种与物体的运动有关的规则来说明摆动高度的公式。假如我们以一定的速度直接朝上抛出一个物体，它将到达一定的高度。我们暂时还不知道到底有多高，但是它依赖于速度——关于这个，有一个相应的公式。于是，为了找到物体以速度 V 运动的动能的公式，我们必须计算它能到达的高度，再乘以物体的重量。我们立刻就会知道，可以把动能写成这种形式

$$K.E.=WV^2 / (2g) . \quad (4.6)$$

当然，运动具有能量这个事实与物体处于重力场内这件事毫无关系。无论运动怎样产生，这都没有关系。这是一个适用于各种速度的一般公式。式（4.3）及式（4.6）都是近似的公式。式（4.3）在高度很大

时是不正确的，因为这时，重力要减弱，而式（4.6）在高速时要加以相对论性的校正。然而，当我们最后得到动能的精确公式时，能量守恒定律则是正确的。

§4-4 能量的其他形式

我们可以继续以这种方法来说明能量还以其他的形式存在。首先考虑弹性能。假如我们拉伸弹簧，就必须做一些功，因为拉伸时，可以提起重物，所以弹簧在伸长的情况下具有做功的可能性。假如我们求出重量与高度的乘积之和，那将与总能量不符——我们必须加上另外的一些东西来说明弹簧处于拉紧状态这一事实。弹性能就是关于弹簧被拉伸时这个事实的表述，它有多大呢？假如我们释放弹簧，那么弹簧经过平衡点时，弹性能就转变为动能，能量就在弹簧的伸长、压缩和动能之间来回变换（这里也有一些重力势能的增减，但是如果我们愿意的话，可以使实验“平着”做）。弹簧将一直来回振动，直到能量失掉为止……啊哈！前面我们已经在整个过程中玩了一点小小的手法——如加上一些小重物使物体运动，或者说机械是可逆的，它们可以永远运动下去等。但是，我们可以看到这些东西最终都要停下来的。当弹簧不再上下振动时，能量到哪里去了呢？这就引进了另一种形式的能量：热能。

在弹簧或杠杆里有着由大量原子组成的晶体。在极其仔细和精致地安排了机械的各个组成部分后，人们可以试着使事情调整得当某个东西在另一个东西上滚动时，根本没有一个原子会作任何跳动。但是我们必须非常小心。通常在机器运转时，由于材料本身的缺陷，会产生撞击和跳动，材料中的原子就开始无规则地摆动。于是那部分能量

失踪了，但我们却发现机械运动减慢后，材料中的原子正以杂乱无章的方式摆动着。不错，这里仍然有动能，但是它与看得见的运动没有联系。多么奇怪！我们何以知道这里仍然有动能呢？我们发现，从温度计上可以看出，事实上弹簧或杠杆变热了，所以动能确实有了一定数量的增加。我们称这种形式的能量为热能。但是我们知道这实在并不是一种新的形式，它就是内部运动的动能（我们在宏观范围内对物质所做的一切实验中都有一个困难，即不能真正演示出能量守恒，也不能实际制成可逆机，因为每当我们使大块材料运动时，原子不会绝对不受扰动，所以总有一定量的无规则运动进入原子系统。我们无法用眼睛看出这一点，但是可以用温度计或其他方式测量出来）。

还有许多其他形式的能量，当然，眼下不可能对它们叙述得更详细。这里有电能，它与电荷的吸引和排斥有关；也存在着一一种辐射能，即光能，我们知道它是电能的一种，因为光可以表示为电磁场的振动；还有化学能——在化学反应中释放的能，它是原子彼此间相互吸引的能量。弹性能也是如此，所以实际上，弹性能在一定程度上就像化学能。我们目前对化学能的理解是，化学能可分为两部分：首先是原子内电子的动能，所以化学能的一部分是动能，其余一部分是电子和质子的相互作用所产生的电能。接下去我们来考虑核能，它涉及原子核内的粒子的排列。我们有核能的公式，但是没有掌握基本的定律。我们知道它不是电能，不是重力能，也不纯粹是化学能，还不知道它究竟是什么。看来这是另外的一种能量形式。最后，存在着一个与相对论有关的对动能定律的修正（或者随便哪一种你喜欢用的说法），也就是说动能与另一种称为质能的东西结合在一起。一个物体由于它的纯粹的存在就有能量产生。假如有一个静止的电子和一个静止的正电子起先稳定地搁置着而不发生任何作用——既不去考虑引力效应，也不去考虑其他，然后当它们碰在一起时就会湮没，并释放出

一定量的辐射能，它是可以计算的。为此我们需要知道的只是物体的质量，而与究竟是什么物体无关。两个粒子消失后，就产生了一定的能量。爱因斯坦首先找到了计算公式，即 $E=mc^2$ 。

从我们的讨论中可以很明显地看到，在进行分析时，能量守恒定律是极其有用的。我们已经在几个例子中表明了这一点，在那些例子中并没有知道所有的公式。假如我们有了各种能量的公式，那么无需深入细节就能分析出有多少过程应当会发生，所以守恒定律是非常有趣的。由此很自然会产生一个问题：在物理学中还有哪些其他守恒定律？有另外两条守恒定律是与能量守恒定律类似的，一条称为线动量守恒，另一条称为角动量守恒，关于这方面我们会在以后知道得更多。归根到底，我们并没有深刻地理解守恒定律。我们不理解能量守恒。我们并不认为能量是一定数量的颗粒物。你们也许听说过光子是以一个个的颗粒形式出现的，一个光子的能量是普朗克常数乘以频率。这是正确的。但由于光的频率可以是任意的，所以没有哪条定律断言能量必须是某种确定的数值。与丹尼斯的积木不同，能量的数值可以是任意的，至少今天的理解是如此。所以在目前我们并不把能量理解为对某种东西的计数，而只是看作一种数学的量。这是一种抽象而又十分奇怪的情况。在量子力学中，我们知道能量守恒与自然界的一个重要性质——事物不依赖于绝对时间——有十分密切的关系。我们可以在一个给定的时刻安排一个实验，并且完成它，然后在晚一些的时候再做同样的实验，那么实验的情形将完全是相同的。但这是否严格正确，我们并不知道。如果我们假设它是正确的，再加上量子力学的原理，我们就可以推导出能量守恒定律，这是一件相当微妙和有趣的事，不容易加以解释。其他的守恒定律也有连带的关系。动量守恒定律在量子力学中与一个命题有关，即无论你在哪里做实验都不会造成什么差别，结果总是同样的。最后，像空间上的无关性与动量守

恒相联系、时间上的无关性与能量守恒相联系一样，假如我们转动仪器的话，这也不会造成任何差别，所以宇宙世界在角度取向上的不变性与角动量守恒相关。此外，还有三条其他的守恒定律。迄今为止我们可以说，这些定律是精确的。它们要容易理解得多，因为在本质上它们是属于清点积木一类的事。

这三条守恒定律中的第一条是电荷守恒定律，这只是意味着，数一下你有多少正电荷，多少负电荷，将正电荷的数量减去负电荷的数量，那么这个结果将永远不会改变。你们可以用一个负电荷抵消一个正电荷，但是你们不可能创造任何正电荷对负电荷的净余额。另外两条守恒定律与这一条相类似。一条称为重子的守恒。存在着一些奇异粒子，例如中子和质子，它们称为重子。在任何自然界的反应中，假如我们数一下有多少重子进入一个反应，那么在反应结束时出去的重子^[2]的数量将完全相同。还有一条是轻子守恒定律。我们可以举出称为轻子的一群粒子：电子， μ 子和中微子，还有一个电子的反粒子，即正电子（轻子数为-1）。在一个反应中对轻子的总数进行计数将揭示出这个事实：进入的数量与出去的数量决不会改变，至少就今天所知就是如此。

这就是六条守恒定律，其中三条是微妙的，与空间和时间有关，另外三条从对某种东西进行计数的意义上说是简单的。

关于能量守恒，我们应当指出，可资利用的能量是另一回事——在海水中的原子进行着大量的晃动，因为海水具有一定的温度，但是如果不从别处取得能量，就不可能使原子都按一个确定的方向运动。这就是说：虽然我们不知道能量确实守恒，但是可供人类利用的能量并

不那么易于保存。确定究竟有多少能量可供利用的那些定律称为热力学定律，它们包括一个称为熵的有关不可逆热力学过程的概念。

最后，我们提一下这个问题：今天我们可以从哪里获得能量？我们的能量来源是太阳、雨水、煤、铀以及氢。太阳形成了降雨，也造成了煤矿，所以所有这些都起源于太阳。虽然能量是守恒的，但看来大自然对此并无兴趣，她使太阳释放了大量的能量，但其中只有二十亿分之一到达地球。大自然保存着能量，不过实际上并不关心这一点，它让巨大数量的能量向四面八方散布开去。我们已经从铀中得到能量，从氢中也能得到能量，但是，现在只是在爆炸的危险的条件下才得到这些能量。假如可以在热核反应中控制它，那么每秒钟从10 qt 水中得到的能量就等于整个美国每秒钟所发的电量，每分钟用150 gal 的水，就会使你们有足够的燃料来供应今天在整个美国所需要使用的能量！所以，怎样想出一些办法使我们从对能量的需要中解放出来就成为物理学家的责任。无疑，这是可以达到的目标。

[1] 事实上你们可能已经知道公式（4.3），因此这一讨论的意义与其说是得出式（4.3），不如说是表明能用推理论证的方法来得出这样的结果。

[2] 反重子的重子数记为（-1）。

第5章 时间与距离

§5-1 运动

在这一章里我们将研究时间和距离这两个概念的某些方面。上面我们曾经强调过，物理学像所有其他科学一样是依赖于观察的，人们或许还可以说，物理科学发展到它今天这种形式在很大程度上是由于强调了要进行定量的观察。唯有通过定量的观察，人们才能得到定量的关系，这些关系是物理学的核心。

很多人都喜欢把伽利略在350年前所做的工作看作是物理学的开端，并且称他为第一个物理学家。在此之前，对运动的研究是一种哲学上的事情，它所根据的是人头脑中所能想象出来的一些论据。大部分的论据是由亚里士多德和其他希腊哲学家提出的，并且被认为是“已经证明”了的。伽利略采取一种怀疑的态度，关于运动他做了一个实验，这个实验主要是这样的：他让一个球沿一斜面滚下，并且观察它的运动。然而他并不只是观察而已，而且还测量了在多长一段时间内小球跑了多远一段距离。

在伽利略之前很久，人们已经很好地掌握了测量距离的方法，但是，对于时间的测量，特别是短时间的测量，还没有精确的方法。虽然伽利略后来设计了比较准确的时钟（不过不像我们今天所见到的那样），但他在第一次做运动实验时是用他的脉搏来数出等间隔的时间的。让我们也来做一下这个实验。

当小球沿着轨道滚下时（图5-1），我们可以数自己的脉搏：“一……二……三……四……五……六……七……八……”我们请一个朋友于每数一次就在小球所到达的位置上做一个小记号；然后就可以测量小球从被释放的位置开始在1个、2个或3个相等的时间间隔内所经过的距离。伽利略用下面这种方法来表述他的观察结果：如果从小球释放的时刻算起，它的位置是在1，2，3，4，……单位时间记下的，那么这些记号离开起点的距离就正比于数1，4，9，16，……。今天我们会这样说：距离与时间的平方成正比

$$s \propto t^2。$$

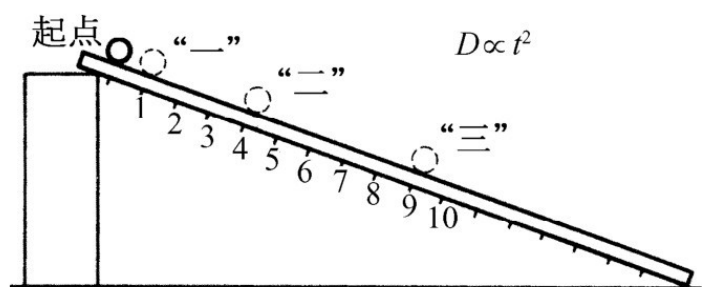


图5-1 一个小球沿着斜面滚下

运动 的研究对所有的物理领域是一件基本的事，它所讨论的问题是：何处？何时？

§5-2 时间

让我们先来考察一下何谓时间。时间究竟是什么？假如我们能够找到时间的一个确切的定义那该是多好。在韦伯斯特辞典里把“一段时间（a time）”定义为“一个时期（a period）”，又把后者定义为“一段时间”。这种定义看来并不十分有用。或许我们应该说：“时间就是不发

生其他事情时所发生的事。”然而这也未必使我们的理解深入。事实上（就字典的含义来说）时间很可能是我们不能定义的事物之一。面对这个事实也许并没有什么不好。我们干脆说时间就是我们所知道的那回事：它就是我们等了多久！

不管怎样，重要的不在于我们如何来定义时间，而在于我们如何来测量它。测量时间的一种方法是利用某种能以有规则的方式一再发生的事情，即某种能周期性发生的事情。例如，一个昼夜。昼夜似乎是一再重复出现的。然而你思索一下，也许就会问：“昼夜是否系真正周期性重复的？它们是否有规则地变化着？每一天是否都同样长？”人们肯定会有这种印象，夏天的日子比冬天的日子长。当然，在人们感到非常无聊的时候，总觉得冬天的有些日子长得可怕。你们一定会听到过有人这么说：“哎呀，这是多么长的一天！”

但是就平均而言，日子确实大致一样长。我们有没有什么方法来检验日子——不论从某一天到下一天，还是（至少）就其平均而论——长短相同与否？一个办法是把它同某种别的周期性现象作比较，我们来看怎样能用一个沙漏来作这种比较。如果我们让某个人昼夜站在它的旁边，每当最后一粒沙掉下之后，他就把沙漏倒转过来，这样，我们用沙漏就能“创造”一个周期性的事件。

于是，我们就能计算从每天早上到下一天早上倒转沙漏的次数，这一次我们大概会发现每一“天”的“小时”数（即倒转沙漏的次数）并不相同。这样，我们就会怀疑太阳或者沙漏，或者怀疑这两者。在加以思索之后，我们或许会想到要计算从这个中午到下一个中午的“小时”数（在这里中午的定义并不是12:00，而是指太阳在其最高点的时刻）。这一次我们将会发现，每一天的小时数都是相同的。

现在我们比较有把握认为“小时”和“昼夜”具有一种有规则的周期性，也就是说，它们划分出相继的等时间间隔，虽然我们没有证明它们中不论哪一个“确实”是周期性的。或许有人会问：是否会有某个万能者在夜间使沙漏中的流动变慢，而在白天又把它加快？我们的实验当然无法对这类问题作出回答，我们所能说的，只是发现一种事物的规则性与另一种事物的规则性相吻合而已。我们只能说把时间的定义建立在某种明显是周期性事件的重复性上。

§5-3 短的时间

现在我们要指出，在检验昼夜的重复性这个过程中我们获得了一个重要的副产品，这就是找到了一种比较精确地测量一天的几分之一的方法，亦即找到了一种用较小的间隔来计量时间的方法。能不能把这种过程再往前发展，从而学会测量更小的时间间隔呢？

伽利略断定，只要一个摆的摆幅始终很小，那么它将总以相等的时间间隔来回摆动。如果做这样一个实验，对摆在一个“小时”内的摆动次数进行比较，那么这个实验就会表明，情况确实如此。我们用这个方法可划分出一个小时的几分之一。假如我们利用一个机械装置计点摆动次数，并且保持摆动进行下去，那么就得到了我们祖父一代所用的那种摆钟。

让我们约定，如果我们的摆一个小时内振动3 600次（并且如果一天有24个这样的小时），那么我们就称每一摆动的时间为1“秒”。这样，就把原来的时间单位分成大约 10^5 个部分。我们可以应用同样的原理把秒分成更加小的间隔。你们可以理解，制造一个能够走得任意快的机械摆是不现实的，但是我们现在能够制造一种称为振荡器的电

学摆，这种电学摆能提供周期很短的摆动。在这种电子振荡器中，是电在来回振动，其方式与摆锤的摆动方式相类似。

我们可以制造一系列这种电子振荡器，每一个的周期要比前一个减小10倍。每一个振荡器可用前一个较慢的振荡器这样来“定标”，即数出较慢的振荡器振动一次时它所振动的次数。当我们的钟的振动周期小于1 s的几分之一时，如果没有某种辅助装置以扩展我们的观察能力，那就无从计点振动的次数。这种装置之一是电子示波器，它的作用就像一种观察一短时间用的“显微镜”。这个装置在荧光屏上画出一幅电流（或电压）对时间的图像。将示波器依次与我们的系列中相继的两个振荡器相连，它就先显示出一个振荡器中的电流图像，然后显示出另一个振荡器中的电流图像，从而得到如图5-2所示的两幅图像。这样，我们就很容易测出较快的振荡器在较慢的振荡器的一个周期中振动的次数。

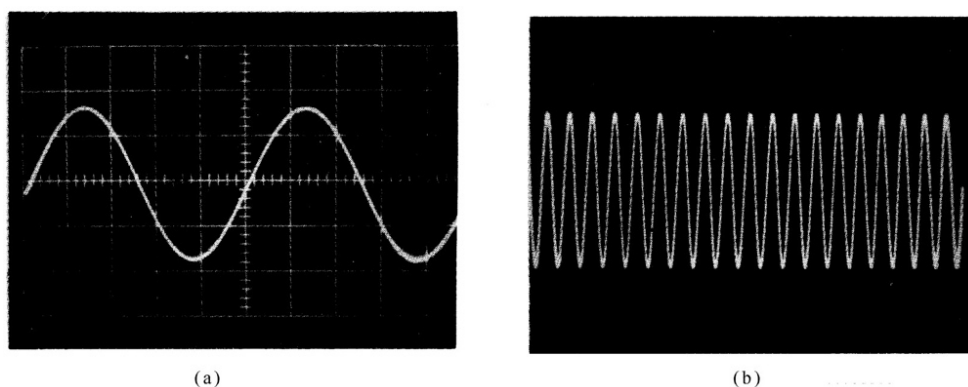


图5-2 示波器屏上的两个图像。在（a）中，展示的是示波器与一个振荡器相连接时的波形；在（b）中，展现了它与另一个其周期只有前者十分之一的振荡器相连接时的波形

利用现代电子技术，已经制造出周期短到大约 10^{-12} s的振荡器，并且可以按照前面描述的那种比较方法用我们的标准时间单位——秒

来予以定标。近年来，随着“激光器”或光放大器的发明和完善，已能制造周期甚至比 10^{-12} s更短的振荡器了，但是还不能用上述那些方法来予以定标，虽然毫无疑问，这不久一定能够做到。

比 10^{-12} s还短的时间已经测量出来，但用的是另一种测量技术。事实上，这里所用的是“时间”的另一种定义。一个方法是观察发生在运动物体上的两个事件之间的距离。例如，假定有一辆行驶的汽车把它的车灯先开亮，然后再关掉。如果我们知道车灯开、关的地点以及车速，那么我们就能够求出灯开着的时间有多长。这段时间就是灯开着时所通过的距离除以汽车的车速。

近几年来，正是这种技术被用来测量 π^0 介子的寿命。 π^0 介子在感光乳剂中产生并在其中留下微细的踪迹，用显微镜观察这些踪迹时，我们就可看到，平均而言一个 π^0 介子（认为它以接近光速的某个速度运动）在蜕变之前大约走过了 10^{-7} m的距离，所以它的寿命总共只有大约 10^{-16} s。但是必须着重指出，这里我们用了一个与之前稍有不同的“时间”定义。然而，只要在我们的理解方面不出现任何不协调的地方，那么我们就觉得有充分的信心认为这些定义是足够等效的。

在把我们的技术——而且如有必要也把我们的定义——进一步加以扩展之后，就能推断更快的物理事件的持续时间，我们就可以谈论原子核振动的周期，以及第2章中提到过的那些新发现的奇异共振态（粒子）的寿命。它们的全部寿命只不过占 10^{-24} s的时间，大致相当于光（它以我们已知的最快速度运动）通过氢原子核（这个已知的最小物体）所花的时间。

那么，再短的时间呢？是不是还存在尺度更小的“时间”？如果我们不能够测量——或者甚至不能合理地去设想——某些发生在更短时间内的事件，那么要谈论更短的时间是否还有任何意义？可能没有意义。这是一些尚未解决的、但你们会提出的，而且也许在今后20或30年内才能回答的问题。

§5-4 长的时间

我们现在来考虑比一昼夜还长的时间。要测量较长的时间很容易，我们只要数一数有几天就是——只要旁边有人在做这种计数的工作。首先我们发现，自然界里存在着另一个周期性，即年，一年大约等于365天。我们还发现，自然界有时也为我们提供了计算年的一些东西，例如树木的年轮或河流底部的沉积物。在某些情况下，我们就能利用这些自然界的时间标记来确定从发生某种事件以来所经历的时间。

当我们不能用计算年的方法来测量更长的时间时，那就必须寻找其他的测量方法。最成功的方法之一是把放射性材料作为一只“钟”来使用。在这种情况下，并不出现像昼夜或摆那样周期性的事件，但是有一种新的“规则性”。我们发现，某种材料的样品，当它的年龄每增加一相同的数值时，它的放射性就减少一相同的分数。假如我们画一张图来表示所观察到的放射性作为时间的函数，那么我们就得到如图5-3所示的一条曲线。我们看到，如果放射性在 T 内减少到一半（称为“半衰期”），那么它在另一个 T 内就减少到 $1/4$ ，等等。在任一时间间隔 t 内共包含了 t/T 个半衰期，而在这段时间 t 后尚剩下的部分则是 $(1/2)^{t/T}$ 。

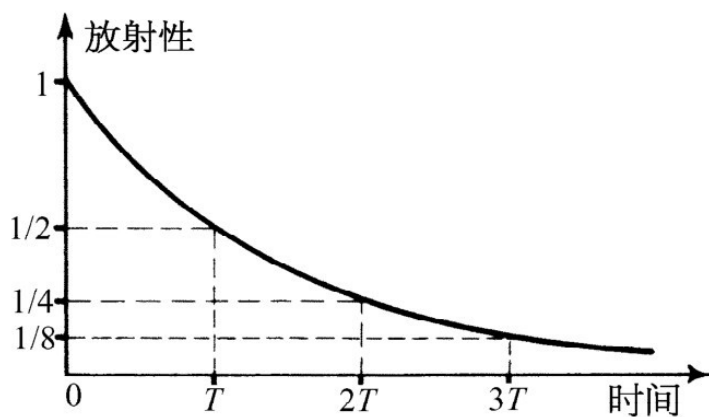


图5-3 放射性随时间而减小。在每一个“半衰期” T 中，放射性都减小一半

时间

a	s	具有该平均寿命之事物	
10^9	10^{18}	???????	
		宇宙的年龄	
10^6	10^{15}	地球的年龄	U^{238}
	10^{12}	最早的人	
10^3		金字塔的年龄	Ra^{226}
	10^9	美国的历史	H^3
	10^6	一个人的寿命	
	10^3	一天	
	1	光从太阳射到地球	中子
		一次心跳	

(续表)

a	s	具有该平均寿命之事物	
	10^{-3}	声波的周期	
	10^{-6}	无线电波的周期	μ 介子
			$\pi^\pm$ 介子
	10^{-9}	光通过 1 ft 距离	
	10^{-12}	分子转动的周期	
	10^{-15}	原子振动的周期	π^0 介子
	10^{-18}	光经过一个原子	
	10^{-21}	核振动的周期	
	10^{-24}	光经过一个原子核	奇异粒子
		???????	

如果我们知道一块材料，比如说一块木料，在它形成时其中含有数量为 A 的放射性物质，而我们用直接测量法发现它此刻的量为 B ，那么只要解方程

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T} = \frac{B}{A},$$

就能计算这一物体的年龄 t 。

幸运的是，在某些情况中，可以知道物体在形成时所包含的放射性总量。比如说，我们知道空气中的二氧化碳含有某一确定小量的放射性碳同位素碳14（它由于宇宙线作用而连续不断地得到补充），如果测量一个物体的碳的总含量，并且知道这个总含量的某一分数就是原来的放射性碳14，那么，就可知道上述公式中所要用到的那个开始时的总含量 A 。碳14的半衰期是5 000年，通过仔细的测量我们测出经20个左右的半衰期后所余留下来的数量，因此，就能够确定生成于100 000年以前那样古老的有机体的年代。

我们很想知道，并且认为也能知道比它更老的那些事物的寿命。许多有关这方面的知识，我们是通过测量具有不同半衰期的其他放射性同位素而得到的。如果我们用一种半衰期更长的同位素来进行测量，那么就能测得更长的时间。例如，铀有一种同位素，它的半衰期大约为 10^9 年，所以如果有一种物质在 10^9 年前形成时就含有这种铀，那么今天这种铀就只剩下一半。当铀蜕变时，它变成了铅。设想有一块岩石，它是在很久以前通过某种化学过程形成的。铅由于具有与铀不同的化学性质，它将出现在岩石的一个部分中，而铀则出现在岩石的另一部分中。铀和铅将互相分开。如果我们今天来考察那块岩石，

将发现在那种应该只有铀存在的地方，现在有某一分数的铀和某一分数的铅，通过对这两个分数的比较，我们就能说出百分之几的铀已消失并且变成了铅。利用这个方法，有些岩石的年龄被测定为几十亿年。这个方法的一个推广便是不用特定的岩石，而是着眼于海洋中的铀和铅，并且对整个地球取平均值。用这个推广了的方法（在过去几年中）曾测得地球本身的年龄大约为45亿年。

人们发现，地球的年龄与掉到地球上的陨石（也是用铀方法测定的）的年龄是相同的，这是一件令人鼓舞的事情。看来，地球是由漂浮在太空中的岩石形成的，而陨石很可能就是遗留下来的那些物质的残片。在50亿年前的某个时候，宇宙开始形成。现在人们认为，至少我们这部分宇宙起源于大约100或120亿年之前。我们不知道在此之前发生过什么事情。事实上我们又可以提问：这个问题是否有任何意义？更早的时间是否有任何意义？

§5-5 时间的单位和标准

我们在前面实际上已表明了，如果从时间的某个标准单位，比如一天或一秒出发，并把所有其他的时间表示为这个单位的倍数或分数，那么将十分方便。然而，我们将用哪个单位作为我们时间的基本标准呢？是否用人的脉搏跳动？如果我们比较各人的脉搏，那就会发现它们之间似乎差别很大。如果比较两只钟，则发现它们的变化不那么大。于是你们会说：好，就让我们采用钟吧！但是用谁的钟呢？有个故事讲到一个瑞士男孩，他想使他所在的镇上所有的钟在正午时刻都同时敲响，所以他就跑来跑去，穿家过院，想使人人相信这样做的好处。每个人都想，如果他的钟在正午敲响时，其他钟也全都敲响的

话，这该是一个多好的主意呀！然而要决定谁的钟应该取作标准，这倒是一件难事。幸运的是，我们大家都同意用一只钟，即地球。在很长一段时间里，人们把地球的自转周期当作时间的基本标准。但是当测量变得越来越精确的时候，人们发现，用最好的钟来进行测量，地球的转动也不是严格周期性的。我们有理由相信，这些“最好”的钟是精确的，因为它们彼此之间是相符的。由于种种理由，我们现在认为，有些天要比另一些天长，有些天要比另一些天短，平均而论，地球的自转周期是随着一个世纪一个世纪的过去而变长了一点的。

直到最近，我们还没有找到任何一个比地球的周期好得多的标准，所以把所有的钟同一天的长度联系了起来，而把一秒规定为一个平均日的 $1/86\,400$ 。最近我们对自然界中某些振荡器获得了一些经验。我们现在相信，这些振荡器可以当作比地球更稳定的时间参考物。而且，它们也是基于一个大家都能采用的自然现象。这就是所谓的“原子钟”。它的基本的内在周期，就是原子振动的周期，这种振动对于温度或任何其他外界影响都不十分敏感。原子钟能使时间的精确度达到 10^{-9} ，或者比之更高。在过去两年中，哈佛大学的拉姆齐教授研制了一种改进的原子钟，它是依靠氢原子的振动而工作的。拉姆齐认为，这种钟比其他原子钟精确100倍。现在他正在对之作测量，这些测量将表明他的说法是否正确。

既然现在有可能制作远比天文时间精确的钟，那么我们可以预期，科学家们不久就会一致同意采用许多原子标准钟中的一种来定义时间单位^[1]。

§5-6 长的距离

现在我们转到距离的问题上来。事物有多远或者有多大？人们都知道测量距离的方法是选用一种长度单位再加上计数，例如可以用尺或拇指边量边数。那么怎样来量比较小的东西呢？怎样把距离分小呢？这与我们将时间分小一样，我们同样取一个较小的单位，然后数出这个单位组合成一个较长单位时所需的数目。这样我们就能测量越来越小的长度。

但是我们并不总是把距离理解为用米尺量得的结果。仅仅用一根米尺是难以测量两个山顶之间的水平距离的。我们曾经凭经验发现可以用另一种方式来测量距离：即用三角法。虽然这意味着我们实际上对距离用了一个不同的定义，但当它们可以一起应用时，就应是彼此相一致。空间或多或少有点像欧几里得所设想的那个样子，所以距离的这两种定义是一致的。既然它们在地球上相一致，那就使我们充满信心用三角法来测量更大的距离。例如，我们当时曾用三角法测定了第一颗人造卫星的高度（图5-4）。我们测得的高度约有 $5 \times 10^5 \text{ m}$ 。如果测量得更仔细一点，则用同样的方法可以测出地球到月球的距离；安放在地球上两个不同地点的两个望远镜，将会告诉我們所需要的两个角度。用这种方法我们求得月球离我们有 $4 \times 10^8 \text{ m}$ 远。

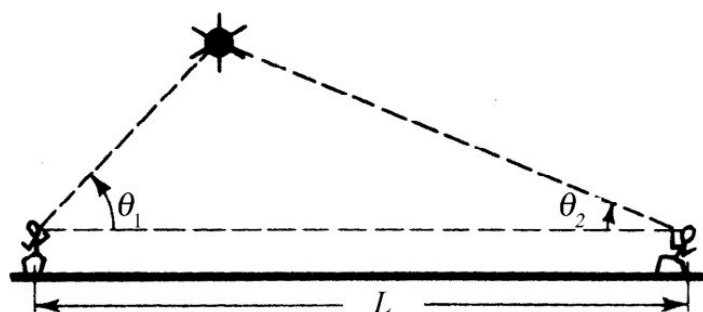


图5-4 用三角法测定人造卫星的高度

对于太阳，我们不能这样做，或者至少到现在没有人能够这样做。由于我们不能相当精确地对准太阳上一个特定的点，从而不能精确地测出两个角度，所以无法测出到太阳的距离。那么如何来测量这个距离呢？我们必须将三角法这个观念加以引申。我们可以通过天文观察方法来测量所有行星出现的位置之间的相对距离，从而得到一幅有关太阳系的图像，以显示每个行星间的相对距离。但这不是绝对距离。因此需要测出一个绝对距离，而这种绝对距离测量已由几种方法得到，其中直到最近以前还认为最精确的一个是测出地球到爱神星的距离。爱神星是一个时常靠近地球的小行星。如果对这个小天体应用三角法，就能得到一个所需要的比例尺度。由于知道了其他天体的相对距离，我们就能得出它们之间的绝对距离，例如地球到太阳，或地球到冥王星的绝对距离。

去年，我们在有关太阳系的比例尺度的了解上获得了巨大的进展。喷气推进实验室用直接的雷达观测非常精确地测定了地球到金星的距离。当然，这又是另外一种由推测而得到的距离。我们说，我们知道光传播的速度（而这也是雷达波传播的速度），并且假定，在地球与金星之间无论何处这个速度都相同。我们发射无线电波，并测得电波直到返回所需的时间，我们就能从时间来推测距离。这确实是距离测量的另一种定义。

可是我们如何来测量一个更遥远的恒星的距离呢？幸运的是，我们可以回到三角法上来，因为地球绕太阳公转，而这种转动就为测量太阳系外的恒星距离提供了一条基线。假如我们在夏天和冬天用望远镜对准一颗恒星，那么我们可以期望能足够精确地测出这两个角度，从而能测出地球到恒星的距离，如图5-5所示。

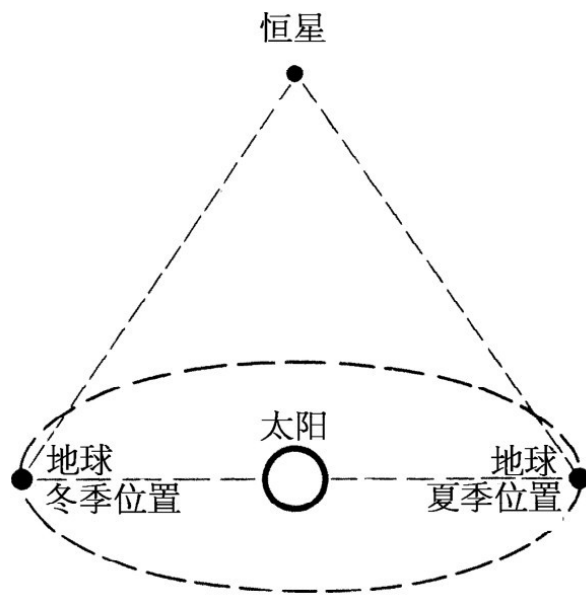


图5-5 利用地球轨道的直径作为基线，可以用三角法测量靠近地球的恒星的距离

如果恒星离得太远而不能应用三角法时又怎么办？天文学家总是在发明测量距离的新方法。例如，他们发现，从恒星的颜色可以估计它的大小和亮度。他们测定了许多靠近地球的恒星——这些恒星的距离已用三角法测得——的颜色和内在亮度，并且发现在恒星颜色和内在亮度（在大多数情况中）之间存在着一个平滑的关系。如果现在测出了一个遥远恒星的颜色，那就可以用颜色-亮度关系来确定这个星体的内在亮度。在测量了我们地球上看来这颗恒星有多亮（或许应该说有多暗）之后，我们就可以计算它有多远（对于一个给定的内在亮度，其表观亮度是随距离的平方而减小的）。对称为球状星团的一群恒星作测量后，所得的结果很好地证实了这种星际距离测量方法的正确性。图5-6是这样一群恒星的一张照片。只要看一下照片，人们就会相信这些恒星都聚集在一起。用颜色-亮度关系这个测量距离的方法得到了同样的结果。

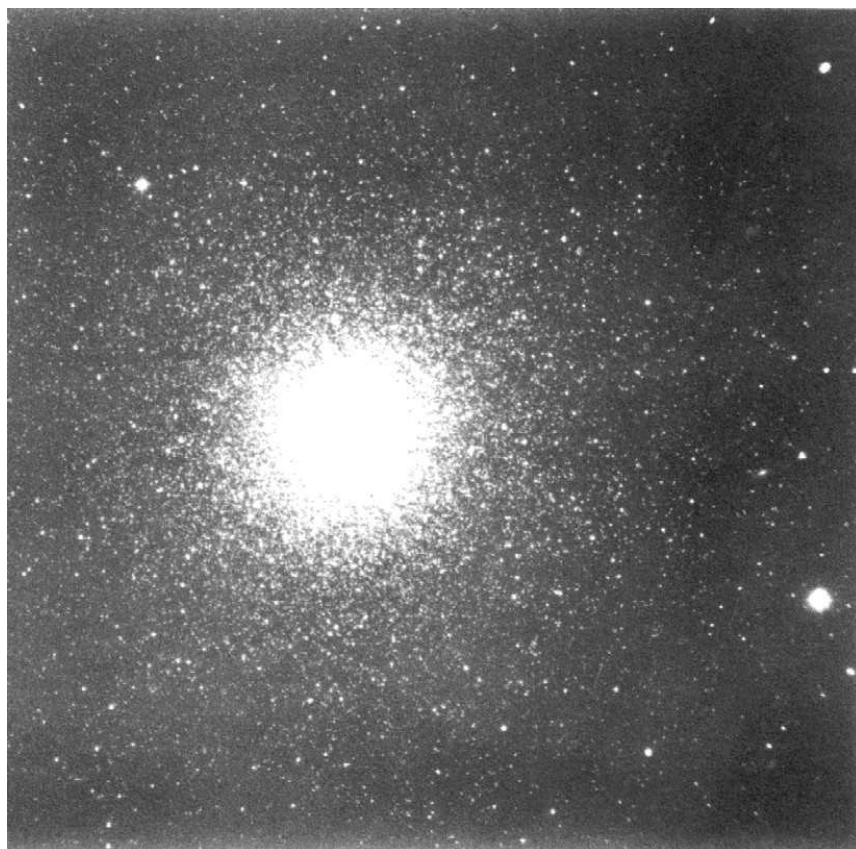


图5-6 靠近我们银河系中心的一个星团。其中各恒星与地球的距离为30000l.y.，或约为 3×10^{20} m

对许多球状星团进行研究之后我们得到另一些重要信息。人们发现，在天空的某一部分有许多这样的星团高度集中在一起，而且其中大部分离地球的距离大致相同。把这个信息和其他证据结合起来就能断定，星团的这个集中处就是我们所在银河系的中心。于是我们就知道到银河系中心的距离——大约为 10^{20} m。

知道了我们自己所在银河系的大小，我们就有了一把测量更大距离——也就是到其他银河系的距离——的钥匙。图5-7是一幅形状与我们的银河系颇为相同的一个银河系的照片。它的大小可能也和我们的相近（另外的一个证据支持了这种想法，即所有银河系都有相近的大小）。假如确实如此，那么我们就说出它的距离，我们测量它在天

空中的张角，又知道它的直径，于是就能算出它的距离——这又是三角法！

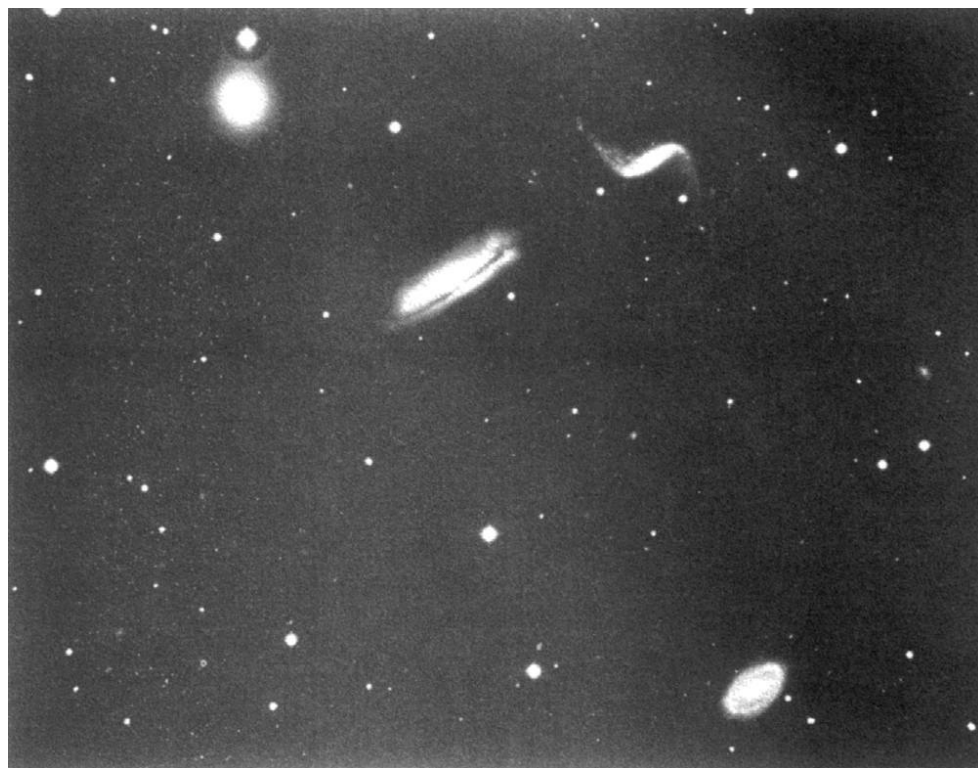


图5-7 与我们的银河系一样的一个螺旋银河系，假定它的直径与我们的银河系相近，那么我们从它的表观大小就能算出它的距离。它离地球约 3×10^7 l.y.（即 3×10^{23} m）

新近用巨大的帕洛玛望远镜获得了极其遥远的一些银河系的照片。图5-8是其中的一张。现在人们认为，这样的一些银河系大约处在从地球到我们宇宙界限—— 10^{26} m处——一半的地方。 10^{26} m是我们能想象的最大距离！

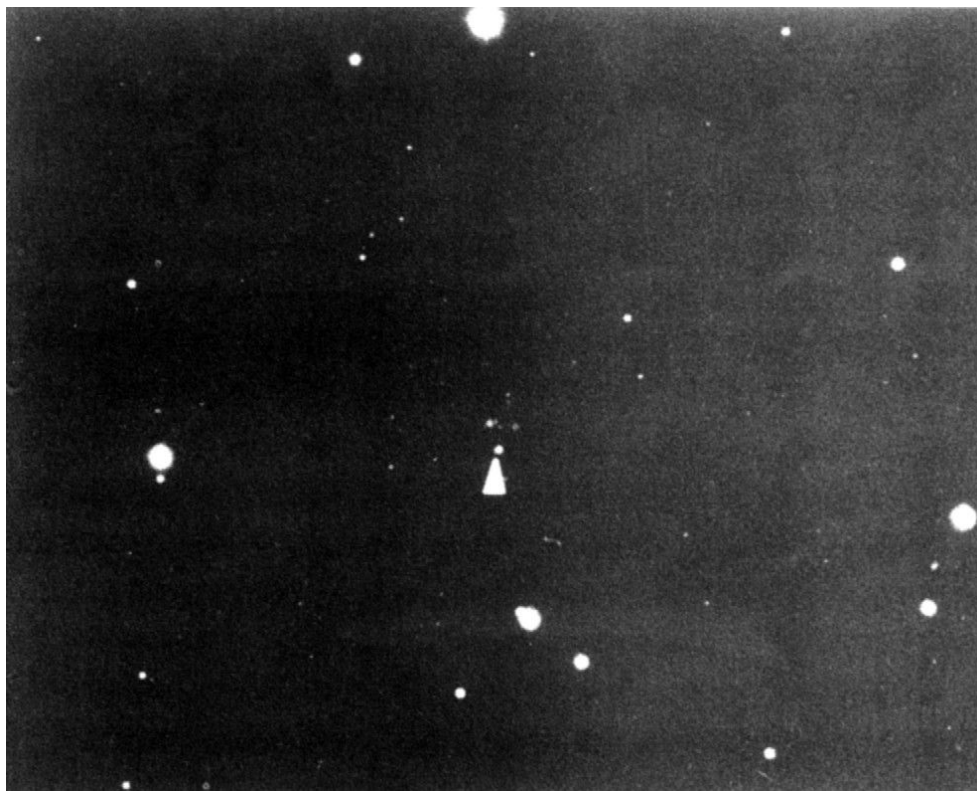


图5-8 最现代化的200 in望远镜拍摄的最远天体——牧夫座中的3C295（用箭头标出）（1960）

§5-7 短的距离

现在我们来考虑一下小的距离。把米分小是容易的。把一米划分成1 000个相等的间隔并没有多大困难。用相似的方法（利用一架好的显微镜），我们能够把一毫米分成1 000个等份，构成微米（一米的百万分之一）这样一个尺度，但这要稍微困难一些。要继续分成更小的尺度则更困难，因为我们“看不见”一个比可见光的波长（大约 5×10^{-7} m）还要小的物体。

然而我们不必停止在我们看得见的东西上。依靠电子显微镜，我们能用拍照方法来对更小的尺度（比方说一直到 10^{-8} m）继续这个划

分过程（图5-9）。用间接的测量，即用一种显微镜规模的三角法，我们能对越来越小的尺度继续进行测量。首先，我们从观察波长短的光（X射线）如何在间隔为已知的标记所组成的图样上被反射的情况，确定光振动的波长。然后从同样的光在一块晶体上被散射的图样，我们就能确定原子在晶体中的相对位置，所得结果与化学方法确定的原子间距离相符合。用这种方法我们发现，原子的直径约为 10^{-10} m。

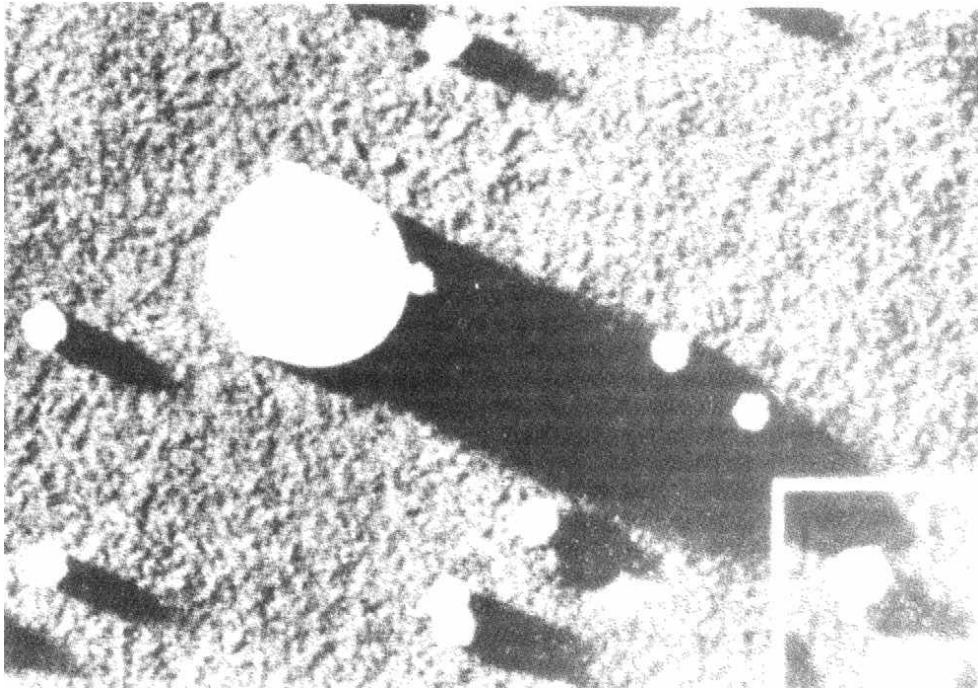


图5-9 某些病毒分子的电子显微图。“大的”球是为定标用的，且已知其直径为 2×10^{-7} m (2 000 Å)

典型的原子大小约为 10^{-10} m，而原子核的大小为 10^{-15} m，其间相差 10^5 倍！可见原子与原子核之间在物理尺度上存在一个很大的“空隙”。对原子核的大小来说，用另一种测量方法比较方便。我们测量的是它的表观面积 σ ，称之为有效截面。如果要知道半径，则可从 $\sigma = \pi r^2$ 求得，因为原子核是近似球形的。

核的截面可以这样来测量：使一束高能粒子通过某种材料的一块薄板，然后观察没有通过薄板的粒子数。这些高能粒子通常会穿过薄薄的电子云，而只有当它们碰上了质量集中的原子核时，才会被阻止或者被偏转。假设我们有一块1 cm厚的材料，其中大约有 10^8 个原子核。由于原子核是如此之小，以致一个核恰好位于另一个核的背后的机会是很小的。我们可以设想，沿着粒子束看去时这种情况的一个高度放大的图像犹如图5-10所示。

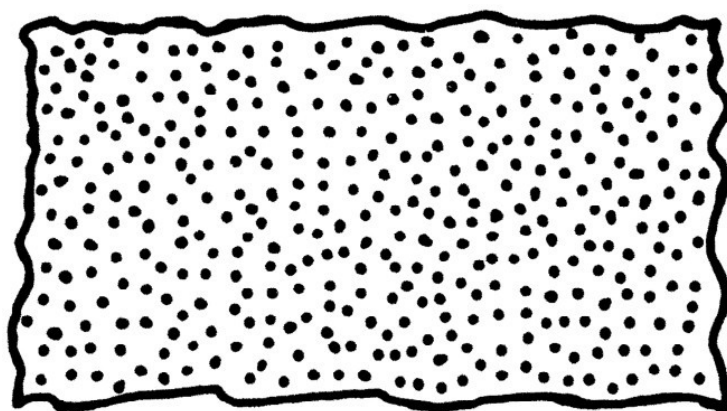


图5-10 在只观察核的时候，通过一块厚1 cm的碳所见到的那个设想的图像

一个很小的粒子在通过物质时能打在一个核上的机会，正好等于其中所有核的剖面所占的总面积除以这幅图上的总面积。假定我们知道在这块板的面积 A 中有 N 个原子（当然，每个原子只有一个核），那么被这些核所“覆盖”的总面积的比数就等于 $N\sigma/A$ 。现在设粒子束中射到薄板的粒子数为 n_1 ，从薄板另一边射出的粒子数为 n_2 。这样，没有通过薄板的粒子的比数为 $(n_1 - n_2)/n_1$ ，它应该正好等于被覆盖面积的比数。于是从等式^[2]

$$\pi r^2 = \sigma = \frac{A}{N} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1} \right)$$

就能获得核的半径。

从这样一种实验我们得出，核的半径大约为 10^{-15} m的1~6倍。 10^{-15} m这个长度单位称为费米 [\[3\]](#)，以纪念著名的物理学家费米（1901—1954）。

如果我们进到更小的距离，那么将会发现什么呢？能不能测量更小的距离？这样的问题现在还不可能回答。有人提出这种看法，认为迄今尚未解决的核力之谜，只有在对这样小的距离下的我们关于空间或测量的观念进行某些修正以后才能解开。

人们也许会想到，用某些自然长度来作为我们的长度单位——比如说地球的半径或者它的某一部分——倒是一个很好的意见。米之取作为单位只是出于这样的考虑，它被定义为地球半径的 $(\pi/2) \times 10^{-7}$ 倍。但是，用这种方法来规定长度单位，既不方便，也不很准确。很长时间以来国际上约定：一米的定义是保持在法国一个特殊实验室中的一根棒上两条刻线之间的距离。不久前人们认识到这个定义既未精确到足以使之有用，也不像人们所希望的那样稳定或普遍。近年来正在考虑采用一个新的定义，即选定一根光谱线，把大家一致同意的它的波长的（任意）倍数作为长度的单位 [\[4\]](#)。

距离测量和时间测量的结果有赖于观察者。两个作相互运动的观察者在测量看来似乎是同一事物时，将会得到不同的距离和时间。距

离和时间间隔随着测量时所用的坐标系（或“参照系”）不同而有不同的大小。我们将在后面的一章中详细地研究这个问题。

距离

l. y.	m	
	10^{27}	???? 宇宙的边缘
10^9	10^{24}	
10^6	10^{21}	到最邻近的银河系
10^3	10^{18}	到我们的银河系的中心
1	10^{15}	到最近的恒星
	10^{12}	冥王星的轨道半径
	10^9	到太阳
	10^6	到月球
	10^3	人造卫星的高度
	1	电视塔的高度 一个孩子的高度
	10^{-3}	
	10^{-6}	一粒盐
	10^{-9}	病毒
	10^{-12}	原子半径
	10^{-15}	原子核半径
		????

完全精密的距离测量或时间测量是为自然规律所不允许的。我们前面已经提到，在测量一个物体的位置时，误差至少有

$$\Delta x \geqslant \hbar / 2 \Delta p$$

那么大，其中 $\hbar$ 是一个称为“约化普朗克常量”的很小的量，而 Δp 是我们在测量物体的位置时，对它的动量（质量乘以速度）所知的误差。我们也曾提到，位置测量的不确定性是与粒子的波动本性有关的。

空间和时间的相对性意味着时间的测量也有一个实际由

$$\Delta t \geq \hbar / 2 \Delta E$$

给出的最小误差，其中 ΔE 是我们在测量一个过程的时间时，对它的能量所知的误差。如果我们要更精确地知道某个事件何时发生，那就只能对发生了什么知道得更少一点，因为我们对其所含能量的知识减少了。时间的不确定性也是与物质的波动本性有关的。

[1] 1967年的第十三届国际计量大会已通过决议将时间单位“秒”的定义改为：“一秒等于 ^{133}Cs 原子基态的两个超精细能级之间跃迁的辐射周期的9 192 631 770倍”。——译者注

[2] 只有当核所覆盖的面积是总面积的一个很小分数，即当 $(n_1 - n_2) / n_1$ 远比1小时，这一等式才正确。否则我们必须对这样一种事情，即有些核将部分地为其前面的核所挡住的情况进行校正。

[3] 在国际单位制中， 10^{-15} m 称为飞米。——译者注

[4] 第十一届国际计量大会（1960年）已将原来用国际铂铱原器确定的长度单位米的定义改为“米的长度等于 ^{86}Kr 的 2 p^{10} 和 5 d^5 能级间跃迁的辐射在真空中波长的1 650 763.73倍”。1983年第十七届国际计量大会又正式通过了米的新定义：“米是光在真空中1/299 792 458秒的时间间隔内运行路程的长度。”——译者注

第6章 概率

我们这个世界的真正逻辑寓于概率的计算之中。

——J. C. 麦克斯韦

§6-1 机会和可能性

“机会”是日常生活中通常使用的一个词汇。无线电在播送明天的天气预报时可能会说：“明天下雨的机会是60%。”你也许会说：“我能活上100岁的机会是不大的。”科学家也使用机会这个词。一个地震学家可能会对这样的问题感兴趣：“明年在南加利福尼亚州发生某一级地震的机会有多大？”一个物理学家也许会提出这样的问题：“在下一个10 s内，某一特定盖革计数器将记录到20个计数的机会是多少？”一个政治家或国务活动家可能对下列问题感兴趣：“下一个10年内发生核战争的机会是多少？”同样，你也许会对从这一章中将学到一些东西的机会发生兴趣。

所谓机会指的是某种类似于猜测的事。为什么我们要猜测呢？希望作出判断而只掌握不完全的信息或不确定的知识时，我们就要进行猜测。我们要对这是些什么东西或者可能会发生什么事情进行猜测。由于必须作出决定，我们常常要进行猜测。比如说，明天我是否要带上雨衣？我应设计一座能够防御哪种程度地震的新大厦？我是否要为

自己建造一个放射性微粒掩蔽所？我是否要在国际谈判中改变自己的立场？我今天是否要去上课？

有时我们所以要进行猜测，是因为我们想用自己有限的知识来对某种情况说出尽可能多的东西。事实上，任何一个判断本质上都是一种猜测。同样，任何物理理论都是一种猜测，其中有成功的，也有失败的。概率论就是为进行较好猜测而产生的一种理论体系。应用概率的语言能使我们定量地谈论某些情况，而这些情况的变化可能很大，但确有某种一贯的平均行为。

让我们来研究向上抛掷硬币这件事。如果抛掷——以及硬币本身——都是“可靠”的，那么对任何一次特定的抛掷，我们无法预期能得到什么样的结果。然而我们可能会感到，在大量的抛掷中应该得到数目大致相等的正面和反面。我们说：“每次抛掷以正面落地的概率是0.5。”

我们只对将来要做的那些观察谈论概率。所谓在一次观察中将得到一个特定结果的“概率”，就是指我们在大量重复这个观察时对其中出现该特定结果的最可能分数的估计。如果我们设想重复作某种观察——比如看一下刚抛掷的硬币—— N 次，并且称 N_A 为我们对这些观察中最可能出现某一指定结果 A ——比如出现“正面”——的数的估计，那么所谓观察到 A 的概率 $P(A)$ 就是指

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (6.1)$$

对我们这个定义，需要作几点注释。首先，只有当所发生的事件是某一可重复的观察的可能结果时，我们才能谈到发生某件事的概

率。像“那所房子里出现一个幽灵的概率是多少？”这类问题有没有任何意义是不清楚的。

也许你会反对说，没有一种情况是严格重复的。没错。每个不同的观察至少要在不同的时间或者地点进行的。我们所能说的只是，对于我们想要达到的目的来说，凡是重复进行的观察应该看来似乎都是等价的。至少我们应当这样假定，每一次观察都在同样准备好的情况下进行，特别是在观察开始时都要带有同等程度的无知（玩纸牌时，如果我们偷看一下对方的牌，那么我们对自己获胜的机会的估计就显然与偷看前不同）。

我们应当强调指出，式（6.1）中的 N 和 N_A 并不代表实际所作观察的次数。 N_A 是我们在 N 个想象的观察中可能得出结果A的观察的最佳估计。因此，概率有赖于我们的知识以及进行估计的能力，实际上有赖于我们的常识！幸好许多事物在常识上都有某种程度的一致性，所以不同的人会作出同样的估计。然而，概率不必是一些“绝对”的数字。既然它们与我们对事物的无知有关，那么如果我们所掌握的知识发生变化，它们也会变得不同。

你们也许已经注意到我们的概率定义中另一个相当“主观”的方面。我们把 N_A 说成是对最可能次数的一个估计……。可是这并不意味着我们不折不扣地期望能观察到 N_A ，而是期望能得到一个靠近 N_A 的数，而且数 N_A 比其邻近的任何其他的数更为可能。比如说，我们抛掷一个硬币30次，那么我们可以预料，得到正面的数字不大可能正好是15，而很可能是某一靠近15的数，如12、13、14、15、16或17。然而，如果我们必须对之作出抉择，那么我们会决定，15次正面要比任何其他数更为可取。我们将写成： P （正面）=0.5。

为什么我们选择15为一个比任何其他数更可取的数呢？我们一定跟自己进行过如下的争辩：如果在 N 次抛掷中得到正面的最可能次数为 N_H ，那么得到反面的最可能次数 N_T 就等于 $N - N_H$ （这里我们作了这样的假定，即每次抛掷不是得到正面便是得到反面，不会得到“其他”结果）。但如果硬币是“可靠”的，它就既不偏向正面，也不偏向反面。除非有某些理由可以认为硬币（或者抛掷）是不可靠的，我们就必须认为正面与反面具有相等的可能性。所以必须使 $N_T = N_H$ 。这样就得到

$$N_T = N_H = \frac{1}{2}N, \text{ 或者 } P(H) = P(T) = 0.5.$$

我们可以把这一论证推广到任何一种情况，在这种情况下，可以观察到 m 个不同但又“相等”（即机会均等）的可能的结果。如果通过观察能得出 m 个不同结果，而且又有理由相信，其中任何一个结果与别的任何结果同样可能，那么得到某一个特定结果A的概率就等于 $P(A) = 1/m$ 。

如果在一个不透明的箱子里有7个不同颜色的小球，我们“随便”（即不朝它看时）取出一个，那么得到某一种颜色的小球的概率是 $1/7$ 。从已洗过的52张牌中“任意”抽出一张红桃10的概率是 $1/52$ 。掷骰子而得到两个一点的概率是 $1/36$ 。

* * * *

在第5章中，我们用原子核的表观面积，或者称为“截面”来描写它的大小。这样做时，实际上我们就是在谈概率。当我们向一块薄的材料发射一个高能粒子时，它有一定机会直接穿过去，也有一定机会碰

撞在一个原子核上（既然原子核如此之小，以致我们无法看到，我们就不能直接瞄准，而必须“盲目射击”）。设在这块薄板中有 n 个原子，而每个原子的核具有截面积 σ ，那么被所有这些核所“遮盖”的总面积为 $n\sigma$ 。在随机发射的很大数目 N 中，我们预期能击中某些核的数目 N_C 与 N 之比，犹如被遮盖的面积与薄板的总面积之比

$$\frac{N_C}{N} = \frac{n\sigma}{A}. \quad (6.2)$$

因此我们可以说，任何一个入射粒子在穿过薄板时将经受一次撞击的概率为

$$P_C = \frac{n}{A}\sigma, \quad (6.3)$$

其中 n/A 是我们这块薄板中单位面积内的原子数。

§6-2 涨落

我们现在想利用有关概率的概念来比较详细地考虑一下这样一个问题：“如果我把一个硬币抛掷 N 次，那么预期会得到多少次真正的正面？”然而在回答这个问题之前，让我们先来看一下在这样一个“实验”中确实会发生什么情况。图6-1表示 $N=30$ 的这样一个实验在前三“轮”中所得的结果。“正面”和“反面”的前后次序完全是按照它们得到时的次序排列的。第一轮得到11次正面；第二轮也是11次；第三轮16次。在这三轮试验中，我们没有一回得到15次正面。是不是要对硬币开始发生怀疑呢？或者在这样一种游戏中，我们设想得到正面的最可能次数是15这一点错了呢？再做97轮实验，以便一共得到100轮每回抛掷30次的实验。实验的结果列在表6-1中[\[1\]](#)。

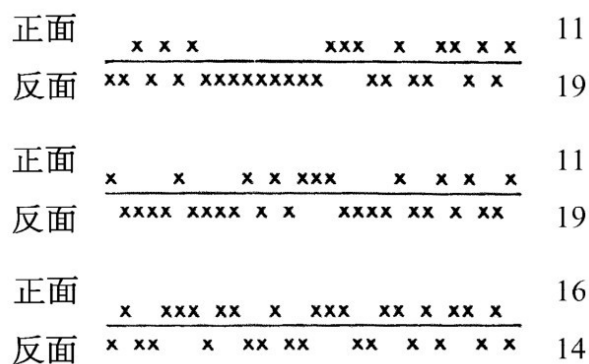


图6-1 在每轮为30次抛掷的三轮游戏中所观察到的正面和反面的前后次序

表6-1 在抛掷一个硬币30次的逐轮试验中每轮所得正面的数目

11	16	17	15	17	16	19	18	15	13	100 次 试 验
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14	
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15	
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12	
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18	
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15	
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16	
19	15	14	12	18	15	14	21	11	16	
17	17	12	13	14	17	9	13	19	13	
14	12	15	17	14	10	17	17	12	11	

如果观察一下表6-1中所列的各数，那么我们看到，大多数结果“靠近”15，而且位于12与18之间。如果我们为这些结果画一张分布图，那么就会对这些结果的细节有一个更好的理解。我们计算一下得到某一记录 k 的实验次数，并把这个数对每一个 k 作图，如图6-2所示。记录到15次正面的共有13轮游戏。记录到14次正面的也是13轮。得到16和17次的，每一个都大于13轮。我们是否断定这里对正面有所偏袒？我们的“最佳估计”是否不够好？是不是我们现在应该作出这个结论，即每轮30次抛掷的“最可能”记录实际上是16次正面？但是且慢！把所有各轮游戏加到一起，就总共抛掷了3 000次。而获得正面的总数是1 493。可见出现正面的抛掷其比数是0.498，很接近而稍小于0.5。当然我们不应假定抛掷后得到正面的概率大于0.5！至于某特定

的一组观察经常得到16次正面这个事实，是一种涨落现象。然而我们仍然预期最可能的正面数是15。

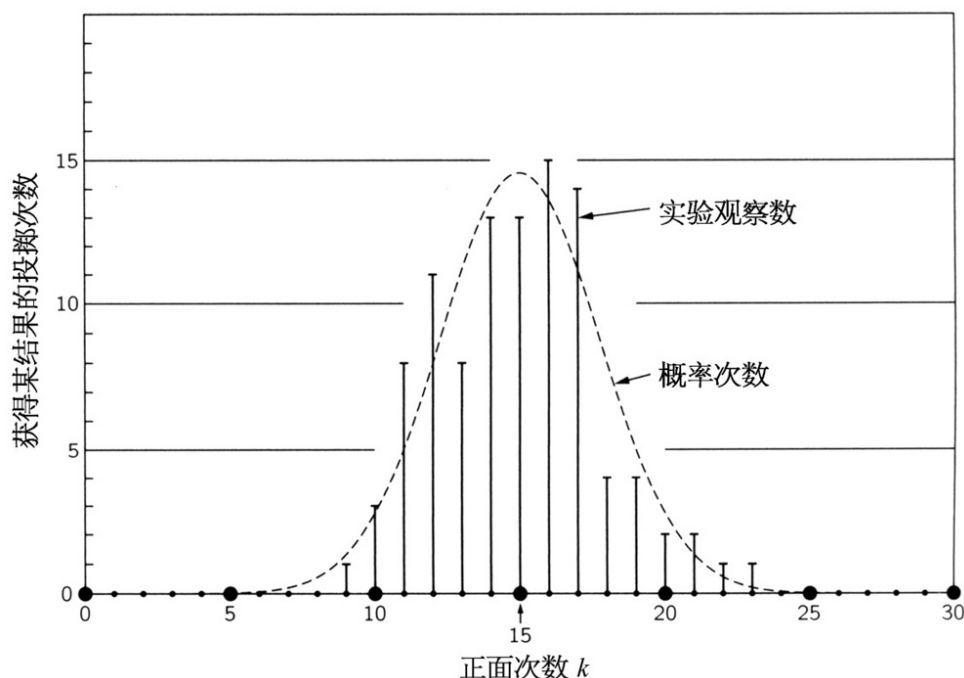


图6-2 每轮30次抛掷的100轮游戏所得结果的概况。垂直线表示记录到 k 次正面的各轮游戏的数目。虚线表示从概率计算求得的所期望记录到 k 次的游戏轮数

我们可以提出这样的一个问题：“在30次抛掷的游戏中将获得15、16或任何其他次数正面的概率是多少？”我们已经说过，在抛掷一次的游戏，得到一次正面的概率是0.5，得不到正面的概率也是0.5。在抛掷两次的游戏中，有四种可能的结果：即HH，HT，TH，TT^[2]。既然这些结果中的每一个都是同样可能的，我们就推断出：（a）记录到两次正面的概率是1/4；（b）记录到一次正面的概率是2/4；（c）记录到零次正面的概率是1/4。这里有两种方式可以得到一次正面。但是得到两次或零次正面的方式各只有一种。

现在我们来研究抛掷三次的游戏。第三次抛掷同样可能得到一个正面或者一个反面。这里得到三次正面的方式只有一种：我们必须在

前两次抛掷中得到两次正面，而后在最后一次中也得到正面。可是这里有三种方式可以得到两次正面。在掷得两次正面（一种方式）后，我们可以掷出反面，或者在前两次抛掷中只掷出一次正面（两种方式）后，我们可以掷出一个正面。因此对于3—H，2—H，1—H，0—H等记录，其同样可能的方式的数目分别为1，3，3，1。共有八种不同的可能结果。于是其概率分别为1/8，3/8，3/8，1/8。

刚才的讨论可以用图6-3所示的图解表示来概括。可以清楚看出，对于更大数目的抛掷，应如何来把这个图解表示继续下去。图6-4表示抛掷6次的这样一个图解表示。达到图中任何一点的所有“方式”的数目就是从起点开始到该点可以取的各种不同“途径”（即正面和反面相连的各种次序）的数目。最后一栏告诉我们掷得正面的总数。这样一种图表中出现的一组数称为帕斯卡三角形。这些数也称为二项式系数，因为它们也出现在 $(a + b)^n$ 的展开式中。如果我们称 n 为抛掷的次数， k 为掷得正面的次数，那么图表中的数字通常用符号 $\binom{n}{k}$ 来表示。顺便提一下，二项式系数也可以从下式

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6.4}$$

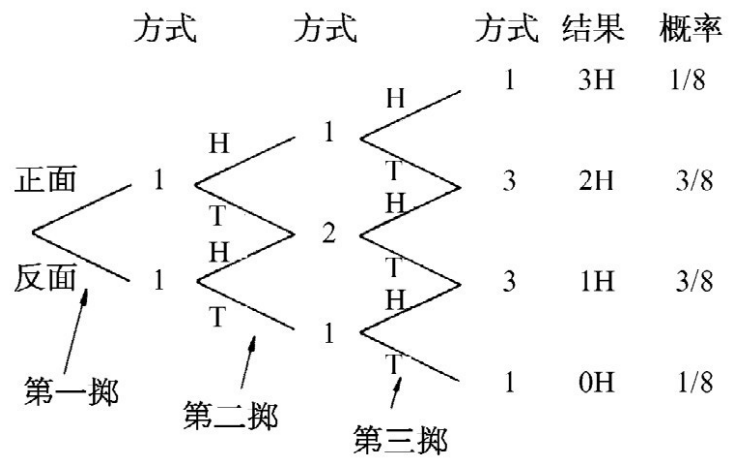


图6-3 在抛掷三次的游戏中，能得到0，1，2，3次正面的方式数目的图解表示

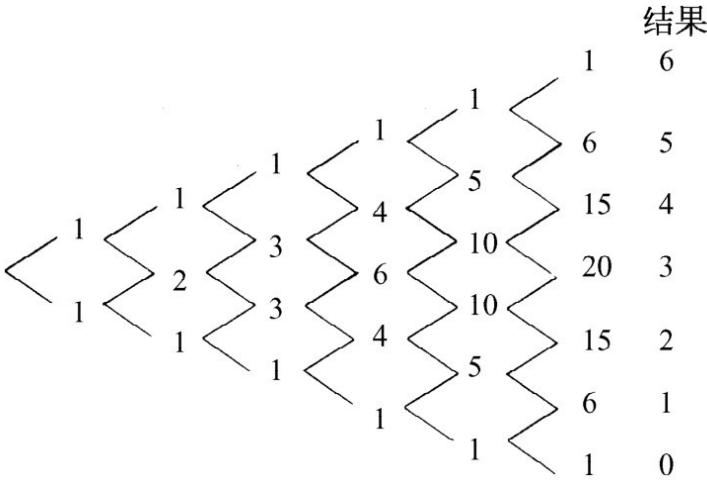


图6-4 类似于图6-3的抛掷6次的游戏的图解表示

算出，其中 $n!$ 称为“ n 阶乘”，表示连乘积 $n (n - 1) (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 的意思。

我们现在打算根据式（6.1）来计算在 n 次抛掷中得到 k 次正面的概率 $P (k, n)$ 。所有可能结果的总数是 2^n （因为对每一抛掷有两个结果），得到 k 次正面的总共有 $\binom{n}{k}$ 种，而每一种都是同样可能的，所以我们有

$$P(k, n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}. \tag{6.5}$$

既然 $P (k, n)$ 是我们期望会得到 k 次正面的比数，那么在100轮游戏中，我们应预期共有 $100 \cdot P (k, n)$ 轮会出现 k 次正面。图6-2中虚线所经过的各点就是从 $100 \cdot P (k, 30)$ 计算出来的那些点子。我们可以看到，我们预期 有14或15轮游戏会记录到15次正面，然而只有13

轮游戏观察到这个记录，我们预期有13或14轮游戏会记录到16次正面，但是却有16轮游戏观察到这个记录。这种涨落情况是“游戏的组成部分”。

我们刚才用过的方法，可以应用于最一般的情况，也就是在单独一次观察中只能得出两种可能结果的情况。我们用W [表示“win”（赢）] 和L [表示“lose”（输）] 来表示这两种结果。在一般情况下，单独一个事件会得W或L的概率是无需相等的。设 p 为得到结果W的概率。于是 q ——这个得到结果L的概率必然等于 $(1-p)$ 。在一组 n 轮的试验中，得到 k 次结果为W的概率 $P(k, n)$ 就等于

$$P(k, n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \quad (6.6)$$

这个概率函数称为伯努利或二项式概率。

§6-3 无规行走

另一个有趣的问题也需要用到概率概念。这就是“无规行走”的问题。在最简单的形式下，我们可以想象这样一个“游戏”，其中“游戏者”从 $x=0$ 的一点出发，要求他每“移动”一次要么朝前（向 $+x$ 方向）走一步，要么朝后（向 $-x$ 方向）走一步。而朝前朝后必须随机决定，例如用抛掷硬币的方法。我们将怎样来描写这种运动的结果呢？在一般形式下，这个问题与气体中原子（或其他粒子）的运动，即布朗运动有关，也与测量中误差的组合有关。你们将会看到，无规行走问题与我们已讨论过的抛掷硬币问题密切相关。

首先，让我们看几个无规行走的例子。我们可以用行走者在 N 步中所经过的净距离 D_N 来表示他的进度。图6-5为无规行走者所走路径的三个例子（这里我们用图6-1所示抛掷硬币所得的结果作为随机选择的移动取向）。

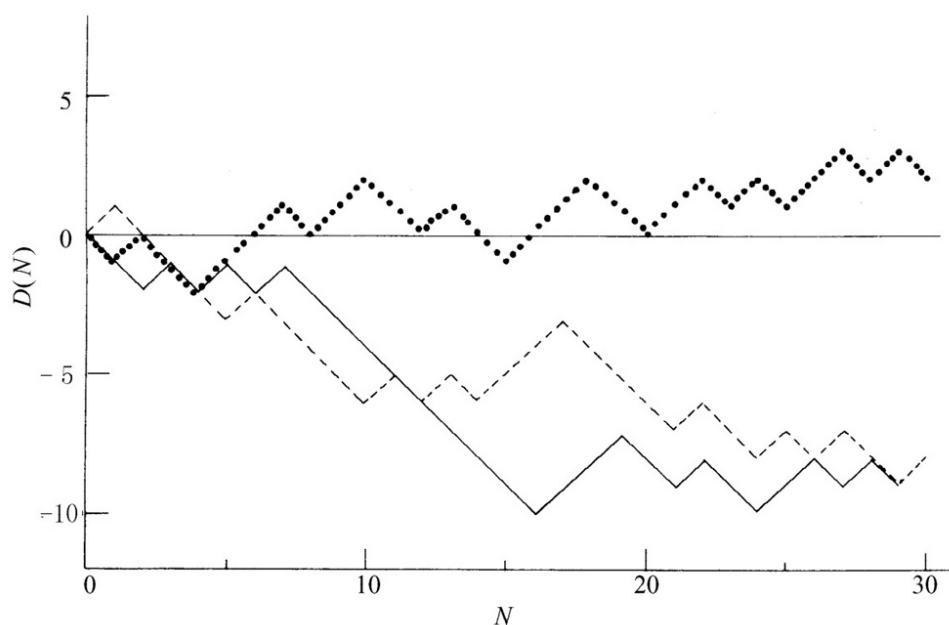


图6-5 无规行走取得的进度。横坐标 N 表示所走的步子总数；纵坐标 D_N 表示离开起点的净距离

对于这样一种移动我们可以说些什么呢？首先我们也许会问：“平均而言他走了多远？”我们必定预期他的平均进度将为零，因为他向前或向后走的可能性是均等的。然而我们有这样的感觉，随着 N 的增加，他更可能偏离起点越来越远。因此我们也许要问，走过的用绝对值表示的平均距离是多少，也就是说 $|D|$ 的平均值是多少。可是在这里用另一种量度“进度”的方法更为方便。这就是用距离的平方 D^2 来表示，它无论对正的还是负的移动都为正，所以它是这种随机漫步的一个合理量度。

我们可以证明， D_N^2 的预期值恰好是所走步子的数目 N 。所谓“预期值”，指的是可几值（也就是我们的最佳猜测），我们可以把它看作是对重复多次的一系列行走所预期的平均行为。我们用 $\langle D_N^2 \rangle$ 来表示这样一个预期值，并且也可以称它为“方均距离”。走一步后的 D^2 总是+1，所以当然 $\langle D_1^2 \rangle = 1$ （所有的距离都将以一步为单位来量度。以后我们将不再写出距离的单位）。

当 $N > 1$ 时，预期值 D_N^2 可以从 D_{N-1} 求得。如果走了 $(N-1)$ 步后，我们得到 D_{N-1} ，那么经过 N 步后，就有 $D_N = D_{N-1} + 1$ 或 $D_N = D_{N-1} - 1$ 。其平方为

$$D_N^2 = \begin{cases} D_{N-1}^2 + 2D_{N-1} + 1, \text{或} \\ D_{N-1}^2 - 2D_{N-1} + 1. \end{cases} \quad (6.7)$$

对于大量独立的无规行走，我们所能预期得到的，每次只有每一个数值的一半，因此我们的平均预期值恰好是这两个可能值的平均值。于是 D_N^2 的预期值就是 $D_{N-1}^2 + 1$ 。一般而言，我们对 D_{N-1}^2 所应期望的“预期值”就是 $\langle D_{N-1}^2 \rangle$ （根据定义！）。所以

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \quad (6.8)$$

我们已经说明 $\langle D_1^2 \rangle = 1$ ；因而得到

$$\langle D_N^2 \rangle = N. \quad (6.9)$$

这是一个多么简单的结果！

如果我们希望得到的不是距离的平方，而是像距离那样的一个数，以表示无规行走中“所作的从原点算起的进展”，那么我们可以用

“方均根距离” D_{rms} 来表示:

$$D_{\text{rms}} = \sqrt{\langle D^2 \rangle} = \sqrt{N}. \quad (6.10)$$

我们已经指出, 无规行走问题在数学形式上与本章开始时讨论过的那种抛掷硬币的游戏十分相似。如果我们设想每一步的取向对应于抛掷硬币中出现的正面或反面, 那么 D 正好是获得正面的次数与获得反面的次数的差值 $N_{\text{H}} - N_{\text{T}}$ 。由于 $N_{\text{H}} + N_{\text{T}} = N$ 是总的所走步数 (或总的所抛掷次数), 我们就有 $D = 2N_{\text{H}} - N$ 。以前我们曾为预期的分布 N_{H} (也称为 k) 导出一个表达式, 而且得到了如式 (6.5) 所示的结果。由于 N 正好是一个常数, 所以我们就为 D 得到一个相应的分布 (由于超过 $N/2$ 后出现的每次正面都会使反面受到“损失”, 所以在 N_{H} 与 D 之间相差一个因子2)。图6-2表示在无规行走30步的例子中可能得到的距离分布情况 (其中 $k=15$ 应读作 $D=0$, $k=16$ 应读作 $D=2$, 等等)。

N_{H} 和它的预期值 $N/2$ 的偏差为

$$N_{\text{H}} - \frac{N}{2} = \frac{D}{2}. \quad (6.11)$$

方均根 (rms) 偏差为

$$\left(N_{\text{H}} - \frac{N}{2} \right)_{\text{rms}} = \frac{1}{2} \sqrt{N}. \quad (6.12)$$

根据我们对 D_{rms} 求得的结果, 在走30步所预期的“典型”距离应是 $D_{\text{rms}} = \sqrt{N} = \sqrt{30} = 5.5$, 或者典型的 k 应与15相差大约 $5.5/2 \approx 2.8$ 个单位。在图6-2中, 我们可以看到, 从中心量起的曲线“宽度”正好大约等于3个单位, 和上述结果相一致。

现在我们已有条件来考虑一直到目前为止被我们所回避的一个问题。我们怎样知道一块硬币是“可靠的”或是“灌过铅的”？现在我们至少能够为之提供一部分答案。对于一块可靠的硬币，我们预期其能出现正面的次数的比值是0.5，亦即

$$\frac{\langle N_H \rangle}{N} = 0.5. \quad (6.13)$$

我们也预期实际的 N_H 将偏离 $N/2$ 大约有 $\sqrt{N}/2$ ，或者说，它的比值与1/2的偏差为

$$\frac{1}{N} \frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

N 越大，所预期的比值 N_H/N 就越接近于二分之一。

在图6-6中，我们根据本章前面提到的掷币记录画了一条表示比值 N_H/N 的曲线。从图中可以看出，对于大的 N ，得正面的比值趋向于接近0.5。遗憾的是，对任何给定的一轮或几轮，连观察到的偏差都保证不了接近于预期的偏差。总是有一定的机会出现大的涨落——一长串的正面或者一长串的反面，造成一个任意大的偏差。我们一切所能说的，只是如果偏差接近于预期的 $1/(2\sqrt{N})$ （比如说在2或3倍之内），那么就没有理由去怀疑硬币的可靠性。如果偏差大得多，那么我们可以对硬币发生怀疑，但无法证明它是灌过铅的（或者抛掷者是非常机灵的）。

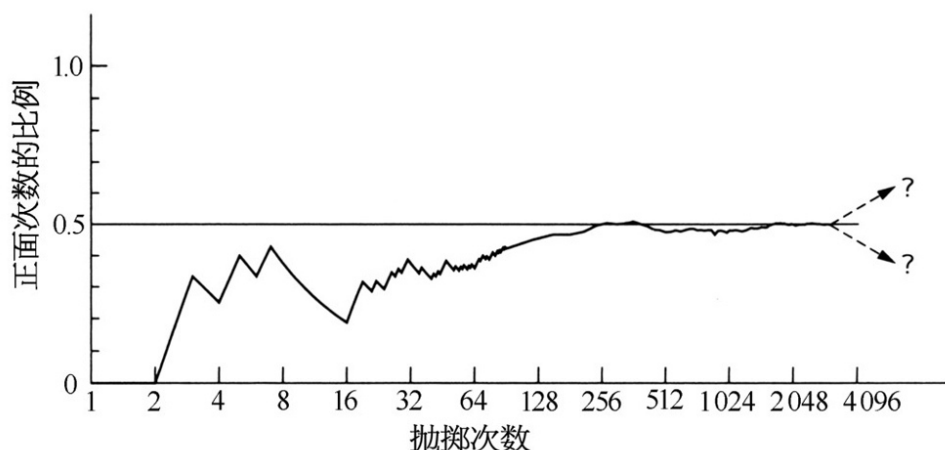


图6-6 在一连串 N 次抛掷中获得正面次数的比例

我们也没有考虑过应该如何来处理这样一块“硬币”或某一与之相似的“不确定的”物体（比如一块始终以两种方位中无论哪一种着地的石块），对于它们来说，我们很有理由认为出现正面和反面的概率应该是不同的。我们已经定义了 $P(H) = \langle N_H \rangle / N$ 。那么怎样知道 N_H 的预期值 是多少呢？在某些情况下，我们所能做得最好的，就是去观察在大量抛掷中所得正面的数目。由于缺少任何更好的数据，我们不得不令 $\langle N_H \rangle = N_H$ （观察值）（除此之外，还能期望做什么呢）。然而必须理解到，在这样一种情况下，不同的实验或不同的观察者可能会推论出不同的概率 $P(H)$ 。但是我们可以预料，这些不同的答案应该在偏差 $1/(2\sqrt{N})$ 的范围内相互一致 [假如 $P(H)$ 接近于 $1/2$ 的话]。实验物理学家常常这样说：“实验确定的”概率是有“误差”的，并且把它写成

$$P(H) = \frac{N_H}{N} \pm \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (6.14)$$

在这样一个表示式中含有下列意义：存在 着一个“真正的”或“正确的”概率，只要我们知道的东西足够多，就能把它计算出来，其次是由于

有涨落，观察会发生“误差”。然而没有办法能使这种想法做到逻辑上始终如一。如果能领悟到下列几点或许要比较好一些，即概率概念在某种意义上是主观的，它总是建立在不肯定的知识上的，而且它的定量值是随着我们得到的信息越多而改变着。

§6-4 概率分布

我们现在回到无规行走的问题上来，并且考虑它的一种修正。我们设想除了每一步的方向（+或-）可以随机选择外，每一步的长度也能以某种无法预定的方式变化着，唯一的条件就是平均而言步子的长度是一个单位。这种情况更能代表象气体中一个分子的热运动那样的状况。如果我们称一步的长度为 S ，那么 S 完全可以取任何一个值，但最通常的是“接近于”1。为明确起见，我们令 $\langle S^2 \rangle = 1$ ，或者与之同等， $S_{\text{rms}} = 1$ 。 $\langle D^2 \rangle$ 的推导将仿照以前一样，只是式（6.8）现在要加以改变而写成

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + \langle S^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \quad (6.15)$$

同以前一样，我们得到

$$\langle D_N^2 \rangle = N. \quad (6.16)$$

现在对于距离 D ，我们会预期得到什么样的一种分布呢？比如在走了30步后， $D=0$ 的概率是多少？回答是0！ D 取任一特定值的概率是0，因为根本没有一种机会能使后退的（长度是变化的）步子的总和与朝前的步子的总和正好相等。我们无法画出一张像图6-2那样的图。

然而如果我们不是去问获得其值正好等于0, 1, 或2的那些 D 的概率是多少, 而代之以去问获得其值靠近 0, 1, 或2的那些 D 的概率有多大, 那么我们就能够得到与图6-2相似的曲线。我们定义 $P(x, \Delta x)$ 为 D 位于 x 处一个间隔 Δx (比如从 x 到 $x + \Delta x$) 内的概率。对于小的 Δx , 我们可以预期 D 位于这个间隔内的概率, 与间隔的宽度 Δx 成正比。因此我们可以写成

$$P(x, \Delta x) = p(x) \Delta x, \quad (6.17)$$

函数 $p(x)$ 称为概率密度。

$p(x)$ 的形式与所走步子的数目 N 有关, 也与个别步子的长度分布有关。我们不能在这里给出有关的论证, 但当 N 很大时, 对于所有合理的个别步子的长度分布, $p(x)$ 都是相同的, 因而只取决于 N 。在图6-7中, 我们对三个 N 值各作一条曲线。你们会注意到, 这些曲线的“半宽度”(离 $x=0$ 的典型散布范围)是 $\sqrt{N}$, 正如我们已证明过它理应如此。

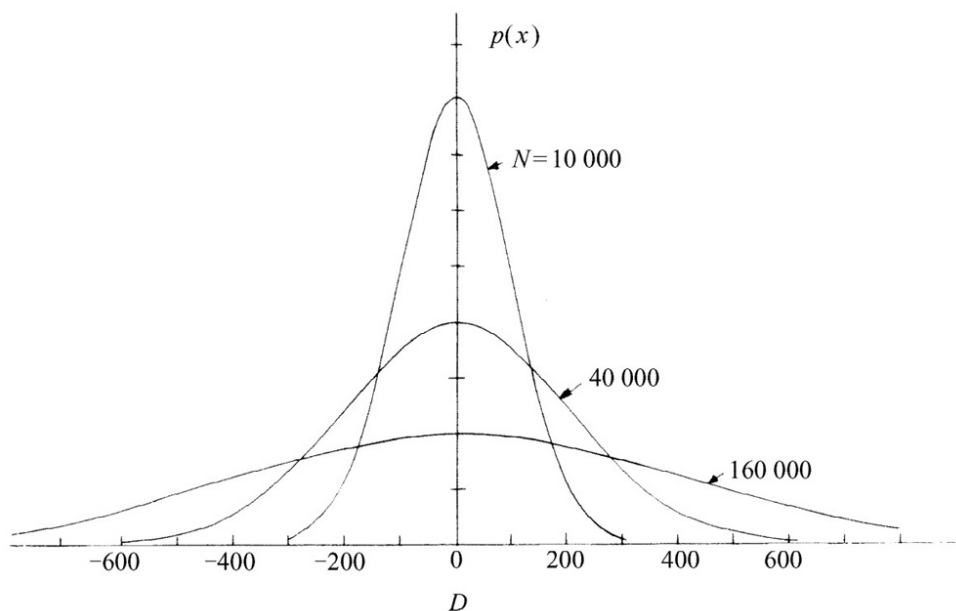


图6-7 在步数为 N 的无规行走中终止在从起点算起的距离 D 处的概率密度（ D 是用均方根步长为单位来量度的）

你们可能也已注意到，靠近零处的 $p(x)$ 值反比于 $\sqrt{N}$ 。这是由于曲线都有相似的形状以及曲线下面的面积都应相等而来的。既然 $p(x)\Delta x$ 是当 Δx 很小时在 Δx 中找到 D 的概率，那么我们可以这样来确定在任意一个从 x_1 到 x_2 的间隔内不论何处找到 D 的概率，只要把间隔分割成许多微小增量 Δx ，然后对每个增量的有关概率 $p(x)\Delta x$ 相加而求其总和。 D 落在 x_1 与 x_2 之间某处的概率，我们可以写作 $P(x_1 < D < x_2)$ ，它等于图6-8中所示阴影的面积。增量 Δx 取得越小，结果就越正确。因此我们可以写成

$$\begin{aligned} P(x_1 < D < x_2) &= \sum p(x)\Delta x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \end{aligned} \quad (6.18)$$

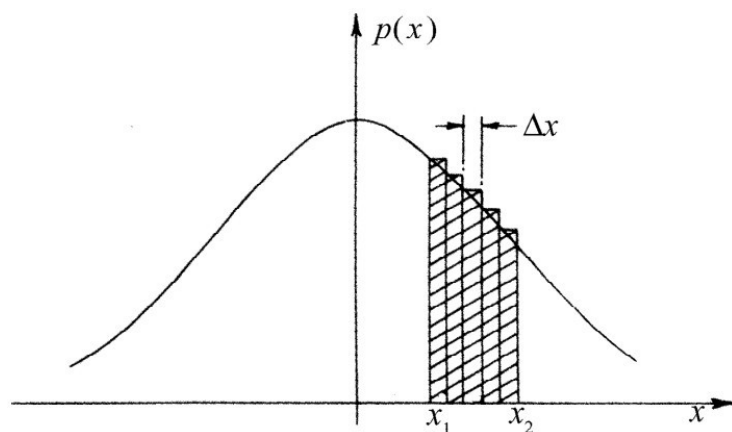


图6-8 无规行走中所通过的距离 D ，它位于 x_1 与 x_2 之间的概率就是曲线 $p(x)$ 下面从 x_1 到 x_2 的面积

整个曲线下面的面积是 D 落在不论何处（也就是它具有在 $x=-\infty$ 到 $x=+\infty$ 之间的某一值）的概率。这个概率当然是1。因而必须有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1. \quad (6.19)$$

由于图6-7中的曲线与 $\sqrt{N}$ 成比例地变宽，所以为了保持总面积等于1，它们的高度必须正比于 $1/\sqrt{N}$ 。

我们这里所描述的概率密度函数是最经常遇到的一种。通常把它称为正态或高斯概率密度。它的数学形式是

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (6.20)$$

其中 σ 称为标准偏差，在我们的情况中 $\sigma = \sqrt{N}$ ，或者当方均根步长不为1时

$$\sigma = \sqrt{N} S_{\text{rms}}.$$

前面我们已提到，气体中一个分子或任何一个粒子的运动犹如一种无规行走。假定我们打开一个装着有机化合物的瓶子，让它的一部分蒸气跑到空气中去。如果外面有气流，以致空气在作循环运动，那么气流也将带着蒸气一起运动。然而即使在完全静止的空气中，蒸气也会渐渐散布开去，进行扩散，直到布满整个房间。我们可以从它的颜色或气味加以鉴别。有机化合物蒸气的个别分子之所以能在静止空气中散布开去，是由于这些分子与其他分子碰撞而造成的分子运动所

致。如果我们知道其“步子”的平均大小，以及每秒所走的步数，那么就能求出一个或 n 个分子在经过任何一段特定时间后在从其起点算起的某一距离被找到的概率。随着时间的消逝，步子越走越多，气体就会像图6-7中相继的几条曲线那样逐渐散开。在以后要讲的一章中，我们将求出步子的大小和步子的频率如何与气体的温度和压强有关。

我们以前说过，气体的压强是由于分子撞击容器壁而形成的。以后如果要作较定量的描写时，我们就需要知道分子在弹跳时跑得有多快，因为它们所作的碰撞与这个速率有关。然而我们不能说这些分子具有如何确定的速率。这里必须用概率来描写。一个分子可以具有任何一个速率，但有些速率出现的可能性比另一些要大。我们可以这样来描写气体内正在发生什么，这就是说出任何一个特定分子具有速率在 (v) 与 $(v+\Delta v)$ 之间的概率 $p(v)\Delta v$ ，而 $p(v)$ 这个概率密度是速率 v 的一个确定函数。往后我们会看到，麦克斯韦如何运用常识和概率观念为 $p(v)$ 找到一个数学表示式。函数 $p(v)$ 的形状^[3]如图6-9所示。速度可以取任何一个值，但是最可能取的是靠近最可几值或 v_p 的那一些。

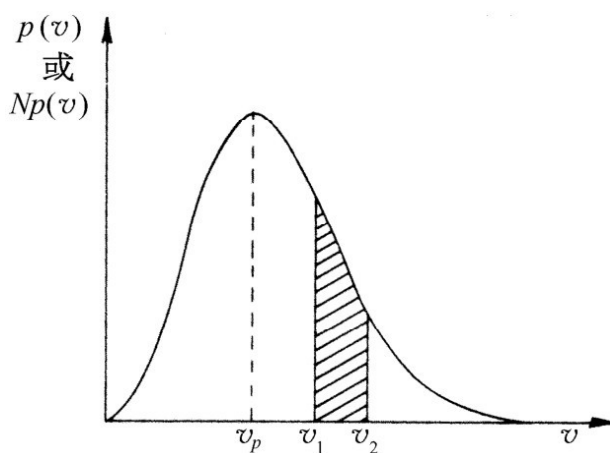


图6-9 气体中分子的速度分布

我们常常以稍微不同的方式去看待图6-9中的曲线。如果我们考虑一个典型容器（比如，其体积为1l）中的分子，那么容器中存在极大数量的分子（ $N \approx 10^{22}$ ）。由于 $p(v) \Delta v$ 是一个分子具有在 Δv 间隔内的速度的概率，所以根据我们对概率的定义，我们说，找到速度处在间隔 Δv 内的分子数的预期值 $\langle \Delta N \rangle$ 应是

$$\langle \Delta N \rangle = N p(v) \Delta v. \quad (6.21)$$

我们称 $N p(v)$ 为“速度分布”。曲线下面两个速度 v_1 与 v_2 之间的面积，例如图6-9中所示阴影的面积代表了[对曲线 $N p(v)$ 来说]速度在 v_1 和 v_2 之间的分子的预期数。由于在气体的情况中，我们通常与大量的分子打交道，所以可以期望这一面积与预期数的偏差是小的（犹如 $1/\sqrt{N}$ ），因此我们常常不说“预期”数，而代之以说：“具有速度在 v_1 和 v_2 之间的分子数是曲线下面的面积。”但是我们应当记住，这种陈述所谈到的总是可几数。

§6-5 不确定性原理

在描写气体样品中 10^{22} 个或类似这样多个分子的行为时，概率的概念肯定是有用的，因为很清楚，即使要写下每个分子的位置或速度这种试图，也是不实际的。当概率最初运用于这类问题时，大家曾认为这是一种方便——一种处理非常复杂的情况的方法。现在我们认为，概率的概念是描写原子事件所必不可少的。按照量子力学这个有关粒子的数学理论，在说明位置和速度方面总是存在着某种不确定性。充其量我们可以说，任何粒子只有一定的概率可以使它的位置接近某一坐标 x 。

我们可以这样来引进一个概率密度函数 $p_1(x)$ ，使 $p_1(x) \Delta x$ 为在 (x) 与 $(x + \Delta x)$ 之间找到这个粒子的概率。如果这个粒子的位置被很好地限制在某个地方，比如说靠近 x_0 ，那么函数 $p_1(x)$ 就可能如图6-10 (a) 所示的曲线给出的那样。与之相似，我们必须用概率密度 $p_2(v)$ 来限定粒子的速度，而 $p_2(v) \Delta v$ 则表示能找到一个处于 v 与 $v + \Delta v$ 之间的速度的概率，如图6-10 (b) 所示。

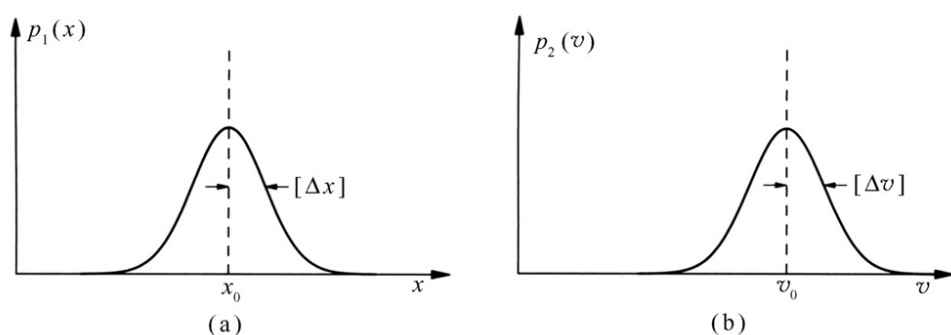


图6-10 观察一个粒子的位置与速度时的概率密度

量子力学的基本结果之一是：两个函数 $p_1(x)$ 与 $p_2(v)$ 不能予以独立选定，特别是不能把它们都取得任意的窄。如果我们称 $p_1(x)$ 曲线的典型“宽度”为 $[\Delta x]$ ， $p_2(v)$ 曲线的典型宽度为 $[\Delta v]$ （各如图所示），那么自然界就要求这两个宽度的乘积至少要与数 $\hbar/2m$ 一样大，这里 m 是粒子的质量。我们可以把这个基本关系写成

$$[\Delta x] \cdot [\Delta v] \geq \hbar/2m. \quad (6.22)$$

这个式子就是我们前面提到过的海森伯不确定性原理的一种表述。

由于式(6.22)的右面是一个常数，这就表明，如果我们迫使一个粒子处于某一特定位置而试图把它“钉住”，结果它就获得一个很大的速度。或者是：如果我们迫使它跑得很慢，或以精确的速度运动，那么它就要“散开”，以致我们不能很好地知道它究竟在哪里。粒子的举止真是太奇妙了！

不确定性原理描述了在叙述自然界的任何尝试中所必然存在着的那种内在的模糊性或不明确性。我们对自然界的最准确描写必须用概率的观念。有些人不喜欢用这种方法来描写自然界。不知怎么地，他们总觉得，只要能说出一个粒子真正在做什么，他们就能同时知道它的速度和位置。在量子力学发展的初期，爱因斯坦曾为这个问题十分担忧。他常摇头说：“啊！上帝肯定不是用掷骰子来决定电子应如何运动的！”他为这个问题担忧了好长时间，或许他从来也没有使他自己真正相信过这个事实，即：这是人们对自然界所能作出的最好描述。现在仍然有一两位物理学家在研究这问题，他们从直觉上深信，可以通过某种方式用另一种方法来描写这个世界，并且可以把有关事物行为的所有这种不确定性都消除掉。然而到现在没有一个是成功的。

当我们希望描写原子结构时，确定一个粒子的位置所必然要出现的不确定性就变得极为重要。在氢原子中有一个由单个质子组成的核，核的外面有一个电子，而这个电子的位置的不确定性就同原子本身一样大！因此我们不能严格地说，电子在某一“轨道”上绕质子运动。最多我们可以说，在一个离质子距离为 r 的体积元 ΔV 内有一定的机会 $[p(r) \Delta V]$ 观察到这个电子，概率密度 $p(r)$ 由量子力学来确定。对一个未受扰动的氢原子来说， $p(r) = Ae^{-r^2/a^2}$ ，这是一个如图6-8所示的那种钟形函数。数 a 是“典型”的半径，函数从这里开始

减小很快。既然在离原子核距离远大于 a 的地方找到电子的概率很小，我们可以把 a 设想为“原子的半径”，大约等于 10^{-10} m。

如果想象有这样一团“云”，它的密度正比于我们能观察到的电子的概率密度，那么我们就形成氢原子的图像。这样一团云的一个实例如图6-11所示。所以我们对氢原子的最好“写照”便是一团“电子云”（虽然我们实际上指的是“概率云”）围绕着一个核。电子就处在云中某一地方，但自然界只允许我们知道在任何一个特定位置上能找到它的机会 是多少。



图6-11 使氢原子形象化的一种方法。这里云的密度（洁白度）表示能观察到的电子的概率密度

在尽可能多地了解自然界的努力中，现代物理学曾发现，有些事情永远不可能确切地“知道”。我们的许多知识必然总是不确定的。而用概率来表述时，我们所能获得的知识则最多。

[1] 在前三轮游戏之后，实际上是这样进行实验的，即把放在一只盒子中的30个分币剧烈摇动，然后数一下出现正面的数目。

[2] 这里“H”为英语单词“Head”的略写，此处意为“正面”，“T”为英语单词“Tail”的略写，此处意为“反面”。——译者注

[3] 麦克斯韦的表示式是 $p(v) = Cv^2 \rho^{-av^2}$ ，其中 a 是一个与温度有关的常数，而 C 应选定得使总的概率等于1。

第7章 万有引力理论

§7-1 行星运动

在这一章中，我们将要讨论对人类智慧影响最为深远的通则之一的引力定律。当我们现在赞颂人类智慧的时候，应当先停下来向大自然表示敬畏之意，因为她能如此完整而普遍地遵循引力定律这样一个出奇地简单的原理。那么什么是引力定律呢？它指出，宇宙中每一个物体都以一定的力吸引着每一个其他物体，而对任何两个物体来说，这一力正比于每一个物体的质量，而反比于它们之间距离的平方。这个陈述数学上可以用下列式子来表示：

$$F = G \frac{mm'}{r^2}.$$

如果对此再加上一个事实，即一个物体在力的作用下会沿着力的方向得到加速，而加速的快慢与物体的质量成反比；那么我们就已说出了所需要的一切，于是一个天资卓越的数学家就能推导出这两个原理的所有结论。然而由于你们还没有被认为天资如此卓越，所以我们要更详细地来讨论一下这些结论，而不是只给你们留下两个简单的原理。我们将简短地叙述一下发现引力定律的故事，讨论它的某些结果，它在历史上的作用，这样一条定律所遗留下来的神秘之处，以及爱因斯坦对这条定律所作的若干改进；我们还将讨论这条定律与物理学中其

他定律的关系。所有这些不可能在这一章中都讲到，所以有些论题将在适当时候放到往后的几章中去讨论。

故事要从古人对行星在恒星中间运动的观察，并且最终作出了它们在围绕太阳运行的推论开始，这是后来为哥白尼所重新发现的一个事实。行星究竟怎样 围绕太阳运行，并且究竟用什么样的运动 绕之运行，要发现这些，就要稍微多作一点工作。15世纪初叶，在行星到底是不是围绕太阳运行这个问题上曾有过剧烈的争论。第谷·布拉赫（Tycho Brahe）有一个想法，它与古人提出的任何观点都不相同，他认为：如果能足够精确地测得行星在天空中实际的位置，那么这些有关行星运动本性的争论就会得到最好的解决。如果测量能精确地显示出行星在如何运动，那么或许有可能去建立这种或那种观点。这是一个非同小可的想法：如果要想发现什么东西，那么去细致地做一些实验要比展开冗长的哲学争辩好得多。在这个想法的指引下，第谷·布拉赫在哥本哈根附近的希恩（Hven）岛上他的天文台里，花了多年时间来研究行星的位置。他编制了一种篇幅庞大的星表；在第谷死后，数学家开普勒对这些星表进行了研究。从这些数据中，开普勒发现了涉及行星运动的一些非常优美、卓越而又简单的定律。

§7-2 开普勒定律

开普勒首先发现，每个行星沿一条称为椭圆 的曲线绕太阳运行，而太阳处在椭圆的一个焦点上。椭圆不仅仅是呈现为一个卵形的东西，而是一条非常独特和精确的曲线，这条曲线可以用两只图钉（在每个焦点上各钉一只），一段线和一支铅笔把它画出来；从数学观点上来看，它是这样一些点的轨迹，从两个定点（焦点）到其上每一点

的距离之和是一个常数。或者，如果你们愿意的话，可以把它说成是一个“压扁”了的圆（图7-1）。

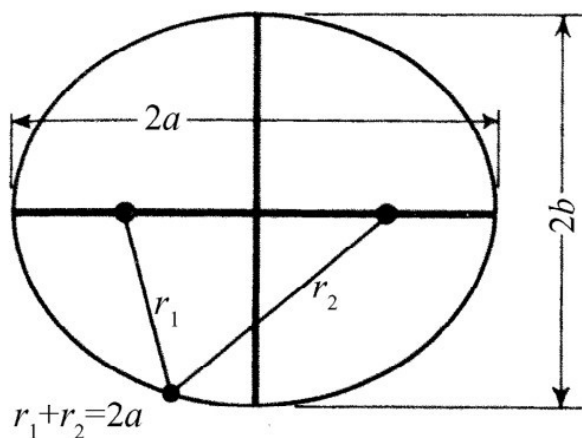


图 7-1 椭圆

开普勒的第二个发现是，行星并不以均匀速率绕太阳转动，而是当它们接近太阳时跑得较快，远离太阳时则跑得较慢。确切地说便是这样：设在任意相继的两个时间，比如说相隔为一周的时间内观察一个行星，并且对每个观察位置向行星画一条矢径^[1]。那么行星在一周中所经过的轨道上一段弧线和两条矢径一起围成一定的平面面积，犹如图7-2中所示的那个阴影面积。如果在离太阳较远的那部分轨道上（此时行星运动得较慢），也作时间相隔一周的与前类似的两次观察，那么这时围成的面积与前一情况下的面积完全相等。因此，按照开普勒第二定律，每个行星的轨道速率都使矢径在相等时间内“扫过”相等的面积。

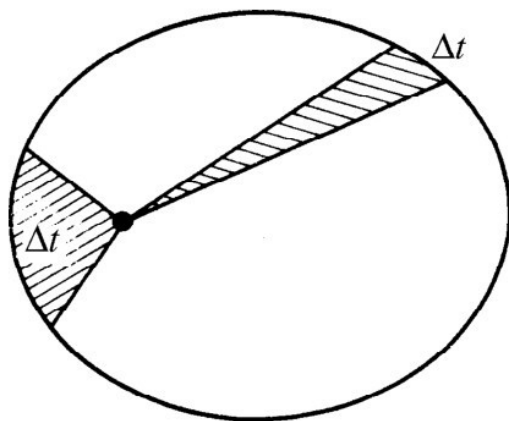


图7-2 开普勒的面积定律

开普勒第三定律发现得较晚；这条定律与前两条不同，各属于不同的范畴，因为它不是只涉及单独的行星，而涉及一个行星与其他行星之间的关系。这条定律表明：如果把任何两个行星的轨道周期和轨道大小进行比较，则周期与轨道大小的 $3/2$ 次方成正比。这里所说的周期是行星在其轨道上完全绕一圈所需的时间间隔，而所谓轨道的大小是用椭圆轨道最大直径（术语叫“长轴”）的长度来量度的。更简单一些，如果行星绕圆周运动（实际上确实近似如此），那么绕圆周走一圈所需的时间将正比于直径（或半径）的 $3/2$ 次方。这样，开普勒的三条定律便是：

I. 每个行星都沿椭圆轨道绕太阳运行，太阳位于椭圆的一个焦点上。

II. 从太阳指向行星的矢径，在相等时间间隔内扫过相等的面积。

III. 任何两个行星的周期平方正比于它们各自轨道半长轴的立方：

$$T \propto a^{\frac{3}{2}}。$$

§7-3 动力学的发展

当开普勒发现这些定律的时候，伽利略正在研究有关运动的定律。当时的问题在于是什么东西驱使行星在天上转动（那时有一种理论这样说，行星之所以运动是因为在它们背后有一群看不见的天使在扑动他们的翅膀，推动行星前进。你们将会看到，这个理论现在被修改了一下！这就是说，为了保持行星的环绕运动，看不见的天使们必须朝不同于运动的方向飞行，并且他们也没有翅膀。除此以外，这倒多少有点像现在的理论）。在有关运动方面，伽利略发现了一个非常值得注意的事实，这个事实对于理解开普勒定律是必不可少的。这就是惯性定律——如果有某个物体在运动，但没有和其他东西相碰撞，也完全不受任何干扰，那么它将沿一直线以均匀速度永远运动下去（为什么它能保持直线运动？我们不知道，但是事情就是如此）。

牛顿使这个观念更为明确。他说：“改变物体运动的唯一方法是要对之用力。”如果物体的速率变大，就必定有一个力施加在运动方向上。另一方面，如果物体的运动改变到另一个新的方向，那么它必定受到一个斜向的力的作用。这样牛顿添进了如下一个观念：要改变一个物体运动的速率或方向，就需要有力才行。例如：把一块石子系在绳上，并使它作圆周运动，那么就需要有一个力以保持它在圆周上运行。这时我们必须把绳子拉住。事实上，这个定律说的是，力所产生的加速度反比于物体的质量；或者说，力正比于质量乘加速度。物体的质量越大，使它产生某一给定加速度所需的力就越大（质量可以这样来测量，使其他石子系于同一根绳的末端，使它们以同样的速率绕同样的圆周转动，用这种方法可以知道它们所需的力的大小，质量较大的物体，所需的力较大）。从这些考虑中得出的一个卓越的观念就

是：要保持行星在它的轨道上运行，根本不需要有一个切向的力（天使们并不一定要沿切线方向飞行），因为行星总会沿所要求的方向运动。如果根本没有什么东西去干扰它，那么行星就将沿直线运行下去。但实际的运动却偏离了不存在力作用时物体所应沿之运动的那条直线，这种偏离差不多与运动相垂直，而不沿运动的方向。换句话说，由惯性原理得知，控制行星绕太阳运动所需的力不是一个绕太阳而是指向太阳的力（如果有一个力指向太阳，那么当然太阳也许就是那天使了）。

§7-4 牛顿引力定律

牛顿凭借他对运动定律的精辟理解，意识到太阳可能就是支配行星运动的那些力的源头所在。他给自己证明（或许我们不久也能证明），正是在相等时间内扫过相等面积这个事实成了所有偏离都沿径向这一命题的一个明确的标志——也就是说面积定律是所有的力都精确地指向太阳这一观点的直接结果。

其次，对开普勒第三定律的分析可以表明，行星越远，作用力越弱。如果比较两个离太阳距离不同的行星，那么分析表明，力与行星各自的距离平方成反比。把这两条定律结合起来，牛顿于是推断说，必定存在着一个力，它的大小反比于两个物体间距离的平方，方向则沿着它们间的连线。

作为一个对事物普遍性有非凡感悟力的人，牛顿当然要假设这个关系可以更普遍地加以应用，而不只限于太阳拉住行星这个事实。例如当时已经知道，正像月球绕着地球转动一样，木星也有自己的月球在绕着它转动，于是牛顿确信，每个行星都在用一个力拉住自己的月

球。至于把我们吸住在地面上的那个力，牛顿也早已知道，所以，他就提出，这类力是一个普遍存在的力——每个物体都吸引任何其他物体。

其次一个问题是，地球拉住人的力与它拉住月球的力是否“相同”，也就是说，是否都与距离平方成反比。如果地面上一个物体原来静止，然后释放，在第一秒钟内落下16 ft，那么在同样时间内，月球将落下多远？我们也许会说，月球根本没有落下。但是如果没有力作用在月球上，它会沿一条直线离去，可是，它并不这样做而是沿一圆周运动，所以实际上它是从那个如果根本没有力作用时所应处的位置上落了下来。从月球的轨道半径（约240000 mi）以及它绕地球一圈所需的时间（约为29天），可以算出月球在其轨道上每秒钟走了多远，随后就可以算出它在1 s内落下了多远^[2]。经过计算这段距离约为1/20 in。它与反平方定律吻合得非常好，因为地球的半径是4000 mi，而如果一个离地球中心4000 mi的物体在第一秒钟内落下16 ft，那么一个在240000 mi，也就是在60倍远的地方的物体应当只掉下16 ft的1/3600，这个数值大约也为1/20 in。为了用类似的计算来检验这个引力理论，牛顿非常仔细地进行了他的计算，但是却发现差异很大，以致他认为这个理论与事实相矛盾，因而没有发表他的结果。六年之后，一个对地球大小的新的测量表明，天文学家曾使用了一个不正确的到月球的距离。当牛顿听到这个消息后，他就用正确的数据重新作了计算，所得的结果与事实非常一致。

月球“下落”的这种观念，多少有点使人迷惑，因为正像你们知道的那样，月球丝毫没有靠近地球。但是这个观念相当有意思，以致值得进一步加以说明：所谓月球下落，其含义就是：它离开了不存在力的作用时原应遵循的那条直线。让我们举地球表面上的一个例子。一

个靠近地面的物体被释放后，在第一秒内将落下16 ft。一个水平射出的物体也将落下16 ft；即使它沿水平方向运动，但在同样时间内它仍然要落下16 ft。图7-3表示一个用以演示这一情况的仪器装置。在轨道的水平部分有一个小球，它行将往前冲出一小段距离。在同一高度则有一个行将垂直下落的小球。另外，有一电动开关起控制作用，在第一个小球离开轨道的时刻，它随即释放另一个小球。至于两个小球在同样时间内落下同样的高度可以用它们在半空中相碰撞这个事实来证明。一个物体（如子弹）被水平射出时，可能在1 s内要跑很长一段路程——比如说2000 ft——但即使它是水平瞄准的，它仍然要落下16 ft。然而，如果我们把子弹发射得越来越快，那么会发生什么情况呢？不要忘记，地球的表面是弯曲的。如果子弹发射得足够快，那么在落下16 ft后，它可能恰巧在地面之上与之前相同高度的地方。怎么会这样呢？子弹仍然在下落，但是由于地球向下弯曲，所以在“绕着”地球下落。问题是，它在1 s内必须跑多远才能使地球在水平线下面16 ft？在图7-4中，我们看到一个半径为4000 mi的地球，以及一条在没有力作用的情况下子弹将循之而行的切向直线。如果我们现在应用几何学中一条奇妙的定理，即垂直于直径的半弦是所分割的直径两部分的比例中项，那么就可以看出，子弹所走的水平距离是所下落的距离16 ft与地球直径8000 mi的比例中项。 $(16/5280) \times 8000$ 的平方根很接近于5 mi。于是我们看到，如果子弹每秒跑5 mi，那么它将继续以同样的速度每秒往地球落下16 ft，而决不会与之靠得更近一些，因为地球表面总是在不断地弯曲而离开子弹。加加林先生也是这样以每秒大约5 mi的速率绕地球飞行25000 mi来使自己保持在空间的（他绕地球一周所需的时间稍为长一些，因为他在稍为高一点的地方飞行）。

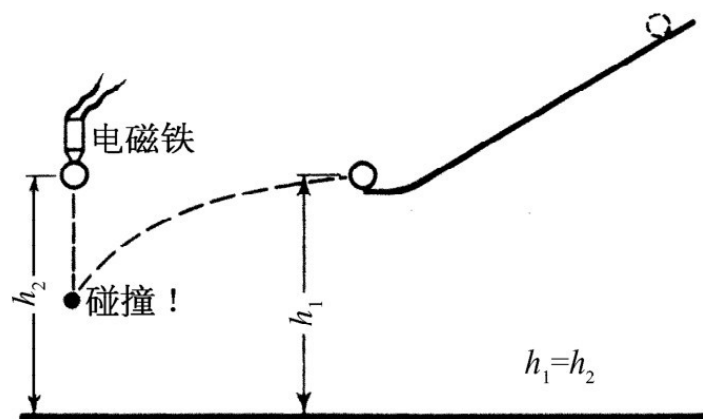


图7-3 演示竖直运动与水平运动互不相关的仪器装置

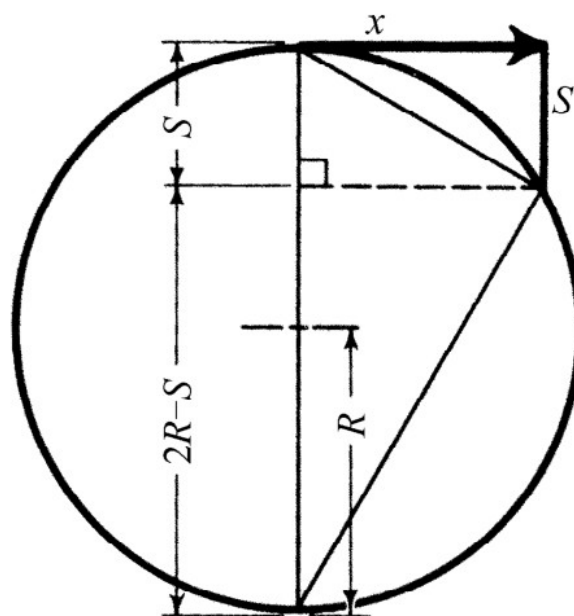


图7-4 指向圆形轨道中心的加速运动。根据平面几何， $x/S = (2R - S)/x \approx 2R/x$ ，其中 R 是地球的半径（4000 mi）， x 是每秒“水平通过”的距离； S 是每秒“下落”的距离（16 ft）

只有在所获得的超过所给予的时，任何一个新定律的重大发现才有价值。现在，牛顿用开普勒第二和第三定律来推导他的引力定律。他预言了什么？首先，他对月球运动的分析是一个预测，因为他把地

面上物体的下落与月球的下落联系起来。其次一个问题在于行星轨道是不是一个椭圆？我们在往后的一章中将看到如何能精确地计算这个运动，而且人们确实能够证明，它的轨道应当是一个椭圆^[3]，所以毋需再用其他事实来说明开普勒第一定律。正是这样，牛顿作出了他第一个有力的预言。

引力定律解释了许多以前所不能理解的现象。例如，月球对地球的吸引造成了潮汐，直到那时为止还是一个谜。月球吸引地面的水造成潮汐——这在以前人们也想到过，但是他们不如牛顿那样聪明，所以他们想，一昼夜应该只有一次潮汐。其理由是，月亮把地面的水提升上来，造成一个高潮和一个低潮。由于地球在月球下面旋转，就使一个地方的潮水每24h涨落一次。实际情况是潮水每12h涨落一次。另一个学派则主张，高潮应当在地球的另一面，他们争辩说，因为月球把地球从水中拉开！这两种理论都是错误的。实际的过程如下：月球对地球和对水的吸引在中心是“平衡”的。但是靠近月球的水被拉的程度要比平均值大，而离月球较远的水被拉的程度要比平均值小。此外，水能流动，而比较结实和坚硬的地球却不能。真实的情况是这两者的结合。

所谓“平衡”指的是什么意思呢？什么东西在平衡？如果月球把整个地球拉向自己，那么为什么地球不会“向上”落到月球上去？这是由于地球耍着像月球一样的花招，所以它在绕某点作圆周运动，这个点在地球内部，但不在地球中心。月球并不在绕地球中心转动，而是地球和月球一起在绕另一个中心位置转动，每一个都在向着这个共同位置下落，如图7-5所示。这个绕共同中心的运动，是使每一个的下落得以平衡的原因。因此，地球也不是沿一直线行走，而是在绕一个点作圆周转动。地球上离这点远的一边的水是“不平衡的”，因为该处月球

的引力要比在地球中心处小，而在地球中心处这一引力刚好和“离心力”平衡，结果这一不平衡使水沿离开地球中心的正方向运动。在近的一边，月球的吸引较强，所以不平衡是在空中相反的方向上，但又是离开地球中心的。最后，我们得到了两次涨潮。

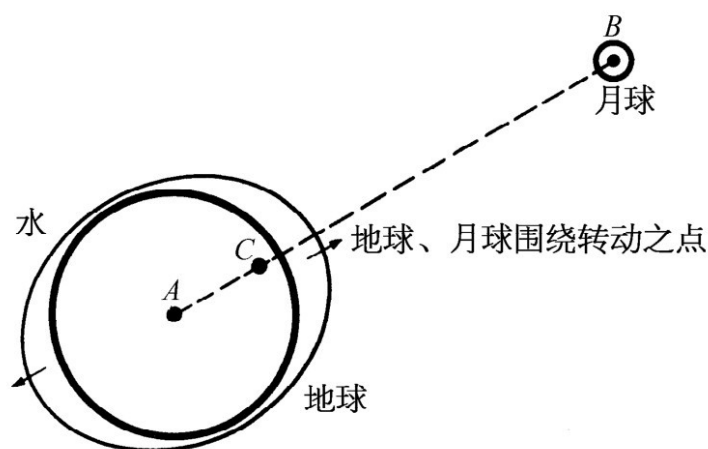


图7-5 地球——月球系统与潮汐现象

§7-5 万有引力

当我们理解引力的时候，还可以理解别的什么呢？人人都知道地球是圆的。为什么地球是圆的？这很容易回答：由于引力的作用。我们之所以能够理解地球是圆的，仅仅是因为每个物体都在吸引任何其他物体，所以地球尽它之所能把自身各部分相互吸引在一块！如果我们进一步深入下去，那么地球并不是一个精确的圆球，因为它在旋转着，从而引进了离心效应，在靠近赤道的地方，它趋向于与引力相对抗，其结果表明，地球应当是椭圆形的，而且我们甚至得到了这个椭圆的正确形状。这样，我们仅仅从引力定律出发，就能推论出太阳、月球和地球都应当呈（近似的）圆球形。

应用引力定律我们还能做别的什么呢？如果我们看一下木星的卫星，那么我们就知道它们怎样围绕这个行星运行的一切情况。附带说一下，在有关木星的卫星这个问题上曾经出现过困难，值得在这里一提。罗默（Roemer）非常仔细地研究了这些卫星，他注意到，它们时而好像走在时间表的前面，时而好像走在时间表的后面（等待很长一段时期，并找出这些卫星绕行一圈平均所需的时间，就能找到它们的时间表）。当木星特别靠近地球时，它们走在前面，而当木星远离地球时，它们就走在后面。要按照引力定律来解释，将会是一件非常困难的事——确实，如果找不到其他解释的话，这就会成为这个美妙理论的终结。如果某条定律，哪怕只在一个理应对的地方不对，那它就是错的。但是现在出现这个矛盾的原因是十分简单和美妙的：为了看到木星的卫星就需要稍微花一点时间，因为光从木星跑到地球上是需要时间的。当木星靠近地球时，它花的时间稍微短一点，而当木星远离地球时，所花的时间就稍微长一点。这就是为什么这些月球平均而论好像时而稍微超前、时而稍微落后的原因，完全看它们靠近还是远离地球而定。这个现象表明光的传播并不是在一瞬间发生的，并且它第一次为光的速度提供了一个估计。这个估计是在1676^[4]年做的。

如果所有的行星彼此之间都相互吸引，那么控制一个行星比如说木星围绕太阳转动的力，不是只有从太阳来的引力，也有来自例如土星的拉力。实际上这个力并不强，因为太阳的质量比土星要大得多，但是毕竟有一点吸引作用，所以木星的轨道不应该是一个精确的椭圆，事实也确是这样；它与精确的椭圆轨道稍有偏离，而且绕着它“摆动”。这样的一种运动就稍微更复杂些。人们曾试图在引力定律的基础上分析木星、土星及天王星的运动。对这些行星中的每一个，人们计算了它对其他行星所产生的效应，以便知道这些运动中出现的微小偏

差与不规则性，是否单独用这条定律就能完全理解。好，就让我们看一下吧！对于木星和土星，一切都很好，但是对天王星却是“不可思议”的。它以非常奇特的方式运行着。至于它不是沿着一个精确的椭圆运行，那是可以理解的，因为有木星和土星在吸引它。但是，即使考虑到这些引力，天王星仍然没有按正确方式运行，所以引力定律就面临被推翻的危险，这是一个不能排除的可能性。但在英国与法国有两个人，亚当斯（Adams）与勒威耶（Le Verrier），他们各自设想另一种可能性：或许存在着另一个幽暗而看不见的行星，以致人们从未看到过它。这个行星N可能在吸引天王星。他们计算了这样一个行星应处在哪个位置才能造成所观察到的那个扰动。他们把这一消息分别通知有关的天文台，并说：“先生们，把你们的望远镜指向某某、某某位置，你们就会看到一颗新的行星。”至于人们对你注意不注意，那常常要看你在同谁进行联系。他们确实注意到了勒威耶；他们朝那个位置看了，果真发现有一颗行星N！另一个天文台过了几天也很快地看到了这颗新行星。

这个发现表明，牛顿定律在太阳系范围内是绝对正确的；但是这些定律的应用是否能扩展到离我们最近的那些行星所在的比较小的距离以外呢？对它们的第一个检验，在于回答这个问题：恒星是否也像行星一样在彼此吸引？在双星的情况下，我们有确凿的证据表明，它们是在彼此吸引的。图7-6表示一对双星——两颗非常靠近的恒星（图上还有第三颗恒星，由此我们看出照片没有被旋转过）。图中也显示了双星在几年之后所在的位置。我们看到，相对于“固定”的恒星来说，双星的轴转过了一定角度，也就是说两颗星中每一颗在绕着另一颗转动。它们是不是在按照牛顿定律转动？图7-7表明对这种双星系统中一颗星的相对位置所作的仔细测量。这里我们看到一个完美的椭圆，测量工作从1862年开始，到1904年测完了整个一圈（到现在它必

定又已绕行了一圈多)。一切与牛顿定律相一致，只是天狼星A 不在焦点上。为什么是这样？因为椭圆平面并不在“天空平面”上。我们不是从垂直方向去看轨道平面，而当从倾斜方向去看时，它还是一个椭圆，但焦点不再在同一个位置上。因此我们确实能够按照引力定律的要求来分析双星中一个绕另一个的运动。

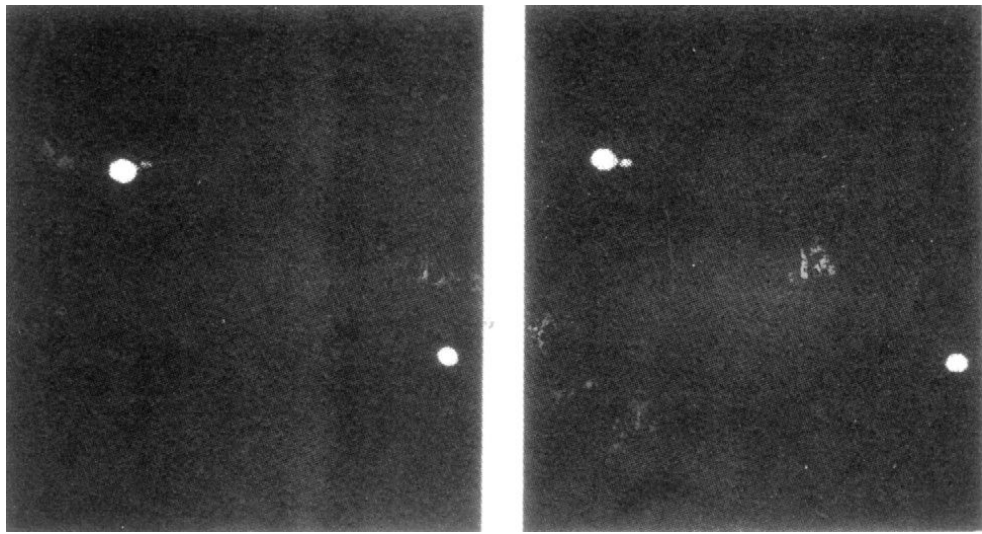


图7-6 双星系统

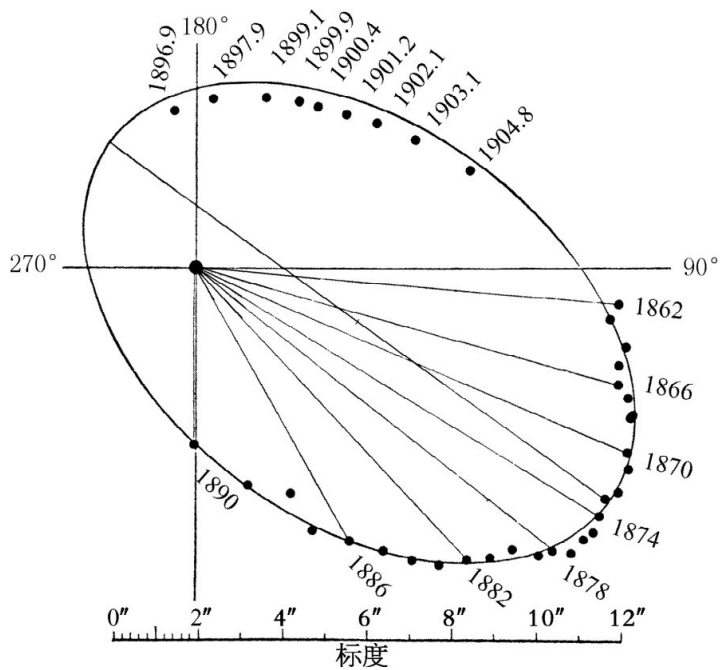


图 7-7 天狼星B绕天狼星A转动的轨道

甚至对更大的距离，引力定律也是正确的，图7-8表明了这一点。如果一个人看不出引力在这里起作用，那他是过于迟钝了。这幅图所显示的是天空中最美妙的事物之一——一个球状星团。所有的小点都是星星。虽然看上去它们好像向中心密集地挤成一团，其实这是由于我们的仪器难免发生错误所致。事实上，即使是最靠近中心的那些恒星之间的距离也非常巨大，而且它们也非常难得相互碰撞。在内部比在外沿有更多的恒星，越往外走，恒星越少。很明显，在这些恒星之间存在着一个引力。因此非常清楚，在如此巨大的、或许是太阳系大小的100 000倍的范围内也存在着引力的作用。让我们现在跑得更远一点，看一下图7-9所示的某个星系的整体。这个星系的形状表明它的物质明显地有团聚在一起的趋势。当然我们不能证明这一定律在这里也是准确地与平方成反比，而只能说明在如此巨大的范围内，仍然有引力作用着，它把整个物体聚集在一起。有人或许会说：“嗯，这一切真是太巧妙了，但是为什么不聚集成一个球呢？”回答是：因为它在旋转，并且具有角动量，而这是在它收缩时所不能放弃的；因此，它必然主要在一个平面内收缩（附带提一下，如果你在探讨一个有意思的问题，银河系的旋臂如何形成，以及究竟是什么决定了这些星系的形状等等，都还没有人进行研究）。然而，非常清楚，星系的形状来源于引力的作用，尽管它的结构的复杂性还不允许我们把它完全分析清楚。一个星系的规模有50 000~100 000光年，地球到太阳的距离是8.33光分，所以你们可以看到这样的范围是多么的大！



图7-8 球状星团

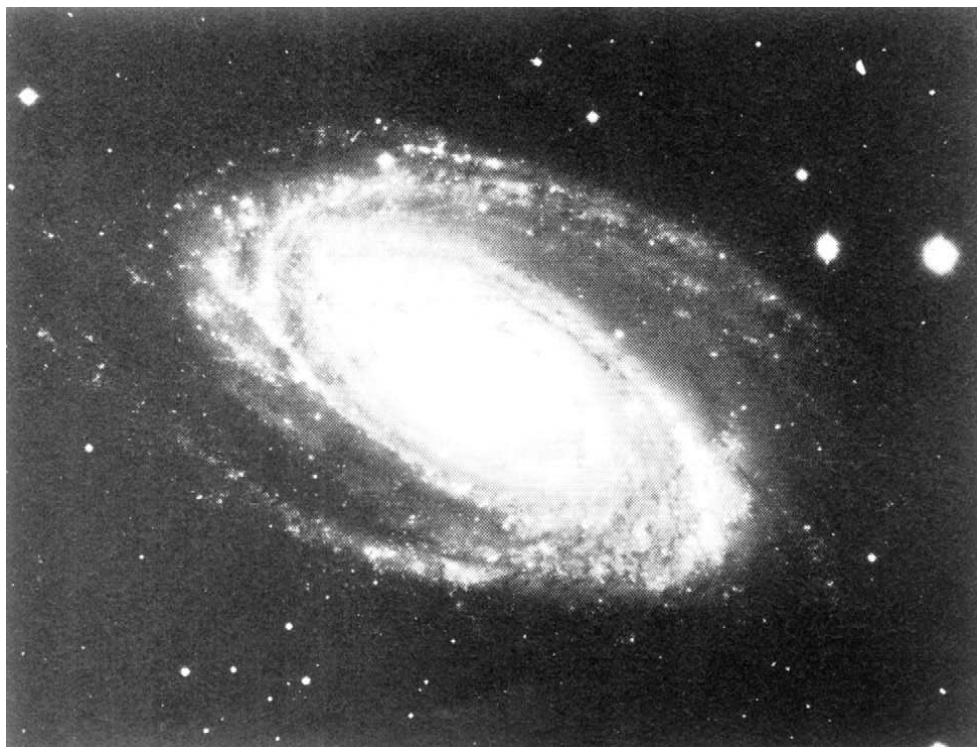


图7-9 某星系

正如图7-10所指出的那样，甚至在更大的范围内也存在着引力。图中还显示出有许多“小”的东西集成一簇。这就是一个犹如星团一样的星系团。可见这些星系相距如此之遥也彼此吸引而同样聚集成团。或许甚至在超过几千万光年的距离之间也存在着引力作用；就我们今天所知，看来引力永远以与距离平方成反比的方式延伸开去。



图7-10 星系团

我们不仅能够理解星云，而且从引力定律出发，甚至还能对恒星的起源获得某些概念。如果我们有很大的一片尘埃与气体云，如图7-11所示，那么尘埃片与片之间由引力而产生的吸引，可能会使它们形成一些小的团块。在图上有一些“小”黑斑依稀可辨，它们可能是尘埃与气体相积聚的开始，而由于这些积聚物彼此间的引力作用，就开始形成星体。我们究竟是否看到过一个星的形成，这是一个可争论的问题。图7-12提供了一个证据说明我们曾经见到过。左边是一张1947年拍摄的照片，显示一个气体区域，中间有几个星体；右边是一张只过了七年之后拍摄的照片，显示两个新的亮点。气体是不是积聚了起来，引力是不是作用得足够强，并把它聚集成一个足够大的球体，以

致在其内部发生星体核反应而把它变为一颗星呢？或许是这样，或许不是这样。而不可思议的是，仅仅在七年之中我们竟会如此幸运，能看到一颗星体把本身转变为可见的形式；更不可能的是，我们居然一下子能看到了两个！

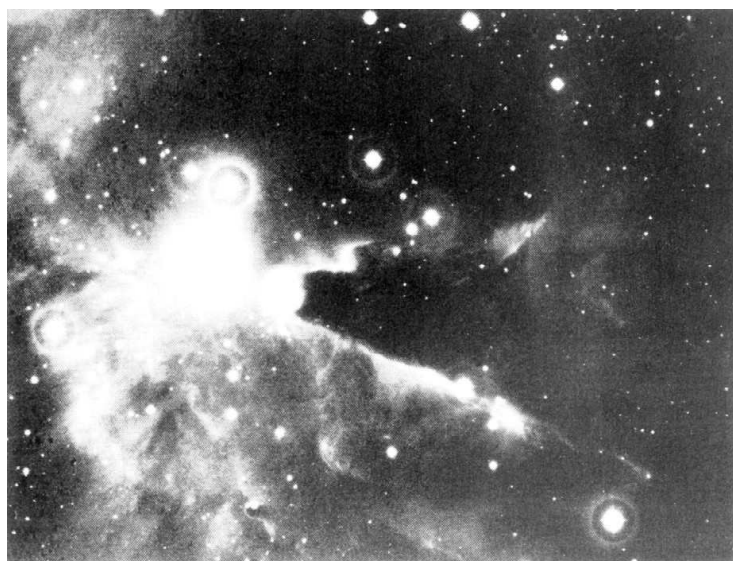


图7-11 星际尘埃云

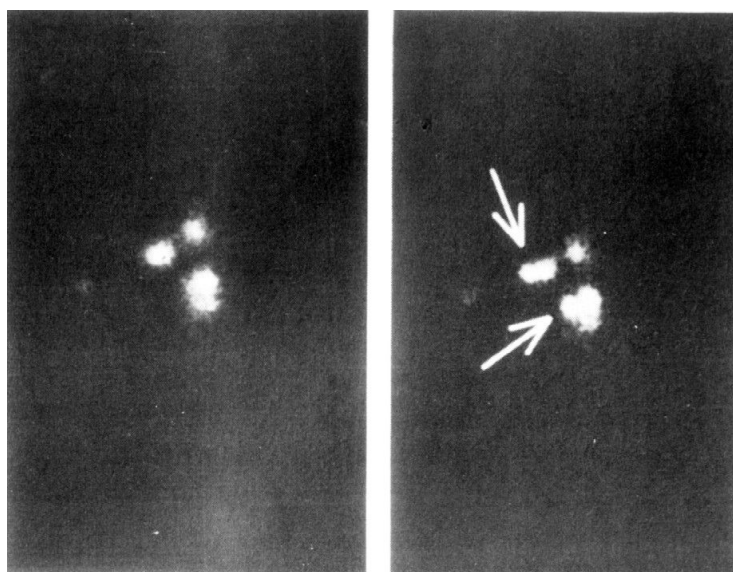


图7-12 新星的形成

§7-6 卡文迪什实验

由前可见，引力作用伸展到距离极大的地方。但是，如果在任何一对物体之间有一个力作用着，那么我们应当能够测出作用在我们周围物体之间的这个力。比方说，难道不能用一个铅球和一个大理石球来做实验，观察大理石球朝向铅球跑去，而一定要去观察星体的相互绕行吗？用这样一种简单方式来做这个实验，其困难在于，这里的力是非常之弱的。因此必须格外小心地来对待，这就是说，要把仪器遮盖起来以避免与空气接触、要肯定它不带电等等；然后可以来测量这个力。卡文迪什（Cavendish）第一个进行了这种测量，他所使用的仪器的略图如图7-13所示。这个实验第一次演示了两个大的固定铅球和两个小铅球之间力的直接作用；两个小铅球装在一根细杆的两端，细杆用一根非常精细的、称为扭丝的金属丝悬挂起来。用测量扭丝扭转了多少的方法，我们就能测出力的强度，证实它与距离平方成反比，并确定它的大小。这样，我们就能精确地确定公式

$$F = G \frac{mm'}{r^2}$$

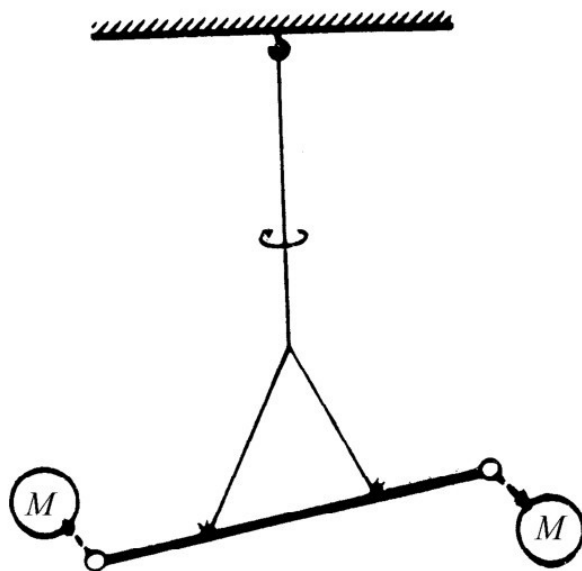


图7-13 卡文迪什用来验证小的物体之间存在万有引力和测量引力常数 G 的装置略图

中的系数 G ，因为质量和距离都是已知的。你们会说：“对地球来说我们早就知道这个系数了。”是的，但我们并不知道地球的质量。如果从这个实验知道了 G ，以及地球的吸引有多强，我们就能间接地知道地球的质量有多大！这个实验曾经被有些人叫做“称地球”实验，由此可以确定引力定律的系数 G 。这是唯一能确定地球质量的方法。 G 的数值是

$$6.670 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

引力理论的这一伟大成就在科学史上所产生的重大影响，怎么估计也不会过分。请把早先年代里无休止的争论和悖论盛行、知识中充满着混乱、迷惑以及不完善和不可靠这种情况同这条定律的明晰和简单作个比较吧！现在，所有月球、行星和恒星都由这样一条简单的规则来支配，并且，人们能够理解它，从它推论出行星应当如何运动！这是科学在以后年代里所以会获得巨大成就的原因，因为它为人类提

供了一个希望，也许宇宙间其他现象也有这样一种极其简单的定律支配着。

§7-7 什么是引力

然而这条定律确是如此简单吗？它的机制是什么？我们所做过的一切，不过是描写了地球怎样绕太阳运行，但是我们没有谈到是什么东西在使它运动。牛顿对此没有做过任何假设；他满足于找出它做的是什么，而并未深入到它的机制中去。从那时起也没有人提出过任何机制。物理定律的特征，就是它们具有这种抽象的性质。能量守恒定律是一条关于这样一些量的定理，对于这些量必须加以计算，然后把它们加起来，但它没有提到它的机制，同样，力学中的那些重要定律也是一些数学定律，我们并不知道起作用的机制是什么。为什么我们能用来描述自然，而在其背后又没有一个机制呢？无人知道。我们必须继续照此办理，因为用这种方法我们能够发现更多的东西。

引力的机制曾经屡次为人们所提出过。研究一下很多人一再想到的其中的一个，是颇饶趣味的。起初，当有人“发现”它的时候，确实非常高兴，感到十分幸运，但他随即发现原来这是错误的。这个机制大约在1750年第一次被人们提出。设想有许许多多粒子在空间以极大速度向各个方向运动，在它们穿过物质时只有很少一部分被吸收掉。当它们被吸收时，就给地球以一个冲量。然而，由于在一个方向上运动的粒子同在别的方向上运动的粒子一样多，所以这些冲量都互相抵消。但是如果考虑到太阳在地球附近，那么跑向地球的粒子穿过太阳时要被吸收一部分，所以来自太阳的粒子比来自另一边的粒子要少一些。因此，地球最后受到一个朝向太阳的冲量。而且，不要花费多少

时间人们就能看出，这个冲量与距离平方成反比，因为当距离改变时，太阳所张的立体角也要改变。这个机制错在哪里呢？错在其中包括了一些新的结果，而这些新的结果是不真实的。这个特别的想法遇到了如下的困难：地球绕太阳运行时，它与从前面射来的粒子相碰撞的次数，将比从后面射来的粒子要多（当你在雨中奔跑时，打在你脸上的雨点要比打在你脑后的多）。因此从正面将会给予地球更大的冲力，而地球将会受到一种对其运动的阻力作用，这种阻力将使它在轨道上的运动减慢下来。人们可以算出，作为这种阻力的结果，地球需要多长时间才会停下来；结果是使地球仍留在轨道上的时间并不长，所以这个机制行不通。从此也就没有再提出过任何一个机制，它既能“解释”引力，又不至于会预言其他实际不存在的现象。

其次我们要讨论万有引力与其他作用力之间可能存在的关系。目前还没有一种用其他力来说明引力的解释。它不是电或诸如此类的一个方面，所以我们无法解释。然而，引力与其他力十分相似，因而看一下它们的相似之处是很有趣的。例如，两个带电体之间的电力看上去就很像引力定律：它们之间的电力等于一个带负号的常数乘以电荷之积，并与距离的平方成反比。电力的方向则与引力的情况相反——同号相斥。但是两条定律含有同样的距离函数，这难道还不够引人注目吗？引力与电力之间的关系或许比我们所能想象的要密切得多。人们作了许多尝试企图把它们统一起来；所谓的统一场论，不过是一个想把电力与引力结合起来的非常美妙的尝试而已；但是如果把引力与电力相比较，那么最有趣的事是力的相对强度。任何一个包括它们两者的理论，必须也能推导出引力有多大。

如果我们来看用某些自然单位表示的由于电作用产生的两个电子（自然界中的电荷的基本单位）之间的斥力，以及两个电子由于它们

的质量而产生的引力，那么我们就能够求出电斥力与万有引力的比值。这个比值与距离无关，是自然界的一个基本常数，如图7-14所示。两个电子间的万有引力与电斥力之比等于1比 4.17×10^{42} ！现在的问题是，这样巨大的数字从何而来？正像地球与跳蚤的体积之比那样，这个比值不是偶然的。我们研究的是同一事物，即电子的两个固有特性。这个大得难以置信的数字是一个自然常数，所以它包含了自然界中某种深邃的性质。这样一个惊人的数字从哪里来呢？有些人说，总有一天我们会找到一个“宇宙方程”，其中的一个根就是这个数。要找到这样的方程，它确能以大得如此出奇的数字为一个自然根，那是非常困难的。人们也曾想到过其他的可能性；其中之一是把它与宇宙年龄联系起来。很清楚，我们必须在某个地方找到另一个巨大的数字。那么，我们是不是用年来表示宇宙的年龄呢？不，因为年不是“自然”量；它只是人们所想象出来的。作为某种自然量的一个例子，让我们来看一下光穿过一个质子的时间，它是 10^{-24} s。如果我们把这个时间与宇宙年龄 2×10^{10} 年相比较，那么答案是 10^{-42} 。它有大约同样数目的零跟在后面，因而有人提出，引力常数与宇宙年龄有关。如果情况真是如此，引力常数就会随时间而变化，因为随着宇宙的变老，宇宙年龄与光穿过一个质子所需的时间之比就会逐渐变大。那么，引力常数是否可能随着时间在发生变化呢？当然，这种变化如此之小，以致要确定它是相当困难的。

而绕一更大的物体沿同一个圆周以同样速度转动，那么它们总将保持在一起，因为要在圆周上运动就需要力，对大的质量，需要的力也大。这就是说：对于一个较重的物体，重力作用应当正好以恰当的比例增加，所以这两个物体仍将一起作圆周运动。如果一个物体原先在另一物体的里边，那么它将留在里边而不离开；这是一个完全的平衡状态。因此，加加林或季托夫发现宇宙飞船舱内的一切东西是“失重”的，比方说如果他们碰巧丢掉一支粉笔，那么粉笔将与整个宇宙飞船沿着一条完全一样的路径绕地球飞行，所以它将始终在空间悬浮于宇航员的眼前。非常有趣的是，重力以极大的精密度精确地与质量成正比，因为如果不是如此的话，将产生某种效应，其中惯性与重量会有所区别。这样一种效应实际上并不存在。关于这一点，人们曾以极大的精密度用实验验证过。厄缶（Eötvös）在1909年第一次进行了这种实验；而最近则由迪克（Dicke）做过。对于所有做过试验的材料，其结果是，质量与重量的正比关系精确到 10^{-9} 或者更小。这是一个非凡的实验。

§7-8 引力与相对论

另一个值得讨论的论题是爱因斯坦对牛顿引力定律所作的修正。尽管牛顿引力定律创造了所有这些惊人的成就，但仍然是不正确的！爱因斯坦对它所作的修正，在于把相对论考虑了进去。依照牛顿的观点，引力效应是瞬时发生的，也就是说，如果我们移动一个物体，那么我们会立即感觉到一个新的力，因为物体到达了新的位置；按照这种说法，我们可以以无穷大的速度发送信号。然而爱因斯坦提出了种种论证，说明我们不能发送比光更快的信号，所以牛顿引力定律必定是错误的。在考虑到延迟情况而加以校正后，我们得到一条新的定

律，称为爱因斯坦引力定律。这条非常容易理解的新定律的一个特点是：在爱因斯坦相对论中，任何具有能量的东西也具有质量——质量应在这一意义下来理解，即它以引力方式被其他质量所吸引。即使是光，由于它有能量，也就有“质量”。当一束带有能量的光经过太阳附近时，它将受到太阳的吸引。所以光并不是沿直线通过的，而是被弯曲了的。例如在日食时，太阳周围的恒星应该看起来好像从它们的这些位置偏离开去，这些位置就是如果太阳不在那里时它们所应处的地方。而人们也观察到了这个情况。

最后，让我们把引力理论与其他理论比较一下。近年来我们发现，所有物质都由微小粒子所构成，并且世界上存在着几种相互作用，如核力等等。但是在这些核力或电力中还没有发现有哪一个能用来说明引力。自然界的量子力学方面还没有引申到引力中去。当尺度小到需要考虑量子效应时，引力效应却仍是如此之弱，以致到现在还不需要去发展一种有关引力的量子理论。另一方面，为了物理理论的内在一致性，重要的一点是研究一下牛顿定律经修正为爱因斯坦定律以后，是否还可进一步加以修正，使之与不确定性原理相协调。到现在为止，还没有完成这最后一个修正。

[1] 矢径是从太阳到行星轨道上任何一点的连线。

[2] 这就是说，月球的圆形轨道处在一条直线之下有多远，而这条直线就是月球在1秒钟前在轨道上所处的那一点的切线。

[3] 这在本课程中将不予证明。

[4] 原文误为1656，经查证为1676。而且据考证，罗默在1676年的文章中并未对光速的数值作出估计。第一次对光速值的估计是1678年由惠更斯作出的。——译者注

第8章 运动

§8-1 运动的描述

为了找出物体随时间而发生的各种变化所遵循的规律，我们必须描述这些变化，并用某种方式把它们记录下来。在物体中要观察的最简单的变化是物体的位置随时间的明显改变，我们把它称为运动。让我们考虑某一个带有我们能观察它，并将它称为一个点的恒定标记的固体。我们将讨论这个小标记的运动（这个小标记可以是一辆汽车的散热器盖子，或一个下落球的球心），并将试图描述它在运动以及如何运动这一事实。

这些例子看来似较一般，但在描述其变化时，也有许多要小心对付之处。有些变化，例如，一朵缓慢漂移但迅速形成或迅速蒸发的云的漂移速率，或者一个女人思想上的变化，要描述它们就比描述在固体上一点的运动困难得多。我们不懂得分析思想上发生变化的简单方法，不过由于云可以用许多分子来表示或描述，或许在原则上我们能够通过描述云中所有个别分子的运动来描述云的运动。同样，甚至思想上的变化或许也与大脑内原子的变化有类似之处，但我们对此尚一无所知。

总而言之，这就是我们为什么要从点的运动开始研究的原因；也许我们应当把它们想象为原子，但在开始时粗略一些可能更妥当。我们把它们简单地想象为某一类小的物体——所谓小，是指与运动的距

离相比较而言。比如，在描述一辆开过100km的汽车的运动时，就不必去分汽车的前部和后部。的确，这里有一点儿差别，但粗略地看我们只讲“汽车”的运动，同样，我们选择的点不是绝对的点也丝毫没有关系；就我们现在的目的来说，没有必要极其精确。还有，在初次考察这个课题时，我们将不考虑世界的三维性。我们将只集中注意在一个方向上的运动，就像在一条公路上行驶的汽车那样。当我们知道了如何描写一维运动后，就将回到三维中去。现在，你们会说：“这尽是一些琐碎的事，”确实如此。那么，我们怎样来描述这样的一维运动，比方说，汽车的运动呢？没有比这更简单的了。有许多可能的方式，下面是其中之一。为了确定不同时刻汽车的位置，我们测量它与起点的距离，并记下所有的观测。在表8-1中， s 表示汽车离起点的距离，单位是英尺， t 表示时间，单位是分。表中的第一行表示零距离和零时间——即汽车尚未出发。1分钟后，出发并开过了1200 ft。在2分钟内，它开得更远——注意汽车在第2分钟开过了更大的距离——汽车在加速前进；但在第3和第4分钟甚至一直到第5分钟之间发生了什么事情——也许是遇到红灯停了下来？然后它再次加速，在第6分钟末开过13000 ft，在第7分钟末开过18000 ft，在第8分钟开过23500 ft，在第9分钟它只前进到24000 ft，因为在最后一分钟它被警察拦住了。

表 8-1

$t(\text{min})$	$s(\text{ft})$	$t(\text{min})$	$s(\text{ft})$
0	0	5	9 600
1	1 200	6	13 000
2	4 000	7	18 000
3	9 000	8	23 500
4	9 500	9	24 000

这就是一种描写运动的方式，另一种方式是利用曲线图。如果我们以横轴表示时间，纵轴表示距离，就得到如图8-1那样的一条曲线。当时间增加时，距离也增加，开始很慢，然后较快，在4分钟前后又很慢，以后几分钟内又再加快，最后在第9分钟时，看来像停止增加。这些情况不用表也能从图上观察到。显然，为了描述完全起见，人们还必须知道，在那些半分钟的标记处，汽车开到了那里。但是我们假定这个曲线图意味着在所有的居间时刻汽车都具有某个位置。

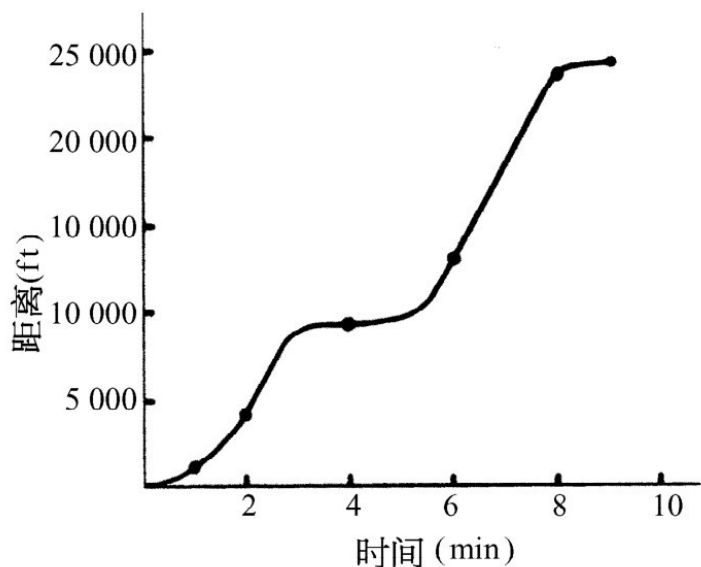


图8-1 汽车的距离-时间曲线

汽车的运动是复杂的。我们取某个以比较简单的方式运动的东西，比如说一个下落的小球，作为另一个例子。它遵循较简单的规律。表8-2列出落体的时间（以秒为单位）和距离（以英尺为单位）。在零秒时，小球从0 ft开始下落，在第1秒末落下16 ft，在第2秒末落下64 ft，在第3秒末落下144 ft，等等。如果将表上的数字作图，就得到图8-2所示的一条漂亮的抛物线。这条曲线的公式可以写为

$$s = 16t^2. \quad (8.1)$$

表8-2

$t(\text{s})$	$s(\text{ft})$
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256
5	400
6	576

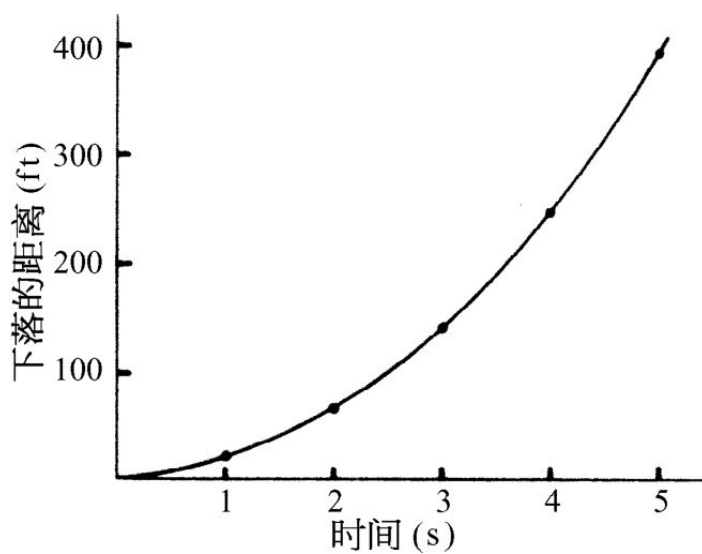


图8-2 落体的距离-时间曲线

这个公式使我们可以计算小球在任何时刻的距离。你们或许会说，对第一个曲线图也应当有个公式。实际上，人们也可以抽象地把这样一个公式写成

$$s = f(t), \quad (8.2)$$

它表示 s 是某个依赖于 t 的量，或用数学术语来说， s 是 t 的函数。由于我们不知道这个函数是什么，因此无法以确定的代数形式写下来。

现在我们已经看到了两个用非常简单的思想就能适当地描述的运动的例子——没有什么难以捉摸之处。然而，难以捉摸之处还是有的，有几处。首先，时间和空间究竟意味着什么？结果表明，这些深刻的哲学命题在物理学上必须十分小心地加以分析，而这并不是容易做到的。相对论表明我们关于空间和时间的观念并不如人们乍一看来可以想象的那么简单。然而，就我们当前的目的而论，对我们在开始时所要求的精确度来说，我们毋需十分小心地去精确地定义事物。或许你们要说：“这很糟糕，我听说过在科学上我们必须精确地定义每一件事。”我们不可能精确地定义任何事物！如果强求如此，只会使我们陷入像某些哲学家那样的思想僵化，他们面对面坐着，一个对另一个说：“你不知道你在讲些什么！”第二个说：“你所谓的‘知道’是什么意思呢？你所谓的‘进’是什么意思呢？你所谓的‘你’又是什么意思呢？诸如此类。”为了能够进行建设性的讨论，我们必须一致赞同我们所谈论的大致是同一件事。你们对于时间的了解已能满足我们目前的需要，但必须记住，还有一些微妙和难以捉摸的事情需要讨论，我们将在以后进行。

前面所涉及的另一个难以捉摸之处是能够设想我们正在观察的动点总是位于某处（当然，当我们注视它时，它在那里，但当我们看别处时，它可能不在那里了）。现在知道，在原子的运动中，这个观念也是错误的，我们不可能在一个原子上找到一个标记并观察它的运动。这种微妙的情况我们将在量子力学中去仔细讨论，但是在引进复杂性之前，我们将首先了解一下这些问题是什么，然后才能较好地按照这个题材的更现代的知识进行修正。因此，关于时间和空间，我们

将采用一种简单的观点。我们大致知道这些概念是怎么一回事，而那些驾驶汽车的人则知道速率指的是什么。

§8-2 速率

即使我们大致知道“速率”的含义，也仍有某些相当奥妙的难以捉摸之处；须知甚至博学的希腊人也从未能恰当地描述牵涉到速度的问题。当我们试图精确地领会“速率”的含义时，就会出现难以捉摸之处。希腊人对这个问题是非常混乱的，因而必须在希腊人、阿拉伯人与巴比伦人的几何学与代数学之外，发现一个新的数学分支才能解决这个问题。作为这种难点的一个例证，试用纯代数方法来解这样一个问题：一个气球正在膨胀，它的体积以 $100 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 的比率增加；当气球体积为 $1\,000 \text{ cm}^3$ 时，气球半径增加的速率是多少？希腊人多少有点被这样的问题弄糊涂了。当然，这是被某些思想混乱的人所促成的。为了指出在某一时刻有关速度方面的推理中存在着困难，泽诺（Zeno）提出了一大堆佯谬，我们将举其中的一个来说明他的关于思考运动时存在着明显困难的论点。“请听这样的论点”，他说：“阿基利斯（Achilles）比乌龟跑得快10倍，但他却永远抓不住乌龟。因为，假定他们开始赛跑时，乌龟在阿基利斯前面100 m，那么当阿基利斯跑了100 m而到达乌龟原来所在的地方时，乌龟已经以他的快慢的1/10前进了10 m。现在，阿基利斯又得跑另一个10 m以便赶上乌龟，但在到达该段路程的终点时，他发现乌龟仍在他前面1米；当他再跑1 m时，他又发现乌龟依然在他前面10 cm，如此下去，直至无穷。因此，在任何时刻乌龟总是在阿基利斯前面，阿基利斯永远追不上乌龟。”这段论证错在哪里？它错在认为一段有限的时间可以被分为无限多的段，正如一段线长不断地一分为二可以被分成无限多的小段一样。因此，虽

然（在论证中）到阿基利斯追上乌龟的那个点有无限多步，但这并不意味着时间也有无限的数量，从这个例子我们可以看到，在有关速度的推理中的确存在一些难以捉摸的地方。

为了以更为清楚的方式来领会这种微妙的情况，我讲一个你们肯定听到过的笑话。坐在汽车里面的一位太太在某个地点被警察拦住了，警察走过来对她说：“太太，你刚才的车速是 $60 \text{ mi} \cdot \text{h}^{-1}$ ！”她反驳说：“先生，这是不可能的，我刚才只开了7分钟。这真是天大的笑话！我开车还没有到一小时，怎么可能走 60 mi 呢？”假如你是警察的话你该如何回答她呢？当然，如果你真是那个警察，那就没有什么疑难之处，很简单，你会说：“对审判员讲去！”但是，假若我们没有这条退路，而是更公正和理智地对待这个问题，企图向这位太太解释所谓她的车速达 $60 \text{ mi} \cdot \text{h}^{-1}$ 的说法是什么意思，那么我们的含义究竟是什么呢？我们可以说：“太太，我们的意思是：如果你继续像现在这样开车，在下一个小时里你将开过 60 mi 。”她会答道：“嗯，我的脚已经离开油门，汽车已慢了下来，所以如果我继续这样开下去，不会超过 60 mi 的。”或者，我们考虑一个自由下落的小球，如果这个小球保持它正在进行的运动方式的话，我们想要知道它在第三秒时的速率有多大。这意味着什么呢？是继续加速，落得更快吗？不，应该是继续以同样的速度运动。但这正是我们试图加以定义的东西！因为如果小球保持它现在正在进行的方式运动，那么它在以后就将继续保持这种方式运动。于是我们就需要更好地定义速度，究竟是什么必须保持一样呢？这位太太也可以这样来辩护：“如果我再继续保持现在的开车方式，那么过了一小时后，我就会撞到街道尽头的墙上了！”看来要说清楚我们的意思并不那么容易。

许多物理学家认为测量是唯一定义任何事物的方式。那么，显然，我们应当使用测量速率的仪器——速度计，并说：“看！太太，你的速度计的读数指到60。”可是她说：“我的速度计坏了，根本不能读数。”这是否表示汽车停着不动呢？我们相信，在我们造出速度计之前，就存在某种要测量的东西。只有这样，我们才可以说：“速度计走得不准，”或“速度计坏了。”如果速度没有与速度计无关的含义，上面所讲的就是毫无意义的废话。所以，显然在我们的头脑中存在着一种与速度计无关的概念，速度计只是用来使这个概念计量化。所以，还是让我们来看看是否能得到这个概念的更好的定义。我们可以说：“嗯！固然在你的车子开了一个小时以前，你就会撞到墙上，但是如果你开了一秒钟，你就会通过88 ft的距离。太太，你刚才的车速正是88 $\text{ft}\cdot\text{s}^{-1}$ ，如果继续下去，下一秒钟也将开过88 ft，而那堵墙离这还远着呢。”她就说：“对，但是，没有一条法律禁止88 $\text{ft}\cdot\text{s}^{-1}$ 的车速！只有一条禁止开60 $\text{mi}\cdot\text{h}^{-1}$ 的法律。”“不过，”我们反驳道：“这是同一件事。”如果这确是同一件事，又何必转弯抹角地大讲其88 $\text{ft}\cdot\text{s}^{-1}$ 呢？事实上，自由落体甚至连一秒钟也不可能保持同样的运动方式，因为它的快慢在变化着，我们必须设法来定义速率。

现在看来，我们已经走上了正轨，似乎可以这样说：如果那位太太在另一个1/1000h内继续这样行驶，她将开过60 mi的1/1000。换句话说，她无需继续开足1h，主要在于，在某一瞬间 她正以这个速率开车。现在我们的意思是，只要她再多开一点点时间，那么汽车所通过的外加距离就和一辆以60 $\text{mi}\cdot\text{h}^{-1}$ 的稳定 速率开动的汽车相同。也许88 $\text{ft}\cdot\text{s}^{-1}$ 的观念是正确的，我们看看她在最后一秒钟开了多远，再除以88 ft，如果结果是1，那么速率就是60 $\text{mi}\cdot\text{h}^{-1}$ 。换句话说，可以这样来求出速率：我们问在一个很短的时间内物体走过多远？把这一段距离除

以时间就得到速率。但是应当把这段时间取得尽可能短，越短越好，因为在这段时间内有可能发生某种变化。假如我们将落体的时间取为一小时，这个概念就荒唐了。但若取为1 s，对汽车来说其结果就相当好，因为在这段时间内，汽车的快慢没有很大变化，但对落体来说就不行了。所以为了要得到越来越精确的速率，我们应当把时间间隔取得越来越小。我们应当做的是取百万分之一秒，并且用百万分之一秒去除以通过的距离。结果给出每秒的距离，这就是我们所谓的速度。因此我们可以用这个方式去定义它。这是对那位太太的成功的答案，或者更确切地说，它就是我们将要采用的定义。

上述定义包括了一个新的概念，这是一个不曾被希腊人以普遍形式所采用过的概念。这个概念是取无穷小距离及相应的无穷小时间，求出它们的比值，并观察当我们所取的时间越来越小时，那个比值将发生什么情况。换句话说，当时间越取越小，以至无穷小时，取所通过的距离除以所需的时间的极限。这个概念分别由牛顿和莱布尼茨发明，它开创了称为微分学的新的数学分支。微积分的发明是为了描述运动，而它的第一个应用就是给“每小时开60 mi”作什么解释下一个定义。

让我们试试看把速度定义得更好一些。假设在一个短时间 ε 内，汽车或其他物体通过一段短距离 x ，则速度 v 定义为

$$v = x/\varepsilon .$$

这是一个近似，当 ε 取得越来越小，近似程度就越来越好。如果想用一个数学表示式，我们可以说速度等于在表示式 x/ε 中，当 ε 越来越小时的极限，即

$$v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon}. \quad (8.3)$$

我们不可能对汽车里面的那位太太做同样的事情，因为那张表是不完全的。我们只知道她在各个间隔为1分钟的时刻的位置，我们能得到在第7分钟内她开车的速率是 $5000 \text{ ft} \cdot \text{min}^{-1}$ 这一大致的概念，但无法知道，在正好是第7分钟那个时刻，她是否已经加速运动，是否在第6分钟开始时速率是 $4900 \text{ ft} \cdot \text{min}^{-1}$ ，而现在是 $5100 \text{ ft} \cdot \text{min}^{-1}$ ，或者其他情况，因为我们没有获知其间的精确细节。因此只有以无穷个数据来完成这张表，我们才能真正从这样一张表来计算速度。另一方面，如果我们有一个完整的数学公式，就像在落体的情况下（8.1式）那样，就有可能计算速度，因为我们可以计算出在无论任何时刻的位置。

作为例子，我们来决定落体在5 s那个特定时刻的速度。一个方法是由表8-2中看出它在第五秒内的情况，它走了 $400-256=144 \text{ ft}$ ，因此它正以 $144 \text{ ft} \cdot \text{s}^{-1}$ 下落；可是这是错误的，因为速率正在发生变化，在这段时间间隔内，平均来说是 $144 \text{ ft} \cdot \text{s}^{-1}$ ，但这个球在加速，因而实际上走得比 $144 \text{ ft} \cdot \text{s}^{-1}$ 要快。我们希望弄清楚它的速度究竟有多快。在这个过程中涉及的方法如下：我们知道在5 s时球在那里。在5.1 s时，它总共走过的距离是 $16(5.1)^2=416.16 \text{ ft}$ [见式（8.1）]，在5 s内它已下落400 ft，在最后的1/10 s内它下落了 $416.16-400=16.16 \text{ ft}$ 。由于在0.1 s中通过16.16 ft与 $161.6 \text{ ft} \cdot \text{s}^{-1}$ 是同一回事，这差不多就是速率，但还不完全正确。它究竟是5 s、5.1 s抑或是两者当中的5.05 s时的速度呢？或者说，是什么时刻的速度？别管它——现在的问题是要求出在5 s时的速率，而我们还没有得到精确的答案。我们必须进一步去求。于是，我们比5 s多取千分之一秒，即5.001 s。再计算这时总共落下的距离

$$s = 16 (5.001)^2 = 16 (25.010\,001) = 400.160\,016 \text{ ft.}$$

在最后0.001 s内球落下了0.160 016 ft，如以0.001 s除这个数字，就得到速率为 $160.016 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$ 。这个值更为接近，而且十分接近，但它仍不精确。为了找出准确的速率，我们必须做什么，是很明显的。为了完成这个数学过程，我们把问题提得略微抽象一点；要求出在一特定时刻 t_0 时的速度，在上面的问题中， t_0 就是5 s。现在在 t_0 时刻的距离，我们称为 s_0 是 $16t_0^2$ ，或在这个情况下是400 ft。为了求出速度，我们问：“在 $t_0 + (\text{一点点})$ ，即 $t_0 + \epsilon$ 时刻物体在何处？”新位置是 $16(t_0 + \epsilon)^2 = 16t_0^2 + 32t_0\epsilon + 16\epsilon^2$ ，于是它比以前走得更远了，因为以前它只是 $16t_0^2$ 。这段距离我们称为 $s_0 + (\text{多一点点})$ 或 $s_0 + x$ （如果 x 是附加的一点点距离）。现在如果从在 $(t_0 + \epsilon)$ 时刻的距离中减去在 t_0 时刻的距离，我们就得出 x ，即附加距离，为 $x = 32t_0\epsilon + 16\epsilon^2$ 。我们对速度的第一次近似是

$$v = \frac{x}{\epsilon} = 32t_0 + 16\epsilon. \quad (8.4)$$

真正的速度是当 ϵ 变到趋于0那么小时的比值 x/ϵ 。换句话说，在作出比值后，我们取当 ϵ 越来越小，即趋于0时的极限。（8.4）式化为

$$v \text{ (在时刻 } t_0) = 32t_0.$$

在我们的问题中 $t_0 = 5 \text{ s}$ ，故答案是 $v = 32 \times 5 = 160 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$ 。在前面，我们曾相继取 $\epsilon = 0.1$ 及 0.001 s ，所得到的 v 值比这稍大一些，但现在我们看到，实际速度正好是 $160 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

§8-3 速率作为导数

我们刚刚采用的步骤在数学上是经常要做的，因此为了方便起见，对量 ε 和 x 规定了特殊的符号。在这一符号中，上面所用的 ε 改为 Δt ， x 改为 Δs 。 Δt 表示“附加的一点 t ”，并带有它能变得更小的含义。前缀 Δ 不是一个乘数，正如 $\sin\theta$ 不是 $s \cdot i \cdot n \cdot \theta$ 一样，它仅仅定义了一个时间增量，并使我们想起了它所具有的特性。 Δs 对距离 s 有类似的含义。因为 Δ 不是一个因子，因此在比值 $\Delta s / \Delta t$ 中不能消去而得出 s/t ，正如比值 $\sin\theta / \sin 2\theta$ 不能消去成为 $1/2$ 一样。在这种符号下，速度等于当 Δt 变得越来越小时 $\Delta s / \Delta t$ 的极限，即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (8.5)$$

实际上这和我们前面使用 ε 与 x 的表达式（8.3）相同，但它的好处是表示某种东西在变化着，并且记录了什么东西正在发生变化。

顺便提一下，作为一个好的近似，我们还得到另一条定律：一个动点距离的变化是速度乘上时间间隔，或 $\Delta s = v \Delta t$ 。这个说法仅当速度在这个时间间隔内不变时才正确，而这个条件又只是在 Δt 趋于0的极限情况下才成立。物理学家喜欢把它写为 $ds = v dt$ ，因为按他们的意思 dt 是非常小的。根据这样的理解，这个表达式作为一个非常接近的近似是成立的。如果 Δt 太长，速度在这段间隔内可能发生变化，因而这个近似就欠佳了。对趋于0的时间 dt ， $ds = v dt$ 严格成立。用这种符号我们可将（8.5）式写为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

我们在上面得到的量 ds/dt 叫做“ s 对于 t 的导数”（这个称呼有助于记下发生变化的过程），而求出它的复杂过程就称为求导，或求微商。单独出现的 ds 和 dt 称为微分。为了使你们熟悉用词，我们指出，我们已经找到函数 $16t^2$ 的导数，或 $16t^2$ 对于 t 的导数是 $32t$ 。当我们习惯于这些词后，这些概念就更容易理解了。作为练习，让我们来求一个更复杂的函数的导数。我们考虑公式 $s = At^3 + Bt + C$ ，它可以描写一点的运动。字母 A ， B ， C 表示常数，就像在熟知的二次方程一般形式中一样。从这个运动公式出发，我们希望求出在任何时刻的速度。为了以比较巧妙的方式求得它，我们把 t 改为 $t + \Delta t$ ，并注意 s 将随之变为 $s + \Delta s$ ；然后我们求出用 Δt 来表示的 Δs 。这就是说

$$s + \Delta s = A(t + \Delta t)^3 + B(t + \Delta t) + C = At^3 + Bt + C + 3At^2 \Delta t + B \Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

但由于

$$s = At^3 + Bt + C,$$

因而

$$\Delta s = 3At^2 \Delta t + B \Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

但是我们想要的不是 Δs ，而是 Δs 除以 Δt 。将上述等式除以 Δt ，得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3At^2 + B + 3At(\Delta t) + A(\Delta t)^2.$$

当 Δt 趋于0时， $\Delta s / \Delta t$ 的极限是 ds / dt ，并等于

$$\frac{ds}{dt} = 3At^2 + B.$$

这就是微积分的基本运算过程，对函数求微商。这个过程甚至可以比上面所讲的更简单一些。当观察到这些展开式中含有 Δt 的平方项、立方项或任何更高次幂时，这种项马上可以去掉，因为取极限时它们变为0。在稍微练习一下后，这个过程就显得方便了，因为我们知道把什么去掉。为了求出不同类型的函数的微商，有许多规则或公式。这些规则或公式可以记住，也可以在表中找到。表8-3就是一张简表。

表8-3 求导简表

s, u, v 和 w 是 t 的任意函数; a, b, c 和 n 是任意常数

函 数	导 数
$s = t^n$	$\frac{ds}{dt} = nt^{n-1}$
$s = cu$	$\frac{ds}{dt} = c \frac{du}{dt}$
$s = u + v + w + \cdots$	$\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} + \cdots$
$s = c$	$\frac{ds}{dt} = 0$
$s = u^a v^b w^c \cdots$	$\frac{ds}{dt} = s \left(\frac{a}{u} \frac{du}{dt} + \frac{b}{v} \frac{dv}{dt} + \frac{c}{w} \frac{dw}{dt} + \cdots \right)$

§8-4 距离作为积分

现在我们讨论相反的问题。假定我们不是有一张距离的表，而是有一张从零开始，在不同时刻的速率表。对一个下落的球，这样的速率和时间表如表8-4所示。

表8-4 自由下落小球的速度

$t(\text{s})$	$v(\text{ft} \cdot \text{s}^{-1})$	$t(\text{s})$	$v(\text{ft} \cdot \text{s}^{-1})$
0	0	3	96
1	32	4	128
2	64		

每分钟或每半分钟记录一次速度计的读数也可以对汽车的速度作出类似的表。假如我们知道汽车在任何时刻开得有多快，我们能确定它开了多远吗？这个问题恰好与上面所解决的问题相反，即给出速度而要求出距离。如果我们知道了速度，我们怎样找出距离呢？假定汽车的速度不是常数，而那位太太在某个时刻的速度是 $60 \text{ mi} \cdot \text{h}^{-1}$ ，然后慢下来，再加快，等等，我们如何来确定汽车走了多远呢？这很容易。我们使用同样的概念，并将距离表示成许多无穷小量之和。我们说：“在第一秒钟汽车的速度是如此如此，并由公式 $\Delta s = v \Delta t$ ，计算出它以这个速度在第一秒内走了多远。”而在下一秒钟内它的速度近似相同，但略有差别。我们可以用新的速率乘时间来计算出在下一秒钟内它走了多远。对每一秒钟我们都同样处理，直到路程的终点为止。现在我们就求得了一系列小距离，总距离将是所有这些小距离的和。这就是说，距离将是速率乘时间的和，或 $s = \sum v \Delta t$ ，这里希腊字母 $\sum$ 表示累加。说得更确切一些，距离是在某一确定时刻，比方第 i 个时刻的速度乘以 Δt 以后的和。

$$s = \sum_i v(t_i) \Delta t. \quad (8.6)$$

这里关于时间的规则是 $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ 。然而，我们用这个方法得到的距离是不准确的，因为在时间间隔 Δt 内速度已发生变化。假定我们将时间取得足够短，和就是精确的了，于是我们将时间取得越来越小，直到获得所需要的精确度为止。真正的 s 是

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v(t_i) \Delta t. \quad (8.7)$$

类似于微分符号，数学家们对这个极限也规定了一个符号。（8.7）式中的 Δ 变为 d ，以提醒我们时间是尽可能地短，于是速度就是在时刻 t 的 v ，累加则写成用拉长了的“ s ”，—— $\int$ [从拉丁文Summa（和）而来]表示的和，遗憾的是现在只称其为积分符号。于是我们可写出

$$s = \int v(t) dt. \quad (8.8)$$

将所有这些项加起来的过程称为积分，它是微分的逆过程。这个积分的导数就是 v ，所以一个运算符号（ d ）就消除了另一个运算符号（ $\int$ ）。人们可以把求微商的公式反过来，以得出一些积分公式，因为它们彼此正好是相反的运算。于是，对所有类型的函数求微分，人们就可以得出他们自己的积分表。对每个微分公式，如果我们把它倒过来，就得到一个积分公式。

每个函数可以用解析的方法微分，即这个过程能用代数方法进行，并得出某个确定的函数。但是，对任何随意给定的积分，却不可能用简单的方式写下一个解析解。你们可以计算一下，比如，上述的求和，再用更小的时间间隔 Δt 进行计算，然后用更小的间隔等等，直到得到一个近乎正确的值。但一般说来，给定某个特殊的函数，就是不可能解析地找到它的积分是什么。人们可能老是想找到一个函数，

当对它求微分后，能给出某个所希望的函数；但人们可能找不到它，而且从能用已命名的函数来表示的意义来说，它可能不存在。

§8-5 加速度

推导运动方程的下一个步骤是引进另一个超出速度概念的新概念，即速度的变化。我们现在要问：“速度是如何改变的？”在前几章中我们已经讨论过力产生速度变化的情况。你们或许在听到某辆汽车能在10 s内由静止达到60 mi·h⁻¹时很兴奋。从这样一种情况中我们可以看到速率变化有多快，但这只是平均的情况。我们现在将要讨论的是更为复杂的情况，即速度变化得有多快的问题，换句话说，在1 s内，速度的变化是每秒多少英尺，亦即每秒每秒多少英尺？我们前面已导出过落体速度的公式为 $v = 32t$ ，其值列于表8-4中，现在我们要求出每秒钟速度改变多少，这个量称为加速度。

加速度的定义是速度的时间变化率。由前面的讨论，我们已经充分懂得，如同将速度写成距离对时间的微商那样，应将加速度写成微商 dv/dt 。如果我们现在对公式 $v = 32t$ 求微商，我们得出，对自由落体

$$a = \frac{dv}{dt} = 32. \quad (8.9)$$

[为了求 $32t$ 的微商可利用前面问题中得出的结果，那里我们发现 Bt 的微商就是 B （常数）。这样，令 $B = 32$ ，马上得出 $32t$ 的微商是32]。这意味着落体的速度总是每秒改变32 ft·s⁻¹。从表8-4中亦可看到速度在每秒内增加32 ft·s⁻¹。这是一种非常简单的情况，因为加速度

通常不是常数。在这里加速度是常数的原因是，作用在落体上的力是常数，而牛顿定律指出加速度与力成正比。

作为另一个例子，我们来求前面已经求过速度的那个问题中的加速度。由 $s = At^3 + Bt + C$ 出发，由于 $v = ds/dt$ ，我们得出

$$v = 3At^2 + B.$$

因为加速度是速度对时间的导数，我们还需对上面最后一个表达式求微商。回忆一下，右方两项的微商等于各项微商之和的规则。为了对其中第一项求微商，注意到我们在对 $16t^2$ 求微商时，已求出过平方项的微商，因此不必再重复基本运算，其结果是将 t^2 变成 t ，并把数值系数加倍；我们假定这次发生的也是同样的情况，你们自己可以验证一下这个结果。于是 $3At^2$ 的微商是 $6At$ 。下一步我们对 B 这个常数项求微商，按前述规则， B 的微商为0；因此，这一项对加速度无贡献。所以最后的结果是

$$a = \frac{dv}{dt} = 6At.$$

我们讲两个极有用的，可由积分得出的公式作为参考。如果一个物体由静止出发以匀加速度 g 运动，它在任何时刻 t 的速度为

$$v = gt.$$

在同一时间内它通过的距离是

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

在写出微商时人们使用了各种数学符号。因为速度是 $\frac{ds}{dt}$ ，加速度是速度对时间的微商，我们也可写为

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (8.10)$$

这是表示二阶导数的通常方法。

我们还有另一条规则：速度等于加速度的积分。这正是 $a = dv/dt$ 的逆过程；我们已经看到距离是速度的积分，所以距离可由加速度积分两次求出。

前面所讨论的运动只是一维情况，限于篇幅这里只简单讨论一下三维运动。考虑一个在三维空间中以无论什么方式运动的粒子 P 。在本章开始时，我们从观察汽车在不同时间离出发点的距离，来展开对汽车的一维运动情况的讨论。然后讨论了用这些距离随时间的变化来表示速度，以及用速度的变化来表示加速度。我们可以类似地处理三维运动。先在二维图上说明运动，再将它推广到三维空间，这样做比较简单一些。我们建立一对互成直角的轴，然后由测量质点离每根轴多远来确定在任何时刻质点的位置。这样每个位置就可用 x 距离和 y 距离来表示，于是可列出表来描述运动，在表中将这两个距离都表示为时间的函数（将这个过程中推广到三维空间时只需要再加上一根与前两根轴成直角的轴，并测量第三个距离，即 z 距离。现在的距离不是从线，而是从坐标平面量起）。在列出了 x ， y 距离的表后，我们如何

来确定速度呢？我们首先找出在每个方向上的速度分量。速度的水平部分，即 x 分量，是 x 距离对时间 t 的微商，或

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (8.11)$$

类似地，速度的垂直部分，或 y 分量，是

$$v_y = \frac{dy}{dt}. \quad (8.12)$$

对第三维，

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8.13)$$

现在，给定了速度各分量，我们如何求沿实际运动路径的速度？在二维情况下，考虑质点两个彼此相隔短距离 Δs 和短时间间隔 $t_2 - t_1 = \Delta t$ 的相继的位置。在 Δt 时间内，质点水平运动的距离为 $\Delta x \approx v_x \Delta t$ ，垂直运动的距离为 $\Delta y \approx v_y \Delta t$ （符号“ $\approx$ ”读作“近似是”）。实际运动的距离近似是

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad (8.14)$$

如图8-3所示。如本章开始时那样，在这个间隔内的近似速度可由 Δs 除以 Δt 并令 Δt 趋于0而得出。于是得出速度为

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (8.15)$$

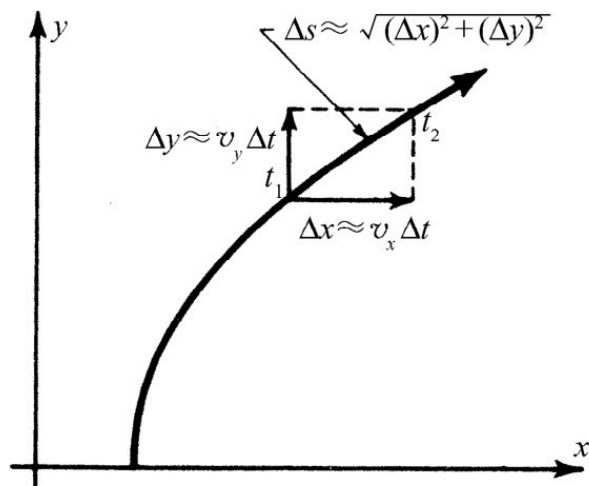


图8-3 物体二维运动的描述和它的速度的计算

对于三维空间，结果是

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (8.16)$$

与定义速度的方法一样，我们可以定义加速度：可以得出加速度的 x 分量 a_x 是速度的 x 分量 v_x 的微商（即 $a_x = d^2x/dt^2$ ， x 对 t 的二阶微商），等等。

让我们考虑一个在平面内复合运动的良好例子。取一个在水平方向以匀速 u 运动，同时在垂直向下的方向又以匀加速度（ $-g$ ）运动的球；整个运动是怎样的呢？我们可以说 $dx/dt = v_x = u$ 。因为速度 v_x 是常数，故

$$x = ut. \quad (8.17)$$

而由于向下的加速度 $-g$ 是常数，球体落下的距离 y 可写为

$$y = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (8.18)$$

路程的曲线，即 y 与 x 之间的联系是怎样的呢？因为 $t = x/u$ ，我们可以从方程（8.18）消去 t 。把它代入以后，求得

$$y = -\frac{g}{2u^2}x^2. \quad (8.19)$$

这个 y 与 x 之间的关系式可视为正在运动的小球的路径的方程。当画出这个方程的图形时，我们得到一条称为抛物线的曲线；向任何方向射出的自由落体都将沿着如图8-4所示的抛物线行进。

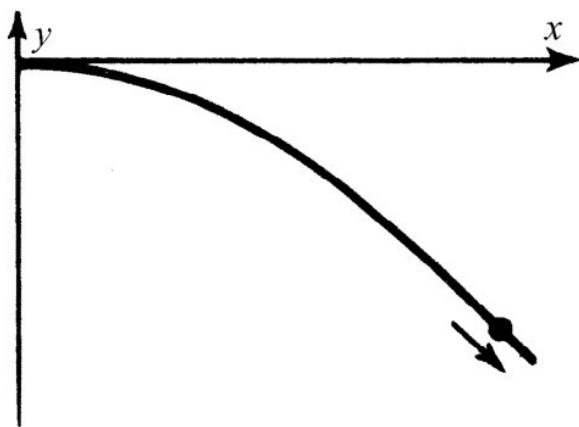


图8-4 具有水平初速的落体所描述的抛物线

第9章 牛顿的动力学定律

§9-1 动量和力

动力学定律，或运动定律的发现在科学史上是一个激动人心的时刻。在牛顿时代以前，像行星之类事物的运动那是一个谜，但在牛顿以后，一切都了如指掌了。甚至连由于行星之间的扰动而引起的与开普勒定律的微小偏离，也可以计算出来。摆的运动，用弹簧和重物组成的振子的运动等等，在牛顿定律被阐明后全都能圆满地加以分析。对这一章来说情况也是这样：在本章前我们还不能计算挂在弹簧上的一个有质量的物体如何运动，更不能计算由土星和木星在天王星上所引起的摄动。在这一章后，我们将不仅能计算振动着的有质量物体的运动，而且也能计算由土星和木星对天王星所产生的摄动！

伽利略发现的惯性原理对于运动的理解给推进了一大步。这条原理是：如果一个物体处在自由状态而不受干扰，则若此物体原来在运动，它就继续作匀速直线运动；若原来静止，则它仍然静止。当然，这种情况在自然界中永远不会出现，因为如果我们让一个木块在桌面上自由滑动，它就会停下来，但这正是由于它并不是不受干扰的——它与桌面间存在着摩擦。要找出这条正确的规律需要一定的想象力，而这种想象力正是伽利略提供的。

当然，下一步所需要的是用来求出物体受到某种影响时，它的速度如何变化的规则。这是牛顿的贡献。牛顿写下了三条定律：第一定

律只是刚才叙述过的伽利略惯性原理的重新表达。第二定律提供了一个具体的方法来确定在称为力的种种影响下速度如何发生变化。第三定律在某种程度上描述了力，我们将另行讨论。这里我们将只讨论第二定律，它断言，力以下述方式引起物体运动的变化：某个称为动量的量的时间变化率正比于力。我们一会儿将用数学形式来表达第二定律，但首先让我们解释一下概念。

动量与速度不同。在物理学中使用的大量词汇，虽然在日常用语中可能并没有精确含义，但在物理学上它们都有精确的物理含义。动量就是一个例子，我们必须严格地定义它。如果我们用手臂在一个轻的物体上推一下，它很容易运动；如果我们用同样的力气去推另一个通常所谓的重得多的物体，它的运动就会慢得多。实际上，我们必须把“轻”与“重”的词汇改为质量较小和质量较大，因为应当理解一个物体的重量和其惯性之间存在着差别（为了使它运动起来有多难是一回事，它称起来有多重是另一回事）。重量与惯性是成正比的，而且在地球表面上也常常把它们在数值上取为相等，这就在一定程度上使学生产生混淆。在火星上，重量的概念将不同，但为了克服惯性所需要的力的大小则是相同的。

我们用“质量”这个术语作为惯性的定量量度，并且可以这样来测定质量，例如使一个物体以一定的速率沿圆周运动，然后测出为了保持它作圆周运动需要多大的力。用这种方法，我们就能找出每个物体的确定的质量。物体的动量是它的质量和速度两部分的乘积。于是牛顿第二定律可以在数学上写成这种方式

$$F = \frac{d}{dt}(mv). \quad (9.1)$$

这里应当考虑下列几点。在写出任何这样的定律时，我们使用了许多直觉的观念，隐含的意义，以及不同的假设，以便在开始时近似地组成我们的“定律”。以后我们可以回过头来更详细地研究每一项的含义究竟是什么，但是如果我们操之过急，就会搞糊涂了。所以在开始时，我们认为有几件事情是当然的。首先，物体的质量是一个常数；这并非真正如此，但我们将从牛顿近似开始，假定质量不变，并且在所有时间中都相同；其次，当我们把两个物体放在一起时，它们的质量是相加的。当然，在牛顿写下他的方程时，就暗含了这些观念，否则方程就毫无意义了。比如，假定质量与速度成反比，那么动量在任何情况下将永不改变，所以除非你知道质量怎样随速度而变化，否则这个定律就毫无意义了。一开始我们就认为，质量是不变的。

关于力也隐含了某些东西。作为一种粗略的近似，我们往往把力看作是利用肌肉作出的推或拉，但现在有了这条运动定律后，我们就能更精确地定义它。最重要的是要了解到这个关系所包含的内容不仅有动量或速度在数值上的变化，而且还有在方向上的变化。如果质量是常数，那么方程式（9.1）也可写为

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma. \quad (9.2)$$

加速度 a 是速度的变化率，而牛顿第二定律不仅表明一个给定的力的效应与质量成反比，还表明速度变化的方向与力的方向相同。因此我们必须了解速度的变化，即加速度，有着比日常用语中更广泛的含义：运动物体的速度既可以通过加快或减慢（当它变慢时，我们说它以负的加速度运动）来变化，也可以通过改变它的运动方向来变化。在第7章中已讨论过速度和加速度垂直的情况。那里我们看到，以恒定

速率 v 在半径为 R 的圆周上运动的物体，如果 t 很小，它偏离直线的距离就等于 $\frac{1}{2}(v^2/R)t^2$ ，因而与运动方向垂直的加速度的公式是

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (9.3)$$

而与速度垂直的力将使物体沿曲线运动。这条曲线的曲率半径可以通过将力除以质量以得到加速度，然后再利用式（9.3）求出。

§9-2 速率与速度

为了使我们的语言更确切，在使用速率和速度这两个词时，我们将作进一步的定义。我们通常认为它们是相同的东西，在日常用语中它们也确实是一样的。但在物理学上，我们利用本来就有两个词这一事实，并且决定用它们来区分两个概念。我们仔细地将同时具有大小和方向两者的速度和速率区分开来，而速率我们将只用以表示它的大小，但并不包括方向。我们可以通过描写一个物体的 x ， y ， z 坐标如何随时间变化而将上面的意思更确切地表述出来。例如，假定某时刻一个物体如图9-1所示那样的运动着。在某一段给定的时间间隔 Δt 内，它将沿 x 方向移动一定的距离 Δx ，向 y 方向移动 Δy ，向 z 方向移动 Δz 。这三个坐标变化的总效果是位移 Δs ， Δs 是沿着边长为 Δx ， Δy 和 Δz 的平行六面体的对角线。用速度来表示的话，位移 Δx 是速度的 x 分量乘 Δt ， Δy 与 Δz 亦与此类似

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t. \quad (9.4)$$

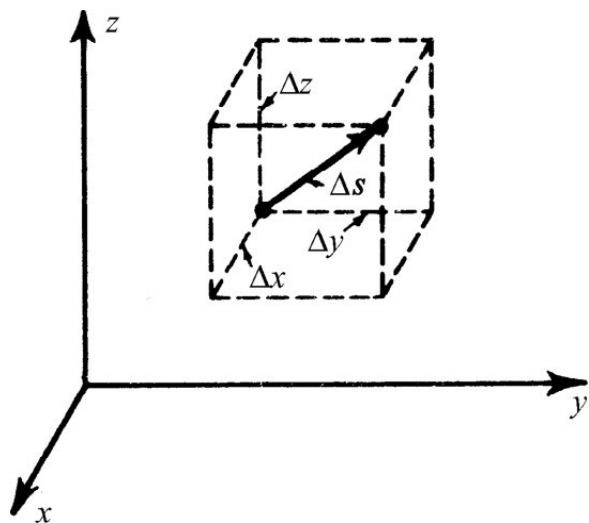


图9-1 一个物体的微小位移

§9-3 速度、加速度以及力的分量

在式(9.4)中, 我们通过物体沿 x 方向、 y 方向和 z 方向运动的快慢, 已把速度分解为分量。如果我们给出它的三个正交分量的数值

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (9.5)$$

则速度的大小和方向两者都确定, 从而速度也就完全确定。另一方面, 物体的速率是

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (9.6)$$

其次, 我们假定, 如图9-2所示, 由于力的作用, 速度改变为另一个方向, 并取不同的数值。如果我们算出速度的 x 、 y 及 z 分量的变化, 就可以相当简单地分析这一表面上颇为复杂的情况。在时间 Δt 内速度在 x 方向分量的变化是 $\Delta v_x = a_x \Delta t$, 这里 a_x 称为加速度的 x 分

量。同样，我们看出 $\Delta v_y = a_y \Delta t$ 和 $\Delta v_z = a_z \Delta t$ 。用这些说法，我们看到，牛顿第二定律，即力与加速度方向相同时，力在 x 、 y 及 z 方向上的分量就等于质量乘相应的速度分量的变化率

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma_x, \\ F_y &= m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = ma_y, \\ F_z &= m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2} = ma_z, \end{aligned} \quad (9.7)$$

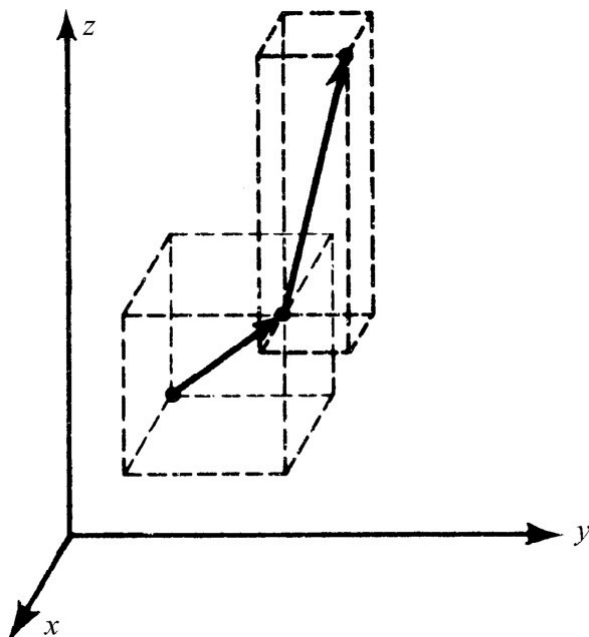


图9-2 速度的数值与方向均改变的情况

它实际上是三条定律。如同速度和加速度可以通过将一根标明大小和方向的线段投影到三个坐标轴上而分解为三个分量一样，用同样方

法，一给定方向的力可用 x 、 y 和 z 的一定的分量来表示

$$\begin{aligned}F_x &= F \cos (x, F), \\F_y &= F \cos (y, F), \\F_z &= F \cos (z, F),\end{aligned}\tag{9.8}$$

这里 F 表示力的大小， (x, F) 表示 x 轴与 F 的方向之间的夹角，等等。

式(9.7)给出牛顿第二定律的完整形式。如果知道了施加于物体上的力，并将它们分解为 x 、 y 和 z 分量，我们就能从这些方程求出物体的运动。让我们考虑一个简单的例子。假设现在在 y 、 z 方向上没有力，只有在 x 方向，比方说竖直方向上有力。方程式(9.7)告诉我们速度在竖直方向上有变化，但在水平方向上没有变化。这在第7章中已经用特殊仪器(图7-3)演示过了。一个平抛落体的水平运动没有任何变化，而它的竖直运动的方式就和水平运动不存在时的运动方式相同。换句话说，只要各方向的力之间没有联系，在 x 、 y 和 z 方向的三个运动将是独立的。

§9-4 什么是力

为了使用牛顿定律，我们必须具有某个力的公式；因为这些定律提醒我们：要注意力。如果一个物体在加速，那么某种力就在起作用，让我们去寻找它。动力学今后要做的工作就是去寻找有关力的规律。牛顿本人继续作了一些示例。在引力的情况下，他提出了这种力

的特殊公式。至于其他的力，他在第三定律中提供了部分信息，这条定律讲的是作用和反作用相等，我们将在下一章研究它。

我们对前一个例子作进一步分析，作用在地面附近的物体上的力是什么？接近地球表面时，在竖直方向上由重力产生的力正比于物体的质量，而高度远小于地球半径 R 时，这个力几乎与高度无关，即 $F = GmM/R^2 = mg$ ，这里 $g = GM/R^2$ ，称为重力加速度。这样重力定律告诉我们重量正比于质量；力作用在竖直方向上，等于质量乘以 g 。我们再次发现水平运动是匀速运动。有意义的运动则在竖直方向上。牛顿第二定律告诉我们

$$mg = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (9.9)$$

消去 m ，我们得到在 x 方向上的加速度是一个常数，并等于 g 。当然，这就是众所周知的重力作用下的自由落体定律，由此可得到方程

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 + gt, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

作为另一个例子，假设我们能够制作出如图9-3所示的一个装置——一个弹簧，它提供一个正比于距离而方向相反的力。如果我们不去管重力（当然它已被弹簧的原始伸长所平衡），而只去谈论外加的力，我们看到，如果将这个有质量物体往下拉，弹簧就会往上拉，而如果我们把它往上推，弹簧就会往下推。这个装置经过了精心设计，使得我们向上推得越厉害，弹簧的力越大，精确地与离平衡状态的位移成正比，同样，弹簧往上拉的力也与我们把它向下拉多远成正比。如果观察这个装置的动力学情况，我们看到一个颇为美妙的运动——

上，下，上，下，……。问题是，牛顿定律是否能正确地描写这一运动？让我们看看，利用牛顿定律式（9.7），究竟能不能精确计算出这个周期振动的情况。在本例中，方程是

$$-kx = m \frac{dv_x}{dt}. \quad (9.11)$$

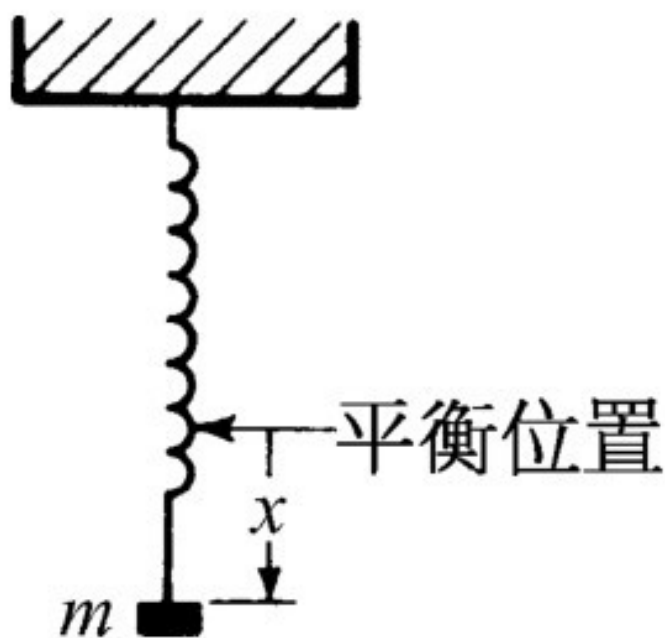


图9-3 挂在弹簧上的一个重物

这是一个 x 方向上的速度变化率正比于 x 的情况。由于保留各个系数不会有什么新的结果，因而我们想象或者是改变了时间的尺度，或者是在单位上有一个巧合，结果刚巧 $k/m=1$ 。所以，我们打算来解方程

$$\frac{dv_x}{dt} = -x. \quad (9.12)$$

为此，我们必须知道 v_x 是什么；当然，我们已经知道，速度是位置的变化率。

§9-5 动力学方程的含义

现在我们来分析一下方程式(9.12)究竟意味着什么。假定在某一给定的时刻 t 物体有一定的速度 v_x 和位置 x 。那么，在稍晚一点的时间 $t+\varepsilon$ 时，速度与位置又各是多少呢？如果我们能够回答这一点，问题就解决了，因为这样我们就可以从给定的条件出发，计算第一个时刻它改变了多少，下一个时刻又改变了多少，等等，并按此方式逐步推断出物体的运动。具体地说，假定在时间 $t=0$ 时，我们有 $x=1$ 和 $v_x=0$ ，那么究竟为什么物体会运动呢？因为除 $x=0$ 外，物体处在任何位置时总有一个力作用在它上面。如果 $x>0$ ，这个力就朝上。因此，根据运动定律，速度从0开始变化，一旦它获得一点点速度，物体就开始朝上运动，等等。现在，在任何时刻 t ，如果 ε 十分小，作为一个很好的近似，我们可以用在 t 时刻的位置和速度将 $t+\varepsilon$ 时刻的位置表示为

$$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon v_x(t). \quad (9.13)$$

ε 越小，这个表达式越精确，即使 ε 不是小到趋于零，此式仍能达到有用的精确度。现在，速度又如何呢？为了求出后一时刻的速度，即 $t+\varepsilon$ 时刻的速度，我们需要知道速度怎样变化，即加速度。我们将怎样去求加速度呢？动力学定律就在这种地方起作用。动力学定律告诉我们加速度有多大。它说加速度是 $-x$ ，且

$$v_x(t+\varepsilon) = v_x(t) + \varepsilon a_x(t), \quad (9.14)$$

$$=v_x(t) - \varepsilon x(t). \quad (9.15)$$

式(9.14)只是运动学的方程，它表明速度的变化是由于存在加速度。但式(9.15)是动力学的方程。因为它将加速度和力联系起来，它表明对于这个特殊问题，在这个特定时刻，你可以用 $-x(t)$ 来代替加速度。因此，如果我们知道在一给定时刻的 x 与 v 两者，我们就知道加速度，而这又告诉我们新的速度，于是又可知道新的位置——这就是动力学方程的含义所在；由于有力，速度改变了一点点，而由于有速度，位置又改变了一点点。

§9-6 方程的数值解

现在我们来真正解上述问题。假定取 $\varepsilon = 0.100 \text{ s}$ 。当我们做好这一切工作后，如果发现这还不够小，我们可以再回过头来，以 $\varepsilon = 0.010 \text{ s}$ 重做一次。从初值 $x(0) = 1.00$ 开始， $x(0.1)$ 是多少呢？它是原来的位置 $x(0)$ 加上速度（这时为0）乘 0.10 s 。于是 $x(0.1)$ 仍是1.00，因为它还没有开始运动。但在 0.10 s 时的新速度就是原速度 $v(0) = 0$ 加 ε 乘以加速度。加速度是 $-x(0) = -1.00$ 。于是

$$v(0.1) = 0.00 - 0.10 \times 1.00 = -0.10.$$

现在，在 0.20 s 时

$$x(0.20) = x(0.1) + \varepsilon v(0.1) = 1.00 - 0.10 \times 0.10 = 0.99$$

和

$$v(0.2) = v(0.1) + \varepsilon a(0.1) = -0.10 - 0.10 \times 1.00 = -0.20.$$

依此类推，一直做下去，就可计算出其余的运动，这正是我们要做的事。然而，实际上，这里有点小小的技巧可用来提高准确度。假如我们继续已经开始的计算，就会发现由于 $\varepsilon=0.100$ s是相当粗糙的，因而运动也是相当粗糙的，我们得取一个很小的时间间隔，比如说 $\varepsilon=0.01$ s。于是，要对一段适当的总时间间隔进行研究，就要作大量的重复计算。所以我们将用同样粗糙的间隔 $\varepsilon=0.10$ s的条件下，把要计算的工作组织一下以提高准确度。这一点在分析技巧上略加改进就可以办到。

我们注意到，新的位置是老的位置加上时间间隔 ε 乘以速度。但这是什么时候的速度呢？在时间间隔开始时是一个速度，在时间间隔结束时又是另外一个速度。我们的改进就是利用两者之间的速度。假定我们知道现在的速率，但速率正在变化，如果继续采用现在的速率，那就得不到正确的答案。我们应当用“现在这个时刻”的速率以及间隔结束的“那个时刻”的速率之间的某个速率。同样的考虑也可用于速度：为了计算速度变化，我们将使用要求出它的速度的那两个时刻中间的加速度。这样我们实际使用的方程就多少如下所述：后来的位置等于先前的位置加上 ε 乘以在间隔中间的那个时刻的速度。类似地，间隔中间那个时刻的速度等于比它早 ε 时（它正处在前一个时间间隔中间）的速度加上 ε 乘以 t 时刻的加速度，也就是说，我们利用的方程是

$$\begin{aligned}x(t+\varepsilon) &= x(t) + \varepsilon v\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\v\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) &= v\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon a(t), \\a(t) &= -x(t).\end{aligned}\tag{9.16}$$

剩下来还有一个小问题： $v(\varepsilon/2)$ 是什么？在起始时刻，我们得到的是 $v(0)$ ，而不是 $v(-\varepsilon/2)$ 。我们将用一个特殊等式，即 $v(\varepsilon/2) = v(0) + (\varepsilon/2) a(0)$ 来计算。

现在我们已经准备好，可以进行计算了。为了方便起见，可以用列表的方法进行，各栏分别为时间，位置，速度，加速度，而速度则标在两行之间，如表9-1所示。当然，这张表只是表示由等式（9.16）所得到数值的方便的办法，事实上方程本身无须写出。我们只要在表中一个接一个地填满空位。这张表给我们提供了一个关于运动的很好的概念：它从静止开始，先获得一点往上的负速度，并失去一点距离。加速度减少了一点点，但它仍然获得速率。当运动继续时，速率增加得越来越慢，直到大约 $t = 1.50$ s 时它通过 $x = 0$ 点，我们可以肯定地断言物体将继续运动，但现在是往另一边运动； x 将变为负值，而加速度为正。于是速率减慢。将这些数值与图9-4所示的函数 $x = \cos t$ 相比是很有意思的，在我们的计算准确到三位有效数字的范围内，它们是符合的！以后我们会知道 $x = \cos t$ 是这个运动方程的精确数学解，但这样容易的计算会得出这样准确的结果使人们对数值分析的作用留下了深刻的印象。

表9-1 $dv_x/dt = -x$ 的解。间隔： $\varepsilon = 0.10$ s

t	x	v_x	a_x
0.0	1.000	0.000	-1.000
		-0.050	
0.1	0.995		-0.995
		-0.150	
0.2	0.980		-0.980

(续表)

t	x	v_x	a_x
0.3	0.955	-0.248	-0.955
0.4	0.921	-0.343	-0.921
0.5	0.877	-0.435	-0.877
0.6	0.825	-0.523	-0.825
0.7	0.764	-0.605	-0.764
0.8	0.696	-0.682	-0.696
0.9	0.621	-0.751	-0.621
1.0	0.540	-0.814	-0.540
1.1	0.453	-0.868	-0.453
1.2	0.362	-0.913	-0.362
1.3	0.267	-0.949	-0.267
1.4	0.169	-0.976	-0.169
1.5	0.070	-0.993	-0.070
1.6	-0.030	-1.000	+0.030

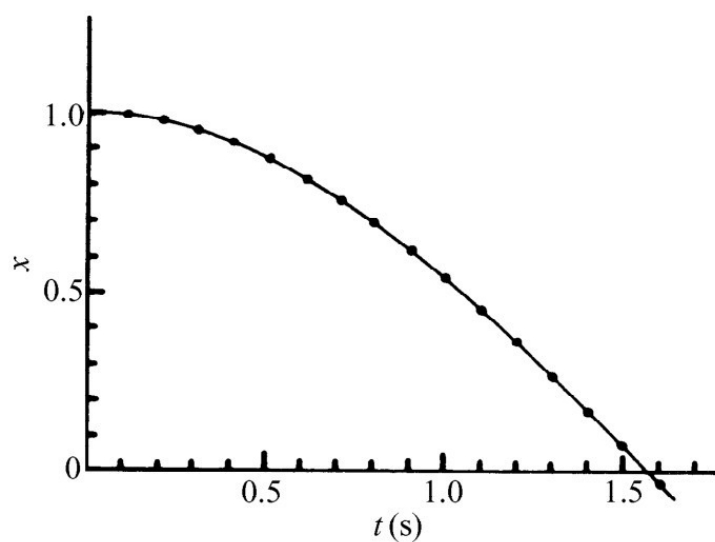


图9-4 悬于弹簧上的重物运动的曲线

§9-7 行星运动

上面对于振动弹簧运动的分析是非常完美的，但我们能否分析行星的绕日运动呢？我们来看看是否能在一定的近似下得出椭圆轨道。

我们假定太阳是无限重的，这意味着我们将不把太阳包括在运动中。假定行星在某个位置开始以某个速度运动；它将沿某一曲线绕日转动，我们试图用牛顿运动定律及引力定律来分析一下这是一条什么样的曲线。从何下手呢？在一个给定时刻它在空间的某确定位置上。如果把从太阳到这个位置的矢径称为 r ，那么根据引力定律可知，将有一个力沿 r 指向太阳，它等于一个常数乘以太阳质量与行星质量的乘积，再除以距离的平方。为了进一步分析下去，我们必须求出由这个力所产生的加速度。我们需要知道沿两个方向（称为 x 和 y 方向）的加速度分量。于是，如果以给定的 x 和 y 表示某一时刻行星的位置（我们将假设 z 总是为0，因为在 z 方向无作用力，而如果没有初速度 v_z ，就不会使 z 变为异于零的值），力就沿着行星与太阳连线的方向，如图9-5所示。

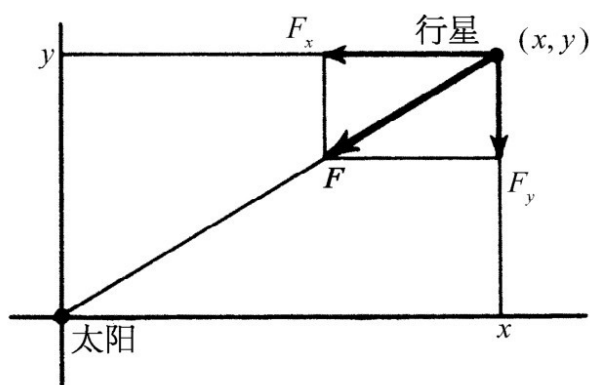


图9-5 作用在行星上的太阳引力

从这个图上我们看到，力的水平分量与整个力的关系跟水平距离 x 与整条斜边 r 的关系相同，因为两个三角形相似。此外，如 x 为正，则 F_x 为负。这就是说

$$\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}, \text{ 或 } F_x = -\frac{|F| x}{r} = -\frac{GMmx}{r^3}.$$

现在我们运用动力学定律得出，这个力的分量等于行星的质量乘以它在 x 方向上的速度变化率。这样我们就得到下述定律

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GMmx}{r^3}, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GMmy}{r^3}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

这就是我们要解的一组方程。为了简化数值计算，我们再假设时间单位或太阳质量已经过调整（或者我们有幸如此）使 $GM \equiv 1$ 。在我们这个特例中，我们将假定行星的初始位置在 $x=0.500$ ， $y=0.000$ 处，而在初始时刻，速度完全在 y 方向，其值为1.630。我们现在怎样来进行计算呢？我们再作一个表，其中各列分别为时间， x 位置， x 方向速度 v_x 及 x 方向加速度 a_x ；然后，另外列出 y 方向上的位置，速度，加速度三列，并与前者用双线隔开。为了得到加速度，我们需要用到式（9.17）；它告诉我们 x 方向的加速度是 $-x/r^3$ ， y 方向的加速度是 $-y/r^3$ ，而 r 是 (x^2+y^2) 的平方根。于是，给定了 x 与 y 后，我们只需在一旁稍作计算，取平方和的平方根，从而找出 r ，以准备计算两个加速度。将 $1/r^3$ 求出也是有用的。进行这项计算利用平方表、立方表及倒数表会更容易一些。然后只要用计算尺将 x 乘 $1/r^3$ 就行了。采用时间间隔 $\varepsilon=0.100$ ，我们的计算按下述步骤来完成：在 $t=0$ 时的初始值

$$x(0)=0.500, y(0)=0.000;$$

$$v_x(0) = 0.000, \quad v_y(0) = +1.630.$$

由此求得

$$r(0) = 0.500, \quad \frac{1}{r^3(0)} = 8.000.$$

$$a_x = -4.000, \quad a_y = 0.000.$$

于是可计算 $v_x(0.05)$ 和 $v_y(0.05)$

$$v_x(0.05) = 0.000 - 4.000 \times 0.050 = -0.200;$$

$$v_y(0.05) = 1.630 + 0.000 \times 0.050 = +1.630.$$

现在开始作我们的主要计算

$$x(0.1) = 0.500 - 0.20 \times 0.1 = 0.480,$$

$$y(0.1) = 0.0 + 1.63 \times 0.1 = 0.163,$$

$$r = \sqrt{0.480^2 + 0.163^2} = 0.507,$$

$$1/r^3 = 7.677,$$

$$a_x(0.1) = -0.480 \times 7.677 = -3.685,$$

$$a_y(0.1) = -0.163 \times 7.677 = -1.250,$$

$$v_x(0.15) = -0.200 - 3.685 \times 0.1 = -0.568,$$

$$v_y(0.15) = 1.630 - 1.250 \times 0.1 = 1.505,$$

$$x(0.2) = 0.480 - 0.568 \times 0.1 = 0.423,$$

$$y(0.2) = 0.163 + 1.505 \times 0.1 = 0.313,$$

等等.

这样我们就得到表9-2中列出的数值，20步左右我们就追踪了行星绕太阳运行的一半路程！图9-6中画出表9-2所得的 x 坐标和 y 坐标，圆点表示每隔1/10的时间单位所求得的位置，我们看到开始时行星的运动较快，到末尾时运动则较慢，就这样，曲线的形状被确定下来。于是我们看到，我们确实知道如何来计算行星的运动了！

表9-2

$dv_x/dt = -x/r^3$, $dv_y/dt = -y/r^3$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的解
 间隔: $\epsilon = 0.100$

在 $t = 0$ 时, 轨道 $v_y = 1.63$, $v_x = 0$, $x = 0.5$, $y = 0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0.0	0.500	-0.200	-4.000	0.000	1.630	0.00	0.500	8.000
0.1	0.480	-0.568	-3.685	0.163	1.505	-1.251	0.507	7.677
0.2	0.423	-0.858	-2.897	0.313	1.290	-2.146	0.527	6.847
0.3	0.337	-1.054	-1.958	0.443	1.033	-2.569	0.556	5.805
0.4	0.232	-1.165	-1.112	0.546	0.772	-2.617	0.593	4.794
0.5	0.115	-1.211	-0.454	0.623	0.527	-2.449	0.634	3.931
0.6	-0.006	-1.209	0.018	0.676	0.308	-2.190	0.676	3.241
0.7	-0.127	-1.175	0.342	0.706	0.117	-1.911	0.718	2.705
0.8	-0.244	-1.119	0.559	0.718	-0.048	-1.646	0.758	2.292
0.9	-0.356	-1.048	0.702	0.713	-0.189	-1.408	0.797	1.974
1.0	-0.461	-0.968	0.796	0.694	-0.309	-1.200	0.833	1.728
1.1	-0.558	-0.883	0.856	0.664	-0.411	-1.019	0.867	1.536
1.2	-0.646	-0.794	0.895	0.623	-0.497	-0.862	0.897	1.385
1.3	-0.725	-0.702	0.919	0.573	-0.569	-0.726	0.924	1.267
1.4	-0.795	-0.608	0.933	0.516	-0.630	-0.605	0.948	1.174
1.5	-0.856	-0.514	0.942	0.453	-0.680	-0.498	0.969	1.100
1.6	-0.908	-0.420	0.947	0.385	-0.720	-0.402	0.986	1.043
1.7	-0.950	-0.325	0.950	0.313	-0.751	-0.313	1.000	1.000
1.8	-0.982	-0.229	0.952	0.238	-0.774	-0.230	1.010	0.969
1.9	-1.005	-0.134	0.953	0.160	-0.785	-0.152	1.018	0.949
2.0	-1.018	-0.038	0.955	0.081	-0.797	-0.076	1.022	0.938
2.1	-1.022	0.057	0.957	0.002	-0.797	-0.002	1.022	0.936
2.2	-1.017	0.151	0.959	-0.078	-0.790	0.074	1.020	0.944
2.3	-1.011	0.241	0.960	-0.151	-0.780	0.151	1.017	0.956

在 2.101 s 时与 x 轴相交, $\therefore$ 周期 = 4.20 s。

在 2.086 s 时 $v_x = 0$ 。

与 x 相交于 -1.022 长度单位处, $\therefore$ 半长轴 = $\frac{1.022 + 0.500}{2} = 0.761$ 。

$v_y = 0.797$ 。

预言时间 $\pi(0.761)^{3/2} = \pi(0.663) = 2.082$ 。

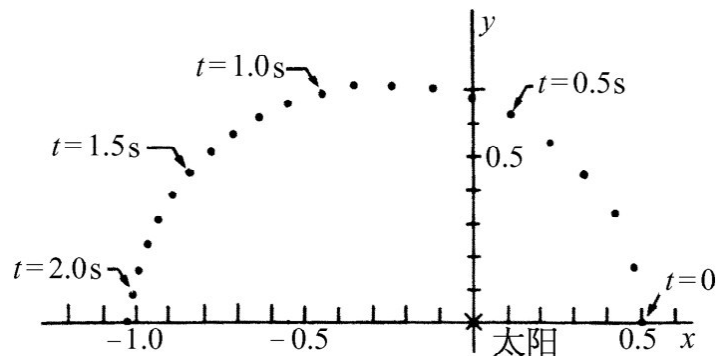


图9-6 由计算所得的行星绕日运动

现在来看看如何计算海王星，木星，天王星或任何其他行星的运动。如果我们有许许多多行星，并且让太阳也运动，我们也能这样计算吗？当然能。我们可以计算在某一特定行星，比如说第 i 颗行星上的力，它的位置是 x_i ， y_i 和 z_i （ $i=1$ 可以代表太阳， $i=2$ 是水星， $i=3$ 是金星，等等）。我们必须知道所有行星的位置。作用在一颗行星上的力是所有其他（比方说位于 x_j ， y_j ， z_j ）的物体所产生的。因此方程式是

$$\begin{aligned} m_i \frac{dv_{ix}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \frac{-Gm_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{dv_{iy}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \frac{-Gm_i m_j (y_i - y_j)}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{dv_{iz}}{dt} &= \sum_{j=1}^N \frac{-Gm_i m_j (z_i - z_j)}{r_{ij}^3}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

此外，我们定义 r_{ij} 为两个行星 i 与 j 之间的距离；它等于

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \quad (9.19)$$

这里的 $\sum$ 仍旧表示对所有 j ——所有其他物体——求和，当然 $j=i$ 除外。于是我们所要作的就是取更多列。对木星的运动要排9列；对土星的运动要排9列，等等。然后，当我们有了所有的初始位置与速度后，就可以首先用式（9.19）计算出所有的距离，再用式（9.18）计算出所有的加速度。这要花多长时间呢？如果你在家里计算，这需要很长的时间！但现在我们已经有了运算得很快的机器——计算机，一台很好的计算机只花 $1\mu\text{s}$ ，即1 s的百万分之一就可做一次加法。做一次乘法要长一些，比方说 $10\mu\text{s}$ 。在一轮计算中可能要做30次乘法或类似的运算，视具体的问题而定。那么一轮计算将花 $300\mu\text{s}$ 。这意味着我们

每秒钟可算3000轮。为了获得一定的精度，比方说十亿分之一，那么与行星绕日转动一周所对应的计算循环约为 4×10^5 轮，这相当于130 s 或约2 min的计算时间。因此，用这个方法，跟随木星绕太阳的运动，即使计及所有行星所引起的精确到十亿分之一的摄动，也只需要2 min（结果表明误差约随间隔 ε 的平方而变化，如果使间隔小1000倍，精确度就提高100万倍，那么，让我们使间隔小10000倍吧）！

结果，正如我们所说的，在本章开始时我们甚至还不知道如何计算在弹簧上有质量物体的运动。现在，掌握了具有巨大威力的牛顿定律后，我们不仅可以计算这样的简单运动，而且只要有一台可以解决算术运算的计算机，即便是许多行星的极端复杂的运动，也能以我们所希望的任意高的精确度计算出来！

第10章 动量守恒

§10-1 牛顿第三定律

牛顿第二定律给出了任何物体的加速度与作用在它上面的力之间的关系，在这个基础上，原则上可以解决任何力学问题。例如，为了确定几个粒子的运动，人们可以利用前面一章中所展开的数值方法。但是我们有充分的理由来进一步研究牛顿定律。首先，有一些十分简单的运动不仅可以用数值方法分析，也可以直接进行数学分析。比如：我们知道落体的加速度是 $32 \text{ ft} \cdot \text{s}^{-1}$ 后，由这个事实虽然可以用数值方法计算出运动，但是分析这个运动并找到一般解 $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ，则更为容易也更令人满意。同样，虽然我们可以按数值方法计算简谐振子的位置，但我们也能用分析方法表明一般解是简单的 t 的余弦函数，因此，当存在一种简单而又更为精确的方法以得出结果时，再去用一系列麻烦的算术运算就毫无必要了。同理一个行星由引力决定的绕太阳的运行固然可以用第9章的数值解法逐点地加以计算，从而找到轨道的一般形状，但能够得到准确的形状——分析表明这是一个完整的椭圆——就更好了。

遗憾的是，只有很少问题能够以分析方法精确求解。例如就简谐振子来说，如果弹簧力不是正比于位移，而是更为复杂的话，人们就只得又回到数值解法上来。或者，假如有两个天体绕太阳运行，使天体的总数是三个，那么分析法就无法得出一个简单的运动公式，实际

上这个问题只能作数值解。这就是著名的三体问题，它曾经长时间地向人们的分析能力挑战；十分有趣的是，人们花了那么长时间才领悟到也许数学分析的能力是有限的，因而使用数值解法是必要的这个事实。今天，大量无法以分析方法解决的问题已由数值方法解出，那个曾被认为是如此困难的古老的三体问题，已作为常规计算准确地按上一章所描述的方式进行充分的演算后，加以解决了。然而，也有一些两种方法都失效的情况：对简单的问题我们可以用分析方法，对适当困难的问题可以用数值和算术方法；但是对非常困难的问题则这两种方法都不能用了。例如：两辆汽车的碰撞，或者甚至气体中分子的运动，就是一种复杂的问题。在一立方毫米的气体中有数不清的粒子，而试图用这么许多变量（约 10^{17} 个）来作计算将是荒谬的。任何问题，如果不是只有两三个行星绕太阳运行，而是诸如像气体、木块、铁块中的分子或原子的运动，或在球状星团中许多恒星的运动之类这样的问题，我们就不能直接去解，因此只好借助于其他手段。

在那种无法了解细节的情况下，我们需要知道某些一般性质，亦即需要知道作为牛顿定律结果的一般性定理或原则。在第4章讨论过的能量守恒定律就是其中之一。另一个是动量守恒定律，这是本章的课题。进一步研究力学的另一个理由是：有某些运动模式在许多不同的状况下一再重复地出现，因此在一个特定情况下研究这些模式是有益的。例如，我们将研究碰撞，不同类型的碰撞有许多共同之处。又如在流体的流动中，到底是哪一种流体这个问题并没有多大关系，这是因为流动的定律是类似的。我们将研究的其他一些问题是振动及振荡，特别是，机械波的特殊现象——声、杆的振动，等等。

在我们对牛顿定律的讨论中已经解释过：这些定律是一种处理问题的方案，它告诉我们：“要注意力！”而在有关力的性质方面牛顿只

向我们讲了两件事。在引力情况中，他留给我们一条完整的力的定律。关于原子间的非常复杂的作用力，他并不知道力的正确的规律；然而，他发现了一条有关力的一般性质的规则，并在第三定律中对此作了阐明，这就是牛顿在有关力的性质上所具有的全部知识——引力定律和第三定律，再没有其他细节了。

牛顿第三定律是：作用等于反作用。

它的含义如下：假设我们有两个小物体，比如说两个粒子，第一个粒子对第二个粒子施加一个力，即用一个一定的力推它。那么，按照牛顿第三定律，第二个粒子同时以大小相等、方向相反的力推第一个粒子；而且，这些力实际上沿同一根线起作用。这就是牛顿提出的假设，或者说定律，它看来是相当准确的，尽管并不严格正确（以后我们将讨论它的误差）。暂时我们将认为作用等于反作用是正确的。当然，假如有第三个粒子，它不与前两个粒子在同一条直线上，则这个定律并不意味着作用在第一个粒子上的总的力等于作用在第二个粒子上的总的力，因为，比方说，第三个粒子对这两个粒子中的每一个都要施加推力。结果作用在前两个粒子上的总效应是在某个别的方面上，从而一般说来，作用在前两个粒子上的力大小既不相等，方向也不相反。然而，作用在每个粒子上的力总可以分解为若干部分，每一个与之相互作用的粒子都有一份贡献或一个部分。因而，每一对粒子都有相应的彼此相互作用的分量，它们大小相等、方向相反。

§10-2 动量守恒

现在来看一下，上述联系有什么有趣的结果？为了简单起见，我们假设只有两个互相作用的粒子，质量可能不同，并分别编为1号及2

号。它们之间的力相等而方向相反；这会有什么结果呢？按照牛顿第二定律，力是动量对时间的变化率，于是我们得出粒子1的动量 p_1 的变化率等于粒子2的动量 p_2 变化率的负值，即

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt}. \quad (10.1)$$

现在，如果变化率总是数值相等、方向相反，就可知道粒子1动量的总变化与粒子2动量的总变化数值相等、方向相反；这意味着，如果我们把粒子1的动量与粒子2的动量相加，那么由于粒子之间相互作用力（称为内力）引起的两个粒子动量之和的变化率为零，即

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = 0. \quad (10.2)$$

在这个问题中假定没有其他作用力。如果这个和的变化率总是零，这正是量 $(p_1 + p_2)$ 不发生变化的另一种说法（这个量也可写成 $m_1 v_1 + m_2 v_2$ ，并称为这两个粒子的总动量）。现在我们得出两个粒子的总动量不因它们之间的任何相互作用而改变的结论。这个说法表示了这个特例下的动量守恒定律。我们断言：如果两个粒子间存在着任何类型的力（不管这个力怎样复杂），我们在力作用之前及力作用之后去测量或计算 $(m_1 v_1 + m_2 v_2)$ ，即两个动量之和，则结果总是相等的，也就是说，总动量是一个常数。

假如我们把论证引申到更复杂的三个或多个相互作用粒子的情况，那么很明显，当只考虑内力时，所有粒子的总动量保持不变，因为其中一个粒子由另一个粒子引起的动量的增加，恰好严格地被前者引起的后者动量的减少所补偿。也就是说，所有的内力将互相抵消，

因此不可能改变粒子的总动量。于是，如果没有来自外界的力（外力），那么就没有什么力可以改变总动量，因此总动量是一个常数。

值得一提的是，如果存在一些并非来自所说的粒子间的相互作用的力：假定我们把相互作用的粒子隔离开来，这时会出现什么情况？如果只有相互作用力，那么同以前一样，无论这些力多么复杂，粒子的总动量不变。反之，假定还有来自隔离开来的那一群以外的粒子的作用力。我们称任何外部物体施加于内部物体的力为外力。以后我们将证明所有外力之和等于所有内部粒子动量总和的变化率。这是一个非常有用的定理。

如果没有净的外力，一群相互作用粒子的总动量守恒可以表示为

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots = \text{常数}, \quad (10.3)$$

这里将粒子的质量和相应的速度顺序编为1, 2, 3, 4,对每个粒子，牛顿第二定律的一般表述是

$$f = \frac{d}{dt}(mv), \quad (10.4)$$

特别是对力和动量在任何给定方向上的分量也同样成立；这样作用在一个粒子上的力的x分量就等于该粒子动量变化率的x分量，即

$$F_x = \frac{d}{dt}(mv_x), \quad (10.5)$$

对y和z方向也如此。所以方程式（10.3）实际上是三个方程，每个方向一个。

除动量守恒定律外，牛顿第二定律还有另一个有趣的结果，现在先提一下，以后再证明。这个原理就是：无论我们保持静止状态，还是沿一条直线作匀速运动，物理定律将都是相同的。例如，一个在飞机上拍皮球的孩子，会发现皮球跳得和他过去在地面上拍时一样高。即使飞机以极高速度飞行，只要它不改变飞行速度，物理定律在孩子看来总是和飞机静止时完全一样。这称为相对性原理。当我们在这里使用这个原理时，将称它为“伽利略相对性”，以与爱因斯坦所作的更仔细的分析相区别，后者我们将在以后研究。

我们刚从牛顿定律推导出了动量守恒定律，由此出发，我们可以接下去找出一些描写碰撞的定律。但是为多样化起见，同时也为了阐明一种在物理学上可用于其他情况（比方说，人们也许并不知道牛顿定律，也许另辟蹊径）的推理方式，我们将从一个完全不同的观点讨论碰撞定律。我们的讨论将从上述伽利略相对性原理出发，而以得出动量守恒定律告终。

我们将从下列假定出发：我们以一定速度运动并观察自然界时，自然界在我们看来和我们静止不动时完全相同。在讨论那种两个物体碰撞后粘在一起，或者来到一起再弹开的情况之前，我们将首先考虑用弹簧或其他东西联结在一起的两个物体，突然放开它们，使它们受到弹簧或者某种轻微爆炸所造成的推力的情形。而且，我们将只考虑一个方向上的运动。我们先假定，两个物体完全相同、十分对称，接着两者之间发生了轻微爆炸。爆炸后，其中一个物体将以速度 v 向右运动，另一个物体将以速度 v 向左运动。由于这两个物体是全同的，因而没有什么理由认为它们对左或右会有所偏爱，故两个物体的行为应该是对称的。因此，认定另一物体以速度 v 向左运动看来是合理

的。这里阐明了一种在许多问题中都十分有用的思维方式，如果我们只从公式入手，那就显不出来了。

我们这个实验的第一个结论是相同的物体将有相等的速率，现在假设两个物体由不同材料比如说铜和铝制成，并令它们的质量相等。我们将假定，如果用两个质量相等的物体做实验，即使它们不是全同的，它们的速度也将是相等的。有人可能反驳说：“但是你知道，你可以反过来，不必去作假设。你可以定义在这个实验中获得相等速度的两个物体的质量为相等的质量。”我们按照这个建议，并在铜块与体积很大的铝块之间作一次轻微爆炸，铝块是如此之重，以至于铜块飞出去后，铝块几乎不动。由于铝太多，因而我们把铝块减少到只剩下很薄一片，于是当我们再作一次爆炸时，铝块飞走了，而铜块却几乎不动。这说明铝又太少了。很明显，在两种铝的数量之间有某个正确的数值；于是我们继续调整铝的数量直至速度相等为止。好，现在我们反过来，并认为当速度相等时，质量也相等。这似乎只是一个定义，看来很奇怪，我们居然可以把一些物理定律变成仅仅是一些定义。然而，这里已经包含了某些物理定律，假如我们采纳这个质量相等的定义，我们立即就可得到如下的一条定律。

假设我们从上面的实验知道，两块材料A与B（铜和铝）具有相等的质量。我们用上述的同样方式将铜块和第三块材料，比如金块，进行比较，并确认它的质量等于铜块的质量。如果我们现在用铝和金做实验，在逻辑上并不能说明这些质量必须相等；然而实验表明它们实际上是相等的。所以通过实验，我们发现了一条新的定律。这条定律的一种说法可能是这样的：如果两个物质的质量分别等于第三个物质的质量（由在这个实验中速度相等来确定），那么它们彼此相等（这个表述完全不能从用于有关数学量的假设的相似的陈述中推得）。从

这个例子我们可以看到，假如我们不细心的话，我们会多么轻易地推出结论！说速度相等时质量相等，这绝不仅仅是一个定义，因为说质量相等就含有数学上有关相等的定律的意思，而这个相等的定律又可反过来对有关实验作出预言。

作为第二个例子，假设实验时用某一强度的爆炸使A、B两个物体获得一定的速度，从而发现它们相等；那么如果我们再使用更强烈的爆炸，这时所获得的速度是不是还相等呢？同样在逻辑上根本不能确定这个问题，但实验证明确实如此。这样，我们又有了一条定律，它可以表述为：如果在某一速度时按照速度相等方法来测定两个物体具有相等质量，则在另一个速度下测量，它们也将有相同的质量。从这些例子中我们看出，表面上看来只是一个定义的东西实际上包含了某些物理定律。

在下面的论证中，我们将假设：当在两个物体间发生爆炸时，相等的质量将具有数值相等、方向相反的速度这个命题成立。在相反的情况下，我们将作另一个假设：如果两个以相等的速度在相反的方向上运动的全同物体碰撞后被某种粘胶粘在一起，那么碰撞后它们将以什么方式运动呢？这又是一个对左和右没有特别偏重的对称的情况，所以我们假定它们将保持静止。我们还要假定，任何两个质量相同的物体，即使由不同材料制成，当它们以相等的速度沿相反的方向运动而发生碰撞并粘在一起时，它们碰撞后将保持静止。

§10-3 动量是守恒的

我们可以用实验来验证上述假设：即，第一，如果两个相等质量的静止物体发生爆炸后分开时，它们将以同样的速率分开运动；第

二，两个相等质量的物体以同样的速率相向运动，碰撞并黏合后，它们将停止运动。我们可以利用一个称为气垫[1]的惊人的发明来做实验，它能摆脱不断使伽利略深感麻烦的摩擦力（图10-1）。伽利略不能用光滑的东西来做实验，因为那些物体不能自由地滑动，但是在今天，加上一个神奇的凹槽[2]后，我们就能摆脱掉摩擦力。我们的物体正如伽利略所宣称的那样，可以毫无困难地以不变的速度滑动。这是通过以空气来托起物体而实现的。因为空气只有极其微小的摩擦力，当不加力时，物体实际上就以不变的速度滑行。首先，我们使用两个经过精心制作具有同样的重量或质量的滑块（实际上是测出了它们的重量，但是我们知道重量是正比于质量的），在两个滑块间的一个封闭气缸中放进一个小的雷管（图10-2）。开始时，将两个滑块静止置放在槽的中心，然后利用电火花引爆雷管，迫使它们分开。这时会出现什么呢？如果在它们飞开时速率相等，就应当同时到达气垫的两端。到达两端后，它们实际上又将以相反的速度弹回，然后又跑到一起，并停在开始运动时的起点——中心处。这是一个很好的试验；经过实践以后，结果正如上所述（图10-3）。

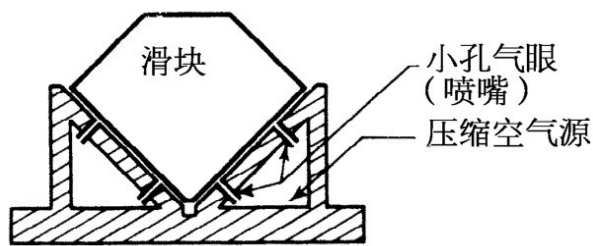


图10-1 直线气垫端视图

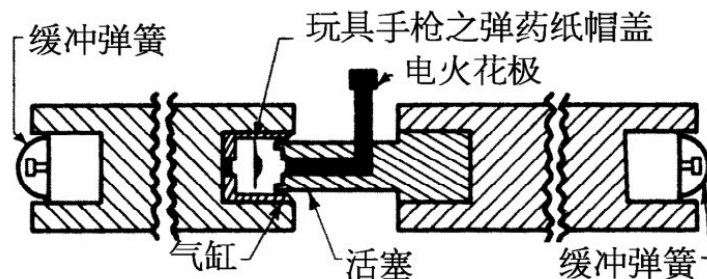


图10-2 带有爆破作用气缸附件的滑块截面图

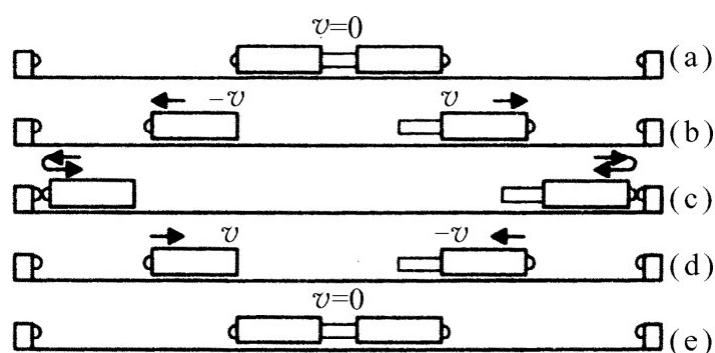


图10-3 两个质量相等的物体的作用-反作用实验的示意图

接下来，我们要解决的是在稍微复杂一些的情况下会发生什么。假设我们有两个质量相等的物体，一个以速度 v 运动，另一个静止不动，它们碰撞后结合在一起；那时又将发生什么情况？结果是一个质量为 $2m$ 的物体以一个未知速度移动。速度多大呢？问题就在于此。为了找到答案，假定当我们驱车前进时，物理规律在我们看来和静止时完全一样。我们从两个质量相等以相同的速率 v 沿相反的方向运动的物体发生碰撞后，将静止不动出发。现在假设在发生这种情况时，我们乘在一辆以速度 $-v$ 开行的汽车上。那么它看上去像什么呢？由于我们随着两个相向运动的物体中的一个一起前进，因而这一个物体在我们看来速度为0。而另一个以速度 v 向相反方向运动的物体，在我们看来就以速度 $2v$ 向我们走来（图10-4）。最后，在碰撞后结合起来的物体看来以速度 v 经过。因此我们得出结论，一个速度为 $2v$ 的物体碰到

另一个静止的质量相等的物体时，结果将以速度 v 运动，或者用数学上完全等价的方式来说是：一个速度为 v 的物体撞在另一个静止物体上并结合在一起时，将产生一个以速度 $v/2$ 运动的物体。注意，如果我们将事前的质量与速度分别相乘再相加得到 $mv + 0$ ，与我们将事后的每一个物体的质量与速度相乘，即 $2m$ 乘以 $v/2$ 所得的答案相同。这就告诉我们一个速度为 v 的物体撞在一个静止的物体上时会出现什么情况。

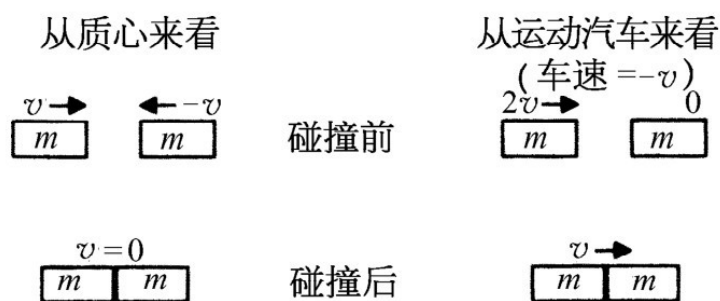


图10-4 质量相等的物体进行的非弹性碰撞的两种看法

我们可以用完全同样的方式推导出当两个质量相等的物体以任意两种速度相碰撞时会出现什么情况。

假设我们有两个质量相等的物体，分别具有速度 v_1 及 v_2 ，它们碰撞并结合在一起。试问碰撞后，它们的速度 v 是多少？我们再乘上一辆速度为 v_2 的汽车来看，则一个物体就像是静止的，而另一个物体就像具有 $(v_1 - v_2)$ 的速度，于是我们就得到了同以前的情况。当所有这一切都完成后，它们相对于汽车将以 $(v_1 - v_2)/2$ 的速度运动。那么它们相对于地面的实际速度是多少呢？答案是 $v = (v_1 - v_2)/2 + v_2 = (v_1 + v_2)/2$ （图10-5）。我们再次注意到

$$mv_1 + mv_2 = 2m \cdot \frac{(v_1 + v_2)}{2}. \quad (10.6)$$

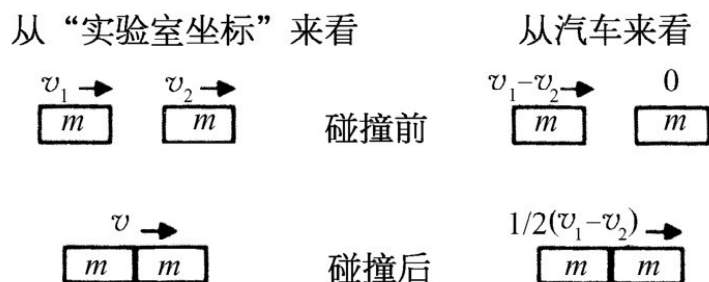


图10-5 质量相等的物体进行的另一种非弹性碰撞的两种看法

于是利用这个原理，对于任何质量相等的物体碰撞后结合在一起的情况，我们都能加以分析。事实上，我们虽然只是计算了一维的情况，但是假如我们坐在一辆沿某个倾斜方向运动的汽车上，我们就可以对更为复杂的碰撞找出更多的东西。这里原理是相同的，只是细节上更加复杂而已。

为了从实验上检验一个以速度 v 运动的物体与另一个速度为0的质量相等的物体碰撞在一起后，是否会组成一个以速度 $v/2$ 运动的物体，我们可以用气垫装置进行如下的实验。在气垫中放入三个质量相等的物体，其中两个物体开始时由爆破汽缸装置连接在一起，第三个物体非常靠近，但和它们稍微隔开一点点，它还带有一个黏性缓冲器以至于在另一个物体碰上它时，就会和它粘在一起。现在，在爆炸后一刹那，我们有两个质量为 m ，分别以相等而相反的速度 v 运动的物体。过一会儿其中一个物体将碰撞在第三个物体上，构成一个质量为 $2m$ 的物体，我们相信，它将以速度 $v/2$ 运动。我们怎样测出它确实是 $v/2$ 呢？把物体在气垫上的初始位置作这样安排，使得两端的距离不同，而是按2:1的比例。这样继续以速度 v 运动的第一个物体，在一给定时间内所通过的距离将是那两个连在一起的物体通过的距离的2倍（假定

第二个物体在与第三个物体碰撞前只通过一段很小的距离)。质量为 m 的物体与质量为 $2m$ 的物体应当同时到达终点，我们去试一下时，就会发现确实如此（图10-6）。

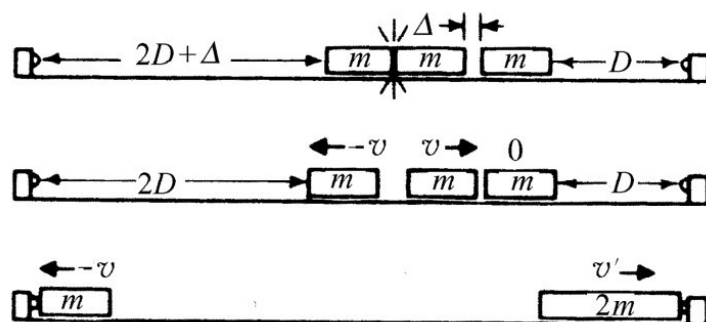


图10-6 验证以速度 v 运动的质量为 m 的物体与一个质量相同的静止物体碰撞后结合在一起以质量 $2m$ 、速度 $v/2$ 运动的实验

我们要解决的下一个问题是，如果有两个不同质量的物体，情况又会怎样。让我们取一个质量为 m 的物体和一个质量为 $2m$ 的物体，并利用我们的爆炸作用。这时将会发生什么呢？如果爆炸后 m 以速度 v 运动，那么 $2m$ 又以什么速度运动呢？令第二个和第三个质量之间的距离为零，重复我们刚才作过的实验，当我们试一下后，会得出同样的结果，也就是说，起作用的质量 m 和 $2m$ 各达到速度 $-v$ 及 $v/2$ 。这样， m 与 $2m$ 之间的直接的反作用与先是在 m 和 m 之间对称地反作用，随后 m 又与第三个 m 发生碰撞并结合在一起所得出的结果完全相同。而且，我们还发现，从气垫两端弹回的质量为 m 和 $2m$ 的物体的速度与原来（几乎）完全相反，如果它们粘在一起，就会停止不动。

现在我们要问的另一个问题是：如果具有速度为 v ，质量为 m 的物体与另一个静止的质量为 $2m$ 的物体碰撞并结合在一起，会发生什么情况呢？这个问题利用伽利略相对性原理很容易回答，因为我们只要

坐在一辆以速度 $-v/2$ 运动的汽车里观察刚才描写的碰撞就行了（图10-7）。从汽车上看，速度是

$$v'_1 = v - v(\text{汽车}) = v + \frac{v}{2} = \frac{3}{2}v \text{ 及 } v'_2 = -\frac{v}{2} - v(\text{汽车}) = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0.$$



图10-7 m 和 $2m$ 之间的非弹性碰撞的两种看法

在碰撞后，质量 $3m$ 在我们看来以速度 $v/2$ 运动。于是我们就得到了碰撞前后的速率比是3:1的答案：如果一个质量为 m 的物体与一个质量为 $2m$ 的静止的物体相碰撞，并结合在一起，则整个物体就以原先 m 的速度的1/3运动。一般的规则又是：各个物体的质量与速度乘积之和保持不变，即 $mv + 0 = 3m \times v/3$ ，这样，我们就一步一步逐渐建立起动量守恒定理。

现在的情况是1对2。利用同样的论证，我们可以预言1对3，2对3等等的结果，从静止开始的2对3的情况如图10-8所示。

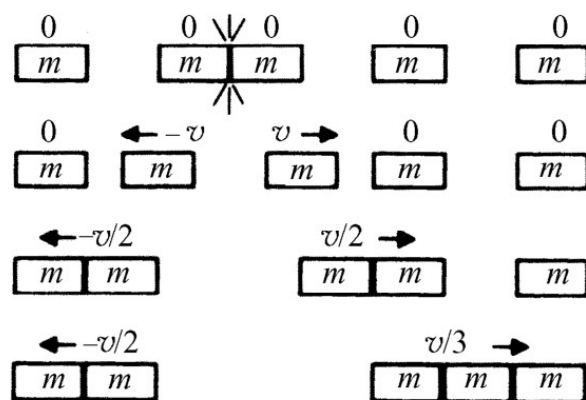


图 10-8 $2m$ 与 $3m$ 之间的作用与反作用

在每一种情况中，我们发现，第一个物体的质量乘它的速度，加上第二个物体的质量乘它的速度，等于最后物体的总质量乘它的速度。因此，这都是一些动量守恒的例证。从简单的、对称的情况出发，我们用实验说明了在较复杂情况下的守恒定律。事实上，对于任何质量比是有理数的情况，我们都能这样做，并且由于任何一个比值都可以充分接近于一个有理数的比值，因此，我们能够以任何精确度处理任何比值的情形。

§10-4 动量和能量

上述的所有例子都是物体发生碰撞结合在一起，或者是先结合在一起，以后又由于爆炸而被分开的简单的情况。然而也有一些物体不黏合在一起的情况；例如，两个质量相等的物体以相同速率发生碰撞后弹开。在很短的时间内，它们发生接触，彼此都受到压缩。在压缩最大的那一瞬间，它们的速度都是0，而能量则贮存在弹性物体内部，就像压缩弹簧的情形一样。这个能量是由物体碰撞之前所具有的动能转化而来的，而在速度为0的那一瞬间，它们的动能就变为0。然而，动能只是暂时失去。压缩状况类似于爆炸时释放能量的雷管。在某种爆

炸的状况下，这些物体立即膨胀并又相互飞开；但是我们已经知道在这种情况下，物体是以相同速率飞开的。然而，一般说来，弹开的速率要比原来的速率小，因为并非所有的能量都为爆炸所用，这与材料性质有关。如果材料是油灰，动能就不会恢复；如果材料是比较硬的，通常会再获得一定的动能。在碰撞中，其余的动能转化为热和振动能——物体变热并作振动。振动能量也很快转变为热能。用钢这样的高弹性材料制成一些碰撞物体，再用精心设计的弹簧缓冲器，有可能使得在碰撞中产生的热和振动很小。在这些情形中，弹回来的速度实际上等于初始速度；这种碰撞称为弹性碰撞。

弹性碰撞的前、后速率相等这件事与动量守恒无关，而与动能的守恒有关。然而，在对称的碰撞后，物体弹开的速度彼此相等却与动量守恒有关。

我们可以类似地分析不同质量、不同初始速度和不同弹性程度的物体之间的碰撞，确定最终速度和动能的损失，但是我们将不去详细探讨这些过程。

对于没有内部的“齿轮、转轴或部件”的系统来说，弹性碰撞是特别有趣的。这样在发生碰撞时，没有地方可以消耗能量，因为那些弹开的物体与它们在碰撞时的状态相同。因此，在非常基本的物体之间的碰撞总是高弹性的，或者非常接近于弹性的。例如，气体中分子或原子间的碰撞就被认为是完全弹性的。虽然这是一个非常好的近似，但即使这样的碰撞也不是完全弹性的；不然人们就会无法理解能量怎么会以光或热辐射的形式从气体中释放出来。在气体分子的碰撞中，偶尔会有低能红外线发射出来，但这种情况是非常罕见的，所发射的能量也是非常微小的。所以，对于大多数场合，气体中的分子碰撞被认为是完全弹性的。

作为一个有趣的例子，让我们考虑两个质量相等的物体之间的弹性碰撞。如果它们以同样速率相碰撞，那么，根据对称性原理，它们应当以相同的速率弹开。但是现在我们来看一下另一种情况下的这种碰撞，即其中的一个物体以速度 v 运动，而另一个物体保持静止。当两者碰撞时会出现什么情况？其实我们在前面已碰到过这种情况。从跟着物体中的一个一起运动的汽车中来观察对称的碰撞，我们发现，如果静止的物体与另一个质量恰好相同的物体发生弹性碰撞，则运动着的物体停了下来，而曾经是静止的物体现在以另一个物体曾经具有的同样的速度运动；两个物体只不过变换一下速度而已。用适当的碰撞装置很容易演示这个现象，更一般地说，假如两个物体以不同的速度运动，那么在碰撞时它们仅仅简单地交换一下速度。

另一个几乎是完全弹性的相互作用的例子为磁性。假如在我们的滑块上放置一对U形磁铁，使它们彼此推斥，那么当一块磁铁静静地移向另一块磁铁时，这块磁铁会把另一块推走，而自己则完全保持静止，被推走的一块磁铁则无摩擦地向前滑动。

动量守恒原理是非常有用的，因为它使我们在无需了解细节的情况下也能解决许多问题，例如，我们并不知道在雷管引爆时气体的运动情况，然而却能预知物体分离的速度。另一个有趣的例子是火箭的推进。一枚具有很大大质量 M 的火箭用极大的速度 V （相对于火箭来说）排出质量为 m 的小块后，如果火箭原来静止的话，它将以很小的速度 v 运动。利用动量守恒原理，我们可以计算出这个速度为

$$v = \frac{m}{M} \cdot V.$$

只要不断地排出物质，火箭就一直加速。火箭的推进本质上与枪的反冲是一回事：不需要任何作反推的空气。

§10-5 相对论性动量

近代已对动量守恒定律作了一些修正。然而，今天这条定律仍是正确的，修正主要是在事物的定义上。在相对论中，我们的确也有动量守恒定律；粒子具有质量，而动量仍由 mv ，即质量乘以速度给出，但是质量随速度而改变，因此动量也发生改变。质量随速度的变化遵从以下规律

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10.7)$$

这里 m_0 是物体的静止质量， c 是光速。从这个公式很容易看出，除非 v 非常大，否则 m 与 m_0 的差别就可忽略，而对通常的速度，动量的表示式就还原为原来的公式。

单个粒子的动量分量可以写为

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p_y &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p_z &= \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

这里 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ 。如果对所有相互作用粒子在碰撞前后的 x 动量分量分别求和，则两个和相等，也就是说，在 x 方向上的动量守

恒。同样的情况对任何方向都成立。

在第4章中，我们看到，只有承认能量可表现为电能、机械能、辐射能、热能等不同形式，能量守恒定律才确实成立。在某些这类情况中，例如热能，能量可以说成是“隐藏”的。这个例子可能使我们联想到这样一个问题：“是不是也存在着动量的隐藏形式——或许是某种热动量呢？”答案是由于下述理由隐藏动量是很困难的。

如果把各个原子的速度的平方相加，一个物体内原子的无规则运动就提供了热能的一种量度。速度平方和将是正的，不具有方向上的特征。物体内热的存在与物体是否作整体运动无关，并且以热这种形式的能量守恒不是很明显的。相反，如果我们把速度相加，由于速度是有方向的，若发现其结果不为零，这就意味着整个物体在某个特定方向上有移动，而这样显著的动量是很容易观察到的。因为只有物体作整体运动时，它才有净动量，所以就不存在内部无规则动量损耗。因此动量作为一个力学量是难以隐藏起来的。然而，例如在电磁场内动量也可以被隐藏起来。这种情况是另一种相对论效应。

牛顿的前提之一是认为在一段距离内的相互作用是瞬时的。结果发现情况并非如此；比如，在包含着电力的情况下，如果在某一个位置上的一个电荷突然移动，其对在另一个位置上的另一个电荷的影响并不是瞬时的——稍有一点延迟。在那种状况下，即使彼此作用的力是相等的，动量仍与之不符；这样，在一段短时间内将出现麻烦，因为有一段时间，第一个电荷将感受一定的反作用力，即获得了某些动量，但第二个电荷却丝毫不受影响，也不改变它的动量。这段时间就是电作用跨过它们之间的距离所需要的时间，即以 $186000 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度跨过这段距离的时间。在这段很短的时间内，粒子的动量是不守

恒的。当然，在第二个电荷感受到第一个电荷的作用并且一切都稳定下来之后，动量的方程就完全成立，但在那段小小的时间间隔中动量是不守恒的。为了表明这一点，我们说在这段时间内除粒子的动量 mv 外还有另一类动量存在，这就是电磁场的动量。如果我们将电磁场的动量加在粒子的动量上，则在所有时间内动量每一时刻都守恒。电磁场具有动量和能量这个事实使场的存在更为真实。因此，更好的理解是，原来那种认为只有粒子之间存在力的概念必须修正为：粒子具有场，场作用在另一个粒子上，而场本身具有我们所熟悉的性质，比如正像粒子那样带有能量和动量。再举另外一个例子：电磁场中存在着我们称之为光的电磁波，结果光也具有动量。所以，光撞击一个物体时，它在每秒钟内传递了一定大小的动量；这相当于一个力，因为，如果被照射物体每秒钟获得一定的动量，它的动量就会发生变化，这种情况与有一个力作用在它上面完全相同。光撞击在物体上时会施加一个压力；这个压力很小，但用足够灵敏的仪器可以测量出来。

在量子力学中，动量是另一回事——它不再是 mv 了。物体的速度的含义已难以确切定义，但是动量仍然存在。在量子力学中，差别在于当粒子表现为粒子时，动量仍是 mv ，但是当粒子表现为波时，动量就用每厘米的波数来量度：波数越大，动量就越大。尽管存在这些差别，动量守恒定律在量子力学中仍然成立。虽然 $F=ma$ 不成立，所有从牛顿定律出发的有关动量守恒的推导也都不成立，然而，在量子力学中，这条特殊定律却最后仍然保持有效！

[1] Neher H V, Leighton R B. *Amer J of Phys*, 1963, 31:255

[2] 原文为touch（接触），疑为trough（槽）之误（air trough即气垫）。——译者注

第11章 矢量

§11-1 物理学中的对称性

我们在本章中介绍的课题，在物理术语上称为物理定律的对称性。这里所用的“对称性”一词具有特殊涵义，因此需要加以定义。事物在什么时候是对称的——我们究竟怎样定义它呢？当我们拿到一幅对称的图画时，它的一边和另一边总是相同的。外尔（H.Weyl）教授曾给对称性下了这样一个定义：如果能对一个事物施加某种操作，在此操作以后能使它与原来的情况完全相同，则这个事物是对称的。例如，如果我们观察一个左右对称的瓶子的轮廓线，那么当把它绕竖直轴转过 180° 后，看上去它就和原来的完全一样。关于对称性的定义，我们将采用外尔的这种较为直观的形式，并以此来讨论物理定律的对称性。

假定我们在某个地方建造了一台复杂的机器，它具有很多复杂的相互作用，并且有很多小球由于它们之间力的作用而跳来跳去，等等。现在，假如我们在另一个地方建造一个完全相同的装置，它的各个部分都与前者相同，都具有同样大小和方位，那么除了横移一段距离外，两台机器一切都相同。如果我们在相同的初始情况下，完全一致地开动这两台机器，我们要问：这两台机器的行为是否完全一样？它们所有的动作是否完全对应？当然，答案很可能是否定的，因为假如我们选错了地方，把一台机器安装在某个墙壁里面，则由于受墙的影响，这台机器运转不起来。

在使用物理学中的所有概念时，都需要具备一定的常识，它们不纯粹是数学的或抽象的概念。我们应该了解，当我们说：把一个装置移动到一个新的位置时现象完全相同这句话是什么意思。我们的意思是说，我们把一切我们认为有关的东西都移过去了，如果现象不相同，我们就认为还有某些有关的东西没有移过去，于是就要把它找出来。如果一直找不到，我们就宣称这些物理定律没有这种对称性。另一方面，如果这些物理定律具有这种对称性，我们就能找出我们预计应该能找到的那些东西。例如在上一个例子中，环顾一下周围，就会发现原来墙壁正在影响着我们的装置。根本问题在于，如果我们能足够明确地定义事物，如果能把所有必不可少的力都包括在装置里面，并且把所有有关的部分从一个地方移到另一个地方，那么这些规律是否就相同呢？这台机器装置是否就以相同的方式运转呢？

很清楚，我们要做的是移动整个装置和所有的主要影响，而不是世界上的一切东西——行星、恒星等，因为如果我们这样做，我们就又会得到相同的现象，道理很简单：因为我们正好又回到了开始时的状况。不，我们不可能移动一切东西。但是实践表明，只要我们对需要移动的东西有一定的理解力，机械是能够运转的。换句话说，假如我们不把机器放到墙里，以及我们知道所有外力的来源，并设法把它们移走，那么机械在一个地方就会会像在另一个地方一样工作。

§11-2 平移

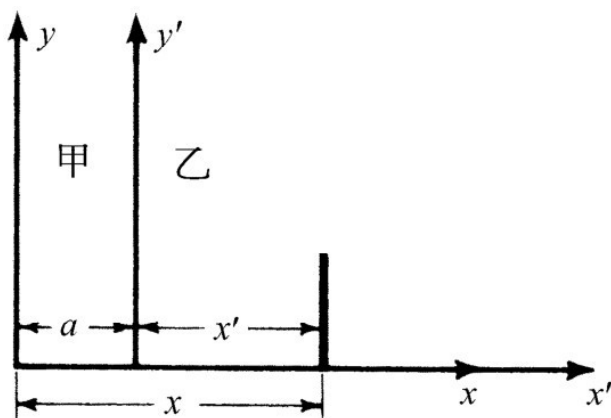
我们将只限于分析力学问题，因为对力学我们已经掌握了足够的知识。在前几章中，我们已经看到对于每一个粒子，力学定律都能归纳成三个方程

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = F_x, \quad m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = F_y, \quad (11.1)$$

$$m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = F_z.$$

这意味着我们有办法测量三个互相垂直的轴 x 、 y 和 z 以及沿这些方向的力，以使得这些定律成立。这些量必须从某个原点量起，但是原点放在什么地方呢？牛顿最初告诉我们，存在着某个我们赖以从它量起的地方，它可能就是宇宙中心，可使这些定律成立。但是，我们可以立即证明永远找不到这个中心，因为如果采用其他原点，得出的结果不会有任何差别。换句话说，假设有两个人——乔（Joe），他以某处为原点，和莫（Moe），他有一个与乔平行的坐标系，但原点在另外一个地方（图11.1）。现在当乔测量空间中某点的位置时，他发现这一点在 x 、 y 和 z 处（通常我们不画出 z 轴，因为在一个图上画那么多轴显得太乱）。另一方面，当莫测量同一点时，他得出一个不同的 x 值（为了区别起见，我们令它为 x' ），而且在原则上 y 值也不同，虽然在这个例子中，两个 y 在数值上相等。因此，有

$$x' = x - a, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (11.2)$$



现在，为了完成我们的分析，还必须知道莫会得到怎样的力。假设力沿着某一条线作用，在 x 方向上的力就是总的力在 x 方向上的分量，即力的大小乘以它和 x 轴之间夹角的余弦。这里，我们看到莫和乔采用完全相同的投影，因此得出方程组

$$F_{x'}=F_x, \quad F_{y'}=F_y, \quad F_{z'}=F_z. \quad (11.3)$$

这些就是乔和莫看到的各个量之间的关系。

问题在于，如果乔知道牛顿定律，而莫也试图写出牛顿定律，那么牛顿定律对莫是否还正确？从不同原点来测量这些点是否会有什么差别？换句话说，假如方程组（11.1）正确，并且方程组（11.2）和（11.3）给出了各个量之间的关系，下面的方程式

$$m\left(\frac{d^2 x'}{dt^2}\right) = F_{x'}, \quad (11.4a)$$

$$m\left(\frac{d^2 y'}{dt^2}\right) = F_{y'}, \quad (11.4b)$$

$$m\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right) = F_{z'} \quad (11.4c)$$

是否也正确呢？

为了检验这些方程式，我们将对 x' 的式子微分两次。首先

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - a) = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}.$$

这里，我们假定莫的原点相对于乔是固定（不动）的，因此， a 是一个常数， $da/dt=0$ ，这样就得到

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

因而

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2};$$

因此方程式（11.4a）就变成

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = F_{x'}.$$

（我们还假定乔和莫测得的质量是相等的）。因此，加速度和质量的乘积与另一个人的一样，我们已经得出了 $F_{x'}$ 的公式，把式（11.1）代入 $F_{x'}$ 的式子，就得到

$$F_{x'} = F_x.$$

因此，莫看到的规律是一样的，他用不同的坐标也能写出牛顿定律，而且将仍然正确。这就意味着没有唯一的方法定义世界的原点，因为不管从哪个位置进行观察，这些定律都是一样的。

下面的这个论断也是正确的：如果在某处有一个内部具有某种机械的装置，则在另一处的同一装置将以同样的方式运转。为什么？因为莫研究的机械和乔研究的另一个机械满足完全相同的方程式。既然，方程是相同的，那么出现的现象也相同。因此，证明一个装置在一个新的位置上的行为与在老的位置上的行为完全一样，与证明当它们在空间发生位移时，方程式的形式不变，这两者是一回事。因此，我们说，物理定律对于平移是对称的，这里对称的意义是指当我们把坐标作一平移时，物理定律不变。当然，从直观上看，它的正确性是显而易见的，但是讨论它的数学关系却是很有趣而又引人入胜的。

§11-3 转动

上面是关于物理定律对称性的一系列较为复杂的命题中的第一个。下一个命题是无论把轴选择在哪一个方向应该没有影响。换句话说，假如我们在某处建造了一个装置，并观察它的运转，同时在附近我们再造一个同样的装置，但使它转过一个角度，它是否将以同样的方式运转呢？显然不是，有摆的老式的大座钟就是一个例子。例如一个摆钟竖直地放着，它走得很好，但是如果把它斜放，摆碰到钟罩的一个面上，因而它就不走了。因此，就摆钟来说，除非把吸引摆的地球也包括进去，否则，上述定理就不成立。因此，如果我们相信对转动而言物理定律是对称的，那么对于摆钟我们就能作如下预言：除了钟的机械结构之外，在摆的运转中还包含有其他因素，因此必须找出钟之外的因素。我们也可以预言，如果把摆钟放在相对于产生这种不对称的神秘起源（或许是地球）来说不同的位置上，摆钟的走动情况将不同。事实上，例如，我们知道在人造卫星上的摆钟根本不走，因为那里没有有效作用力，而在火星上摆钟将以不同的速率走动。摆钟

除了内部的机械结构外，的确 包含有其他东西，也就是含有某些外来的因素。当我们认识到这个因素时，我们知道应该使地球随这个装置一起转动。当然，我们无须为此担心，这是很容易做到的；只要等一会儿，地球就转过一些，于是摆钟在新的位置上就像以前一样走动。当我们在空间转动时，我们的角度不断在变化，而且是绝对地在变化，这种变化似乎没有给我们带来很大麻烦，因为我们在新的位置上的情形就像在原来的位置上的一样。这里可能会使人迷惑不解，因为在新转过的位置上物理定律与在未转动的位置上完全一样，这是正确的。但是，如果认为一个正在转动 的物体和一个不在转动的物体遵循同样的规律，这就不对了。假如我们进行足够精密的实验，就能断定地球正在转动，但不能说出地球已经转过多少。换句话说，我们不能确定地球所处的角度的位置，但能断定它正在发生变化。

现在我们来讨论角方位对于物理定律的影响。让我们来看一看乔和莫的游戏是否还能重演。这一次，为了避免不必要的麻烦，我们假定乔和莫采用同一个坐标原点（我们已经证明过，坐标轴能够平移到另一个地方）。假定莫的轴相对于乔的轴转过一个角度 θ 。这两个坐标系如图11-2所示。该图只限于两维的情况。考虑任意一点 P ，在乔系统中其坐标为 (x, y) ，在莫系统中为 (x', y') 。和前面一样，我们将从用 x 、 y 和 θ 来表示坐标 x' 和 y' 开始。为此，首先从 P 点向四个轴各画一条垂线，并画出 AB 垂直于 PQ 。从图上可以看出 x' 可以写成沿 x' 轴的两段长度之和， y' 可写成沿着 AB 的两段长度之差。所有这些长度都能用（11.5）式中的 x 、 y 和 θ 来表示，其中我们还增加了一个第三维的方程式

$$\begin{aligned}x' &= x \cos\theta + y \sin\theta, \\y' &= y \cos\theta - x \sin\theta,\end{aligned}$$

$$z' = z. \quad (11.5)$$

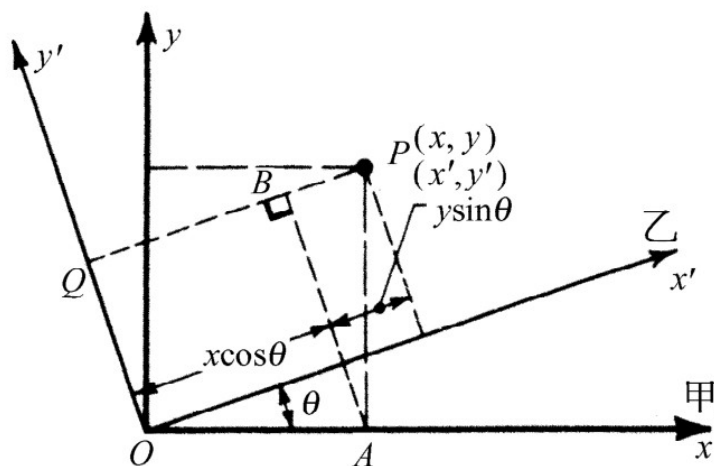


图11-2 角方位不同的两个坐标系

下一步是按照上述的一般方法来分析两个观察者所看到的那些力之间的关系。假设有一个力 F ，已经被分解成分量 F_x 和 F_y （从乔看来）作用在图11-2中 P 点处的一个质量为 m 的质点上。为了简化起见，我们把两组坐标轴的原点都移到 P 点，如图11-3所示。莫沿着他的坐标轴看到的 F 的分量是 $F_{x'}$ 和 $F_{y'}$ 。 F_x 在沿 x' 和 y' 轴的方向上都有分量，同样 F_y 在这两个轴的方向上也有分量。为了用 F_x 和 F_y 来表示 $F_{x'}$ ，我们把它们沿 x' 轴的分量加起来，以同样的办法用 F_x 和 F_y 来表示 $F_{y'}$ 。结果是

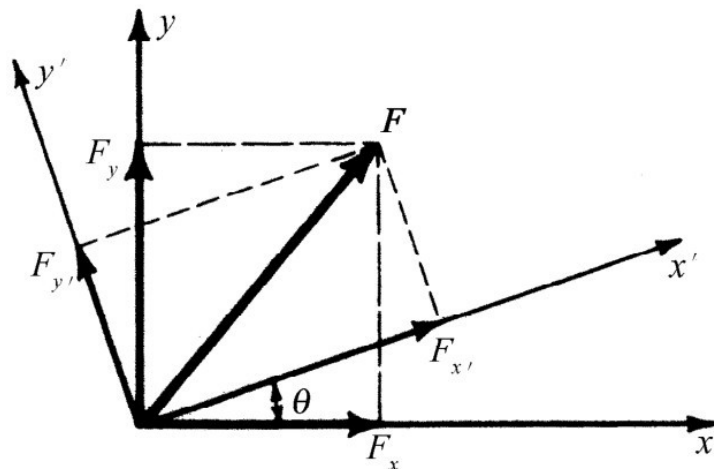


图 11-3 在两个坐标系中力的分量

$$\begin{aligned}
 F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta, \\
 F_{y'} &= F_y \cos\theta - F_x \sin\theta, \\
 F_{z'} &= F_z.
 \end{aligned}
 \tag{11.6}$$

有趣的是这里看到了一种出人意料的，然而是非常重要的情况：分别表示 P 点坐标的式 (11.5) 和力 F 的分量的式 (11.6) 具有相同的形式。

和前面一样，假定牛顿定律在乔的坐标中成立，而且可用式 (11.1) 来表示。问题仍然是莫是否能应用牛顿定律——对于他的坐标轴转过的系统这些结果是否仍然正确？换句话说，如果我们假设式 (11.5) 和 (11.6) 给出了各个测量值之间的关系，那么下式

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} \right) &= F_{x'}, \\
 m \left(\frac{d^2 y'}{dt^2} \right) &= F_{y'}, \\
 m \left(\frac{d^2 z'}{dt^2} \right) &= F_{z'}
 \end{aligned}
 \tag{11.7}$$

是否也正确呢？为了检验这些方程，我们分别计算式子的左端和右端，然后比较其结果。为了计算左端，用 m 乘以式（11.5），并求出它对时间的两次微商，这里假定角度 θ 为常数。这就给出

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2 x'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\cos\theta + m\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\sin\theta, \\ m\left(\frac{d^2 y'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\cos\theta - m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\sin\theta, \\ m\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right). \end{aligned} \tag{11.8}$$

然后再计算式（11.7）的右边。把式（11.1）代入式（11.6），这就得出

$$\begin{aligned} F_{x'} &= m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\cos\theta + m\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\sin\theta, \\ F_{y'} &= m\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\cos\theta - m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\sin\theta, \\ F_{z'} &= m\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right). \end{aligned} \tag{11.9}$$

看哪！式（11.8）和（11.9）右端是一样的；因此，我们断定，如果牛顿定律对一组坐标轴是正确的，它们对其他任何一组坐标轴也是正确的。从刚才对坐标轴的平移和转动证实的结果得出一些推论：第一，没有一个人能宣称他的特定坐标轴是唯一的，虽然对于某些特定的问题，这些坐标轴可以带来方便。例如，把重力的方向作为某一个轴的方向是比较方便的，但是这在物理上并不是必需的。第二，它意味着如果整套设备完全装在一起，即所有产生力的装置都包含在这套设备的内部，当把它转过一个角度时，它的运转情况不变。

§11-4 矢量

不仅牛顿定律，而且我们迄今为止所知道的其他物理定律，都具有这两种特性，我们称之为在轴作平移和转动情况下的不变性（或对称性）。这些特性极为重要，因而发展了一种数学技巧，用来写出和应用物理定律。

前面的分析包含有相当乏味的数学工作。为了在分析这些问题时把那些繁琐的东西减小到最低限度，设计了一种非常有用的数学工具，称为矢量分析，也就是本章的标题。但是，严格地说，本章讲的是物理规律的对称性。为了得出我们希望得到的结果，采用前面分析的方法，我们已经能够做需要做的一切事情，但实际上，我们总喜欢做起事来更方便和更快一些，因此采用了矢量技术。

我们先注意一下在物理学上很重要的两类量的某些特性（实际上不仅仅是两类，我们就从这两类研究起）。其中之一我们称为普通量，例如一个袋子里土豆的数目，是一个无方向的量，或称为标量，温度就是这种量的另一个例子。在物理学中占有重要地位的另外一些量是有方向的，如速度：我们不仅要知道它的速率，还要记录它向哪个方向运动。动量和力也有方向，位移也一样：当某人从一个地方走到另一个地方时，我们可以记录他走了多远，但假如我们还想知道他到哪里去，就还需要说明方向。

所有有方向的量都称矢量。

一个矢量由三个数组成。要表示在空间中所走的一步，比如说，从原点走到坐标为 (x, y, z) 的特定点 P ，我们确实需要三个数，

但是，我们另外创造一个数学符号 $\mathbf{r}$ ，它与我们至今采用的数学符号都不同^[1]。它不是一个单一的数，而是代表三个数： x 、 y 和 z 。一个矢量意味着三个数，但实际上又并不仅仅是那三个数，因为如果我们采用不同的坐标系，这三个数就要变成 x' 、 y' 和 z' 。但是，为了保持数学的简单性，我们想用同一个符号 来表示三个数 (x, y, z) 和另外三个数 (x', y', z') 。也就是说，我们采用同一符号来表示相对于一个坐标系的第一组三个数，但如果我们用另一坐标系时，它就表示另一组三个数。这样做大有好处，因为当我们改变坐标系时，我们无须改变方程的字母。假如我们用 x, y, z 写出一个方程式，当采用另一坐标系时，就要换成 x', y', z' 。但是，按照习惯假如采用一组坐标轴时， $\mathbf{r}$ 表示 (x, y, z) ，当采用另一组坐标轴时，它表示 (x', y', z') ，等等，我们将只写 $\mathbf{r}$ 就行了。在一个给定坐标系中，描述一个矢量的三个数称为矢量在该系统三个坐标轴方向上的分量。也就是说，我们用同一个符号来表示相应于从不同的坐标轴看到的同一客体的三个字母。正因为包含着在空间中走一步这件事与我们测量它时所用的分量无关这种物理直觉，我们才能说“同一个客体”这一事实。因此，不管我们怎样转动坐标轴，符号 $\mathbf{r}$ 都表示同一事物。

现在假定还有另一个有方向的物理量，它是有三个数与之相联系的一个任意量，例如力，在我们改变坐标轴时，这三个数通过一定的数学法则变成了另外三个数。它应该与把 (x, y, z) 变成 (x', y', z') 的法则一样。换句话说，任何与三个数相联系的物理量，当它的变换和在空间中走一步的三个分量的变换一样时，就是一个矢量。如

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}$$

的式子，在某一个坐标系中是正确的，那么在任何坐标系中它也应是正确的。当然，这个方程式代表三个方程式

$$F_x=x, F_y=y, F_z=z.$$

或者，也代表

$$F_{x'}=x', F_{y'}=y', F_{z'}=z'.$$

一个物理关系可以表示成矢量方程这一事实使我们确信：这种物理关系在坐标系仅仅作转动时是不变的。这就是为什么矢量在物理学中如此有用的道理。

现在我们来研究矢量的某些性质。速度、动量、力和加速度都是矢量的例子。根据多种用途，用一个指示矢量所作用的方向的箭头来表示矢量是很方便的。为什么能用箭头来表示力呢？因为它具有和“在空间走一步”相同的数学变换性质。因此，就像走一步中的“步”一样，我们可以用一个力的单位，比如令一牛顿相应于某个规定的长度作为尺度，把它在图上表示出来。一旦这样做了，则所有的力都能用长度来表示。因为类似于

$$\mathbf{F}=k \mathbf{r}$$

的式子，这里 k 是常数，是一个完全合理的式子。因此，我们总是可以用线来表示力，这是非常方便的，因为只要画出线，就不再需要轴了。当然，当轴转动时，它的三个分量会改变，我们能很快地算出这些分量，因为这仅仅是一个几何问题。

§11-5 矢量代数

我们现在来叙述矢量用不同方式组合时的定律或法则。第一种组合是两个矢量相加：假设 $\mathbf{a}$ 是一个矢量，在某一特定坐标系中它具有三个分量 (a_x, a_y, a_z) ， $\mathbf{b}$ 是另一个矢量，它也有三个分量 (b_x, b_y, b_z) 。现在让我们创造三个新的数 $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ 。这些数是否构成一个矢量呢？“是的”，人们可能会说，“它们是三个数，每三个数都构成一个矢量。”不对，不是 每三个数都能构成矢量！要使它是一个矢量，不仅要有三个数，而且这三个数必须要以这样的方式和一个坐标系相联系，即当转动坐标系时，这三个数正好按照我们已经叙述过的严格的规律相互“旋转”，彼此“混合在一起”。因此，问题在于，如果我们转动坐标系，使 (a_x, a_y, a_z) 变成 $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ 和 (b_x, b_y, b_z) 变成 $(b_{x'}, b_{y'}, b_{z'})$ ，那么 $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ 变成什么呢？它们是否变成 $(a_{x'} + b_{x'}, a_{y'} + b_{y'}, a_{z'} + b_{z'})$ ？回答当然是“对的”，因为方程式 (11.5) 的标准变换是所谓线性 变换。如果把这些变换应用于 a_x 和 b_x 以得出 $a_{x'}$ 和 $b_{x'}$ ，就会发现已变换的 $a_x + b_x$ 的确是 $a_{x'} + b_{x'}$ 。当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在这个意义上“彼此相加”时，它们将构成一个矢量，我们称之为 $\mathbf{c}$ 。我们可以把它写成

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

从它的分量我们立即看出 $\mathbf{c}$ 具有重要的性质

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

这样还有

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}.$$

我们可以按任意次序把矢量相加。

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的几何意义是什么呢？假如在一张纸上用线段来表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ，那么 $\boldsymbol{c}$ 应是什么样子呢？如图11-4所示，我们看到，如果把表示 $\boldsymbol{b}$ 分量的矩形以图中所示的方式放到表示 $\boldsymbol{a}$ 分量的矩形上，就能非常方便地把 $\boldsymbol{b}$ 的分量加到 $\boldsymbol{a}$ 的分量上去。因为 $\boldsymbol{b}$ 正好“配合”它的矩形， $\boldsymbol{a}$ 也正好配合它的矩形，它就像是把 $\boldsymbol{b}$ 的“尾端”接到 $\boldsymbol{a}$ 的“顶端”一样，从 $\boldsymbol{a}$ 的“尾端”到 $\boldsymbol{b}$ 的“顶端”的箭头是矢量 $\boldsymbol{c}$ 。当然，如果我们以另外的方式把 $\boldsymbol{a}$ 加到 $\boldsymbol{b}$ 上，那就应该把 $\boldsymbol{a}$ 的“尾端”放在 $\boldsymbol{b}$ 的“顶端”上，根据平行四边形的几何性质，我们将得到 $\boldsymbol{c}$ 的同样结果。注意，矢量按照这种方法相加，无需参照任何坐标轴。

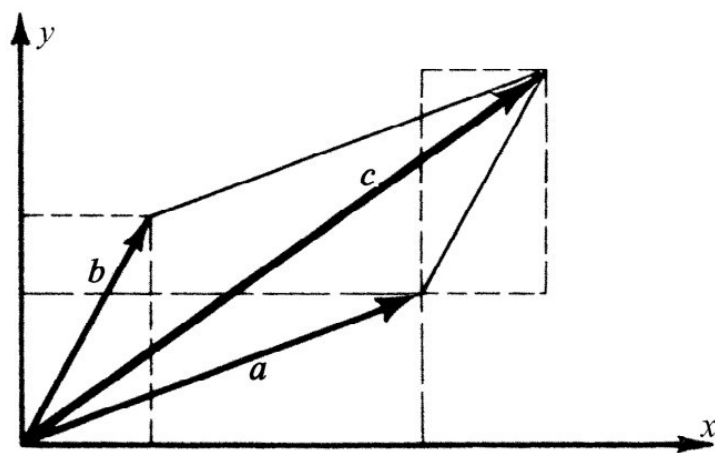


图11-4 矢量的加法

假设用一个数 α 去乘一个矢量，这是什么意思呢？我们定义 它代表一个新矢量，它的分量为 αa_x ， αa_y 和 αa_z 。它的确是 一个矢量，

我们把这个问题留给学生去证明。

现在来考虑矢量减法。我们可以用定义加法一样的方法来定义减法，但不是把各个分量相加，而是把各个分量相减。或者，定义一个负矢量 $-b = -1b$ ，然后把分量相加的方法来定义减法，这实际上是一回事。结果如图11-5所示。这个图表示 $d = a - b = a + (-b)$ ；同时，我们还看到采用等效关系 $a = b + d$ ，从 a 和 b 很容易求出 $a - b$ 的差。因而求矢量的差甚至比求矢量的和更容易：我们只要从 b 的“顶端”到 a 的“顶端”画一个矢量，就得到 $a - b$ ！

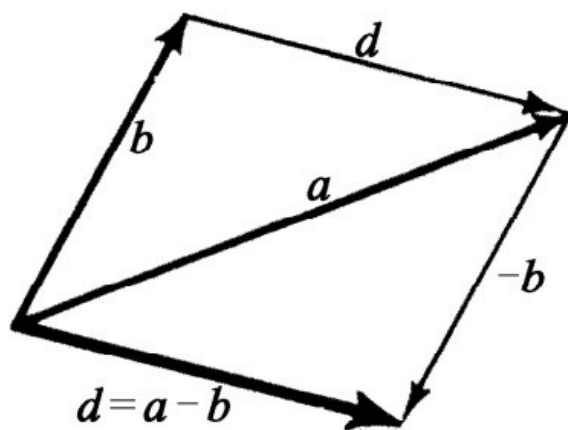


图11-5 矢量的减法

下面来讨论速度。为什么速度是矢量呢？如果位置是由三个坐标 (x, y, z) 给定，那么速度是什么呢？速度由 dx/dt 、 dy/dt 和 dz/dt 给出。这是不是矢量？我们可以通过对表示式 (11.5) 求微商来判明 dx/dt 是否以恰当的方式变换。我们看到 dx/dt 和 dy/dt 的确是按照与 x 和 y 同样的规律变换，因此这个时间的微商是一个矢量。因而速度是矢量。我们可以把速度写成一个有趣的形式

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

速度是什么，以及为什么它是一个矢量还可以更形象地来理解：在一个短时间 Δt 内粒子运动了多远呢？回答是： $\Delta \mathbf{r}$ ，因此，如果一个粒子某一时刻在“这里”，而另一时刻跑到“那里”，那么用时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ ，去除位置的矢量差 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ （ $\Delta \mathbf{r}$ 的方向就是图11-6所示的运动方向），就得到“平均速度”矢量。

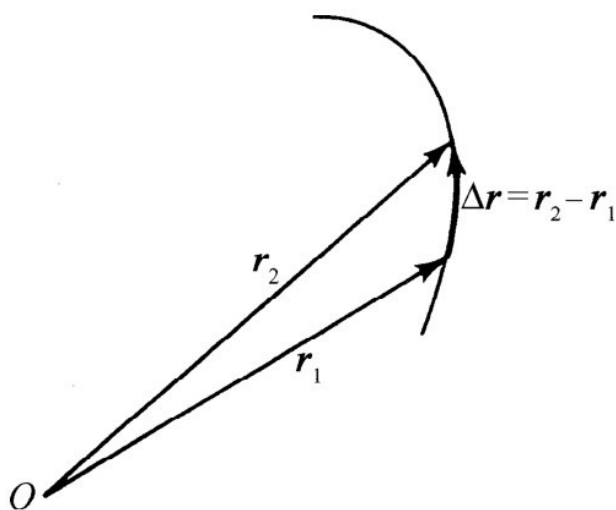


图11-6 在短时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内，一个粒子的位移

换句话说，速度矢量就是在 Δt 趋近于零时，在 $t + \Delta t$ 和 t 这两个时刻的矢径之差除以 Δt 的极限

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (11.10)$$

因为速度是两个矢量之差，所以它也是一个矢量。因为它的分量是 dx/dt ， dy/dt 和 dz/dt ，所以这也是速度的正确定义。实际上，从这个论证我们看到，将任一矢量对时间求微商，得到的是一个新的矢量。因此，我们有好几种方法得出新的矢量：（1）乘以一个常数；（2）对时间求微商；（3）两个矢量相加或相减。

§11-6 牛顿定律的矢量表示法

为了将牛顿定律写成矢量形式，需要再进一步定义加速度矢量。这是速度矢量的时间微商，很容易证明它的分量是 x ， y 和 z 相对于 t 的两次微商

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (11.11)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (11.12)$$

有了这个定义，就能把牛顿定律写成如下形式

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (11.13)$$

或

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (11.14)$$

证明牛顿定律对坐标转动的不变性的问题就是去证明 $\mathbf{a}$ 是一个矢量，这一点我们刚才已证明过。证明 $\mathbf{F}$ 是一个矢量；我们暂且假定它是的。既然我们已知加速度是一个矢量，如果力也是一个矢量，那么

式(11.13)在任何坐标系中就都一样了。把它写成不显含 x, y, z 项的形式有这样一个好处，即往后每次在写牛顿方程或其他物理定律时，不需要写出三个方程。看上去我们写的是一条定律，但当然，实际上对每一组特定坐标轴来说它是三个方程，因为任何矢量方程包含了方程两端各分量相等的含义。

加速度是速度矢量的变化率的事实有助于我们计算在某些复杂情况下的加速度。例如，假定一个粒子在某一复杂曲线上运动(图11-7)，并且在一个给定的时刻 t_1 ，具有一定速度 $\mathbf{v}_1$ ，稍微过一会儿，当到达另一时刻 t_2 时，具有另一个速度 $\mathbf{v}_2$ 。什么是加速度呢？答案是：加速度等于这个微小的时间间隔去除速度之差，因此，这里要用到两个速度的差。我们怎样来求两个速度的差呢？为了把两个矢量相减，我们在 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_1$ 的“端点”之间画一个矢量，即，如图11-7所示用 $\Delta \mathbf{v}$ 来表示两个矢量之差，对吗？不对！只有当两个矢量的尾端在一起时，才可以这样做！如果我们把一个矢量移到别的地方，再在它们之间画一条线，这是毫无意义的。这一点务必注意！我们需要画一个新的图来做这两个矢量的减法。在图11-8中， $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 画成与图11-7中的相应的部分平行且相等，这样我们就能讨论加速度了。当然，加速度就是 $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 。有趣的是，我们可以把速度差分成两个部分；即可以认为加速度具有两个分量，一个是沿路径的切线方向的分量 $\Delta \mathbf{v}_{\parallel}$ ，另一个是与路径相垂直的分量 $\Delta \mathbf{v}_{\perp}$ ，如图11-8所示。当然，路径的切向加速度就是速度长度的变化，也就是速率 v 的变化

$$a_{\parallel} = \frac{dv}{dt}. \quad (11.15)$$

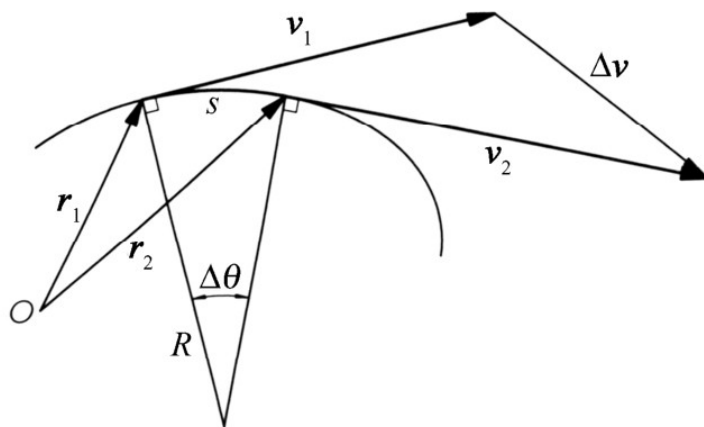


图11-7 曲线轨道示意图

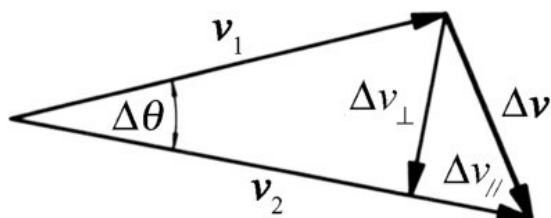


图11-8 计算加速度的矢量图

加速度的另一与曲线垂直的分量利用图11-7和图11-8也很容易算出。在短时间 Δt 内，设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 之间变化了一个很小的角 $\Delta\theta$ 。如果速度的大小是 v ，那么显然

$$\Delta v_{\perp} = v \Delta\theta ,$$

加速度 $a_{\perp}$ 就是

$$a_{\perp} = v \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) .$$

现在需要知道 $\Delta\theta/\Delta t$ 的值，它可以用下面的办法求出：如果在一给定时刻，曲线近似于某一个半径为 R 的圆周，则在 Δt 时间内走过的距离 s 就是 $v \Delta t$ ，这里 v 是速率

$$\Delta\theta = (v\Delta t)/R \quad \text{或} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{R}.$$

因此，得出

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R}, \quad (11.16)$$

这与我们以前看到的一样。

§11-7 矢量的标积

现在进一步研究矢量的某些性质。很容易看出在空间走一步的长度在任何坐标系中都是一样的。这就是说如果在某一坐标系中用 x, y, z 来表示某特定的一步 $\mathbf{r}$ ，在另一个用 x', y', z' 表示的坐标系中，可以肯定距离 $r=|\mathbf{r}|$ 是一样的。现在有

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

及

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

因此我们需要证明的是这两个量是相等的。我们不必去求平方根，较为方便的办法是讨论距离的平方，即验证是否有

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (11.17)$$

最好此式是成立的——如果把式（11.5）代入，就会发现它确实是成立的。因此，我们看到还有另一些方程在任何两个坐标系中也成立。

这里包含一些新的内容。我们可以导出一个新的量，它是 x 、 y 和 z 的函数，称之为标函数，它没有方向，但在两个系统中是一样的。我们也可以从一个矢量得出一个标量。为此，必须找出一个一般法则。很清楚，在刚刚考虑过的例子中这个法则就是：把各分量的平方相加。现在来定义一个新的量，它叫 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 。这不是矢量，而是标量，它是一个在所有坐标系中都不变的数，并定义为矢量的三个分量的平方和

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (11.18)$$

也许你要问，“这是对哪些轴而言呢”？它与轴无关，对任何一组轴其结果都是一样。这样，我们得到了一个新的量，一个由矢量“平方”得出的不变量，或标量。如果对任意两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，定义下面的量

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (11.19)$$

我们发现，这个量不管是在带撇还是不带撇的系统里计算，都是不变的。要证明这一点我们只要注意到 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ， $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ 是不变的，这里 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。因而平方和

$$(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$$

是不变的

$$(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = (a_{x'} + b_{x'})^2 + (a_{y'} + b_{y'})^2 + (a_{z'} + b_{z'})^2. \quad (11.20)$$

如果把此式两边展开，就会有如式（11.19）中出现的那些交叉乘积项，以及 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的分量的平方和。由于式（11.18）那样的项不变，因此剩下的式（11.19）的交叉乘积项也不变。

量 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 称为两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标积，它具有很多重要而有用的性质。例如，很容易证明

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (11.21)$$

还有，计算 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 有一个不需要计算 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的分量的简单的几何方法： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}$ 的长度和 $\mathbf{b}$ 的长度之积乘以它们之间夹角的余弦。为什么？假设我们选一个 x 轴沿 $\mathbf{a}$ 方向的特殊的坐标系，在这种情况下， a_x 是 $\mathbf{a}$ 的唯一分量，它当然就是整个 $\mathbf{a}$ 的长度。此时方程式（11.19）就简化成 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$ ，这就是 $\mathbf{a}$ 的长度乘 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的分量，即 $b \cos \theta$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta.$$

因此，在此特殊的坐标系中，我们已经证明了 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 等于 $\mathbf{a}$ 之长乘 $\mathbf{b}$ 之长再乘 $\cos \theta$ 。然而，如果它对一个坐标系成立，则对所有坐标系也成立。因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 与坐标系无关；这就是我们的论证。

点积有什么用处呢？在物理学中有些什么场合需要用到它吗？是的，我们随时都要用到它。例如，在第4章中，动能是 $mv^2/2$ ，如果物

体在空间运动， v^2 应该是速度在 x 、 y 和 z 方向上的分量的平方和，因此按照矢量分析动能的公式是

$$K \cdot E = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (11.22)$$

能量没有方向。但动量有方向；它是一个矢量，等于质量乘以速度矢量。

当一个物体从一处被推到另一处时力所做的功是点积的另一个例子。我们还没有给功下过定义，但是它是与当一个力 $\mathbf{F}$ 作用了一段距离 $\mathbf{s}$ 时能量的改变和重物的升高相当的

$$\text{功} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}. \quad (11.23)$$

有时讨论矢量在某一方向（比如说竖直方向，因为它就是重力方向）上的分量是很方便的。为此，在我们希望研究的方向上引入一个所谓单位矢量将是很有用的。所谓单位矢量，是指它自身的点积等于1。我们用 $\mathbf{i}$ 表示单位矢量，则 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ 。如果要求某矢量在 $\mathbf{i}$ 方向上的分量，我们看到点积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$ 是 $ac \cos \theta$ ，它就是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{i}$ 方向上的分量。这是求分量的一种较好的办法。事实上，它能使我们得出所有的分量，并写出一个很有意思的公式。假定在一个给定的坐标系 x, y, z 中，我们引入了三个矢量： x 方向的单位矢量 $\mathbf{i}$ ， y 方向的单位矢量 $\mathbf{j}$ ，以及 z 方向的单位矢量 $\mathbf{k}$ 。首先请注意 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ 。但 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ 是什么呢？当两个矢量互相垂直时它们的点积为零。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \end{aligned} \quad (11.24)$$

有了这些定义，不管什么矢量都能写成如下形式

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} . \quad (11.25)$$

应用这种方法，我们就能从一个矢量的分量求出矢量本身。

有关矢量的这些讨论远非完整。但是，与其现在就去深入研究这个课题，还不如先来学会把我们至今讨论过的某些概念应用于物理领域。当我们相当好地掌握了这一基本内容以后，再去钻研这一课题中更深入的东西就比较容易，也不会被搞糊涂。以后我们会发现定义两个矢量的另一种乘积，即矢积，并写成 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ，也是非常有用的。我们将在以后的章节中再讨论这部分内容。

[1] 在打字时，矢量用黑体字 $\boldsymbol{r}$ 表示；在手写时，用白体加一个箭头 $\vec{r}$ 表示。

第12章 力的特性

§12-1 什么是力

物理定律能够帮助我们认识自然与利用自然。虽然仅仅从这一点看，就已经值得我们花时间去研究它，但是人们还是应当不时停下来思考一下“它们的真正含义是什么？”自远古以来，任何领域所表述的含义都是一个使哲学家发生兴趣而又感到棘手的课题，而物理定律的含义甚至更为有趣，这是因为人们普遍认为，这些定律阐明了某种真正的知识。知识的含义是一个深奥的哲学问题，而追问“它的含义是什么？”始终是重要的。

让我们来问一下，“写成 $F=ma$ 的牛顿定律的含义是什么？力、质量以及加速度的含义是什么？”嗯，我们可以凭直觉领会质量的含义，如果我们知道了位置和时间的含义，就能够定义加速度。我们将不去讨论这些含义，而要集中讨论力这个新概念。答案同样地简单：“如果一个物体在作加速运动，那么一定有力作用在这个物体上。”这就是牛顿定律所表明的，于是人们可以想象到的力的最精确和最优美的定义就能够简单地表述为：力等于物体的质量乘以加速度。假定我们有一条定律，即：如果所有外力之和等于零，那么动量守恒成立；于是产生了这样的问题，“所有外力之和等于零是什么意思？”对上面这个陈述的一个有意思的解释是：“当总动量不变时，外力之和等于零。”这种说法肯定有毛病，因为它实在没有说出什么新的东西。如果我们已经发现了一条基本定律，该定律宣称：力等于质量乘以加速度，并

且正式加以定义，那么我们就什么也没有发现。我们也可以这样来定义力：一个物体不受力作用时将一直以恒定速度沿直线运动。于是，如果我们观察到一个物体不是以恒定速度沿直线运动，我们就可以说，物体上有力作用着。这些说法当然不可能属于物理学的内容，因为它们是一些循环论证的定义。上面的牛顿表述尽管看来好像是力的一种最精确的定义，而且合数学家的意；然而，它完全是无用的，因为从这个定义得不出任何预见。人们可以整天坐在安乐椅上，任意定义一些词，但是要发现当两个球相互碰撞或者一个重物悬挂在弹簧上时发生一些什么则完全是另一回事，因为物体所表现的行为是与定义的选择完全无关的。

举例来说，如果我们愿意说，一个物体不去碰它，它就停留在原来所处的位置上不动，那么当我们看到某个东西在漂移时，我们就可以说，这一定是由一种称为“戈斯”（Gorce）的力^[1]所引起的——“戈斯”是位置的变化率。现在我们得到了一个奇妙的新的定律：任何物体都保持静止状态除非有“戈斯”作用其上。你们看，这就和上述力的定义相类似，它并不包含什么内容。牛顿定律的真正内容是：除了 $F=ma$ 这条定律外，力还应该具有某些独立的性质。但是牛顿或其他人并没有把力所特有的独立性质完全描述出来。因此物理定律 $F=ma$ 是一个不完全的定律。它暗示着，如果我们研究质量乘以加速度，并且称这个乘积为力，也就是说如果我们有兴趣研究力的特征，那么我们将发现力具有某种简单性。这个定律是分析自然界的一种很好的方案，力是简单的则是一种联想。

这类力的第一个例子就是完整的万有引力定律，它是由牛顿提出的，并且在阐述定律时还回答了“力是什么？”这个问题。假如除了万有引力外没有其他的力，那么万有引力定律和力的定律（第二运动定

律)的组合应当是一种完整的理论。但是除了万有引力外还有很多种力,而且我们希望在许多不同的情况下使用牛顿定律,因此为了继续深入,我们必须讲一些有关力的性质的内容。

例如,在处理力的问题时总是默认:除非有某个物理实体存在,否则力等于零。如果我们发现一个力不等于零,我们也一定能在附近找到某个物体是力的来源。这个假定完全不同于我们上面所介绍的“戈斯”的那种情况。力的最重要的特征之一就是它具有实质性的起源,这就不仅是一个定义了。

牛顿还提供了一个有关力的法则:相互作用的物体之间的力大小相等、方向相反——作用力等于反作用力。后来知道,这条法则并不是完全正确的。事实上, $F=ma$ 这条定理就不完全正确。要是它是一个定义,我们就应当说:它永远是完全正确的,但事实上并非如此。

读者可能会提出异议:“我不喜欢这种不严谨性,我喜欢对每件事情都下一个严格的定义;事实上在有些书上是这样说的,任何科学都是一门严格的学科,在那里每件事情都有一个定义。”如果你坚持要获得力的精确定义,你将永远得不到它!因为首先,牛顿第二定律是不精确的,其次,要理解物理定律,你就必须懂得所有这些物理定律都是某种近似。

任何简单的概念都是近似的。作为例子,考虑一个客体,什么是是客体?哲学家总是这样说:“嗯,就拿一张椅子来作为例子吧!”当他们说这句话的时候,你们就知道他们不知道再如何说下去了。椅子是什么?椅子就是那边的某种确定的东西,确定到什么程度呢?原子不时从椅子中跑出来——虽然不是很多,但总有一些,灰尘落到椅子上,逐渐溶化到油漆里,所以要精确地定义椅子,确切地说出哪些原

子属于椅子，哪些原子属于空气或哪些原子属于灰尘，哪些原子属于椅子上的油漆，这是不可能的。因此只能近似地定义椅子的质量。同样，要确定单个客体的质量也是不可能的。因为世界上并不存在任何单个孤立的客体——每个客体都是许多事物的混合体。所以我们只能以一系列的近似和理想化来处理它们。

窍门就在于使之理想化。在大约是 $1/10^{10}$ 以内的极好近似下，椅子中的原子数在一分钟内是不变的，而如果要求不是太精确的话，我们可以把椅子理想化为一个确定的物体；同样，如果要求不是太精确的话，我们将以一种理想化的方式来学习有关力的特性。人们可能并不满足于物理学试图获得的对自然界的近似（但总是力图增加这个近似的精确度）看法，而宁愿要一种数学的定义，但是数学的定义在真实世界中是永远不会起作用的。对数学来说所有的逻辑都能完全贯彻，数学定义对它将是适合的。但是正如我们在像海浪和葡萄酒等一些例子中指出过的那样，物理世界是复杂的。当我们试图将它的各部分隔离开来讨论一种质量时，对于酒和杯子来说，当一方溶于另一方时，我们怎么能知道哪些是酒，哪些是杯子呢？作用于单个物体上的力已经包含着近似了，要是我们有一个论述真实世界的体系，那么这种体系，至少对目前来说，必定包含着某些近似。

这种体系完全不像数学体系那样。在数学中对每个事物都能够下定义，此外我们就不知道在说些什么了。事实上，数学的伟大就在于我们不必说出我们所谈论的是什么东西。此种伟大在于定律、论证和逻辑都与“它”是什么东西无关。如果有另外一组客体，它遵从同样的欧几里得几何公理体系，那么一旦我们作出一些新的定义，并根据它们作正确的逻辑推演，所有的结论都将是正确的，而与所讨论的内容没有关系。然而，在自然界中当我们利用一束光或经纬仪（正如我们

在测量中所做的)来画出或建立一条线时,我们是在欧几里得的几何意义上量度线吗?不,我们是在作一种近似。叉丝有一定的宽度,但是一根几何线并没有宽度。因此,欧几里得几何学是否能用于测量是一个物理问题而不是数学问题。然而,从实验的观点,而不是从数学的观点来看问题的话,我们需要知道欧几里得的定理是否适用于我们丈量土地时所使用的几何。于是我们假定它是适用的,而且非常成功。但是它不是精确的,因为我们测量的线并不是真正的几何线。那些真正抽象的欧几里得线是否适用于实验上的线是一个经验问题;而不是由纯粹的推理可以回答的问题。

同样,既然力学是一门描述自然界的学科,我们就不能仅把 $F=ma$ 称作定义,纯数学地推演一切,把力学变成一门数学理论。在建立了适当的假定后,总是有可能建立一套数学体系,就像欧几里得所作的那样,但是我们不可能建立有关我们这个世界的某种数学,因为迟早我们必定会发现这些公理对于自然界的客体是否正确。因此我们立刻被纠缠入这些复杂的、“玷污了的”自然界的客体中去,而且作出精确度日益增加的近似。

§12-2 摩擦力

前面的考虑表明,要真正领会牛顿定律需要对力进行讨论。本章的目的正是要提出这种讨论使牛顿定律更为完整。我们已经研究了加速度的定义和有关的概念,但是现在我们必须研究力的性质。与前面几章不同,这一章不是非常严谨的,因为力是十分复杂的。

首先从特殊的力开始,我们来考虑作用在空中飞行的飞机上的阻力。这种力遵从什么定律(的确,对每一种力都有一条定律,也一定

得有一个定律)？人们简直想不到这种力所遵从的定律会如此简单。试想一下作用在空中飞行的飞机上的阻力是由什么构成的——冲过机翼的空气，机尾的漩涡，机身周围发生的变化以及许多其他复杂因素。于是你们就认为将不会有一个简单的定律。但是作用在飞机上的阻力近似地等于一个常数乘以速度的平方，或 $F \approx cv^2$ ，则是一个显著的事实。

那么这样一个定律的地位如何呢？它类似于 $F=ma$ 吗？绝对不是。首先，因为这一定律是由风洞试验大致得出的经验公式。你也许会说：“好！ $F=ma$ 也可能是经验的。”那不是两者有所差别的原因。差别不在于它是经验的，而在于就我们所了解的自然界来说，这个定律是事件的错综复杂性的产物，它根本不简单。如果我们研究得越来越深入，测量得越来越精确，这个定律就变得越加复杂，而不是越加简单。换句话说，当我们越来越细致地研究这个飞机阻力的定律时，我们发现它越来越“不真实”，而我们研究得越深入，测量得越精确，真相就变得越加复杂。因此在这种意义上，我们认为它不是由那种简单的基本过程所引起的，与我们原来的推测一致。举例来说，如果速度非常低，低到一般的飞机不能飞行，那么当飞机在空气中被慢慢地拖着前进时，定律就发生变化，这时曳引阻力与速度之间的关系比较接近于线性。再举另一个例子，球、气泡或任意物体在蜂蜜那样的黏稠液体中缓慢地运动时，作用于其上的摩擦阻力同速度成正比。但是当运动速度变快，以致引起液体打漩时（蜂蜜不会打漩，但水和空气会打漩），那么摩擦阻力就更接近于同速度的平方成正比（ $F=cv^2$ ），而如果速度继续增大，甚至这个定律也开始失效。有人说：“这是由于比例系数有了某些改变”，说这些话的人是回避问题。其次，还有其他很复杂之处：作用在飞机上的力是否可以分成或分解为一个作用在机翼上的力，一个作用在机头上的力等等？的确，如果我们考虑的

是作用在这里或那里的力矩的话，是可以这样做的。但这时我们必须找出作用在机翼上等等的力的特殊定律。令人惊异的是，作用于一个机翼上的力与作用于另一个机翼上的力有关。换句话说，如果我们把飞机拆开，只把一个机翼放到空中，这时机翼所受的力与飞机的其余部分都在那里时所受的力是不同的。当然，这是因为有一些冲击机头的风流到机翼周围，改变了作用在机翼上的力。这样一种简单的、粗糙的、经验的定律能够应用于飞机设计中似乎是一个奇迹，但是这个定律与物理学的基本定律不是同一类型的，进一步的研究只会使这种定律越来越复杂。对于系数 c 如何依赖于飞机前缘形状的研究，说得婉转一点，是令人失望的。根据飞机形状来决定系数的简单定律是不存在的。对比之下，万有引力定律是简单的，越是研究就越觉得它是简单的。

刚才我们讨论了物体在空气中快速运动和在蜂蜜里缓慢运动而引起的两种摩擦情况。另外还有一类摩擦，它是当一个固体在另一个固体上滑动时出现的，称为干摩擦或滑动摩擦。在这种情况下，需要有力来维持运动。这种力称为摩擦力，它的起因也是非常复杂的问题。从原子情况来看，相互接触的两个表面是不平整的。它们有许多接触点，在这些接触点上，原子好像黏结在一起，于是当我们拉动一个正在滑动的物体时，原子啪的一下分开，随即发生振动；所发生的情况大致如此。过去，把这种摩擦的机理想象得非常简单：表面只不过布满凹凸不平的形状，摩擦起因于抬高滑动体越过突起部分。但是不可能是这样，因为在这种过程中不会有能量损失，而实际上是要消耗动力的。动力耗损的机理是当滑动体撞击突起部分时，突起部分发生形变，接着在两个物体中产生波和原子运动，过了一会儿，产生热。现在非常出乎意外的是，根据经验这个摩擦再次可以近似地用一个简单的定律来描述。这个定律是：克服摩擦，使一个物体在另一物体上运

动所需的力取决于两个相互接触的表面间的法向力（即同表面垂直的力）。实际上，作为相当好的近似，摩擦力与这个法向力成正比，比例系数近似是常数，即

$$F = \mu N, \quad (12.1)$$

式中的 μ 称为摩擦系数（图12-1）。

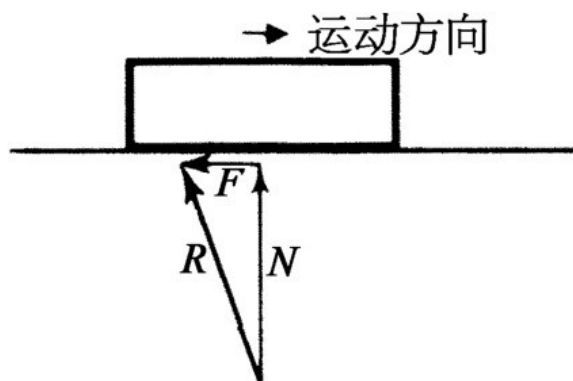


图12-1 接触面相对滑动时的摩擦力与法向力的关系

虽然这个系数不是严格的常数，但是这个公式对于大致判断某些实际或工程学情况中所需力的大小是一个很好的经验法则。如果法向力或运动速度太大，由于产生大量的热，定律就失效。重要的是要认识到每个经验定律都有它的适用范围，超过了这个范围，定律实际上不起作用。

公式 $F = \mu N$ 是近似正确的，这可以用一个简单的实验来验证。取一块平板，使它倾斜一个小角度 θ ，在平板上放置一块重为 W 的木块，然后使平板倾角增大，直到木块由于自身的重量刚好开始滑动。重力沿平板向下的分力是 $W \sin \theta$ ，当木块匀速滑动时，这个分力必须等于摩擦力 F 。与平板垂直的分力是 $W \cos \theta$ ，这个力就是法向力 N 。代入这些值后，公式变成 $W \sin \theta = \mu W \cos \theta$ ，由此我们得到 $\mu = \tan \theta$

$1/\cos\theta = \tan\theta$ 。如果这个定律是绝对正确的，在某个一定的倾角，物体就开始下滑。如果在同一木块上再增加一些重量，这时虽然 W 增大，但是公式中的各个力都按相同的比例增加， W 被消去了。如果 μ 保持不变，则加重的木块将再次在同样的斜度时下滑。当我们用原先的重物做试验，确定角度 θ 时，可以发现，比较重的木块将以大致相同的角度下滑，甚至当一个重物比另一重物大很多倍时，上述规律仍然正确。于是我们得出结论：摩擦系数与重量无关。

在做这个实验时，值得注意的是，当平板倾斜到约为正确的角度 θ 时，木块并不平稳地滑动，而是以断断续续的方式下滑。在某个地方它可能停住，在另一个地方它可能作加速运动。这个现象表明，摩擦系数仅仅大致上是常数，在平板上不同的地点摩擦系数是不同的。不论木块上加重物或不加重物都观察到同样的古怪现象。这些变化是由平板的不同平滑度或硬度引起的，也可能是污物、氧化物或其他外来物质引起的。表中列出的所谓钢与钢、铜与铜等的 μ 值全都是不可信的，因为它们忽略了上述那些真正决定 μ 值的因素。摩擦决不是由于“铜与铜”等等引起的，而是由于黏附到铜上的杂质所引起的。

在上述这类实验中，摩擦几乎与速度无关。很多人认为，使物体起动所需克服的摩擦力（静摩擦）大于保持物体滑动所需的力（动摩擦）。但是用干燥金属很难显示出有什么差别。这种见解可能是由于这样的经验引起的：存在着极少量油或润滑剂，或者木块被弹簧或其他易形变的支座撑起以至于看起来好像是结合在一起的。

尽管有大量精确分析的工程数据，要做精确的定量摩擦实验仍然是非常困难的，并且摩擦定律也还没有被人们很好地分析过。虽然，只要表面经受标准处理，定律 $F = \mu N$ 是相当精确的，但是对于定律具有这种形式的原因还没有真正弄清楚。要证明摩擦系数 μ 几乎与速度

无关需要一些巧妙的实验方法，因为如果下表面快速振动，表面摩擦就要大大减少。当在非常高的速度下进行这项实验时，必须注意物体彼此之间不能有振动，因为在高速情形下摩擦明显减小常常是由振动引起的。无论如何，摩擦定律是又一个半经验定律，这些半经验定律还没有被我们完全认识。而且，奇怪的是从我们做过的所有研究来看，对这些现象仍然没有进一步理解。实际上，目前甚至要估计一下两个物体之间的摩擦系数也是不可能的。

上面曾经指出，企图用纯的物体如铜在铜上面的滑动来测量 μ 将得出虚假的结果。因为接触的表面不单纯是铜，而是氧化物和其他杂质的混合物。如果我们想要得到绝对纯的铜，即使清洗和抛光表面，在真空中对材料除气，并且采取各种可能想到的预防措施，我们还是不能测得 μ 。因为即使我们把装置倾斜到垂直位置，滑块仍不下落——两片铜粘在一起了！对一般硬度的表面来说，摩擦系数 μ 通常比1小，而这时 μ 变得比1大上好几倍！出现这种意想不到的现象的原因是当相互接触的原子全都是同一种原子时，这些原子无法“知道”它们是在不同的铜片上的。当原子存在于其他氧化物、油脂和更复杂的玷污物的薄表面层时，原子就“知道”它们不是在同一部分。当我们考虑到正是原子之间的力把铜原子结合在一起成为固体的时候，就会明白，对纯金属是不可能得出正确的摩擦系数的。

在用一块平玻璃板和一只玻璃杯做的简单的家庭实验中也能够观察到同样的现象。如果把玻璃杯放在平板上，并用一根绳子拉它，它将在平板上很好地滑动，人们能够感觉到摩擦系数，这个系数虽然有点不规则，但毕竟是一个系数。如果我们现在把玻璃板和玻璃杯底弄湿，重新再拉，就会发现杯子粘住了。如果仔细看一下，将会发现划痕，因为水能够从表面除去油脂和其他玷污物，这样我们才真正得到

玻璃与玻璃的接触。这种接触是如此牢固，以至于使它们黏紧在一起，不再分离，结果玻璃被撕裂，也就是说造成了划痕。

§12-3 分子力

接下来我们将讨论分子力的特征。这些力是原子之间的力，也是摩擦的根本起因。在经典物理学的基础上，分子力从来没有得到满意的解释；只有用量子力学才能充分理解它们。然而，根据经验，原子之间的力可用图12-2来说明。

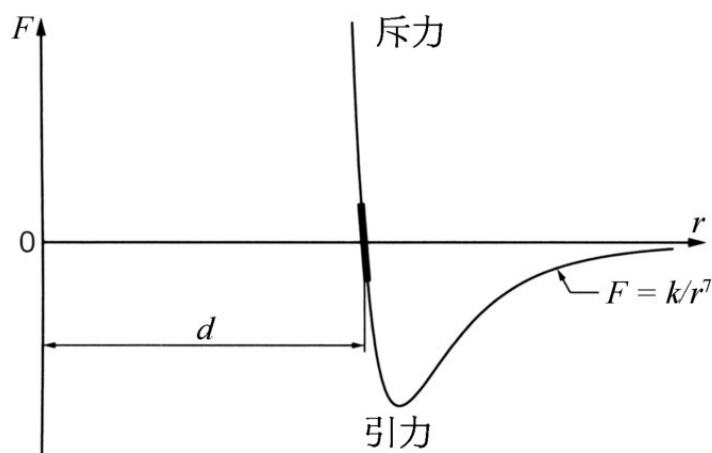


图12-2 两个原子之间的力与其距离的函数关系

图中将两个原子之间的力 F 作为两个原子之间的距离 r 的函数。同时，还存在着不同的情况：例如在水分子中氧带有较多负电荷，所以负电荷和正电荷的平均位置不在同一点上，结果附近的另一个分子感受到比较大的力，这个力称为偶极-偶极力。然而，对许多系统来说，电荷平衡得非常好，特别是氧气，它是完全对称的。在这种情况下，虽然负电荷和正电荷散布在整个分子中，但是这种分布使正、负电荷的中心重合。正、负电荷中心不重合的分子称为极性分子，电荷与电

荷中心间距离的乘积称为偶极矩。非极性分子是一种电荷中心重合的分子。对于所有非极性分子（其中所有的电力都被中和），在较大距离上的作用力仍然是引力，而且与距离的7次方成反比，即 $F=k/r^7$ ，式中 k 是一个取决于分子的常数。只有当我们学到量子力学时才会懂得为什么是这样的。当有偶极子存在时，力就增大。当原子或分子靠得太近时，它们以很大的斥力相互排斥；正是这个力使得我们不会落到地板下面去！

这些分子力可以用一种相当直接的方式来演示：用一只滑动的玻璃杯做的摩擦实验就是方法之一，另一种方法是取两个经过非常仔细研磨和十分平整的平面，使之紧密地贴合在一起。约翰逊（Johansson）平板就是这种平面的一个实例。机床厂里常用它作为精确的长度测量的标准。如果一块这样的平板在另一块平板上非常小心地滑动，然后提起上面一块平板，由于分子力的作用，另一块平板将会粘在上面一块平板上并跟着被提起。这是一块平板上的原子对另一平板上的原子之间直接吸引的例证。

但是按照引力是基本的这个意义来说，这种分子吸引力还不算是基本的，它们是由一个分子中所有的电子和核与另一个分子中所有的电子和核之间的大量极其复杂的相互作用所引起的。我们得到的任何一个看起来简单的公式都是相当于复杂因素的总和，因此我们仍旧没有弄清楚基本的现象。

因为分子力在距离大时吸引，距离小时排斥，如图12-2所示，我们可以这样来形成固体，其中所有的原子依靠吸引力的作用结合在一起，而当原子靠得太近时，斥力就开始起作用使它们分开。在某一距离 d 处（图12-2中的曲线与轴相交的地方），作用力为零，这意味着

所有的力都被平衡，因此分子与分子之间保持着这个距离。如果将分子推进到比距离 d 更近，分子就相互排斥，这就是 r 轴上方的曲线所表示的情况。要想把分子稍微推进一点就需要用很大的力，因为当距离小于 d 时，分子斥力迅速增大。如果分子被稍微拉开一点，就要有一点引力，引力随拉开的距离的增大而增加。如果分子被很大的力所拉开，它们将永远分开——键被拉断了。

如果分子相对于距离 d 仅被推进或拉开一段很小的距离，那么在图12-2曲线上相应移动的距离也是很小的，于是可以近似地用一条直线来表示。因此，在很多情况下，如果位移不是很大，力就与位移成正比。这条原理就是众所周知的胡克定律或弹性定律。此定律表明：当物体形变时，物体中试图恢复原状的力与形变的大小成正比。当然，此定律仅当形变较小时才是有效的。当形变太大时，物体将破裂或者被压碎，视形变的性质而定。为了使胡克定律成立，力的数值要有一定范围，它取决于材料的性质；例如，对面粉团或油灰来说，这个力是非常小的；但是对于钢，这个力就比较大。用一条垂直悬挂的钢制长螺旋弹簧可以很好地演示胡克定律。在弹簧的下端挂上适量的重物，可以使各处都产生很小的扭转，结果在每一匝中都引起一个小的垂直偏转，如果匝数很多，加起来就成为一个大的位移。比如说，如果测量100 g重物产生的总伸长，可以发现，每增加100 g重物将会产生一段附加伸长，它与相对于第一个100 g重物测得的伸长量几乎相等。当弹簧过载时，力与位移的这种定比关系开始变化，也就是说胡克定律不再有效。

§12-4 基本力、场

下面我们来讨论唯一剩下的基本力。我们把它们称做基本力，是由于它们遵从的定律从根本上说是简单的。我们将首先讨论电力。物体带有的仅由电子或质子组成的电荷。如果任何两个物体带上电荷，那么在它们之间就存在电力。如果电荷的大小分别是 q_1 和 q_2 ，那么电力与两个电荷之间的距离的平方成反比，即 $F = (\text{常数}) q_1 q_2 / r^2$ 。对于异号电荷，这一定律与万有引力定律相似，但是，对于同号电荷，这个力是斥力，符号（方向）相反。本质上，电荷 q_1 和 q_2 可以是正的或负的。在公式的具体应用中，只要给予 q 以适当的正、负号就能得出力的正确的方向。力的方向沿着两个电荷的连线。当然，公式中的常数取决于力、电荷和距离所用的单位。通常，在实际应用中，电荷的单位是库仑（C），距离的单位是米（m），力的单位是牛顿（N）。为了使力恰好以牛顿为单位，常数（由于历史原因，这个常数被写成 $1/4\pi\epsilon_0$ ）的值取

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

或

$$1/(4\pi\epsilon_0) = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}.$$

因此，静止电荷的作用力的定律为

$$\mathbf{F} = q_1 q_2 \mathbf{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3). \quad (12.2)$$

在自然界中，所有电荷中最重要的是单个电子的电荷，它的电量为 $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。在研究基本粒子之间的电力而不是研究大的电荷时，许

多人宁可用 $(q_{el})^2 / (4\pi\epsilon_0)$ 这种组合，其中 q_{el} 规定为电子的电荷。这种组合是经常出现的，为了简化计算，用记号 e^2 表示；在国际单位制中，它的数值是 $(1.52 \times 10^{-14})^2$ 。采用这种形式常数的好处是，两个电子之间的力，用牛顿作为单位时可以简单地写成 e^2 / r^2 ；其中 r 的单位用米来表示，而不需要很多单独的常数。电力比这个简单公式所表示的要复杂得多，因为公式所给出的仅仅是当两个物体处于静止时，它们之间的力。接下去我们将讨论较普遍的情况。

在分析比较基本的一类力（不是像摩擦力，而是电力或引力之类的力）时形成了一种有趣的、非常重要的概念。因为乍看起来，力比反平方定律所指出的要复杂得多，而这些定律仅当相互作用物体处于静止时才成立，所以需要一种改进的方法来处理当物体开始以一种复杂的方式运动时所产生的非常复杂的力。经验表明，用所谓“场”的概念这种方法，对于分析这种类型的力是非常有用的。比如说，以电力为例来说明这个概念，假定我们有两个电荷 q_1 、 q_2 分别位于 P 点和 R 点。那么两个电荷之间的力为

$$\mathbf{F} = q_1 q_2 \mathbf{r} / 4\pi\epsilon_0 r^3. \quad (12.3)$$

如果用场的概念来分析这个力，我们说 P 处的电荷 q_1 在 R 处产生了一种“状况”，而当电荷 q_2 被置于 R 处时，它就“感受”到这个作用力。这是一种描写力的方法，或许是奇特的。我们说，作用在 R 处电荷 q_2 上的力 $\mathbf{F}$ 可以写成两部分。力等于电量 q_2 乘以一个量 $\mathbf{E}$ ，不管有没有电荷 q_2 ， $\mathbf{E}$ 都应当是存在的（只要我们将所有其他的电荷都保持在原来的位置上）。我们说 $\mathbf{E}$ 是由 q_1 产生的“状况”， $\mathbf{F}$ 是 q_2 对于

$\mathbf{E}$ 的响应。 $\mathbf{E}$ 叫做电场，它是一个矢量。由 P 处电荷 q_1 在 R 处产生的电场 $\mathbf{E}$ 的公式是电荷 q_1 乘以常数 $1/(4\pi\epsilon_0)$ 除以 r^2 (r 是 P 到 R 的距离)，它作用于沿矢径的方向（矢径 $\mathbf{r}$ 除以它自身的长度），因此 $\mathbf{E}$ 的表示式为

$$\mathbf{E} = \frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.4)$$

这样，我们就把力、电场和电场中电荷的关系式写成

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}. \quad (12.5)$$

这样做的要点是什么？要点就是把分析分成两部分。一部分说，某物产生了一个场。另一部分说，某物受到场的作用。由于可以独立地看待这两部分，把分析分成这两部分在许多情况中简化了问题的计算。要是有许多电荷存在，我们可以先算出由所有电荷在 R 处产生的总电场，然后只要知道放在 R 处的电荷，我们就能求出作用在该电荷上的力。

对于引力的情形，我们完全可以同样处理。在这种情形下，力 $\mathbf{F} = -Gm_1 m_2 \mathbf{r}/r^3$ 。我们可以作如下的类似分析：引力场中的物体所受的力等于物体的质量乘以引力场 $\mathbf{C}$ 。 m_2 所受的力等于 m_2 的质量乘以由 m_1 所产生的场 $\mathbf{C}$ ；即 $\mathbf{F} = m_2 \mathbf{C}$ 。质量为 m_1 的物体所产生的场 $\mathbf{C} = -Gm_1 \mathbf{r}/r^3$ ，它的方向与电场的情况一样沿着径向。

不管初看起来如何，这种把一部分与另一部分分开的方法并不是微不足道的。如果力的定律真是简单的，它就没什么价值（只不过用

另一种方法来写出同一件事情)，但是力的定律是如此复杂，以至于结果表明场具有几乎与产生它们的物体无关的实在性。人们可以做某种事情，例如使电荷保持运动，于是在一定距离处产生一种效应——场；然而，如果电荷停止运动，场记录着过去所有的情况，因为两个粒子之间的相互作用不是瞬时的。我们希望有某种方法记住以前所发生的事情。如果某电荷所受的力取决于另一个电荷昨天所在的位置以及它当时的行为，那么我们就需要一种机构来记录昨天发生的事情，这就是场的特征。因此，当力变得越复杂，场就变得越来越真实，而这种分离技巧的人为性也就越来越少。

用场来分析力时，我们需要用到有关场的两种定律。第一种是对场的响应，它给出了运动方程。例如，质量对引力场的响应定律为：力等于质量乘以引力场；或者，如果物体还带有电荷，电荷对于电场的响应等于电荷乘以电场。对这些情况的性质的第二部分分析是把场的强度以及它是如何产生的规律用公式表示出来。有时，把这些定律称为场方程。在适当的时候，我们将更深入地学习场方程，这里我们只写出几点有关的内容。

第一，一切事实中最为惊人的是，由若干源产生的总电场是由第一个源、第二个源等等产生的电场的矢量和，这是完全确实而又容易理解的。换句话说，如果有许多电荷产生一个场，则其中的一个电荷独自产生的电场为 $\boldsymbol{E}_1$ ，另一个电荷独自产生的电场为 $\boldsymbol{E}_2$ 等等。那么，只要把所有的矢量加起来就得到了总电场。这个原理可以表示成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \dots, \quad (12.6)$$

或者，根据上面给出的定义

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3}. \quad (12.7)$$

同样的方法适用于引力吗？牛顿把两个物体 m_1 和 m_2 之间的力表示成 $\mathbf{F} = -Gm_1 m_2 \cdot \mathbf{r} / r^3$ 。但是按照场的概念，我们可以说物体 m_1 在其周围空间产生了引力场 $\mathbf{C}$ ， m_2 所受的力则由

$$\mathbf{F} = m_2 \mathbf{C} \quad (12.8)$$

给出。同电场的情况完全类似

$$\mathbf{C}_i = -\frac{Gm_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}. \quad (12.9)$$

由几个物体产生的引力场为

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 + \dots \quad (12.10)$$

在第9章中计算行星运动情况时，实质上我们已经应用了这一原理。我们正是把所有的力矢量加起来以得到作用在一个行星上的合力。要是约去该方程中行星的质量，我们就得到式（12.10）。

式（12.6）和（12.10）表示的就是所谓场的叠加原理。这个原理说明，由所有的源产生的总的场等于由每一个源产生的场之和。就我们目前所知，对于电学这是一个绝对保证的定律。甚至由于电荷运动而使力的定律变为复杂时，这个定律仍然正确。有一些表面上的反例，但只要再仔细分析一下，总会发现这是由于忽略了某些运动电荷。然而，虽然叠加原理完全适用于电力，但是对于很强的引力场，

叠加原理不完全正确。按照爱因斯坦的引力场理论，牛顿方程式（12.10）仅是一种近似。

与电力紧密相关的另一类力称为磁力，这种力也是用场来进行分析的。电力和磁力之间的一些定性关系可以用一个电子射线管（图12-3）的实验来说明。电子射线管的一端是一个发射电子流的源。在管子里面有一套装置把电子加速到很高的速度，并聚焦成很窄的电子束再送到管子另一端的荧光屏上。在荧光屏的中央，电子打到的地方发出一个亮的光点，这样我们就能够跟踪电子的径迹。在射向荧光屏的途中，电子束穿过一对水平放置的平行金属板中间的窄缝。两块金属板上可以加上电压，因此可以随意成为带负电的。当加上电压时，两块金属板之间就产生一个电场。

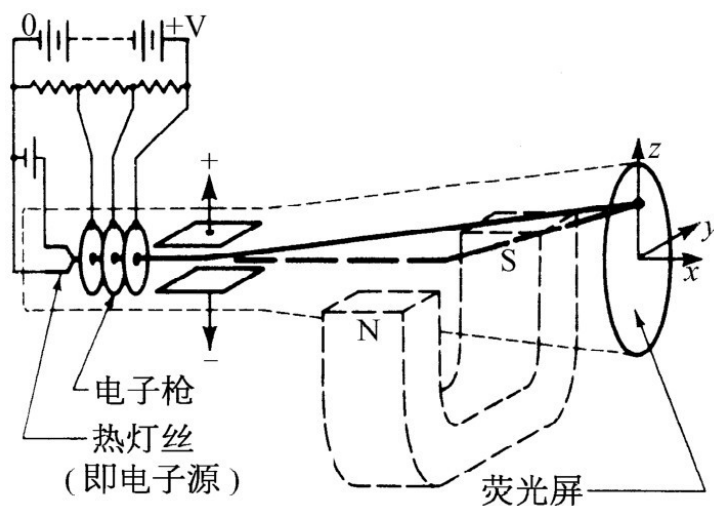


图12-3 电子束管

实验的第一部分是给下极板加上负电压，这意味着把额外的电子放到下极板上。由于同种电荷相互排斥，荧光屏上的光点立即向上移动（我们也可以用另一种方式来表明——电子“感受”到场，并以向上偏转作为响应）。接着，我们把电压极性反过来，使上极板为负。现

在，荧光屏上的光点跳到中心之下，这表明电子束中的电子受到上极板中电子的排斥（或者我们又可以说电子对场作出响应，现在是在相反的方向上）。

实验的第二部分是切断极板上的电压，试验磁场对电子束的影响。这一步是用一个马蹄形磁铁来进行的，磁铁的两极分得足够开，可以或多或少地跨立在管子上。假定我们把磁铁以字母U那样的取向放到管子下面，两极向上，使管子的一部分位于磁极之间。我们看到光点偏转了，比如说，当磁铁从下方趋近管子时，光点就向上偏转。这样看来好像是磁铁排斥电子束。然而事情并不那样简单，如果我们把整个磁铁倒转过来，但磁极的位置并不对调，那么从上方趋近管子，光点还是向上移动。由此看来，电子束不是受到排斥；相反，好像是受到吸引。现在，我们从头开始，把磁铁恢复到原来的U形取向，并把它放在管子下方。没有错，光点还是向上偏转。现在将磁铁绕垂直轴旋转 180° ，这样，磁铁仍处于U形位置，但两个磁极的相对位置颠倒了。瞧！现在光点跳向下方，并停在下方，即使像前面那样把磁铁倒转过来，从上方趋近管子，光点还是停在下方。

要理解这种独特的行为，我们必须有一种新的力的组合，因此，我们把它解释为：在磁铁的两极之间存在着磁场。这种场是有方向性的，其方向总是由一特定的极（我们可以标上记号）出发，指向另一极。将磁铁倒转过来并不改变场的方向，但是将一磁极相对另一磁极颠倒一下就使场的方向变得相反。举例来说，如果电子速度沿 x 方向是水平的，则磁场也是水平的，但在 y 方向上，作用于运动电子上的磁力应在 z 方向上，即向上或向下，取决于磁场是在正 y 方向还是负 y 方向。

尽管目前我们不准备介绍彼此以任意方式相对运动的带电物体之间力的正确定律，但因为定律太复杂，我们将介绍它的一个方面：如果场是已知时力的完整定律。作用在带电物体上的力取决于它的运动；如果物体在一给定位置上停止不动时，有某个力作用着，则这个力与电荷量成正比，比例系数就是我们所谓的电场。当物体运动时，力就不同了，我们发现其修正项，即新的“一份”力严格线性地取决于速度，并与 $\mathbf{v}$ 和另一个我们称为磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的矢量正交。如果电场 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的分量分别为 (E_x, E_y, E_z) 和 (B_x, B_y, B_z) ，速度 $\mathbf{v}$ 的分量为 (v_x, v_y, v_z) ，那么作用在运动电荷 q 上总的电磁力的分量为

$$\begin{aligned} F_x &= q (E_x + v_y B_z - v_z B_y), \\ F_y &= q (E_y + v_z B_x - v_x B_z), \\ F_z &= q (E_z + v_x B_y - v_y B_x). \end{aligned} \quad (12.11)$$

举例来说，如果仅有磁场分量 B_y 和速度分量 v_x ，那么磁力项中留下的只有 z 方向的力，它与 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{v}$ 两者正交。

§12-5 膺力

下面，我们将讨论的这一类力可以称为膺力。在第11章中，我们讨论了使用不同坐标系的乔和莫两个人之间的关系。我们假定，粒子的位置由乔测得的是 x ，由莫测得的是 x' ；于是定律如下所示

$$x = x' + s, \quad y = y', \quad z = z',$$

式中 s 是莫的坐标系相对于乔坐标系的位移。如果我们假定，运动定律对于乔是正确的，那么定律在莫看来又如何呢？首先，我们发现

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{ds}{dt}.$$

前面，我们考虑了 s 是常量的情况，我们发现 s 对运动定律毫无影响，因为 $ds/dt=0$ ；因此，最终物理定律在两种坐标系中是相同的。但是我们可以取的另一种情况是 $s=ut$ ，式中 u 是沿直线运动的均匀速度，于是 s 不是常量， ds/dt 就不为零，但等于一个常数 u 。然而，加速度 d^2x/dt^2 仍然与 d^2x'/dt^2 相同，因为 $du/dt=0$ 。这就验证了我们在第10章中所使用的定律，即如果我们沿直线以均匀速度运动，则我们所看到的物理定律与处于静止时相同。这就是伽利略变换。但是，我们希望讨论 s 的更加复杂的有趣情况，比如说 $s=at^2/2$ 。于是 $ds/dt=at$ ，而 $d^2s/dt^2=a$ ，一个均匀加速度；或者更复杂一些，加速度可以是时间的函数。这就意味着，虽然从乔的观点来看运动定律应为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x,$$

而从莫看来则应是

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_{x'} = F_x - ma.$$

也就是说，由于莫的坐标系相对于乔的坐标系是加速的，因此出现了额外项 ma ，而莫就必须用这个量来修正他的力，以便使牛顿定律继续有效。换句话说，这是一个明显的、起源不明的神秘的新力，当然它的出现是因为莫使用了不正确的坐标系。这是赝力的一个例子；其他的例子出现在转动的坐标系中。

赝力的另一个例子是通常所谓的“离心力”。在转动坐标系中，例如一个旋转的箱子中的观察者在把东西抛向墙壁时，将会发现一种神秘的力，这个力用任何已知起源的力都解释不了。这些力的出现，只是由于观察者不具备牛顿坐标系这个事实，而牛顿坐标系是最简单的坐标系。

赝力可以通过一个有趣的实验来说明，在这个实验中，我们拖一桶水沿着一张桌子加速前进。当然，作用在水上的重力方向向下，但是由于水平方向的加速，也有一个水平作用着的赝力，方向与加速度方向相反。重力与赝力的合力与垂直方向成一角度，在加速运动期间，水的表面将与合力垂直，即与桌面倾斜成一角度，在桶的后面部分水面将高起一些。当我们不再拖水桶时，由于摩擦而使桶减速运动（赝力变换了方向），桶前面部分的水将高起一些（图12-4）。

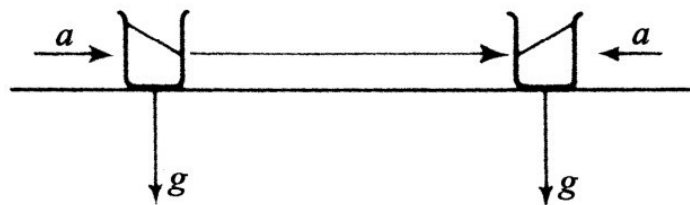


图12-4 赝力的实例

赝力的一个非常重要的特征是，它们永远与质量成正比；重力也是这样。因此，有可能重力本身就是一种赝力。或许简单地说，引力

就是由于我们没有正确的坐标系而引起的，这难道是不可能的吗？归根到底，如果我们设想一个物体正在加速，那么我们总可以得到一个与质量成正比的力。例如，一个关闭在箱子里的人（箱子静止放在地球上），就会发现有一个力使他待在箱子的地板上，这个力与他的质量成正比。但是如果根本没有地球，而箱子静止不动，那么箱子里的人就会漂浮在空中。另一方面，如果根本没有地球，而是有某个东西将箱子以加速度 g 向上拉，那么箱子里的人在分析物理现象时，应当发现一个惯性力，这个力就像重力那样把人拉向地板。

爱因斯坦提出了著名的假设，加速度产生引力的惯性物，加速度的力（惯性力）与引力是不可能区分的；要说出给定的力中有多少是重力，有多少是惯性力是不可能的。

把重力看作惯性力，比如说我们都保持向下是由于我们在向上加速，这似乎没有问题，但是在地球另一边的马达加斯加人会怎样呢？——他们也在加速吗？爱因斯坦发现，每次只有在一个点上才可以把重力同时看成惯性力，根据这个考虑，他认为世界的几何性要比普通欧几里得几何复杂得多。我们现在的讨论仅仅是定性的，并不想涉及超出一般概念之外的东西。为了对引力怎么会是惯性力的结果有个大致的概念，我们来作一个纯粹是几何的，并不代表真实情况的说明。假定，我们大家都在二维空间中生活，对三维空间毫无所知。我们只认为，我们处在一个平面上，但是假定我们实际上处在一个球的表面上。再假定我们沿地面发射出一个物体，物体上没有力作用着。它将到哪儿去呢？看来它似乎沿直线运动，但是必须仍处在球的表面上，球面上两点之间的最短距离是沿着一个大圆的；于是它就沿大圆运动。如果我们同样地发射另一个物体，但沿另一方向，它就沿另一大圆运动。因为我们认为，我们是处在一个平面上，可以预期，这两个

物体之间的距离将随时间线性地增加，但经过仔细观察将会发现，如果两个物体运动得足够远，那么它们又会互相接近，仿佛相互吸引。但是它们并不相互吸引——关于这种几何学真是有点“古怪”。这个特定的例子并没有正确地描述爱因斯坦几何学“古怪”在哪里，但是它说明，如果我们使几何形状充分畸变，那么所有的引力以某种方式与赝力联系起来是可能的；这就是爱因斯坦引力理论的一般观念。

§12-6 核力

作为本章的结束，我们简短地讨论一下仅有的另外一些已知的力，即所谓的核力。这些力存在于原子核的内部，尽管对它们进行了充分的讨论，但没有一个人曾经计算过两个原子核之间的力，甚至到目前还没有关于核力的已知定律。这些力的作用范围极小，差不多与原子核的大小（大约是 10^{-13} cm）相同。对于这样小的粒子，再加上作用距离又是如此微小，只有量子力学的定律才是正确的，牛顿定律就失效了。在核分析中，我们不再用力来思考，事实上我们可以用两个粒子的相互作用能的概念来代替力的概念，这一课题将在以后进行讨论。关于核力，能够写出的任何公式都是忽略了许多复杂情况的相当粗糙的近似；其中之一可以表述如下：在原子核之内的力并不随距离的平方反比变化，而是在一定距离 r 之后指数地衰减掉，用公式表示，即 $F = (1/r^2) \exp(-r/r_0)$ ，式中距离 r_0 的数量级是 10^{-13} cm。

换句话说，粒子相隔距离稍大一些，力就消失了，虽然这些力在 10^{-13} cm范围内是非常强的。就今天对核力的理解而言，它的定律是非常复杂的；我们不能以简单的方式去理解它们，因而分析核力背后的基本

机理的整个问题仍未解决。在试图解决这个问题过程中，发现了许多奇异粒子，例如 π 介子，但是这类力的起因仍然不清楚。

[1] 此名称系作者根据“Force（力）”杜撰。——译者注

第13章 功与势能（上）

§13-1 落体的能量

在第4章中我们讨论过能量守恒。那里，我们没有引用牛顿定律，但是，按照牛顿定律，能量实际上是守恒的。我们来看一看能量守恒如何与牛顿定律相符合是很有意义的。为了清楚起见，我们从最简单的实例开始讨论，然后逐步推广到比较难的例子。

能量守恒最简单的例子是一个垂直下落的物体，它只在垂直方向上运动。一个仅仅在重力作用下改变高度的物体，由于下落运动而具有动能 T （或K.E.），并且还具有势能 mgh ，简写成 U （或P.E.）。这两种能量的总和是恒量

$$\frac{1}{2} \underset{\text{K. E.}}{mv^2} + \underset{\text{P. E.}}{mgh} = \text{恒量}$$

或

$$T+U=\text{恒量}. \quad (13.1)$$

现在我们要证明这一表述是正确的。我们说“证明这一表述是正确的”是什么意思呢？从牛顿第二定律我们很容易说明物体如何运动，而且容易求出速度如何随时间而变化——速度的增加与时间成正比，高度随时间的平方而改变。所以，假若我们以物体静止的那个位置作为零

点来测量高度，那么，高度等于速度的平方乘以一些常数就不足为奇了。不管怎样，我们还是来稍微仔细地看一下这个问题。

我们将动能对时间求微商，然后应用牛顿定律直接从第二定律求出动能是如何变化的。我们把 $mv^2/2$ 对时间求微商，由于假设 m 是常数，故得

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}m \cdot 2v \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dt}, \quad (13.2)$$

但由牛顿第二定律， $m (dv/dt) = F$ ，所以

$$\frac{dT}{dt} = Fv. \quad (13.3)$$

一般地讲，结果应该是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ，但在一维情况下我们只要写成力乘以速度就够了。

在我们的简单例子中，力是常数，等于 $-mg$ ，即一个垂直向下的力（负号的意思是指作用向下），而速度当然是垂直位置（或高度）对时间的变化率。这样，动能的变化率就是 $-mg (dh/dt)$ ，非常奇怪，这个量是另外的物理量的变化率的负数，它是 mgh 的时间变化率的负数！因此，随着时间的推移，动能的变化在数量上等于 mgh 的变化，而符号相反；所以，这两个量的总和保持不变，证明完毕。

从牛顿第二定律我们已经证明，在恒力的情况下如果将势能 mgh 与动能 $mv^2/2$ 加在一起，则能量是守恒的。现在我们进一步看一下是否能将它推广，以加深我们的理解。能量守恒定律是否只对自由落体适用，还是可以适用于更一般的情况？根据对能量守恒的讨论，我们

预计它对一个物体在重力作用下沿一曲线无摩擦地从一点运动到另一点的情形也是成立的（图13-1）。

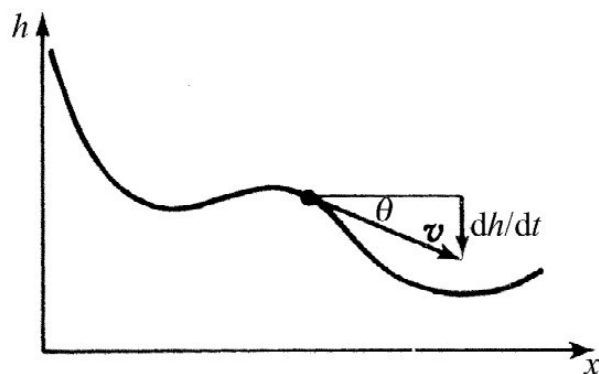


图13-1 物体在重力作用下在一无摩擦的曲线上的运动

如果物体从原来的高度 H 到达某一高度 h ，即使速度不再是沿垂直方向，上述方程仍然应当成立。我们要搞清楚为什么这条定律仍然正确。下面我们用同样的分析方法求出动能的时间变化率。诚然，动能的时间变化率仍是 $mv \left(dv/dt \right)$ ，而 $m \left(dv/dt \right)$ 则是动量大小的变化率，也就是运动方向上的力——切向力 F_t 。于是有

$$\frac{dT}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = F_t v.$$

这里的速率是沿着曲线的距离对时间的变化率 ds/dt ，但切向力 F_t 不是 $-mg$ ，而是随垂直的距离 dh 与沿路径的距离 ds 的比率而减弱，换句话说

$$F_t = -mg \sin \theta = -mg \frac{dh}{ds},$$

所以

$$F_t \frac{ds}{dt} = -mg \left(\frac{dh}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) = -mg \frac{dh}{dt}.$$

因为 ds 被消掉了，于是我们就得到 $-mg \left(dh/dt \right)$ ，与前面所证明的一样，它等于 $-mgh$ 的时间变化率。

为了确切地理解能量守恒定律一般在力学中是怎样起作用的，我们来讨论几个有助于分析这个问题的概念。

首先我们讨论三维情况下一般的动能变化率。在三维空间的动能是

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

把它对时间求微商，我们得到三个项

$$\frac{dT}{dt} = m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right). \quad (13.4)$$

但 $m \left(dv_x/dt \right)$ 是沿 x 方向作用在物体上的力 F_x ，于是式（13.4）的右边就是 $F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$ 。回忆一下矢量分析，我们记得这就是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ，因此有

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (13.5)$$

这个结果从下面的方法能够更快地推导出来：假如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是两个矢量，它们都可以与时间有关，对 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 求微商，一般有

$$\frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{dt} = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b}. \quad (13.6)$$

把这个关系式用到 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$ 的情形

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right)}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}. \quad (13.7)$$

由于动能概念以及一般的能量概念很重要，所以在这些方程式中的一些重要项使用了各种名称。正如我们所知道的那样， $mv^2/2$ 称为动能， $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 称为功率，作用于物体上的力乘以物体的速度（矢量点积）是力传递给物体的功率。这样，我们就有了一个奇妙的定理：一个物体动能的变化率等于作用于该物体的力所消耗的功率。

然而，为了研究能量守恒，我们打算对它作进一步的分析。让我们估计一下在很短的时间 dt 内动能的变化。假若在式（13.7）两边都乘以 dt ，我们得到的动能的微小变化等于力“点乘”移动的距离元

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (13.8)$$

若对其积分，我们得到

$$\Delta T = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (13.9)$$

这是什么意思呢？它的意思是：如果一个物体在力的作用下在某弯曲的路径上以任何方式运动，则当它沿着此曲线从一点移动到另一点时，动能的变化率等于沿着曲线的分力乘以位移元 $d\mathbf{s}$ 的积分，积分从

该点积到另一点。这个积分也有一个名称——叫做作用于物体的力所做的功。我们立即可以看到：功率等于每秒钟所做的功。我们也可以看到：仅仅是力在运动方向的分量对功有贡献。在我们的简单例子中，只有垂直方向的力，且只有单一的分量 F_z ，它等于 $-mg$ 。不管物体在这些情况下如何运动，例如沿抛物线下落，总可以把 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 写成 $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ ，但除了 $F_z dz = -mg dz$ 之外其他都没有了，因为力的其他分量都是零。由此，在我们的简单情况下有

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1), \quad (13.10)$$

所以我们又一次得到：在势能中只考虑物体下落的垂直高度。

现在我们来讲一讲单位。因为力以牛顿来量度，为了得到功，我们要乘上距离，所以功以牛顿米（ $\text{N} \cdot \text{m}$ ）来量度，但人们不喜欢说牛顿米，而宁可说焦耳（ J ）。 $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ 称为 1 J ；功是以焦耳来量度的。功率的单位是焦耳每秒，也叫瓦（ W ）。如果瓦乘以时间，就是所做的功。从技术上讲，电力公司对我们家庭所做的功，等于瓦乘以时间。千瓦小时就是这样得来的， $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 就是 $1\,000 \text{ W}$ 乘以 $3\,600 \text{ s}$ ，或 $3.6 \times 10^6 \text{ J}$ 。

现在我们再举一个能量守恒的例子。考虑一个具有初始动能、快速运动的物体，它克服地板的摩擦而滑动，最后停了下来。开始滑动时动能不等于零；而最后停止时动能为零；是力做了功，因为每当有摩擦时，在与运动相反的方向上就存在分力，所以运动物体的能量不断地损耗掉。现在我们在支点的末端放置一个小质量的物体，使它在重力场中在垂直平面内无摩擦地振动。这时发生的现象就不同了，因为当物块向上运动时力向下，而当物块朝下运动时力亦朝下；所以，

向上时 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 的符号不同于向下时的符号。向上和向下路径上每个对应点的 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 数值大小完全相等，而符号相反，所以在这种情况下积分的净结果是零。于是，物块返回到底部的动能与前一次离开底部时的动能是一样的；这就是能量守恒原理（注意，当存在摩擦时，乍看起来能量守恒似乎失效。我们不得不寻找其他形式的能量。事实表明，一个物体与另一物体摩擦时产生了热，暂时我们假定并不知道这些事）。

§13-2 万有引力所做的功

下面所讨论的问题要比上面的难得多；不像我们已经讨论过的那样，这里的力不是恒量，也不只是在垂直方向上。例如，我们想要讨论一个围绕太阳运动的行星，或者在空中围绕地球运转的卫星。

我们首先讨论一个物体从某点1开始，比方说直接落向太阳或地球（图13-2）。在这种情况下能量守恒定律还适用吗？此时，唯一的差别是力随着物体的运动而变化，它不是恒量。正如我们所知道的，这个力是 GM/r^2 乘以质量 m ，其中 m 是运动物体的质量。确实，当物体落向地球时，动能随下落的距离的增大而增加，恰如力不随高度而变化那种情况一样。问题在于：是否可能找到另一个不同于 mgh 的势能公式，即离地球的距离的函数，使得能量守恒仍然是正确的。

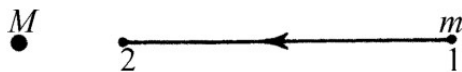


图13-2 在重力作用下小质量 m 的物体向大质量 M 的物体落下

这个一维情况很容易处理，因为我们已知动能的变化等于 $-GMm/r^2$ 乘以位移 dr 的积分，积分从运动的一端到另一端

$$T_2 - T_1 = - \int_1^2 GMm \frac{dr}{r^2}. \quad (13.11)$$

对此情况不必乘上余弦，因为力与位移是同方向的。 dr/r^2 是容易积分的；所得的结果是 $-1/r$ ，因此式（13.11）变为

$$T_2 - T_1 = + GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (13.12)$$

这样我们就得到一个不同的势能公式。式（13.12）告诉我们，在点1、点2或其他任何地方所计算的 $(mv^2/2 - GMm/r)$ 的数量是一个不变的数值。

我们有了引力场中沿垂直方向运动的势能公式。现在有一个有趣的问题：我们能否在引力场中获得永久的运动？引力场是变化的；在不同的地方，引力场的方向和强度都不相同。我们是否能用一个固定的、无摩擦的滑道来这样做；从某一点开始，将物体提高到另一点，然后沿着一段弧把它移动到第三点，接着使它降低一段高度，以一定的倾斜度移动它，再沿别的路径把它拉高，以致当我们使物体回到初始点的时候，引力做了一些功，而使物体的动能有所增加呢？我们能否设计出某种曲线，使物体返回时要比先前运动得快一些，以致它周而复始地不断往复而获得永久运动？由于永久运动是不可能的，我们应该发觉上述过程也是不可能的。我们应该发现如下的命题：既然没有摩擦，那么物体既不会以较大的速度，也不会以较小的速度返回到原来的位置——它应能沿任何封闭路径不断地作往复运动。换句话说，循环一周重力所做的总功应为零。因为这个功如果不是零，我们

就能从循环中取得能量（如果所作的功结果小于零，以致沿这一条路径得到的速率比原来的低，那么我们只要沿相反的路径就可以从中取得能量，因为力当然只取决于位置，与方向无关；如果一条路径是正的，那么相反的一条路径就为负，所以除非是零，否则我们将从两种走法中的一种获得永久运动）。

引力所做的功真是零吗？让我们来证明它确实为零。首先，我们要稍微解释一下为什么是零，然后用数学方法来检验一下。假设我们使用一条如图13-3所示的简单路径。其中一个质点从点1转移到点2，然后沿圆弧到3，回到4，再到5，6，7和8，最后返回到1。所有这些线，都是以 M 为圆心的半径或圆弧。使 m 沿着这条路径运行要做多少功呢？在点1与点2之间所做的功是 GMm 乘以两点之间 $1/r$ 的差

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 -GMm \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

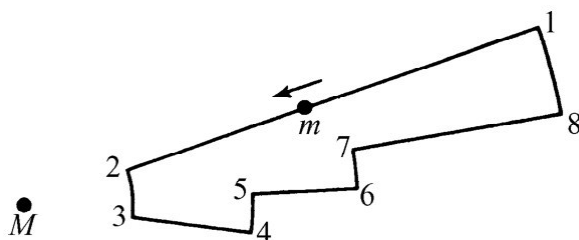


图13-3 引力场中的闭合路径

从2到3，力正好与曲线垂直，所以 $W_{23} \equiv 0$ 。从3到4做的功是

$$W_{34} = \int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = GMm \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right).$$

用同样的方法我们可求得

$$W_{45} = 0, W_{56} = GMm \left(\frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_5} \right),$$

$$W_{67} = 0, W_{78} = GMm \left(\frac{1}{r_8} - \frac{1}{r_7} \right),$$

以及 $W_{81}=0$ ，于是有

$$W = -GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_7} - \frac{1}{r_8} \right).$$

我们注意， $r_2=r_3$ ， $r_4=r_5$ ， $r_6=r_7$ 以及 $r_8=r_1$ ，因此 $W=0$ 。

当然，我们可以怀疑这一曲线是否太特殊了。如果我们使用一条真实曲线将会怎样呢？让我们在真实曲线上试一试。首先我们断言，一条真实曲线总是可用如图13-4所示的一系列锯齿形曲线来适当模拟，由此，只需证明沿小三角形路径所做的功为零，就可证实沿真实闭合曲线一周所做的功为零；但不作一点分析，沿一个小三角形所做的功为零在开始时也不是显而易见的。我们将其中的一个三角形放大，如图13-4中所示。在三角形上，从 a 到 b 和 b 到 c 所做的功，与 a 直接到 c 所做的功是否相同呢？假定力作用在一个确定的方向上；作为一个例子，我们取一个三角形，它的 bc 边就在这个方向上。我们还假设三角形是如此小，以致作用于整个三角形上的力基本上是恒量。那么从 a 走到 c 所做的功是怎样的呢？它是

$$W_{ac} = \int_a^c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F s \cos \theta,$$

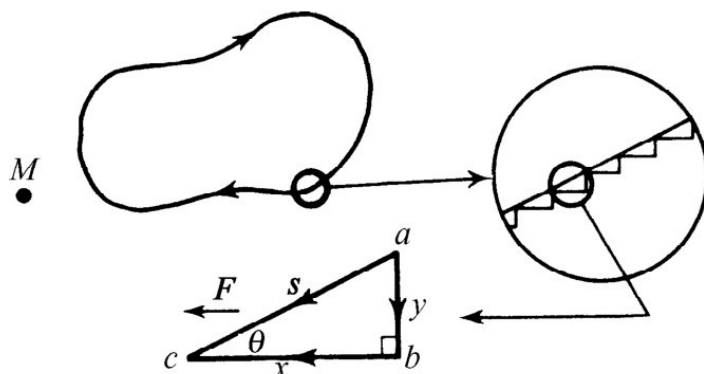


图13-4 一条光滑闭合路径，表明用一系列径向与圆周阶梯近似表示的放大片段和一个阶梯的放大图

等式第二步是因为力是一个恒量。现在我们计算沿三角形其他两边运动时引力所做的功。在垂直边 ab 上力垂直于 $d\mathbf{s}$ ，所以做功为零。在水平边 bc 上

$$W_{bc} = \int_b^c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fx.$$

这样我们就看到，沿小三角形两个边所做的功，与沿斜边所做的功是一样的，因为 $s \cos \theta$ 等于 x 。前面我们已经证明，对于一系列如图13-3那种锯齿组成的任何路径，引力所做的功为零。现在又证明了如果以直穿对角来代替沿锯齿形运动，则所需做的功是相同的（只要锯齿形足够细小，我们总是可以使它非常细小）；因此，在引力场中，环绕任何封闭路径运行一周所做的功是零。

这是一个非常值得注意的结果。它告诉我们某些以前不知道的行星运动的情况：当行星围绕太阳（没有其他绕它运动的物体，也不存在其他力）运动时，它以这种方式运动，即在轨道的每一点上，任何一点速率的平方减去某些常数与该点半径的比值，其数值总是相等的。例如，行星越是靠近太阳，运行越是快，快多少呢？利用下面这样一个数量：如果行星不是环绕太阳运行，而是改变它的速度方向（但不改变它的数值大小）使它作径向运动，然后让它从某一特定的半径落到我们所感兴趣的半径上，那么，新的运动速度与它在真实轨道上的速度是相同的，因为这正好是沿复杂路径运动的另一个例子。只要我们使它回到同一距离，动能总是相同的。所以，无论运动是真实的、未受干扰的，或者用凹槽、无摩擦约束来改变运动方向，行星到达同一点的动能是相同的。

这样，正如我们前面所作的那样，当我们对行星在其轨道上的运动作数值分析的时候，能够通过计算这些恒量——每一步中的能量来检验一下我们是否引进了明显的误差。能量应当不会改变。对于表9-2的轨道而言，能量确实发生变化^[1]。它从开始到末尾大约变化了1.5%。这是为什么呢？或者是由于我们的数值计算采用了有限的数值间隔，或者是由于某些地方在运算上有点差错。

我们来考虑另一种情况下的能量：弹簧上一个小球的问题。当我们使小球离开平衡位置时，恢复力正比于位移。在这种情况下，我们能否得出一个能量守恒的定律？能！因为这种力所做的功是

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x -kx dx = -\frac{1}{2}kx^2. \quad (13.13)$$

因此，对于弹簧上的小球，我们可以得到：物体振动的动能加上 $kx^2/2$ 是一个恒量。现在来看一下这个过程是如何完成的。我们把小球往下拉着，它静止不动，所以速度是零。但此时 x 不是零，而是极大，所以有一定的能量当然是势能。现在我们放开小球，就会发生一些情况（详细情况不予讨论），但在任何瞬时的动能加势能必然是一个恒量。例如，当小球通过原来的平衡点时，其位移 x 等于零，但具有最大的 v^2 ，并且 v^2 随 x^2 的变大而变小，等等。所以，当小球上下运动时， x^2 与 v^2 保持均衡。于是我们有另一个规则，即如果力是 $-kx$ ，则弹簧的势能是 $kx^2/2$ 。

§13-3 能量的求和

现在我们接着考虑如果有许多物体时将会产生怎样的更一般的问题。假设我们有一个许多物体的复杂问题，物体用 $i=1, 2, 3, \dots$ 来标记，它们彼此互相施加引力，即相互吸引。结果会怎样呢？我们将证明：如果把所有质点的动能加起来，再把每一对质点相互之间的引力势能 $-GMm/r_{ij}$ 加上，则其总和是一个恒量

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\text{对}} - \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \text{恒量}. \quad (13.14)$$

我们如何证明它？将方程的两端对时间求微商，则方程的右端为零。当对 $m_i v_i^2/2$ 求微商时，我们得出 m 乘速度的微商，这就是力，就像式（13.5）中那样。我们把牛顿万有引力定律所描写的力代入，就看到它等于

$$\sum_{\text{对}} -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}$$

对时间求微商的负数。

总动能对时间的微商是

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \sum_j \left(-\frac{Gm_im_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \cdot \mathbf{v}_i. \quad (13.15)$$

总势能对时间的微商是

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{对}} \left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}} \right) = \sum_{\text{对}} \left(+\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2} \right) \left(\frac{dr_{ij}}{dt} \right).$$

而

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{dr_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2r_{ij}} \left[2(x_i - x_j) \left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_j}{dt} \right) + 2(y_i - y_j) \left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_j}{dt} \right) + 2(z_i - z_j) \left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt} \right) \right], \\ &= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{r_{ij}} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{r_{ij}} + \mathbf{r}_{ji} \cdot \frac{\mathbf{v}_j}{r_{ji}}. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$ ，而 $r_{ij} = r_{ji}$ ，于是

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{对}} \left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}} \right) = \sum_{\text{对}} \left[\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{Gm_jm_i}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j \right]. \quad (13.16)$$

我们必须注意 $\sum_i \{ \sum_j \}$ 与 $\sum_{\text{对}}$ 所指的意思。在式(13.15)中， $\sum_i \{ \sum_j \}$ 是指*i*依次可取*i*=1, 2, 3, ...所有的数，对每一个*i*，*j*可取除*i*之外的任何数。因而假如*i*=3，*j*所取的值就是1, 2, 4, ...。

另一方面，在式(13.16)中， $\sum_{\text{对}}$ 是指*i*和*j*的给定值只出现一次。这样，1和3这对质点对总和式中只贡献一项。为了保持这一目的，我们约定*i*可取1, 2, 3, ...所有的数，而对于每一个*i*，令*j*只能取大于*i*的数。因此如果*i*=3，*j*只能取4, 5, 6, ...，但我们必须注意，对于每一个*i*，*j*值对总和有两项贡献，一项包含 v_i ，另一项包含 v_j ，这两项与式(13.15)中的一样，在该式中所有的*i*和*j*（*i*=*j*除外）之值都包括在求和之中，因此，把一项一项匹配起来，我们就可看出式(13.16)与(13.15)恰好相同，而符号相反，所以动能与势能之和对时间的微商的确为零。于是我们看到，对于许多物体来说，总动能是每一个物体的动能之和，而且势能也很简单，它是所有质点之间的势能之和。我们可以理解它为什么是每一对质点的能量之和：假设想要求得使这些物体彼此离开一段距离需要做功的总量，我们可以分几步将物体从无穷远的、不存在作用力的地方，一个一个地取得。首先，我们把物体1拿来，因为还不存在对它施加力的物体，所以不需要做功。接着，把物体2拿来，它需要做一些功，即 $W_{12} = -Gm_1 m_2 / r_{12}$ 。现在请注意（这一点很重要）：假如我们再把另一个物体放在第三个位置上，那么，在任何时刻，作用在物体3上的力可写成两个力——物体1和物体2作用于物体3上的力的总和。因此，所做的功是每个力所做的功之和，因为如果 $\mathbf{F}_3$ 能被分解成两个力之和

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23},$$

则功就是

$$\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F}_{13} \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{F}_{23} \cdot d\mathbf{s} = W_{13} + W_{23}.$$

这就是说，所做的功是克服第一个力和第二个力的功之和，就像每个力单独作用那样。用上述方法我们可以看到，要使这些物体集成一定的组态所需的总功，恰好是式（13.14）作为势能所给出数值。正是由于引力服从力的叠加原理，所以我们能够把总势能写成每一对质点之间势能的总和。

§13-4 巨大物体的引力场

现在我们将要计算在一些涉及质量分布的物理状况中遇到的场。迄今为止，我们只讨论过质点的情况，还没有考虑过质量分布的问题，所以计算不止一个质点所产生的力是很有意义的。首先，我们将求出无限大物质薄片作用于一个物体上的万有引力。物质薄片作用在位于 P 点处单位质量上的力（图13-5），显然是指向物质薄片的。假设 P 点离薄片的距离为 a ，且设这块大薄片单位面积的质量为 μ 。我们设 μ 是常数，即认为薄片是均匀的。现在要问：在薄片上与最接近 P 点的 O 点的距离为 ρ 到 $\rho + d\rho$ 之间的质量 dm 所形成的场 $d\mathbf{C}$ 有多大？答案是： $d\mathbf{C} = -G (dm \mathbf{r} / r^3)$ ，这个场的指向是沿着 $\mathbf{r}$ 方向的；我们还知道，当把所有的小矢量 $d\mathbf{C}$ 相加而得 $\mathbf{C}$ 的时候，只剩下 x 方向的分量。 $d\mathbf{C}$ 的 x 分量是

$$dC_x = - \frac{G dm r_x}{r^3} = - \frac{G dm a}{r^3}.$$

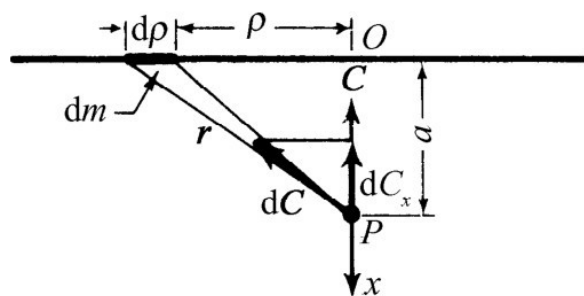


图13-5 无限大物质薄片对一个质点产生的引力场 C

现在所有与 P 具有相同距离 r 的 dm 将产生相同的 dC_x ，因此，我们立即可以把 dm 写成 ρ 到 $\rho + d\rho$ 之间这一圆环中的总质量，即 $dm = \mu 2\pi\rho d\rho$ （若 $d\rho \ll \rho$ ， $2\pi\rho d\rho$ 就是半径为 ρ 、宽度为 $d\rho$ 的圆环面积），这样

$$dC_x = -G\mu 2\pi\rho \frac{d\rho a}{r^3}.$$

于是，因为 $r^2 = \rho^2 + a^2$ ， $-\rho d\rho = r dr$ ，所以有

$$C_x = -2\pi G\mu a \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = -2\pi G\mu a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty} \right) = -2\pi G\mu. \quad (13.17)$$

这就是说，力与距离 a 无关！为什么？难道我们弄错了吗？也许你会认为：物体离我们越远，作用力应该越弱；但不是这样！如果我们接近这个无限大薄片，那么这块薄片上的绝大部分物质是处于不适宜的角度在吸引我们。假如我们离得远一些，则薄片上有较多的物质处于更有利的角度把我们拉向薄片。在任何距离上，最有效的物质位于一定的圆锥内。当我们远离薄片时，作用随距离的平方而减少；但在同一角度上，同一圆锥内有更多的物质正好随距离的平方而增加！注意到下面的事实我们就能作出严格的分析：在任何给定的锥体中，微分

元的贡献事实上与距离无关，因为一个给定的质量所产生的力的大小随距离的变化与包含在圆锥内的质量多少随距离的变化，是相应而相反的。当然，这个作用力并不是真正常数，因为当我们走到薄片的另一面时，它的符号就改变了。

事实上，我们已经解决了一个电学上的问题：假如我们有一个带电的薄板，其单位面积的电量为 σ ，那么薄板外面一点的电场是 $\sigma / (2\epsilon_0)$ 。假若薄板带正电荷，电场方向就由薄板指向外面；假若薄板带负电荷，电场方向就指向薄板。为了证明这一点，我们只要注意引力中的 $-G$ 相当于电学中的 $1/4\pi\epsilon_0$ 。

现在我们假设有两个平板，其中一个带正电荷 $+\sigma$ ，另一个带负电荷 $-\sigma$ ，它们之间的距离是 D 。现在要问场是怎样的？在两个平板外面，场是零。为什么？因为一个吸引，另一个排斥，而吸引力与排斥力都与距离无关，所以它们相互抵消掉了。同样，两个平板之间的场显然是单独一个平板的两倍，即 $E = \sigma / \epsilon_0$ ，且电场方向是从带正电荷的平板指向带负电荷的平板。

现在我们来研究一个非常有趣而重要的问题。这个问题是这样的：地球对其表面或外面一点所产生的力，正像地球质量全部集中在地心所产生的力一样。我们一直假设问题的答案就是如此，但这种假设的正确性并不明显，因为当靠近一个物体时，有些质量离我们非常近，而有些质量则离开我们较远。但当我们把所有的效果加起来，净的作用力正好与质量全部集中在中点的力一样，这似乎是一个奇迹。现在我们来验证这一奇迹的正确性。我们用一个均匀的空心薄壳来代替整个地球，令薄壳的总质量是 m ，让我们来计算一下离球心的距离为 R ，质量为 m' 这一质点的势能（图13-6），并且证明这个势能与质

量 m 集中在球心一点时的势能一样（势能比场容易计算，因为我们可以避免角度的麻烦，只要把各部分质量的势能相加就可以了）。如果我们令某一个截面与球心的距离为 x ，那么在薄片 dx 中的所有质量与 P 点的距离都是 r ，由这个圆环产生的势能应该是 $-Gm'dm/r$ ；那么在小薄片 dx 中的质量是多少呢？其数量是

$$dm = 2\pi y\mu ds = \frac{2\pi y\mu dx}{\sin \theta} = \frac{2\pi y\mu dx a}{y} = 2\pi a\mu dx,$$

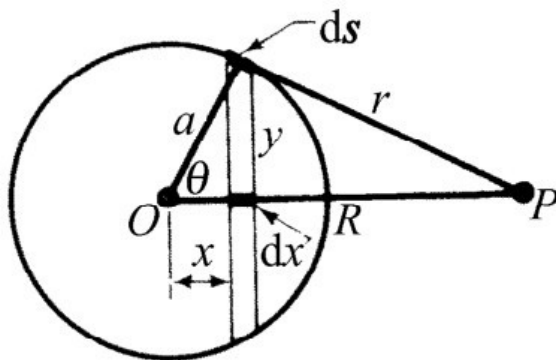


图13-6 一个质量或电荷的球状薄壳

其中 $\mu = m / (4\pi a^2)$ 是球壳的质量面密度（球带的面积正比于它的轴宽是一个一般的规则）。 dm 的势能应该是

$$dW = - \frac{Gm'dm}{r} = - \frac{Gm'2\pi a\mu dx}{r}.$$

但我们看出

$$r^2 = y^2 + (R - x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx = a^2 + R^2 - 2Rx.$$

这样就有

$$2r \, dr = -2R \, dx ,$$

$$\frac{dx}{r} = - \frac{dr}{R} .$$

因此有

$$dW = \frac{Gm' 2\pi a \mu \, dr}{R} ,$$

以及

$$\begin{aligned} W &= \frac{-Gm' 2\pi a \mu}{R} \int_{R+a}^{R-a} dr \\ &= \frac{-Gm' 2\pi a \mu}{R} 2a = \frac{-Gm' (4\pi a^2 \mu)}{R} \\ &= \frac{-Gm' m}{R} . \end{aligned} \tag{13.18}$$

这样，对于一个球状薄壳，在其外面质量 m' 的势能与薄壳质量全部集中在球心时的势能是完全一样的。地球可以想象成为由一系列不同的壳层所组成，每一壳层贡献一个能量，这个能量只取决于壳层的质量以及离开中心的距离。把各壳层的质量统统加起来，我们就得到总的质量，因此，地球的作用力就好像所有的物质都集中在它的中心一样！

但是必须注意：假若有一个点 P 是在球壳里面，那将会怎样？当 P 点在球壳里面，我们可以作同样的计算而得到两个 r 的差，但现在它的形式是

$$a - R - (a + R) = -2R,$$

即两个 r 的差是 P 点离中心距离的两倍。换言之， W 的结果是

$$W = -\frac{Gm'm}{a},$$

它与 R 和 P 点的位置都无关，也就是说，不论物体在球内什么地方，其势能都相同，因此不存在作用力；当我们在球内移动物体时不做功。如果一个物体无论放在球内什么地方，其势能都一样，则不可能有力作用于该物体上。所以在球内不存在作用力，只在球外存在作用力；而球外的作用力与质量全部集中在球心时的作用力是完全相等的。

[1] 按表9-2的单位，单位质量的能量是 $(v_x^2 + v_y^2)/2 - 1/r$ 。

第14章 功与势能（下）

§14-1 功

上一章我们介绍了许多新的概念和结论，它们是物理学的核心。这些概念是如此重要，以至于有必要另立一章对它们作进一步考察。在本章中，我们将不再重复用来得到那些结果的“证明”或专门技巧，而将集中讨论概念本身的问题。

在学习任何一个与数学有关的技术性课题中，人们面临着弄懂并记住大量事实和概念的任务。可以“证明”存在着某些关系将这些事实和概念联系起来。人们容易把证明本身与它们之间所建立起来的关系混淆起来。很清楚，要学习和记住的要点是事实和概念之间的关系，而不是证明本身，在任何特定的情况下，我们可以或者说“能够证明”某某是正确的，或者直接来证明它。几乎在所有情况中，我们所采用的那种特殊证明首先是为了能将它很快地和容易地写在黑板上或纸上，并且使它尽可能地清楚。结果，看上去似乎这个证明很简单，而事实上，作者可能花上好几个小时的时间，企图用不同的方法去计算这同一个问题，直到他找到一个最简洁的方法，从而能够表明可以在最短的时间内把它证明出来！当看到一个证明时，要记住的并不是证明本身，而是那些能够证明是正确的东西。当然，如果证明中包含了一些数学推导或人们以前未见过的“技巧”，那么我们所需要的也不完全是技巧，而是所涉及的数学概念。

的确，一个作者在一门课程中（例如本课程）所作的全部论证，并不是他从学习大学一年级物理时就记住的。完全相反：他只记得某某是正确的，而在说明如何去证明的时候，需要的话，他就自己想出一个证明方法。无论哪个真正学过一门课程的人，都应遵循类似的步骤去做，而死记证明是无用的。这就是为什么我们在本章中将避开前面有关各种表述的证明，而只是总结一下结果。

第一个需要领会的概念是力所做的功。物理学上“功”这个词并不是通常在“全世界无产者联合起来！”的口号中那个词所指的意思^[1]，而是不同的两个概念。物理上的功用 $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 来表示，称为“ $\mathbf{F}$ 点乘 $d\mathbf{s}$ 的线积分”，它所指的是：如果在一个方向上有一个力作用于物体，使得物体在某一方向上发生位移，则只有在位移方向上的分力做了功。假若力是恒力，位移是有限的距离 $\Delta \mathbf{s}$ ，则运动中恒力在整个距离上所做的功只是沿 $\Delta \mathbf{s}$ 方向的分力乘以 Δs 。规则是“力乘距离”，而真正的含义是：位移方向上的分力乘 Δs ，也可以说成是作用力方向上的位移分量乘以 F 。显然，与位移成直角的力什么功也不做。

如果把位移矢量 $\Delta \mathbf{s}$ 分解成分量，换句话说，如果把 $\Delta \mathbf{s}$ 实际上看成沿 x 方向的位移分量 Δx ， y 方向上的位移分量 Δy ，以及 z 方向的位移分量 Δz ，那么物体从一个地方移到另一地方所做的功可以分成三部分来计算，即计算沿 x 方向、 y 方向和 z 方向的功。沿 x 方向所做的功只涉及 x 方向的分力，即 F_x ，依此类推，因此所做的功是 $F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$ 。当力不是恒力，而我们遇到的又是复杂的曲线运动时，必须把路程分成许多小的 $\Delta \mathbf{s}$ ，再把物体沿每个 $\Delta \mathbf{s}$ 移动所做的功统统加起来，并取 Δs 趋于零时的极限。这就是“线积分”的含意。

我们刚才所说的一切都包含在 $W=\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 这一式子中。可以说这真是一个奇妙的式子，但要去理解它的意义或弄懂它的一些推论，则是另一回事了。

物理学上“功”这个词的含义与一般情况下的含义是不同的，为此我们必须仔细观察它显示出不同含义的某些特殊情况。例如，按照物理上的功的定义，如果一个人把100lb的重物提在手中一段时间，他并没有做功。然而，每个人都知道他会出汗，颤抖，喘气，好像他在奔上楼梯一样。可是，奔上楼梯则被认为是在做功（按照物理学，下楼时，地球对人做功），但仅仅把物体保持在一个固定的位置上是不做功的。显然，物理学上功的定义与生理学中功的定义不一样，我们将对其原因作一简单的探讨。

当一个人提着重物的时候，他必须做“生理”上的功，这是事实。为什么他会出汗？为什么他提着重物时需要消耗营养？为什么仅仅是为了提起重物人体内部机构需要全力以赴地工作？实际上，只要将重物放在桌子上就不必再费力气；而静止和平稳的桌子不需要供给任何能量就能够把相同的重物保持在相同的高度上！生理上的情况则如下所述：在人体和其他动物内有两种肌肉，一种称为横纹肌或骨骼肌，例如我们手臂中的那种肌肉，它可以随意控制；另一种称为平滑肌，如人肠内的肌肉，或蛤蜊之类动物中使蛤壳闭拢的闭壳肌。平滑肌工作得非常缓慢，但它能够保持一种“姿势”，也就是说，假若蛤蜊要把它的外壳闭拢在某一个位置上，即使有很大的力去改变它，它将仍然保持那个位置。在长时间的负荷下它仍然保持一定的位置而不感觉疲劳，因为这与桌子支持重物非常相似，它“固定”在一个确定的位置，而它的分子就暂时卡在那里不做功，所以蛤蜊不需花费力气。事实上，我们提着一个重物之所以要花费力气，仅仅是由于横纹肌结构的

关系。当神经脉冲传到肌肉纤维的时候，该纤维就会抽搐一下，然后松弛下来，所以当我们拿起一个重物时，大量的神经脉冲流传到肌肉，大量的抽搐维持着重物，而另一些肌肉纤维则松弛着。当然，我们可以看到：当我们提起一个重物而感到疲劳时，我们就开始颤抖。其原因是神经脉冲流不规则地传过来，而肌肉疲劳了，反应得不够快。为什么会出现这种不能胜任的样子呢？我们不知道确切的原因，但是人类还没有进化到能产生快速作用的平滑肌。平滑肌支撑重物将有效得多，因为当你站着的时候，平滑肌会卡住，这不涉及做功问题，也不需要能量，可是，它的缺点是动作非常缓慢。

现在回到物理学上来，我们或许要问：为什么我们要计算所做的功？回答是：计算功是有意义和有用处的。因为作用于一个质点的合力对质点所做的功，恰好等于该质点的动能的变化。也就是说，假若推动一个物体，物体会获得速度，而且 $\Delta v^2 = 2 \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} / m$ 。

§14-2 约束运动

力和功的另一个有趣的特性是：假设我们有一个倾斜的或弯曲的轨道，质点必须沿着轨道运动，但不存在摩擦。或者我们有一个由一根弦和一个重物组成的摆；弦约束重物围绕支点作圆周运动。如果重物摆动时，弦碰到一个木栓上，支点就改变了，结果是重物沿着两个不同半径的圆运动。这就是我们称为固定的无摩擦约束运动的例子。

在固定的无摩擦约束运动中，约束力不做功，因为约束力始终与运动方向垂直，所谓“约束力”我们指的是直接由约束本身作用到物体上的力——例如与轨道接触而引起的接触力，或者弦的张力。

一个质点在重力的影响下沿斜面运动时，所涉及的力是非常复杂的，因为有约束力和重力等等。然而，如果我们根据能量守恒定律并且只考虑重力来计算其运动，所得出的结果是正确的。看来相当奇怪，因为严格地讲，这并不是正确的方法——我们应当用合力来计算。但是，结果只有重力所做的功使动能改变，因为约束力所做的功是零（图14-1）。

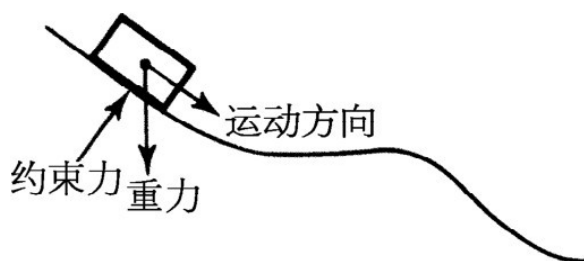


图14-1 作用于一个（无摩擦）滑动物体上的力

这里的要点是：如果一个力能够分解为两个或两个以上分力之和，则合力沿某一曲线所做的功是各分力所做之功的总和。假如我们把力分解为重力与约束力等各种效应的矢量和，或者把所有的力分解成 x 方向的分量和 y 方向的分量，或者任何其他我们所希望的分解方式，那么净力所做的功等于被分解成的各分力所做之功的总和。

§14-3 保守力

自然界中有些力，例如重力，具有非常引人注意的、我们称之为“保守”的性质（这里“保守”这个词并不涉及政治上的概念，它又是一个“怪词”）。如果我们要计算一个力使物体沿曲径从一点运动到另一点时做了多少功，一般这个功依赖于曲径，但在特殊情况下，它与曲径无关。假若它不依赖曲径，那么我们说这个力是保守力。换句话

说，在图14-2中，假若沿曲线 A 计算从位置1到位置2的力乘距离的积分，再沿曲线 B 计算这一积分，我们得到相同的焦耳数，如果这个结果对这两点之间的每一条曲线的积分都正确，并且无论我们取哪两点这个说法都成立，那么我们就称这个力为保守力。在这种情况下，从1到2的功的积分可以用简单方法计算出来，而且可以用一个式子来表示所得的结果。一般情况下这是不易做到的，因为我们还得指定一条曲线，但当功与曲线无关时，功当然就只取决于1和2的位置了。

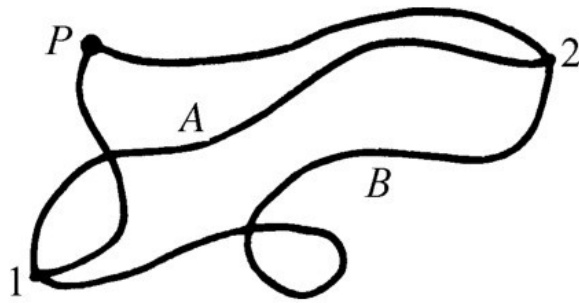


图14-2 力场中两点之间的可能途径

为了说明这个概念，现作如下考虑。

我们在任意位置上取一个“标准”点 P （见图14-2），则我们所要计算的从1到2的功的线积分，可看作从1到 P 点所做的功再加上从 P 点到2所做的功，因为这里的力是保守力，所做的功与曲线无关。现在，从 P 点到空间一个特定点所做的功是那一点的空间位置的函数。当然，它实际上也取决于 P ，但在分析时，我们使任意点 P 一直固定不变。如果这样做，则从 P 点到2点所做的功就是最终位置2的某个函数。它取决于2所在的位置；如果到达另外的某一点，我们得到的就是不同的答案。

我们称这个位置函数为 $-U(x, y, z)$ ，并且当我们要提到坐标为 (x_2, y_2, z_2) 的某个特定点2时就把 $U(x_2, y_2, z_2)$ 简写成 $U(2)$ 。从点1到 P 所做的功也可以写成沿着相反的途径把全部 $d\mathbf{s}$ 反过来的积分。也就是说，从1到 P 所做之功是从 P 到1所做之功的负值

$$\int_1^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{s}) = - \int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

这样，从 P 到1所做的功是 $-U(1)$ ，从 P 到2所做的功是 $-U(2)$ 。因此，从1到2的积分等于 $-U(2)$ 加上 $-U(1)$ 的负值，即

$$\begin{aligned} U(1) &= - \int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad U(2) = - \int_P^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \\ \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= U(1) - U(2). \end{aligned} \tag{14.1}$$

我们把 $U(1) - U(2)$ 称为势能的变化，并把 U 称为势能。我们说，当物体处于位置2时，它具有势能 $U(2)$ ，在位置1时，具有势能 $U(1)$ 。如果物体处于位置 P ，它的势能为零。假如我们用另外一点 Q 来代替 P ，结果表明，势能将只会改变一个常量（这留给读者自己去证明）。由于能量守恒只与“能量的变化”有关，所以，如果我们在势能上再加上一个常量是没有关系的。可见 P 点可以任意选取。

现在我们有了如下两个命题：（1）力所做的功等于质点动能的改变；（2）在数学上，保守力所做的功等于势能函数 U 的变化的负值。作为这两者的推论，我们得到一个定理：如果只受保守力的作用，则动能 T 加势能 U 是一个恒量

$$T+U=\text{恒量}. \quad (14.2)$$

现在我们来讨论某些场合下的势能公式。如果有一个均匀的重力场，当我们不涉及可与地球半径相比的高度，那么力是一个沿垂直方向的恒力，所做的功就是力乘以垂直距离。于是

$$U(z) = mgz, \quad (14.3)$$

而相当于势能为零的 P 点刚巧是 $z=0$ 的平面上的任意一点。如果有必要，我们还可以把势能写成 $mg(z-b)$ ，在分析中，除了在 $z=0$ 处的势能应该是 $-mgb$ 之外，其余的所有结果当然都是一样的，情况并不会有什么不同，因为我们要考虑的只是势能之差。

把弹簧从平衡点压缩距离 x 所需的能量是

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad (14.4)$$

在弹簧的平衡位置 $x=0$ 处，势能为零。我们也可以加上一个所需要的常数。

相距为 r 的两个质点 M 与 m ，其引力势能是

$$U(r) = -GMm/r. \quad (14.5)$$

这里选择的常数应使无穷远处的势能为零。当然，同样的公式可应用到电荷问题上，因为两者有相似的定律

$$U(r) = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r). \quad (14.6)$$

现在我们来具体地应用其中的一个公式看看是否明白这些公式的含义。问题：为了使火箭飞离地球，火箭发射的速度要多大？解答：动能加势能一定是恒量。当火箭“脱离”地球时，它将在离开地球千百万公里之外，如果它刚好能脱离地球，我们可以假定它到达那里时以“零速度”在勉强运动。设地球的半径为 a ，质量为 M 。动能加势能的总和最初是由 $(mv^2/2 - GmM/a)$ 给定。火箭运动到最后这两个能量的总和必定与此相等。动能在最后将为零，因为假设火箭那时实质上以“零速度”在勉强漂移，而势能为 GmM 除以无穷大，其值为零。因此，式子的另一端中每一项都是零，这就告诉我们速度的平方必然是 $2GM/a$ ，而 GM/a^2 就是所谓的重力加速度 g ，于是

$$v^2 = 2ga .$$

为了使人造卫星不断地绕地球转动，它必须以多大的速度运行？我们早已算出来了，是 $v^2 = GM/a$ 。因此，要离开地球，其速度必须是刚好围绕地球表面附近运行所需速度的 $\sqrt{2}$ 倍。换句话说，离开地球所需的能量必须是环绕地球运转所需能量的两倍（因为能量按速度的平方变化）。因此，在历史上首先是使人造卫星围绕地球运行，这要求人造卫星具有 $5 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度。其次是发射永远离开地球的人造卫星，此时需要两倍的能量，即 $7 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度。

我们继续讨论势能的特征。我们考虑两个分子或两个原子的相互作用，例如两个氧原子的相互作用。当它们离得很远时，相互之间的作用力是一种引力，此引力与原子间距离的7次方成反比。而当两个原子非常接近时，则具有很大的斥力。假如对距离的7次方的倒数进行积分求所做的功，我们就得出势能 U ，它是两个氧原子之间径向距离的函数，在距离较大时，势能 U 按照距离的6次方的倒数而变化。

设我们画一个势能 $U(r)$ 的曲线图，如图14-3所示。我们从很大的 r 开始，按 $1/r^6$ 来画，如果距离足够近，就到达势能最小点 d 。 $r=d$ 处势能最小的意思是：如果从 d 开始，移动很小一段距离，所做的功，即移动这段距离时的势能变化，几乎为零，因为在曲线底部势能的变化非常小。这样，在 $r=d$ 这一点不存在作用力，所以它是一个平衡点。另一个看出它是平衡点的方法是：无论从哪一个方向上离开 d 都要做功。当两个氧原子稳定下来，以至于从它们之间的束缚力中不再有能量释放出来时，它们就处于最低能量状态，彼此之间隔开这个距离 d 。氧分子处于“冷”态时就是这种样子。如果我们对它加热，原子就要发生振动，并且彼此之间更加分开，事实上，我们能够使它们分开，但这样做需要消耗一定数量的功或能量，这些功或能量等于 $r=d$ 与 $r=\infty$ 之间的势能差。当我们试图使两个原子靠得非常近时，由于它们彼此排斥，其势能增加得非常快。

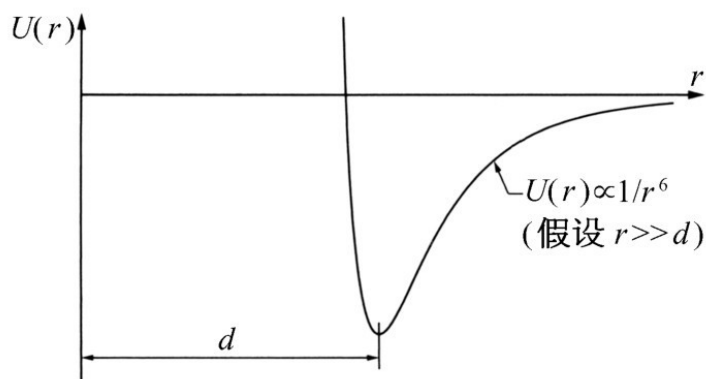


图14-3 两个原子之间的势能与它们之间的距离的关系

我们引出势能曲线的原因，是由于力的概念对量子力学来说不太合适，在那里，能量的概念是最自然的。当我们进一步考虑核物质之间以及分子之间等等的更高级的作用力时，我们发现虽然力和速度都“溶化”和消失了，但是能量概念继续存在。因此，在有关量子力学的

书中我们看到有势能曲线，但是很少看到两个分子之间作用力的曲线，因为在那时人们是用能量，而不是用力来分析问题。

其次我们注意到，如果有几个保守力同时作用于一个物体，那么，该物体的势能是每一个力的势能的总和。这与我们前面所提到的是同一个命题，因为，假若力能表达为分力的矢量和，则总的力所做的功是分力所做的功的总和，因此能把它分析为各个力的势能的变化。于是，总的势能是所有各部分的势能的总和。

我们可将此推广到包含很多物体相互作用的系统中去，例如木星、土星、天王星等，或者是氧、氮、碳等系统，系统中的物体彼此成对地作用着，并且作用力都是保守力。在这种场合下，整个系统中的动能就是所有个别原子或行星或其他什么东西的动能的总和，而系统的势能则是每对物体相互作用势能的总和，在计算一对质点的相互作用势能时，其他质点都好像不存在一样（这种说法对分子实际上是不正确的，因而公式要复杂一些；对牛顿万有引力，这当然是正确的，而对分子力则近似地正确。对分子力来说也存在势能，但它往往是原子位置的比较复杂的函数，而不只是各对分子的势能的总和）。因此，在万有引力的特殊情况下，势能是 $-Gm_i m_j / r_{ij}$ 对所有的 i, j 求和，如式（13.14）所表示的那样。式（13.14）用数学方法表达了如下定理：总的动能加上总的势能不随时间而变化。当各种行星周而复始继续不断地运行和旋转时，如果计算它的总动能和总势能，我们发现，其总和保持不变。

§14-4 非保守力

我们花了相当多的时间讨论保守力；关于非保守力又是怎样呢？我们对这个问题将采取比通常深入的看法，并将说明不存在非保守力！实际上，自然界所有的基本力都是保守力。这不是牛顿定律所得出的结果。事实上，按照牛顿自己的看法，力可以是非保守的，如摩擦力显然就是非保守力。但当我们说到摩擦力显然是非保守力时，我们采用的是现代的观点，即认为粒子之间的最基本的力都是保守力。

例如，如果我们分析一个很大的球状星团，我们从一张这种星团的照片上可以看到有几千个星球彼此相互作用，那么，总势能的式子只不过是一项加另一项等等，对所有各对星球求和，而动能是所有各个星球动能之和。但星团作为一个整体也在空间漂移，假若我们离开它足够远，不能详细观察它，可以把它想象为一个单一的物体。假若对它施加作用力，其中有一部分力最终驱使它作为整体向前运动，我们就看到物体的中心在运动。另一方面，有些力可以说是“消耗”在增加内部“粒子”的动能或势能上。例如，我们假定这些力的作用使整个星团扩张，并且使其中的质点运动得更快。整个体系的总能量实际上是守恒的，但用我们不精确的眼睛从外面看（它不能看出里面运动的混乱情况），并且把整个物体运动的动能看作单一物体的动能，能量就似乎是不守恒了。但这是由于我们对看到的東西缺乏了解。结果实际的情形却是：当我们足够仔细地观察时，世界上的总能量（动能加势能）是一个恒量。

当我们非常仔细地研究原子范围的物质时，物体的总能量并不一定能够方便地分成动能与势能两部分的，而且这种区分也不一定必要。但要这样做几乎总是可能的，所以我们说这种区分总是可能的，并且世界上动能加势能是一个恒量。这样，在整个世界内总的动能加势能是一个恒量，如果“世界”是一块孤立物质，若无外力作用，其能

量也是一个恒量。但正如我们已经看到的那样，同样东西的动能和势能中有些可以在其内部，例如内部的分子运动，这是从我们还没有注意到它这个意义上说的。我们知道，在一杯水中一切都在晃动，所有各部分一直在运动着，所以一杯水内部有一定的动能，通常我们可能不会去注意它。我们不注意原子的运动，这种运动产生热，所以我们不称它为动能，而热原来也是动能。内部的势能同样可以具有一定的形式，例如化学能的形式：当我们燃烧汽油时，由于新的原子排列比旧的原子排列所具有的势能低，所以有能量释放出来。把热纯粹当作动能并非严格，因为其中包含一些势能，反之化学能也不能单纯说成是势能，也包含少量的动能。把上面所说的话并在一起就是说：一个物体内部的总的动能和势能一部分是热，一部分是化学能，等等。总之，所有这些不同形式的内能在上述意义中常常看作是“损失掉”的能量；当我们研究热力学的时候将会对此更加清楚。

作为另一个例子，当有摩擦存在时动能并非真正损失掉，即使一个滑动着的物体停了下来，看上去动能似乎损失掉了，其实，动能并没有损失掉，因为内部原子以比以前更大的动能晃动着，虽然我们不能看到这些，但可用测定温度的办法来量度它。当然，如果我们不考虑热能，那么，能量守恒定律就显得不正确了。

另一种情况是，当我们只研究系统的某一部分时，能量守恒也似乎不正确。当然，如果某个物体与外面的某个物体相互作用，而我们忽略了把这种作用计算进去，此时能量守恒定理就会显得不正确了。

在经典物理学中，势能只包括引力能和电能，现在我们则还有核能和其他能量。例如，光能在经典理论中必须作为一种新的能量形式，但是如果我们愿意的话，也可以把光能想象为光子的动能，这样，式（14.2）仍旧是正确的。

§14-5 势与场

现在我们将要讨论几个与势能以及场的概念有联系的问题。假定我们有两个大物体 A 和 B ，以及第三个很小的物体。第三个小物体受到两个大物体的万有引力吸引，吸引的合力为 $\mathbf{F}$ 。在第12章中我们已经注意到，作用在一个质点的万有引力可以写成它的质量 m 乘以另一个矢量 $\mathbf{C}$ ， $\mathbf{C}$ 只取决于质点的位置

$$\mathbf{F} = m \mathbf{C}.$$

于是，我们可以这样来分析重力：想象在空间每一位置都存在一个矢量 $\mathbf{C}$ ，它“作用”于可能放在该处的一个质量上，但不论实际上是否有质量被它作用，矢量 $\mathbf{C}$ 本身总是存在的。 $\mathbf{C}$ 有三个分量，每一个分量都是 (x, y, z) 的函数，即空间位置的函数。这样的东西我们称为场，我们说物体 A 和 B 产生了场，即它们“创造”了矢量 $\mathbf{C}$ 。当一个物体被置于场内，作用于物体的力等于该物体的质量乘以物体所在处的场矢量的数值。

我们对势能也可以同样处理：由于势能是 $(-1) \cdot (\mathbf{F}) \cdot (d\mathbf{s})$ 的积分，可以把它写成 m 乘以 $(-1) \cdot (\text{场}) \cdot (d\mathbf{s})$ 的积分，这只是改变一下标度，所以我们看到一个物体在空间一点 (x, y, z) 所具有的势能 $U(x, y, z)$ ，可以写成 m 乘以另一个我们称为 Ψ 的势函数积分 $\int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = -\Psi$ ，就像 $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -U$ 一样，两者之间只相差一个标度因子

$$U = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -m \int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = m\Psi. \quad (14.7)$$

在空间每一点上有了这个函数 $\Psi(x, y, z)$ 后，我们就可以直接计算物体在空间任何一点的势能，即 $U(x, y, z) = m\Psi(x, y, z)$ 。这看起来似乎价值不大，实际上并非没有价值，因为有时用空间各处的 Ψ 值而不是用 $\mathbf{C}$ 值能更好地描述场。我们可以用标量函数 Ψ 来代替一定要写出三个复杂的分量的矢量函数。而且，如果场是由许多质量产生的，计算 Ψ 比计算 $\mathbf{C}$ 的任何一个分量要容易得多，因为势是一个标量，只要相加就行了，不必为方向而操心。同样，我们会看到，从 Ψ 很容易重新得出场 $\mathbf{C}$ 。假设质点 $m_1, m_2, \dots$ 位于点1, 2, ...处，我们希望知道任何一点 p 的势函数 Ψ 。很简单，它就是各个质点在 p 点所产生的势之和

$$\Psi(p) = \sum_i -\frac{Gm_i}{r_{ip}} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (14.8)$$

在上一章中，我们应用过总的势能是所有个别物体势能的总和这个公式，来计算一个球壳形状的物体的势能，这个势能只要把球壳的所有部分对某一点势能的贡献相加就可获得。计算的结果画在图14-4中。总势能是负的，在 $r=\infty$ 处其值为零，从 $r=\infty$ 直到半径 a 处其值按 $1/r$ 变化，然后在球壳内则是常数，在球壳之外，势能是 $-Gm/r$ （此处 m 是球壳的质量），它与球壳的质量全部集中在球心时的势能完全一样。但它不是在任何地方都严格相同，在球壳之内，势能就是 $-Gm/a$ ，并且是一个恒量。如果势能为恒量，就不存在场，或者不存在作用力，因为，如果我们在球壳内把物体从一个地方移动到另一个地方，力所做的功必然为零。为什么？因为物体从一个地方移动到另一个地方所做的功等于势能改变的负值（或者相应的场积分是势的改变）。但在球壳内任何两点的势能是相同的，所以势能的改变为零，因此，

在球壳内任何两点之间移动时不做功。只有在完全没有作用力存在时，才能使所有位移方向上做的功为零。

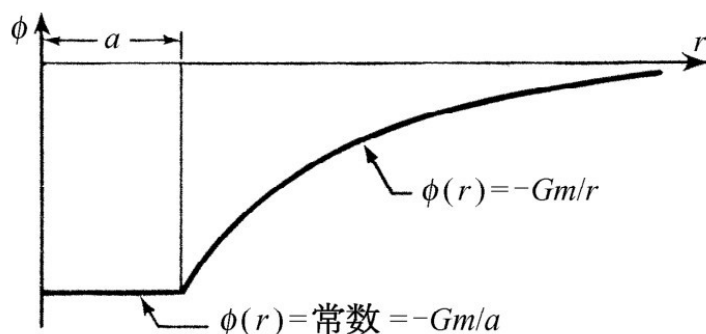


图14-4 由半径为 a 的球壳所引起的势能

这给我们提供一个如何从已知势能去求出力或场的线索。假定物体在 (x, y, z) 位置的势能是已知的，我们要求出作用于该物体上的力。正像我们将要看到的那样，仅仅根据这一点的势能，是不能求出力的，还需要知道邻近点的势能。为什么？如何计算力在 x 方向的分量（当然，如果能够计算 x 方向的分量，也就能够计算 y, z 方向上的分量，也就知道了整个作用力）？现在，如果我们使物体移动一个小小的距离 Δx ，作用于物体的力所做之功是力在 x 方向的分量乘以 Δx ，如果 Δx 足够小，这就应等于从一点移动到另一点的势能之变化

$$\Delta W = -\Delta U = F_x \Delta x. \quad (14.9)$$

我们只不过应用了公式 $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta U$ ，但是只适用于一个非常短的路径。把它除以 Δx ，于是得到的力是

$$F_x = -\Delta U / \Delta x. \quad (14.10)$$

显然这是不严格的，实际上我们需要的是 Δx 变得越来越小时式 (14.10) 的极限，因为它只有在 Δx 趋于无穷小的极限时才是严格正

确的。我们认识到这正是 U 对 x 的微商，因此倾向于写成 $-dU/dx$ 。但 U 依赖于 x ， y 和 z ，而数学家创造了一个不同的符号来提醒我们对这一函数求微商时要非常小心，使我们记住所考虑的只是 x 的变化， y 和 z 是不变的。他们用“反写的 d ”即 ∂ 来代替 d （我认为在微分学刚开始就应当使用 ∂ ，因为我们总是想消去式子中的这个 d ，而从来不想去消去 ∂ ），所以他们写成 $\partial U/\partial x$ ，而且，在不得已的时候，如果他们想要非常仔细，就放一根在底部写有小的字母 yz 的直线在 $\partial U/\partial x$ 旁边（ $\partial U/\partial x|_{yz}$ ），它表示：“保持 y 和 z 不变，取 U 对 x 的微商”。在大多数场合下，我们不写出关于保持常数的记号，因为通常从上下文中是看得很明显的，所以我们一般不用这根写有 y 和 z 的直线。然而，总是用 ∂ 代替 d ，以告诉人们它是使另一些可变量保持常数的微商。这称为偏导数，它是当只有 x 改变时的微商。

于是，我们得到 x 方向的分力是 U 对 x 偏导数的负值

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (14.11)$$

同样，保持 x 和 z 不变，以 U 对 y 求微商可得到力在 y 方向上的分量，当然，第三个力的分量是保持 y 和 x 不变时， U 对 z 的微商

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (14.12)$$

这是从势能求得力的方法。我们以完全相同的方法从势求得场强

$$C_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, C_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, C_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (14.13)$$

我们在这里附带提一下另一个符号，这个符号实际上在相当一段时间里还用不到；由于 $\mathbf{C}$ 是矢量，有 x ， y 和 z 的分量，而产生 x ， y 和 z 分量的符号 $\partial/\partial x$ ， $\partial/\partial y$ 和 $\partial/\partial z$ 有点像矢量。数学家已经创造了一个了不起的符号 ∇ ，称为“梯度”或“grad”， ∇ 不是一个量，而是一个从标量得出矢量的算符。它具有下列“分量”：“grad”的 x 方向的分量是 $\partial/\partial x$ ， y 方向的分量是 $\partial/\partial y$ ， z 方向的分量是 $\partial/\partial z$ ，于是很有趣，我们的公式可以写成

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \mathbf{C} = -\nabla \Psi. \quad (14.14)$$

运用 ∇ ，给我们提供了一个快速方法以检验是否有一个真正的矢量式，实际上式 (14.14) 的含义确实与式 (14.11)、(14.12) 和 (14.13) 一样；它只是这些式子的另一种写法，由于我们不愿意每次都写出三个方程式，所以就以 ∇U 来代替。

电的情形是场和势的又一个例子。在电的场合中，作用在静止物体上的力是电荷乘以电场： $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ [当然，一般在电学问题中 x 方向的分力也有一部分取决于磁场。由磁场引起的作用在质点上的力总是与质点的速度垂直，并与磁场方向垂直，从式 (12.11) 很容易证明这一点。既然磁场引起的作用在运动电荷上的力是垂直于速度的，磁场对运动电荷就不做功，因为运动方向与力的方向垂直。因此，在电场和磁场中使用动能定理时，我们可以不管磁场的作用，因为它不改变动能]。假定只存在电场，那么用与万有引力同样的方法，我们可以计算能量，或电场力所做的功，并可计算 ϕ 的数值，它是 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ 从任意确定的一点到我们欲计算的那一点的积分的负值，于是电场的势能就是电荷乘以 ϕ

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

$$U = q \phi.$$

我们取两块平行金属板作为例子，每一块金属板表面单位面积的电荷为 $\pm\sigma$ 。这个装置称为平板电容器。我们先前已求得金属板之外的力为零，并且两块平板之间有一个恒定电场，其方向从+指向-，大小为 σ/ϵ_0 （图14-5）。我们想知道将一个电荷从一块平板移到另一块平板上要做多少功。这个功是（力）·（ $d\mathbf{s}$ ）的积分，它可以写成电荷乘以平板1的势与平板2的势之差

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q(\phi_1 - \phi_2).$$

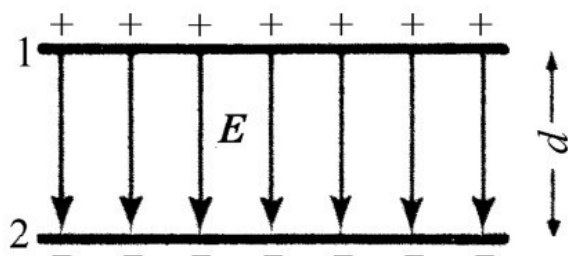


图14-5 两块平行金属板之间的场

实际上我们可以算出这一积分，因为力是恒定的，如果令两块平板之间的距离为 d ，则积分是容易的

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} \int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\epsilon_0}.$$

势差 $\Delta\phi=\sigma d/\epsilon_0$ 称为电压差， ϕ 以伏特来量度。当我们说一对平板充电到一定的电压，意思是指两块平板之间的电势差为多少伏特。对于两块面电荷为 $\pm\sigma$ 的平板所组成的电容器，两块平板的电压或电势差是 $\sigma d/\epsilon_0$ 。

[1] 英文中“功（work）”与“无产者（worker）”出于同一词源。——译者注

第15章 狭义相对论

§15-1 相对性原理

两百多年来，牛顿所阐明的运动方程一直被认为是对自然的一种正确描述。第一次看出这些定律中存在的一个谬误，并且找到了修正它的方法是在1905年，这两件事都是爱因斯坦所提出的。

我们曾用下面的方程表示牛顿第二定律

$$F = \frac{d(mv)}{dt},$$

牛顿在叙述这一定律时默认了这样一个假定，即质量 m 是一个恒量，但是我们现在知道这并不正确，而是物体的质量要随着其速度的增加而增大。在经爱因斯坦修正后的公式中，质量具有数值

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (15.1)$$

这里“静止质量” m_0 表示一个不运动的物体的质量， c 是光速，约为 $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 或 $186000 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

对于那些只想学一点能够解释问题就行了的人来说，这个式子就是全部相对论了——它只是对质量引入一个修正因子来改变一下牛顿定律。从公式本身很容易看出，在通常情况下，质量的增加是十分微小的。即使速度大到像绕地球运转的卫星一样，即约 $5 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ ，于是 $v/c = 5/186000$ ；把这个值代入公式后表明，对质量的修正只是20亿到30亿分之一，小得几乎无法观察到。实际上，这个公式的正确性已被对许多种粒子作出的观察所广泛证明，这些粒子运动速度很大，一直到实际上等于光速。然而，由于这种效应通常非常之小，所以看来似乎不寻常的是，它在理论上的发现先于它在实验上的发现。从实验上看，当速度足够大的时候，这种效应非常之大，但是它不是用这一方法发现的。所以，看一下一条涉及这样一种细致的修正的定律，在它第一次被发现的那个时期如何能从实验和物理推理的结合中得以产生该是十分有趣的。有很多人对这条定律的发现作出了贡献，但是爱因斯坦的发现是这些人的工作的最后成果。

实际上爱因斯坦的相对论包括两部分内容。这一章所谈到的是1905年以来就已存在的狭义相对论。1915年爱因斯坦发表了称为广义相对论的补充理论。这后一个理论所讨论的是将狭义相对论推广到引力定律中去的情况；这里我们将不去讨论它。

相对性原理是牛顿在他的运动定律的一个推论中首先提出的：“封闭在一个给定空间中的诸物体，它们彼此之间的运动是同一的，无论这个空间是处于静止状态还是均匀地沿一直线向前运动。”这意味着，比如说，如果有一艘宇宙飞船在以均匀速度飞行，那么在飞船上所做的所有实验以及所有的现象，将与飞船不运动时所看到的完全相同，当然这是指如果人们并不伸出头去往外看的话。这就是相对性原理的含义。它是一个十分简单的观念，唯一的问题在于是否确实如此：即

从一个运动系统内进行的所有实验中得到的物理定律是否看来都与如果该系统处于静止时所得出的相同。让我们首先来研究一下，牛顿定律在运动系统中是否相同。

假设某一个人莫（Moe）以均匀速度 u 沿 x 方向运动，并且测量了某一点的位置，如图15-1所示。他把这个点在他这个坐标系中的“ x 距离”记作 x' 。另一个人乔（Joe）静止不动，并且测量了同一点的位置，用他的坐标系中的 x 坐标记作 x 。这两个系统的坐标之间的关系可以从图中清楚看出。经过时间 t 后，莫的原点移动了一段距离 ut ，如果这两个系统原先是重合在一起的，那么

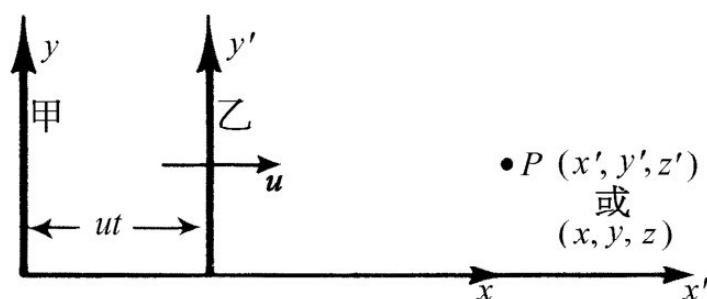


图15-1 沿着 x 轴以均匀速度作相对运动的两个坐标系

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (15.2)$$

如果把这个坐标变换代入牛顿定律中去，那么我们发现，这些定律变换到带撇（'）的坐标系中时，仍旧是同样的定律；这就是说，牛顿定律在运动系统中与在静止系统中一样具有相同的形式，因此，依靠力学实验不可能说出系统究竟是否在运动。

相对性原理在力学中已应用了很长一段时间。曾经有许多人，特别是惠更斯（Huygens），应用它来求出弹子球碰撞的规则，这与我们在第10章中用它来讨论动量守恒时所用的方法很相同。在上一世纪中，由于对电、磁以及光等现象的研究，人们对于这条原理的兴趣更加浓厚了。许多人对这些现象所作的一系列精心研究，其结晶就是麦克斯韦电磁场方程组，它们在统一的体系下描写了电、磁与光的现象。但是麦克斯韦方程组似乎并不遵循相对性原理。这就是说，如果我们用式（15.2）代入麦克斯韦方程组并对它进行变换，那么它们的形式不再保持相同；因此，在飞行的宇宙飞船中，电与光的现象应当与飞船静止时不同。这样，我们就可以利用这些光的现象来确定飞船的速度；特别是可以通过适当的光学或电学测量来确定飞船的绝对速度。麦克斯韦方程组的结论之一是，如果在电场中产生扰动，以致有光发射出来，那么这些电磁波在所有方向上均等地而且以相同的速度 c （即 $186\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ ）传播出去。方程组的另一个结论是，假如扰动源在运动，那么所发射的光将以同样的速度 c 穿过空间。这与声的情况相似，声波的速度也与声源的运动无关。

在光的情况下，这种与光源运动的无关性引起了一个有趣的问题。

假定我们以速度 u 驱车前进，从后面射来的光，以速度 c 追过了我们的车子。对式（15.2）中的第一个方程微分就得到

$$dx'/dt = dx/dt - u,$$

这意味着，按照伽利略变换，我们在汽车里测得的掠车而过的光的表观速度不应当是 c 而应当是 $(c - u)$ 。例如，如果汽车以 $100\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ 速度前进，而光速是 $186\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ ，那么掠车而过的光的表观速度应

当是 $86\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ 。总之，在任何情况下，只要测出掠车而过的光的速度（如果伽利略变换对于光是正确的话），我们就应当可以决定汽车的速度。在这种一般设想的基础上，曾经进行了大量的实验以确定地球的速度，但是它们全都失败了——根本没有发现地球有什么速度。我们将详细地讨论其中的一个实验，用以确切地说明我们做了一些什么以及问题何在；显然，是有一些问题，物理方程有点不对。那么怎么会这样的呢？

§15-2 洛伦兹变换

当物理方程在上述情况下的失效暴露出来的时候，所出现的第一个想法就是认为这个麻烦的根源必定在于当时只有20年之久的新的麦克斯韦电动力学方程组。看来相当明显的是，这些方程一定是错误的，所以要做的事就是这样来改变它们，使得相对性原理在伽利略变换下能够得到满足。在这种尝试中，必须在方程组中引入一些新的项，而这些项预言了一些新的电现象，但一旦用实验来检验它们时，这些现象就根本不存在，因而，这个尝试必须予以放弃。于是人们逐渐明白，麦克斯韦电动力学方程组是正确的，必须到其他地方去寻找症结所在。

在这期间，洛伦兹注意到一件令人注目的奇怪的事，那就是当他在麦克斯韦方程组中进行以下代换时

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\
 y' &= y, \\
 z' &= z, \\
 t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},
 \end{aligned}
 \tag{15.3}$$

发现这些方程组在这种变换下保持其原有形式不变！式（15.3）现在通称为洛伦兹变换。爱因斯坦仿效原来由庞加莱（Poincaré）提出的设想，作出了这样的一个假设：所有的物理定律都应该是这样的定律，它们在洛伦兹变换下保持不变。换句话说，需要予以改变的，不应当是那些电动力学定律，而应当是力学定律。那么，我们将如何改变牛顿定律，使它们在洛伦兹变换下保持不变呢？如果确定的是这样一个目标，那么我们必须把牛顿方程这样来予以改写，使得它们能满足我们所提出的条件。结果发现，这里的唯一要求，就是牛顿方程中的质量 m 必须代之以等式（15.1）中所示的形式。作了这个改变之后，牛顿定律与电动力学定律就会完全协调。这时，如果我们用洛伦兹变换把莫的测量与乔的测量相比较，那么就根本不可能发现究竟谁在运动，因为两个坐标系中，所有方程的形式都是相同的！

当我们用新的时间与坐标之间的变换来代替旧的变换时，这究竟意味着什么，讨论一下这个问题是颇为有趣的，因为旧的变换（伽利略变换）似乎是不证自明的，而新的变换（洛伦兹变换）看来是奇特的。我们希望知道的是，在逻辑上以及在实验上是否可能把新的而不是旧的变换看作是**正确的**。要弄清楚这一点，单去研究力学定律是不够的，而应像爱因斯坦所做的那样，必须对我们关于时间和空间的观念进行分析，以求得对这种变换的理解。我们将不得不稍微花一点时

来讨论这些观念以及它们对力学的含义，所以我们要说明在前，由于其结果与实验相符合，这种努力是完全有理由的。

§15-3 迈克耳逊-莫雷实验

如上所述，人们曾经做过多次尝试，以确定地球通过一种假设的“以太”时的绝对速度，而以太是被想象为充满整个空间的。这些实验中最著名的一个是1887年由迈克耳逊（Michelson）和莫雷（Morley）所做的。这个实验所得到的负结果经过18年之后才最终由爱因斯坦作出了解释。

迈克耳逊-莫雷实验使用了如图15-2所示的一种装置。它主要包括一个光源A，一块部分镀银的玻璃片B，两面镜子C和E。所有这些都装在一个牢固的底座上。两面镜子放在离B都等于 L 的地方。B片将射来的光分为两束，这两束光以互相垂直的方向分别向两面镜子射去，并在那里被反射而回到B。在返回到B后，这两束光线又作为叠加分量D与F组合起来。如果光线从B到E一次来回的时间与光线从B到C一次来回的时间相同，那么所产生的两条光线D与F的相位相同，因而彼此加强。但是如果这两个时间稍有差异，那么两条光线之间就会有一点相位差，结果将产生干涉现象。如果这个装置在以太中“静止”不动，那么这两个时间应该精确相等，但是如果它以速度 u 向右运动，那么这两个时间就应有所差别。让我们看看其原因何在。

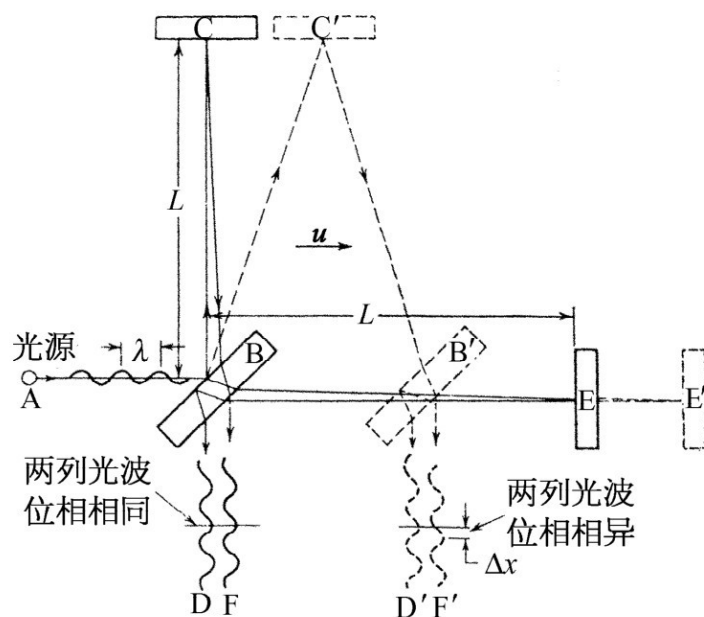


图15-2 迈克耳逊-莫雷实验的示意图

首先，我们来计算光从B到E而后再返回到B所需的时间。假设光从B片到镜E所需的时间为 t_1 ，返回的时间为 t_2 。现在，当光在从B跑向镜子的途中这段时间内，装置移动了一段距离 ut_1 ，所以光必然用速度 c 走了 $L + ut_1$ 的距离。我们也可以用 ct_1 来表示这段距离。这样，我们就有

$$ct_1 = L + ut_1 \text{ 或 } t_1 = L / (c - u) .$$

（这一结果也可以用这个观点明显看出，即光相对于装置的速度是 $c - u$ ，所以这个时间是长度 L 除以 $c - u$ ）。用类似方法可以算出时间 t_2 。在这段时间中B片前进了距离 ut_2 ，所以光返回的距离是 $L - ut_2$ 。于是就有

$$ct_2 = L - ut_2 \text{ 或 } t_2 = \frac{L}{c + u}.$$

所以总的的时间是

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2}.$$

为了便于以后对时间进行比较，我们把它写成

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2}. \quad (15.4)$$

我们的第二部分，将是计算光从B到镜C的时间 t_3 。与前面一样，在 t_3 时间内，镜C向右移动了 ut_3 距离而到达位置C'；同时，光沿着一个直角三角形的斜边跑过距离 ct_3 ，即BC'。对于这个三角形，我们有

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

或

$$L^2 = c^2 t_3^2 - u^2 t_3^2 = (c^2 - u^2) t_3^2.$$

由此可得

$$t_3 = L / \sqrt{c^2 - u^2}.$$

从C'返回的路程与此相同，这可从图形的对称性上看出；所以返回用的时间也相同，因而整个时间是 $2t_3$ 。稍微改变一下形式，我们可以写成

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (15.5)$$

现在我们就能够比较两条光线所需的时间了。在（15.4）和（15.5）两式中，分子是相同的，它表示在装置静止不动的假定下光所取的时间。在分母中，除非 u 可以与 c 相比拟，不然 u^2/c^2 就很小。分母代表了由于装置运动而引起的时间上的修正。但必须注意，这些修正是不相同的——到达C来回所花的时间略小于到达E来回所花的时间，尽管两面镜子离B等距离，而我们所要做的就是精确地把这个差别测量出来。

这里产生一个次要的技术性问题——假设两段长度 L 并不精确相等，怎么办？事实上，我们肯定不能使它们完全相等。在这种情况下，我们只要把装置转过 90° ，使BC保持在运动的方向上，而BE则垂直于运动的方向。于是任何长度上的微小差别都变得不重要，我们要寻找的只是在装置转动时干涉条纹的移动。

在进行实验时，迈克耳逊和莫雷将仪器调整得使BE接近于平行地球的运动轨道（在白天和夜晚的一定时刻），地球的轨道速度约 $18 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ ，那么，在一昼夜的某个时刻和一年之中的某些时候任何“以太漂移”都至少应有这么大。仪器的灵敏度足以观察到这种效应，但是，并没有发现时间上的差别——地球通过以太的速度无法被检测到。实验的结果说明不存在这种效应。

迈克耳逊-莫雷实验的结果令人迷惑不解和十分困扰。摆脱这个绝境的第一个有成效的观念是洛伦兹想到的。他提出，物体运动时会收缩，收缩只发生在运动方向上。这样，如果物体静止时长度为 L_0 ，那么当它以速度 u 平行于其长度方向运动时，新的长度 $L_{\parallel}$ 则为

$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (15.6)$$

当将这个修正应用于迈克耳逊-莫雷干涉仪时，从B到C的长度没有改变，但是从B到E的长度缩短至 $L \sqrt{1 - u^2/c^2}$. 因此，式（15.5）没有改变，但式（15.4）中的 L 必须按式（15.6）而改变. 这样做以后，我们得到

$$t_1 + t_2 = \frac{(2L/c) \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (15.7)$$

将此结果与式（15.5）作比较，我们看到 $t_1 + t_2 = 2t_3$ 。所以如果仪器按刚才所说的方式缩短的话，我们就能够理解为什么迈克耳逊-莫雷实验根本没有测出这种效应。收缩假设虽然成功地解释了实验的负结果，但却也被认为这只是专门用来解释所遇到的困难而发明的，因而是过于牵强的。然而在用作发现以太风的许多其他实验中，也都出现了类似的困难。看来这是大自然反对人类的“阴谋”，它引进了某种新的因素来破坏每一个人原来以为应当测出速度 u 的实验现象。

人们终于认识到，正如庞加莱指出的那样，整个阴谋本身乃是一条自然法则！庞加莱于是便假定说，应当存在 这么一条自然定律，即不可能用任何 实验来发现以太风；也就是说，不可能测定绝对速度。

§15-4 时间的变换

在检验收缩的概念是否与其他实验事实相协调时，结果发现假如时间也用方程组（15.3）中第四个变换加以修正的话，那么每一件事就都很正确。这就是为什么从B到C再返回的过程中所花的这段时间 $2t_3$ 由那个在飞船上做实验的人算出时与由另一个观看飞船飞行的静止观察者算出的结果不一样的原因，对于在飞船上的人来说时间就是 $2L/c$ ，但对另一个观察者来说，时间就是 $(2L/c)/\sqrt{1-u^2/c^2}$ （式15.5）。换句话说，当一个外部观察者看到飞船中的人点燃雪茄烟时，所有的过程看来都比正常情况慢，而对飞船上这个人来说，每件事情都以正常方式进行。所以，不仅是长度需要缩短，时间测量仪器（“时钟”）显然也必须减慢。也就是说，从飞船上的人看来，钟记录下的时间过去一秒钟时，对于外面的人来说，它指示的是 $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ s。

这种运动系统中的时钟减慢是非常奇特的现象，值得解释一下。为了理解这一点，我们必须看看钟的机构，并且注意它走动时的情况。由于这样做是相当困难的，我们将只选取一种非常简单的钟。我们所选择的是一个相当简陋的钟，但在原则上它是能工作的：这是一根米尺，两端各有一面镜子，当我们在镜子间发出一个光信号时，光信号将一直来回传送着，当它往下跑时，每一次都会使这个钟“滴答”响一声，就像一个标准“滴答”钟一样。我们制作两个这样的钟，其长度完全相同，并把它们放在一起起动，使之同步。此后它们就会一直走得一样，因为它们的长度是相同的，光速也总是 c 。我们把其中一个钟让那个飞船上的人带着，他将尺的方向摆成垂直于运动的方向，这样，尺的长度不会发生变化。我们怎么知道垂直的长度不会发生变

化呢？观察者和飞行者可以约好在擦过的一瞬间彼此在对方的 y 尺上刻下标记。根据对称性，两个标记必定具有同样的 y 和 y' 坐标，不然的话，当这两个人聚到一起比较结果时，有一个标记会高于或低于另一个标记，从而就能断定究竟谁在运动。

现在我们来看一下正在运动的钟上发生什么情况。在把钟带上飞船之前，那个人同意它是一个良好的、标准的钟，以后在飞船飞行中他也没有发现任何异常的现象，如果他发现了，就能知道自己在运动，因为假如有任何事情因运动而变化，他就能断定自己正在运动。但是相对性原理认为在匀速前进的系统中这是不可能的，可见不会产生任何变化。另一方面，当那个外部观察者在飞船的钟经过旁边时，他看到在镜子之间来回传送的光线“真正”取的是一条“之”字形的路径，因为尺总是横向运动的。我们在迈克耳逊-莫雷实验中已经分析过这种“之”字形运动。假定说，在一定时间内，尺朝前运动的距离正比于 u ，如图15-3所示，在同样时间内，光经过的距离正比于 c ，那么垂直距离就正比于 $\sqrt{c^2 - u^2}$ 。

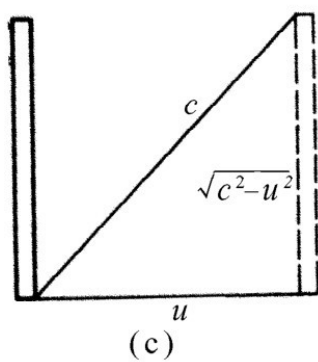
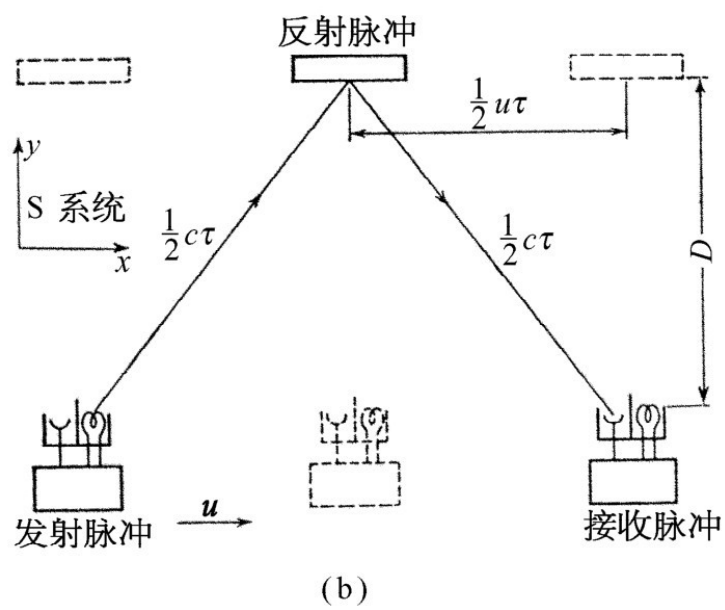
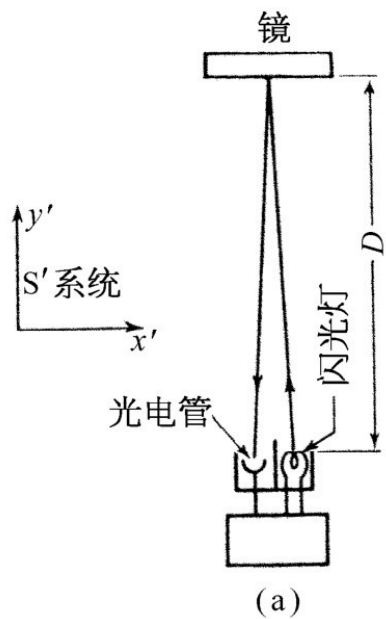


图15-3 (a) 一个“光钟”静止在 S' 坐标系中；(b) 一个同样的，相对于 S 坐标系运动的钟；(c) 在正在运动的“光钟”中，光束经过的斜向路程示意图

这就是说，运动钟内光来回跑动的时间要长于静止钟内的时间。因此，对于运动钟来说，滴答声之间的表观时间以与图中所示的直角三角形的斜边同样的比例增长。（这就是我们方程式中平方根式的由来。）从图中也可以明显地看出 u 越大，运动的钟走得越慢。不仅这一类特定的钟会走得慢，只要相对论是正确的话，无论按什么原理工作的任何其他钟也都会慢下来，并且是以同样的比例慢下来——我们毋须进一步分析就可以说这句话，为什么如此呢？

为了回答这个问题，假定我们另外有两只做得完全相同的利用齿轮的钟，或者是根据放射性衰变或其他原理的钟。然后我们校准这些钟，使其与我们原先的钟严格同步。当光在先前的两只钟上来回，并在到达时发出滴答声，新的钟也完成了某种循环，它们同时以双重符合的闪光、响声或其他信号表明这一点。在这两只钟中我们取一只放到飞船上去，和先前那只钟放在一起。也许这只钟不会变慢，而与那只静止的同样的钟走得一样，这样就与另一个运动钟不一致了。嘿！假如果真发生这种事，飞船上的人就能利用他的两只钟之间的不一致来确定飞船的速度，但是，我们已经假定这是不可能的。我们毋须知道任何有关会使新的钟产生这种效应的机理——我们只知道，不管理由如何，它都将同先前那只钟一样变慢。

现在，假如所有的运动钟都变慢，测量时间的任何方式都得出较慢的时间节拍，那么我们就得说：在一定的意义上飞船中的时间本身变慢了。在这里，所有的现象——人的脉搏，他的思维过程，他点燃雪茄烟的时间，以致他成长衰老的过程——所有这些事都必定以同样的比例变慢，因为他无法说出他正在运动。生物学家和医生有时会

说：在飞船上癌的扩散所需的时间不一定会延长，但是从现代的物理学家来看这几乎是肯定的，不然，人们就能利用癌的扩散速度来确定飞船的速度了！

时间随着运动而变慢的一个非常有趣的例子与 μ 子有关。这是一些经过平均寿命 2.2×10^{-6} s后会自行蜕变的粒子。这种粒子可以在到达地球上的宇宙射线中找到，也可以在实验室里由人工制造。在射向地球时，其中有些粒子在半空中就蜕变了，其余的则在与物体碰撞而被留下之后才蜕变。很清楚，即使 μ 子的速度同光一样快，在这样短的寿命内，它所走过的路程也不会超过600 m以上。但是，虽然 μ 子是在大气层的顶部，即大约10 km高的地方产生的，但是我们在大气层下面的实验室里的宇宙线中也确实找到了它们。这怎么可能呢？答案是：不同的 μ 子各以不同的速度运动，其中有一些十分接近于光速。从它们本身的观点来看，它们只生存了大约2 μ s，但是从我们的观点来看，它们的寿命要长得多——长到可以使它能到达地面。时间增长的因子已知是 $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ 。对于各种速度的 μ 子，人们非常精确地测量了它们的平均寿命，其数值与上述公式相当吻合。

我们并不知道为什么 μ 子会蜕变，或者它的内部机理是什么，但是我们确实知道它的习性符合于相对论原理。这就是相对论原理的用途——它使我们甚至对那些知之不很多的东西作出预言。例如，在我们对于什么是使 μ 子蜕变的原因获得一些概念之前，还是能够预言到，当它以光速的9/10的速度运动时，其所能生存的表观寿命为 $(2.2 \times 10^{-6}) / \sqrt{1-9^2/10^2}$ s；我们的这种预言是成功的——这是一件好事情。

§15-5 洛伦兹收缩

现在，我们回到洛伦兹变换式（15.3）上来，并试图更好地理解坐标系 (x, y, z, t) 与 (x', y', z', t') 之间的关系。这些坐标系我们将分别称为S和S'系或乔和莫系。我们已经看到，第一个等式是建立在洛伦兹的沿 x 方向的收缩这个假设上的；我们如何来证明发生这样一种收缩呢？在迈克耳逊-莫雷实验中，我们根据相对论原理现在理解到，横臂BC不可能改变长度；然而，实验得到的结果为零就要求两个时间必须相等。所以，为了使实验得出零结果，看来纵臂BE必须缩短一个因子 $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ 。从乔和莫所做的测量来说，这个收缩意味着什么呢？假定随同S'系沿 x 方向运动的莫是在用米尺测量某点的 x' 坐标。他用尺量了 x' 次，因此他认为这段距离是 x' m。但从S系的乔看来，莫却用了一根缩短了尺，所以所测得的“真实”距离应当是 $x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$ m。于是，当S'系离开S系跑过了距离 ut 时，S上的观察者将会说，在他的坐标系中测得的同一点的距离是

$$x = x' \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut \text{ 或 } x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

这就是洛伦兹变换的第一个等式。

§15-6 同时性

同样的情况表明，由于时间尺度上的不同，分母表示式也被引进到洛伦兹变换的第4个等式中。这个等式中最有趣的一项是分子中的 ux/c^2 项，因为它是全新的，而且是未曾预料到的。那么这究竟意味

着什么呢？如果我们仔细地来看一下这个情况，我们可以发现，发生在不同地点的两个事件，在S'中的莫看来发生于同时，但在S中的乔看来，它们并不发生于同时。如果一个事件在 x_1 处发生于时间 t_0 ，另一个则在 x_2 发生于时间 t_0 （同一时刻），那么我们发现，两个相应的时间 t'_1 与 t'_2 相差一个量

$$t'_2 - t'_1 = \frac{u(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

这种情况称为“异地同时性的破坏”。为了使这个概念稍为清楚一些，让我们考虑下面一个实验。

假设有一个人在运动的宇宙飞船上（系统S'）的两端各放置一只钟，并且想弄明白这两只钟是否已对准。怎样使这两只钟对准呢？有许多方法：一个方法只需要很少一点计算，这就是首先精确地确定两只钟之间的中点。然后从这个位置上发出一个光信号，这个光信号将以同样的速度沿两条路径传播，而且非常清楚将同时到达两只钟。信号的这种同时到达性可以用来把钟对准。我们假定S'中的人是用这种特殊方法对准他的钟的。我们再看一下S系统中的一个观察者是否会同意这两只钟已经对准。S'系统中的人相信这一点，因为他不知道他正在运动。但是S系统中的人则推论说，由于宇宙飞船向前运动，飞船前端的一只钟将离开光信号而去，因此为了追到它，光必须走过大于一半距离的路程；但后面的一只钟却迎着光信号而去，所以这段距离就较短。因此，信号会先到达后面一只钟，虽然S'中的人认为信号是同时到达的。因此我们看到，当宇宙飞船中的人认为两个地方的时

间是同时的时候，在他的坐标系中的两个相等的 t' 值，必须对应于另一个坐标系中的两个不同的 t 值！

§15-7 四维矢量

让我们再看看，从洛伦兹变换中还可以发现一些什么。有趣的是，可以注意到 x 项与 t 项之间的变换在形式上与我们在第11章中对于坐标系的转动曾研究过的 x 项和 y 项的变换非常相似。在那里我们有

$$\begin{aligned}x' &= x \cos\theta + y \sin\theta, \\ y' &= y \cos\theta - x \sin\theta,\end{aligned}\tag{15.8}$$

可见新的 x' 项混合了原来的 x 与 y ，新的 y' 项也混合了原来的 y 与 x ；与此相似，在洛伦兹变换中，我们发现新的 x' 是 x 与 t 的混合项，新的 t' 是 t 与 x 的混合项。这样，洛伦兹变换就类同于一种转动，不过这是一种在空时中的“转动”。这看来是一个奇怪的概念。这种与转动的类比，可以由下列量的计算而得到核实

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.\tag{15.9}$$

在这个等式中，每一边的前三项在三维几何中所代表的是一点与原点之间的距离（一个球面）的平方。这个平方在坐标轴的转动下保持不变（不变量）。与此相似，式（15.9）表明，存在着包含时间在内的某一种组合，它在洛伦兹变换下也是不变的。这样，与转动的类比就完全了，而且这是这样一类比，即矢量，也就是其中包含与坐标和时间以同样方式转换的“分量”的那些量，对于相对论也是有用的。

于是我们试图把矢量的观念加以扩展，使其包括时间的分量，而在此以前，我们认为它只有空间分量。这就是说，我们期望将有一种具有四个分量的矢量，其中三个同一般矢量的分量一样，而与这些分量一起还加上第四个分量，它是时间部分的类比项。

这个概念将在后面几章中继续加以分析，在那里我们将看到，如果把前一节中的观点应用于动量时，那么变换将给予我们三个空间部分，它们如同通常的动量分量一样，另外还有第四个分量，也就是时间部分，那正是能量。

§15-8 相对论动力学

我们现在已经为更一般地研究在洛伦兹变换下力学定律将采取什么形式作好了准备。〔到目前为止，我们说明了长度和时间如何变化，但没有说明我们是如何得到 m 的修正公式（式15.1）的。我们将在下一章中来加以说明。〕为了看出爱因斯坦对牛顿力学的质量 m 进行修正的重要意义，我们从牛顿第二定律出发，即力是动量的变化率为

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

动量仍然是 $m\mathbf{v}$ ，但当我们用新的 m 时，它就变为

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (15.10)$$

这就是爱因斯坦对牛顿定律的修正。在这种修正下，如果作用和反作用仍然相等（这不一定指每个时刻，而就最终结果来说是相等），那么动量守恒仍像以前一样成立，但是守恒的量，不再是原来的具有不变质量的 $m v$ ，而是如式（15.10）所表示的，具有经过修正的质量的量，如果在动量公式中考虑到这种变化，那么动量守恒定律仍然有效。

现在我们来看看，动量如何随速度而变化。在牛顿力学中，它正比于速度，而且按照式（15.10）在速度与光速相比甚小的一个相当大的范围内，它在相对论力学中近乎与之相同，也正比于速度，因为平方根这个因子与1相差甚微。但是当 v 几乎等于 c 时，分母的平方根趋向于零，因此动量趋向于无穷大。

如果有一个恒力作用在一个物体上很长时间，那么会出现什么情况？牛顿力学认为，物体将不断获得速度，直到它的运动超过光速。但是在相对论力学中，这是不可能的。在相对论中，物体不断得到的不是速度，而是动量。动量可以因为质量在不断增加而持续增大。经过一定时间后，实际上已不存在那种在速度变化含义上的加速运动，但是动量却继续在增加。自然，如果一个力只使物体的速度产生非常小的变化，我们就说这个物体具有很大的惯性。这正是我们的相对论质量公式所指出的〔见式（15.10）〕：当 v 大到接近于 c 时，惯性是非常大的。作为这种效应的一个例子，我们举出，在加利福尼亚理工学院所使用的同步加速器中，为了要偏转高速电子，所需的磁场的强度要比依据牛顿定律所预言的大2000倍。换句话说，同步加速器中的电子的质量为它们正常质量的2000倍，就如同一个质子的质量那么大！ m 是 m_0 的2000倍，意味着 $(1 - v^2/c^2)$ 必定为 $1/4000000$ ，也就是说 v^2/c^2 与1的差别只是四百万分之一。或者说 v 与 c 的差别只有 c 的

八百万分之一。所以电子的速度非常接近于光的速度。如果电子与光同时开始从这个加速器射到邻近一个实验室（约700 ft远），那么谁先到达呢？当然是光，因为光总是跑得更快一些^[1]。但是早到多少时间呢？回答起来太麻烦了，我们还是说光所超前的路程有多少：约为1/1000 in，或者说一张纸的厚度的1/4！当电子跑得这样快时，它们的质量是非常巨大的，然而它们的速度不会超过光的速度。

现在我们再看看质量的相对论效应所具有的其他一些结果。考虑在一个小的容器中气体分子的运动。当气体被加热时，分子的速度就增加，因此，它的质量也会增加，而气体变重了。当速度较小时，表示质量增加的一个近似公式，可以利用二项式定理把

$$m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

展开为幂级数而得到。我们得到

$$m_0 (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \frac{3}{8}v^4/c^4 + \cdots\right).$$

从这个表示式可以清楚看出，当 v 较小时，级数收敛得很快，在前二项或前三项之后的各项可以忽略不计。因而我们可以写为

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (15.11)$$

其中，右端的第二项表示由分子的速度而来的质量的增加。由于温度升高时， v^2 与之成正比地增加，所以我们可以说，质量的增加正比于温度的增加。由于 $m_0 v^2/2$ 在原来的牛顿含义中是动能，所以我们也

可以说，整个气体的质量的增加，等于动能增加的量除以 c^2 ，或者说 $\Delta m = \Delta (\text{K.E.}) / c^2$ 。

§15-9 质能相当性

上面的观察给了爱因斯坦一个启发，使他想到，如果我们说物体的质量等于该物体总的能量含量除以 c^2 ，那么一个物体的质量就可以表示得比式（15.1）更为简单。如果式（15.11）乘以 c^2 ，则结果为

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \cdots, \quad (15.12)$$

这里，左端的一项表示一个物体的总能量，右端的后面一项可以认为是通常的动能。爱因斯坦把很大的常数项 m_0c^2 解释为该物体总能量的一部分，是一种通常称为“静能”的内在能量。

让我们跟着爱因斯坦来探究物体的能量总是等于 mc^2 这个假设会得出一些什么结论。作为一个有趣的结果，我们将找出表示质量随速度而变化的公式（15.1），而迄今为止我们只是把它作为一个假设来看待。我们从处于静止状态的一个物体出发，其能量为 m_0c^2 。然后对这个物体施加一个力。这个力使物体开始运动，并给予它动能；因此，由于能量增加，质量也增加——这已包含在原来的假设之中。只要力继续作用在物体上，能量和质量两者都会继续增加。我们已经看到（第13章），能量对时间的变化率等于力乘以速度，或

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (15.13)$$

我们还看到 [第9章, 式 (9.1)] $F = d(mv)/dt$ 。当这些关系与 E 的定义结合在一起, 式 (15.13) 就变为

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = v \cdot \frac{d(mv)}{dt}. \quad (15.14)$$

我们希望解这个关于 m 的方程。为此, 我们先用一点数学技巧, 即在式子两端各乘以 $2m$, 这就把方程变为

$$c^2(2m) \frac{dm}{dt} = 2mv \cdot \frac{d(mv)}{dt}. \quad (15.15)$$

我们要除去微商, 这可以在两端用积分来做到。可以看出量 $(2m) \frac{dm}{dt}$ 是 m^2 的时间微商, 而 $(2mv) \cdot d(mv)/dt$ 则是 $(mv)^2$ 的时间微商。这样, 等式 (15.15) 就等于

$$\frac{c^2 d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt}. \quad (15.16)$$

假如两个量的微商相等, 它们本身最多只差一个常数, 比如说 C 。这就使我们能写成

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + C. \quad (15.17)$$

现在必须把这个常数 C 定义得更清楚一点。由于式 (15.17) 必须对所有的速度都成立, 所以我们可以选择 $v=0$ 这个特殊情况, 并且说这时的质量是 m_0 。将这些值代入等式 (15.17), 得出

$$m_0^2 c^2 = 0 + C.$$

现在我们可以把这个 C 值代入式（15.17）中，于是得到

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2. \quad (15.18)$$

除以 c^2 ，再把各项整理一下后得

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2,$$

由此便得

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.19)$$

这就是式（15.1），也正是为了使式（15.12）中质量与能量之间相符合所必要的一个公式。

通常说来，能量的这种变化只表示质量上极其微小的变化，因为平时我们不可能从一定量的物质中产生很多能量；但是，在原子弹爆炸中，如果其能量相当于20 000 t TNT炸药，就可以知道爆炸后的尘埃将比反应材料的原有质量轻1g，因为，按照关系式 $\Delta E = \Delta (mc^2)$ ，所释放的能量相当于1g的质量。这种质能等价性的理论已为由物质湮没而完全转化为能量的实验出色地证实了：一个负电子与一个正电子在静止时质量各为 m_0 ，当它们碰到一起时，会蜕变成两束 γ 射线，测得各带有 $m_0 c^2$ 的能量。这个实验为确定与粒子的静止质量的存在相关的能量提供了一个直接的方法。

[1] 在同可见光的比赛中，由于空气的折射率，实际上电子将赢得胜利。但 γ 射线会稳操胜券！

第16章 相对论中的能量与动量

§16-1 相对论与哲学家

在这一章中，我们将继续讨论爱因斯坦和庞加莱的相对性原理，因为它们影响着我们的物理观念以及人类思维的其他分支。

庞加莱以如下方式表述了相对性原理：“按照相对性原理，对于一个固定的观察者与对于一个相对于他作匀速运动的观察者来说，描述物理现象的定律必须是相同的，因而我们没有，也不可能有任何一种方法去辨认我们是否参与了这样一种运动。”

当这种观念披露于世时，在哲学家中引起了很大的骚动，特别是那些“鸡尾酒会哲学家”。他们说：“噢，这很简单：爱因斯坦的理论表明，一切都是相对的！”事实上，不仅是在鸡尾酒会上所见到的那些哲学家（为了不使他们难堪，我们就称他们为“鸡尾酒会哲学家”），而且数目多得令人吃惊的哲学家们都纷纷声称：“一切皆相对，此乃爱因斯坦之推论，它给予吾等之观念以深远的影响。”他们还补充说：“物理学亦已表明，现象有赖于人们的参照系。”诸如此类的话我们已听得很多，但是要弄清楚它们的含义则非常困难。大概原来所指的参照系，就是指我们在对相对论的分析中所用到的坐标系。这样，“事物有赖于人们的参照系”这个事实，就被设想为曾给予现代观念以深刻的影响。人们很可能对此感到不解，因为归根结底，事物依赖于一个人所抱的观点这件事是如此简单，为了要发现它，肯定不会有什么必要到

物理学的相对论中去找麻烦。任何一个在街上散步的人肯定都明白，他所看到的一切取决于他的参照系，因为当一个过路人走近他时，他首先看到的是那个人的前面，而后再看到其后面；在据说是源出于相对论的大多数哲学中，没有比“一个人从前面看与从后面看不同”这种说法更深刻的了。几位盲人把大象描写成几种不同的样子，这个古老的故事或许是哲学家对相对论所抱有的观点的另一个例子。

但是在相对论中，一定具有比刚才“一个人从前面看与从后面看不同”那种简单的说法更为深刻的含义。相对论当然要比这种说法深刻得多，因为我们能够借助于它作出确定的预言。如果单从这样简单的观察居然能够预知自然界的行爲，那么它一定是相当令人吃惊的。

也有另一学派的哲学家，他们对于相对论感到很不舒服，因为相对论断定如果不往外看，我们就无法确定我们运动的绝对速度，而这些人则说：“一个人不往外看就不能测出他的速度，那是很明显的。不往外看而去谈论一个物体的速度毫无意义，这也是不证自明的一件事；物理学家相当笨拙，因为他们的想法不是这样，可是现在总算使他们明白过来情况就是这样。只要我们哲学家认识到物理学家所思考的问题是什么，那么我们会立即通过大脑来判断，不往外看就不可能说出一个人的运动有多快，这样我们就会对物理学作出巨大贡献了。”这样的哲学家总是有的，他们在我们周围喋喋不休地企图告诉我们一点什么东西，但是，实际上他们从未理解过这类问题的细致和深刻之处。

我们之所以无法鉴别绝对运动，乃是实验的一个结果，而不是像我们所能很容易想象的那种只是单纯思维的结果。首先，牛顿就已确实认为，假如一个人沿直线作匀速运动，那么他就不能说出自己跑得有多快。事实上，牛顿最早说明了相对性原理，上一章中的一段引文就

是他对此的陈述。那么，为什么在牛顿时代哲学家们就没有提出“一切都是相对的”或其他别的什么来喧哗一番呢？这是因为直到麦克斯韦提出电动力学理论，才有物理定律认为人们不往外看能够测定他的速度；不久就从实验上发现，这是不行的。

那么，一个人不往外看就无法知道他究竟运动得多快这一点是绝对的，肯定的，哲学上必然的吗？相对论的结果之一是发展了一种哲学，这种哲学认为：“你只能定义你能测量的东西！因为非常明显，一个人如果不去看他相对于什么在测量速度，那么就无法测量这个速度，所以很清楚，谈论绝对速度是毫无意义的。物理学家应该领会到，他们所能谈论的只是那些他们所能测量的东西。”但是整个问题在于：人们是否能定义绝对速度这个问题是与下一个问题相同的，即人们是否在一个实验中能不往外看就觉察到他是否在运动。换句话说，某一事物是否可以测量，并不是由纯粹思维所能先验地予以决定，而是只能由实验来决定。假定我们已知光的速度为 $186\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ ，那么人们将会发现，没有几个哲学家会沉着地说：“这是不证自明的，如果光在汽车中的传播速度为 $186\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ ，汽车的车速为 $100\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ ，那么对于地面上的观察者来说，光的速度也是 $186\,000\text{ mi}\cdot\text{s}^{-1}$ 。”对于这些哲学家来说这是一个令人吃惊的事实；正是这些认为这是很明显的人，当你告诉他们一件特殊的事实的时候，他们就认为这不是那么明显了。

最后，甚至还有这么一种哲学，它认为除非我们往外看，否则我们就不能觉察任何运动。在物理学中这是根本不正确的。诚然，人们无法觉察沿直线的匀速运动，但是如果整个房间在转动，那么我们就一定能知道它，因为每个人将被掷到墙上——这里有各种各样的“离心”效应。利用所谓傅科（Foucault）摆的方法，地球的绕轴转动可以

不用观察星体而加以确定。因此，“一切都是相对的”这句话并不正确；只有匀速运动在不往外看时是觉察不到的。绕固定轴的匀速转动是可以觉察到的。当把这一点告诉一个哲学家时，他会十分心烦意乱；他实在不能理解这件事，因为在他看来，不往外看而能确定绕轴转动似乎是不可能的。如果这个哲学家是一个相当出色的哲学家，那么过一段时间后他可能会回过头来对我们说：“我明白了！我们确实并没有绝对转动这样一种事；你知道，实际上我们是相对于星体在转动。因而星体对物体所施加的某种影响必然引起了离心力。”

现在就我们所知的一切情况来说，那是对的；目前我们还没有办法可以告诉你，如果周围没有星体或星云，那么是否还会存在离心力。我们没有可能去做这样一个实验，先把所有的星云移开，而后去测量地球的转动，所以我们也就不知道。我们必须承认这位哲学家可能是对的。因此他高兴地回转身来说：“世界最终变成这个样子是绝对必要的，即绝对的转动是毫无意义的，它只是相对于星云而言的。”于是我们对他说：“那么，我的朋友，相对于星云所作的匀速直线运动，不应该在一辆汽车内产生任何效应这一点是明显的还是不明显的呢？”现在，运动已不再是绝对的，而是相对于星云的，它变成了一个神秘的问题，即一个只能用实验来回答的问题。

那么，什么是相对论对哲学的影响呢？如果我们只限于去谈这种意义上的影响，例如相对论原理给物理学家带来了哪些新的观念和启示，那么我们可讲一下其中的如下几点。首先，我们的一个发现主要是，有些概念即使在长时期内都被认为适用，并且得到了十分准确的验证，然而它们仍然可能是错误的。牛顿定律在这么多年被视为似乎是正确的之后，居然被说成是错误的，这显然是一件使人震惊的发现。当然，很清楚不是实验错了，而只是因为这些实验是在有限的速

度范围内完成的，而这些速度之小，不可能使相对论效应明显地表现出来。但无论如何，我们现在对于物理定律已抱有一种远为谦逊的见解，即任何一件事都可能是错的！

第二，如果我们有一些“奇特”的观念，比如时间会随着运动而变慢，等等，那么，究竟我们是喜欢它们还是不喜欢它们，则是与此不相干的另一个问题。唯一与之有关的问题，便是这些观念是否与实验上的发现相一致。换句话说，“奇特的观念”只要符合于实验就行，而我们必须讨论钟的行为等等，其唯一的理由就是要说明，虽然时间膨胀的概念是多么奇怪，但它与我们测量时间的方式是协调的。

最后，第三个启示虽然略带一些技术性，但在我们研究其他物理定律时它证明是非常有用的，这就是要注意定律的对称性，或者更明确地说，就是要寻找这样一种方式使得定律在变换时能保持其原有形式不变。在讨论矢量理论时，我们曾看到，在转动坐标系时，运动的基本定律并没有改变，而现在我们又知道，在以一种特有的由洛伦兹变换所提供的方法改变时间和空间变量时，它们的形式也没有改变。因而，这个观念，即在什么形式或作用下基本定律仍保持不变，已被证明是一个非常有用的观念。

§16-2 孪生子佯谬

为了继续讨论洛伦兹变换和相对论效应，我们来考虑一个著名的所谓彼得（Peter）和保罗（Paul）的“佯谬”，并假定他们是同时出生的一对孪生子。当他们成长到能操纵宇宙飞船时，保罗以很快的速度飞了出去，彼得则仍留在地面。由于彼得看到保罗运动得这么快，所以从彼得的观点看来，保罗的钟似乎走慢了，他的心跳变慢了，思维

也迟缓了，每件事都延迟了。当然，保罗自己并没有感到出现任何异常情况，但是如果他在外面漫游了一段时间之后再回到地面，他将比在地面上的彼得年轻！这确实是对的，它是相对论的结论之一，而相对论是被清楚地证实了的。正像 μ 子运动时，它的寿命要延长一样，当保罗运动时，他的寿命也会延长。这件事只有在这些人眼光中才称为是一种“佯谬”，因为他们认为，相对论原理意味着一切运动都是相对的，他们说：“好，好，好，从保罗的观点看来，难道我们不是也可以说彼得正在运动，因而他应当衰老得慢一点吗？由于对称性，唯一可能的结果是，当他们会面时，大家的年龄应当相同。”但是，为了使他们能重新相遇并进行比较，保罗必须要么在旅途的终点停下来，并且将钟进行比较，要么更简单一些，他必须返回，而返回的那个人必定是正在飞行（或运动）的那个人，他知道这一点，因为他必须转过身来飞行。当他转过身来的时候，他的飞船上各种不寻常的事情就发生了——火箭射了出去，东西向墙上撞了过去，等等——而彼得则一点也没有感到什么。

所以，如果要叙述这条规则的话，就可以说：感觉到加速度和看到东西向墙上撞了过去等等的那个人，将是比较年轻的一个；这就是他们之间在“绝对”意义上的一个差别，而这肯定是正确的。当我们讨论运动的 μ 子的寿命变长这个事实时，作为例子我们使用了它们在大气中的直线运动。但是我们也可以在实验室里产生 μ 子，并用磁铁来使它们作曲线运动，即使在这种加速运动下，它们的寿命的延长与在直线运动的情况下完全一样。虽然还没有一个人具体地安排过一个实验，使我们能消除这个佯谬，但是我们可以把一个静止的 μ 子同一个跑完整个一圈的 μ 子相比较，这时肯定将会发现绕过整个一圈的 μ 子的寿命要长一些。虽然我们实际上还没有用整个一圈做过这样的实验，但其实这并不必要，因为一切事情都符合得很好。对于那些坚持认为

每个单独的事实都要直接得到证实的人，这或许不能使他得到满足。但是我们有充分把握来预言保罗转过整个一圈的那个实验的结果。

§16-3 速度的变换

爱因斯坦相对性与牛顿相对性之间的主要差异，在于把两个处于相对运动中的系统之间的坐标与时间联结起来的变换规律是不同的。正确的变换规律，也就是洛伦兹变换方程为

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{16.1}$$

这些等式对应于一种比较简单的情况，即其中两个观察者的相对运动沿着它们共同的 x 轴。当然也有可能沿着其他方向运动，但是最一般的洛伦兹变换则将由于所有四个量都混杂在一起而变得相当复杂。我们将继续使用这个较为简单的形式，因为它包含了相对论的所有主要特点。

我们现在来进一步讨论这个变换的推论。首先，有趣的是倒过来解这些等式。这就是说，这里有一组线性方程，它们是四个方程和四个未知数，可以倒过来解这些方程，即用 x' ， y' ， z' ， t' 来表示 x ， y ， z ， t 。结果是非常有意思的，因为它告诉我们，从“运动”坐标系的观点来看，“静止”坐标系会是什么样子。当然，由于运动是相对的和匀速的，所以“运动”的那个人，如果愿意的话也可以说：实际上是另

一个人在运动，而他自己则静止着。因为这另一个人是在沿着反方向运动，所以他应当得到同样的变换，但是速度要用相反的符号。这与我们在演算中所得到的完全相同，因而是协调的。假如得出的结果不是如此，那我们倒真有必要担心了！

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\y &= y', \\z &= z', \\t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{16.2}$$

其次，我们来讨论相对论中速度的叠加这个有趣的问题。我们还记得一个奇特的难题，即对于所有系统来说，光速都是 $186000 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ ，即使它们处于相对运动之中也是如此。像如下例子所说明的那样，这是较普遍的问题中的一个特殊情况。假定宇宙飞船内有一个物体以 $100000 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ 运动，飞船本身的速度是 $100000 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ ；从外部观察者的观点看来，飞船内这个物体是以多大的速度在运动？我们也许要说 $200000 \text{ mi} \cdot \text{s}^{-1}$ ，这就要比光速还快。这是非常使人沮丧的，因为不能设想它会跑得比光速还快！普遍的问题则如下所述。

假设在飞船内有一个物体，从飞船内一个人的观点看来，它以速度 v 运动，而飞船本身则相对于地面有一速度 u 。我们所要知道的是从地面上一个观察者的观点看来，这个物体以多大的速度 v_x 运动。当然，这还是一个在 x 方向上运动的特殊情况。此外，还存在着在 y 方向或任何方向上的速度变换；这些都可以在需要时加以导出。在飞船内物体的速度是 v_x ，这就说明位移 x' 等于速度乘以时间，即

$$x' = v_x t' \quad (16.3)$$

现在我们只要对一个在 x' 和 t' 之间具有关系式(16.3)的物体去计算它从外部观察者的观点看来的位置与速度是多少，因而我们只要简单地把式(16.3)代入式(16.2)，就得到

$$x = \frac{v_x t' + u t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (16.4)$$

但是我们在这里看到 x 是用 t' 表示的。为了得到外部观察者所看到的速度，我们必须用他的时间，而不是用另一个人的时间去除他的距离！所以我们也必须计算外部观察者所看到的时间，即

$$t = \frac{t' + u(v_x t')/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (16.5)$$

现在必须找出 x 与 t 之比，这就是

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_x'}{1 + uv_x'/c^2} \quad (16.6)$$

其中平方根已被消去。这就是我们所要求的定律：合速度，即两个速度之“和”，并不恰巧是两个速度的代数和（我们知道，不可能是两者的代数和，否则就会使我们陷于困境），而是为 $(1 + uv/c^2)$ 所“校正”了的。

现在我们来看看将会发生什么。假定你们在宇宙飞船内以光速的一半在运动，而飞船本身也在以光速的一半飞行。因此， $u = c/2$ ， $v = c/2$ ，而分母中的 $uv/c^2 = 1/4$ ，于是

$$v = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c.$$

所以在相对论中，“1/2”加“1/2”并不等于1，而只等于“4/5”。当然，低速可以很容易用熟悉的方法相加，因为只要速度与光速相比很小，我们就可忘掉 $(1+uv/c^2)$ 这个因子；但是在高速情况下，事情就完全不同，而且也变得非常有趣了。

我们来考虑一个极限情况。开一个玩笑吧！宇宙飞船里的那个人正在观察光本身。也就是说 $v=c$ ，而飞船是在以 u 运动。那么从地面上的人看来将会怎样？回答是

$$v = \frac{u + c}{1 + uc/c^2} = \frac{c(u + c)}{u + c} = c.$$

因此，如果飞船里有什么东西在以光速运动，那么从地面上的观察者的观点看来，它还是以光速运动！这很好，因为事实上，这正是爱因斯坦相对论首先打算要做到的——可见这个理论不错！

当然，也有一些情况，运动并不是在匀速移动的那个方向上进行的。比如飞船中可能有一个物体正好相对于飞船以速度 v_y ，“朝上”运动，而飞船则在“水平”地飞行着。这时，我们只要按照同样的方法去做，不过用 y 项而不用 x 项就是了，结果是

$$y = y' = v_y t',$$

所以，如果 $v_{x'}=0$ ，则

$$v_y = \frac{y}{t} = v_{y'} \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (16.7)$$

因此，侧向的速度不再是 $v_{y'}$ ，而是 $v_{y'} \sqrt{1 - u^2/c^2}$ 。这个结果我们是用代入与组合变换方程得到的，但我们也能由于如下理由而直接从相对论原理看出这个结果（再去探索一下总是好的，看看我们是否能找出其理由来）。我们已经看到过（图15-3）一只钟在运动时是如何走动的；在固定的地面坐标系看来，光线以速度 c 沿一定偏角前进，而在运动坐标系看来，则只是以同样速度沿垂直方向运动。我们曾经看到，在固定坐标系中光速的垂直分量比光速本身小一个因子 $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ （见图15-3）。但现在我们假定，让一个实物粒子在这同一只“钟”内来回跑动，其速度为光速的整分数 $1/n$ （图16-1），那么当粒子来回跑一次时，光将恰好走过 n 次。也就是说：“粒子”钟每一次的“滴答”声恰好与光钟的第 n 次“滴答”声相符合。当整个系统在运动时，这个事实仍然正确，因为符合一致的物理现象在任何参照系中仍将是符合一致的。因此，由于 c_y 小于光速 c ，粒子的速度 v_y 也必然要比对应的速度小同一个平方根因子！这就是平方根所以会出现在任何一个垂直速度中的原因所在。

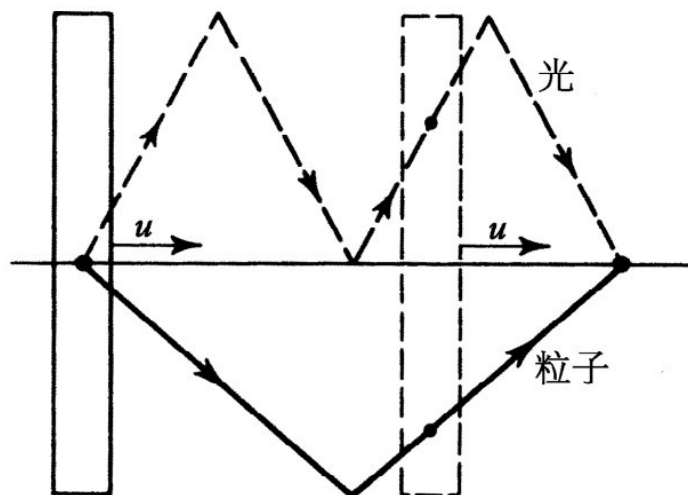


图16-1 光和“粒子”在一只运动的钟内的运动轨迹

§16-4 相对论性质量

在上一章中我们已经看到一个物体的质量随着其速度的变大而增加，但没有对此加以说明，这就是说，我们没有进行过类似于对钟的行为所作出的那样的论证。然而，我们能够证明，作为相对论加上少数几个其他合理的假设的结果，质量是必须按照这种方式变化的（我们必须说“少数几个其他假设”，因为只要我们还打算进行有意义的推理，那么，除非假定有某些定律已经成立，不然就不可能证明任何东西）。为了避免要去研究力的变换定律，我们将研究碰撞这个问题，在那里，除了假设动量和能量都守恒外，不需要知道有关力的任何定律。同样，我们将假设运动粒子的动量是一个矢量，而且总是指向速度的方向。然而我们将不像牛顿所做的那样，把动量假设为一个常数乘上速度，而只是把它假设为速度的某一函数。因此我们把动量矢量写成某一个系数乘上速度矢量

$$p = m_v v. \quad (16.8)$$

我们在系数上记一个下标“v”，为的是要提醒大家，它是速度的一个函数，而且我们也同意把这个系数 m_v 称为“质量”。当然，当速度很小时，它与我们过去在低速实验中所测得的质量是相同的。现在，我们试图从物理定律必须在每个坐标系中都相同这个相对论原理来论证 m_v 的公式必须是 $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。

假定我们有两个粒子，比如两个质子，它们完全相同，并且以精确相等的速率相向运动，它们的总动量为零。现在，可能出现什么情况呢？碰撞以后，它们的运动方向必须正好相反，因为如果不是正好相反，那么总的动量矢量就不会是零，动量也就不会守恒。它们还必须具有相同的速率，因为彼此之间是完全相类似的；事实上，它们的速率必须都与碰撞前相同，因为我们假定能量在这些碰撞中是守恒的。所以这种弹性碰撞是一个可逆碰撞，如图16-2（a）所示：所有的箭头长度相等，所有的速率大小相等。我们假定，这种碰撞总是可以任意安排的，即在这样一种碰撞中，可以出现任何角度 θ ，也可以用任何大小的速度。其次，我们注意到这同一个碰撞可以通过坐标轴的转动从不同的角度来观察。正是为了方便起见，我们将这样来转动坐标轴，使水平轴把它平均分成两半，如图16-2（b）所示。图中只是把坐标轴转动后的同一个碰撞重新画出而已。

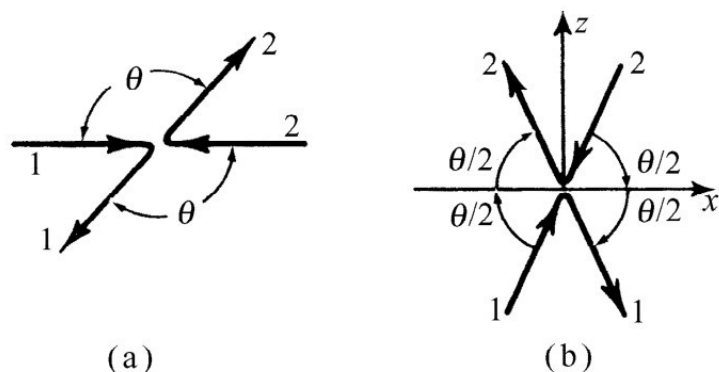


图16-2 两个以相等速率、相向运动的相同粒子所发生的弹性碰撞的两种视图

真正的技巧在于：我们从某个驱车前进的人的角度来观察这个碰撞，汽车的速度等于粒子1的速度的水平分量。那么，这个碰撞看上去像什么呢？就粒子1而言，它看上去在径直朝上跑，因为它已经没有那个水平分量，然后它又垂直往下落，这也是因为它没有那个水平分量。也就是说，碰撞看上去就如图16-3（a）所示那样。然而，粒子2却按另一种方式飞行，当我们驱车经过时，它看来以更大的速度和较小的角度飞行，但是我们可以判断出碰撞前后的角度是相同的。我们以 u 表示粒子2的速度的水平分量，以 w 表示粒子1的垂直速度。

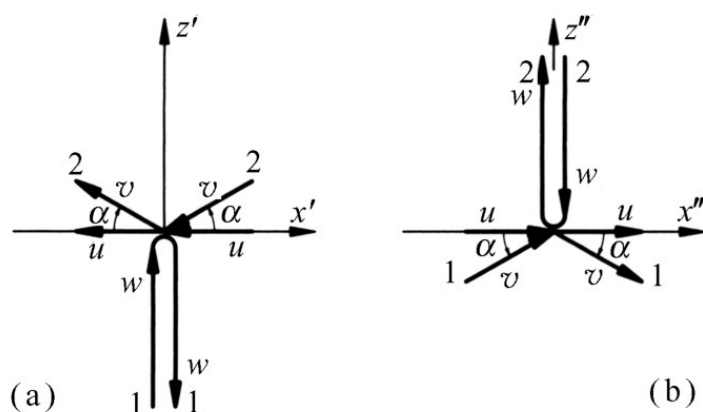


图16-3 从运动汽车上看上去的碰撞的另外两种视图

现在，问题是粒子2的垂直速度 $u \tan \alpha$ 是什么？假如我们知道的话，就可以利用垂直方向的动量守恒定律来得到动量的正确表示式。很清楚，水平方向的动量分量是守恒的：对于两个粒子来说碰撞前后都相同，对于粒子1来说，水平分量为零。所以我们只需要对垂直向上的分速度 $u \tan \alpha$ 应用守恒定律。但是，只要以另一种方式观察同样的碰撞，我们就可以求得朝上的速度！如果我们从以速率 u 向左边运动的车来观察图16-3（a）的碰撞，那么所看到的只是将图16-3（a）的情况“翻转过来”而已，如图16-3（b）所示。现在粒子2以速度 w 飞下又飞上，而粒子1得到了水平速度 u 。当然，现在我们知道速度 $u \tan \alpha$

等于什么了：它就是 $w\sqrt{1-u^2/c^2}$ [参见式(16.7)]。我们还知道图16-3(b)中垂直运动粒子的垂直动量变化是

$$\Delta p = 2m_w w.$$

(上式乘以2是因为它的运动先朝下再朝上。)而斜向运动的粒子具有一定的速度 v ，它的分量我们发现是 u 和 $w\sqrt{1-u^2/c^2}$ ，它的质量为 m_v 。因此这个粒子垂直动量的变化是 $\Delta p' = 2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2}$ ，因为，按照我们假设的定律式(16.8)，动量分量等于与速度数值相应的质量乘以速度在该方向上的分量。于是为了使总动量为零，垂直方向上的两个动量必须相抵消，因此，以速度 v 运动的质量与以速度 w 运动的质量之比必须为

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-u^2/c^2}. \quad (16.9)$$

我们取一个 w 是无限小的极限情况。如果 w 确实很小，那么很清楚， v 与 u 实际上是相等的。在这种情况下， $m_w \rightarrow m_0$ ，而 $m_v \rightarrow m_u$ ，于是，就得到一个重大的结果

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (16.10)$$

作为一个有趣的练习，我们现在检验一下，假定式(16.10)是正确的质量公式，那么式(16.9)是否对任意的 w 值都确实成立。注意，式(16.9)中所需的速度 v 可由直角三角形算出

$$v^2 = u^2 + w^2 (1 - u^2/c^2).$$

经过适当计算后，我们发现式（16.9）确实成立，虽然起先我们只是在 w 很小的极限情况下利用了这个等式。

现在，我们承认动量是守恒的，质量与速度的关系是由式（16.10）决定的，然后再继续看看我们是否还能得出别的什么结论。我们来考虑一种通常称为非弹性碰撞的过程。为了简单起见，假设属于同一类型的两个物体，以相同的速率 w 相向运动，彼此碰撞后结合在一起成为新的静止的物体，如图16-4（a）所示。我们知道对应于 w 的每个物体的质量 m 是 $m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$ 。如果我们假定动量守恒和相对论原理，就可以论证一件有关这个所形成的物体质量的有趣事实。我们设想有一个垂直于 w 的无限小的速度 u （对于有限的 u 值也可以同样处理，但是对无限小速度的情形更易于理解），并在一个速度为 $(-u)$ 的电梯上来观察这一碰撞。我们所见到的情况如图16-4（b）所示。复合物体的质量 M 是未知的。现在物体1以朝上的分速度 u 和实际上就等于 w 的水平分速度运动，物体2也是如此。碰撞后，质量为 M 的物体以速度 u 朝上运动， u 与光速相比是极小的，与 w 相比也很小。由于动量必须守恒，所以我们估算一下在朝上的方向上碰撞前后的动量。在碰撞前，动量 $p \approx 2m_w u$ ，碰撞后的动量显然为 $p' = M_u u$ ，但由于 u 是这样小，所以 M_u 基本上可以认为是 M_0 。这些动量按照守恒定律必须相等，所以

$$M_0 = 2m_w. \quad (16.11)$$

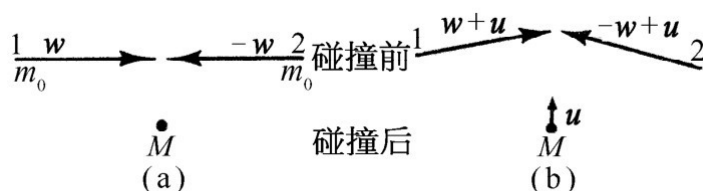


图16-4 质量相同的物体之间的非弹性碰撞的两种看法

两个相等的物体碰撞后所形成的那个物体的质量必定为进行碰撞的物体质量的两倍。你们也许会说：“当然，这就是质量守恒嘛。”但是并不那样容易，因为这些质量虽然比起它们静止时的质量来增加了，但对总的 M ，它们提供的不是处于静止时的质量，而是更多一些。令人惊奇的是，为了使两个物体碰撞时动量守恒成立，即使在碰撞后形成的物体处于静止状态，其质量也必须大于物体的静止质量！

§16-5 相对论性能量

在上一章中，我们论证了作为物体质量对速度的依赖关系与牛顿定律的结果，力对一个物体所做的总功引起的动能改变总是

$$\Delta T = (m_u - m_0)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2. \quad (16.12)$$

我们甚至还进一步推测全部能量是总质量乘以 c^2 。现在我们来继续这个讨论。

假定在 M 内仍可以“看见”发生碰撞的两个等质量的物体。例如，一个质子和一个中子“黏合在一起”，但仍在 M 内来回运动。虽然起初预料 M 的质量是 $2m_0$ ，但结果我们发现它并不是 $2m_0$ ，而是 $2m_w$ 。由于 $2m_w$ 是形成 M 时加入的质量，而 $2m_0$ 是在 M 中的物体的静止质量，因此复合物的过剩质量就等于带进去的动能。当然，这意味着能量有惯性。前面一章中我们讨论过气体的加热，说明了由于气体分子在运动，而运动的物体质量增大，当我们对气体加入能量后，它的分子运

动就加快，因而气体质量也变大。其实上述论证完全是一般性的，我们关于非弹性碰撞的讨论表明无论动能是否存在，这部分质量总是存在的。换句话说：如果两个粒子彼此靠近，产生势能或任何其他形式的能量，或者这两部分由于越过势垒、克服内力做功等等而使速度变慢，这时质量总是等于加入物体中的总能量这一点仍然正确。因而我们可以看到上面所推导的质量守恒等价于能量守恒。所以严格地说，像牛顿力学中那样的非弹性碰撞在相对论中是不存在的。按照牛顿力学两个物体碰撞后组成一个新的质量为 $2m_0$ 的物体是毋庸置疑的，它与将这两个物体慢慢地放在一起所形成的物体毫无区别。当然，从能量守恒定律我们知道，在这个新的物体内有较多的动能，但是按照牛顿定律，这并不影响质量。然而现在我们看到这是不可能的；因为在碰撞中包含了动能，结果所产生的物体的质量将更大一些，因此，可以说，它是一个不同的物体。当我们轻轻地把物体组合在一起时，所产生的物体的质量为 $2m_0$ ；当我们用力将物体组合在一起时，所产生的物体的质量更大一些。当质量不同时，我们就能识别出来。所以，在相对论中能量的守恒必定与动量守恒一同成立。

上面的讨论会产生一些有趣的结果。例如，假设我们有一个已测得质量为 m 的物体，如果发生某种情况使它分成两个相等的部分，各以速度 w 飞出，于是每个部分的质量将为 m_w 。现在如果这两块裂片沿途碰上许多物体从而使速度变慢直至停止，那时它们的质量将为 m_0 。试问当它们停止时，给予其他物体多少能量？按照我们前面证明过的定理，每一部分提供的能量是 $(m_w - m_0)c^2$ 。这么多能量就以热、势能或者别的什么形式留在其他物体里。由于 $2m_w = M$ ，所以释放的能量是 $E = (M - 2m_0)c^2$ 。这个等式曾用来估计原子弹中的核裂

变会释放多少能量（虽然许多碎片并不正好相等，而是近似相等）。铀原子的质量是已知的——在事前已测定过——铀原子裂变后产生的碘、氙等的质量也已知。这里的质量不是指原子运动时的质量，而是指它们静止的质量。换句话说， M 和 m_0 都已知。这样，将有关两个数相减，我们就能计算如果 M 可以分裂为“两半”的话将会释放多少能量。由于这个理由，在所有的报纸上都曾将可怜的老爱因斯坦称为原子弹之“父”。当然，所有这些只是意味着，倘若我们告诉他会有什么反应发生的话，他就能在事先告诉我们会有多少能量被释放出来。一个铀原子裂变时应当释放的能量大约在第一次直接试验前六个月就估计出来了，后来能量真的释放时，立即有人直接作了测量（如果爱因斯坦公式不起作用，他们不管怎样也得测量能量），当他们测量出能量时，就不再需要这个公式了。当然，我们不应该贬低爱因斯坦，而是应该批评报界和许多报道文章对在物理和技术的发展过程中究竟是什么促成什么所提出的议论。至于怎样使事情更有效地和更迅速地出现，这完全是另一回事。

这个结果在化学上也同样有效，比方说，如果我们测定二氧化碳的质量，并与碳和氧的质量相比，我们就能算出，当碳和氧组成二氧化碳时，会释放出多少能量。这里唯一的麻烦在于质量上的差别是如此之小，以致这件事在技术上很难实现。

现在，我们回到这个问题上来：是否应当把 $m_0 c^2$ 加到动能上，从今以后就说一个物体的总能量是 mc^2 呢？首先，假如我们仍能在 M 内看出 静止质量为 m_0 的组成部分，那么我们就可以说，复合物体的质量 M 中有一些是各组成部分的力学静止质量，有一些是各组成部分的动能，有一些是各组成部分的势能。但是我们发现，自然界中经历

上述那种反应的各种粒子，在世界各国无论用什么方式来进行研究，都还没有能看到内部的组成成分。例如，K介子蜕变成两个 π 介子时，的确遵从定律式（16.11），但是认为一个K介子由两个 π 介子组成则是无价值的观点，因为它也能蜕变为三个 π 介子！

因此我们有一种新的想法：我们毋须知道物体的内部结构；我们不能够，也不需要识别在粒子内部，哪一部分能量是粒子行将蜕变成的那些部分的静止能量。将一个物体的总能量 mc^2 分为内部组成部分的静止能量、动能和势能，既不方便，也常常不可能，我们只是简单地说粒子的总能量。我们对每个物体加上一个常数 $m_0 c^2$ 来“改变能量原点”，并且说，一个粒子的总能量是运动质量乘以 c^2 ，而当物体静止时，其能量就是静止质量乘以 c^2 。

最后，我们发现速度 v ，动量 P ，总能量 E 能以一个相当简单的方式联系起来。很奇怪，以速率 v 运动的物体的质量等于静止质量 m_0 除以 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 这样一个公式却很少使用。相反，下面两个式子很容易证明，结果则很有用：

$$E^2 - P^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad (16.13)$$

和

$$Pc = \frac{Ev}{c}. \quad (16.14)$$

第17章 时空

§17-1 时空几何学

相对论告诉我们在两个不同的坐标系里测得的位置和时间的关系与我们根据直观概念所想象的不一樣。透彻理解洛伦兹变换所包含的空间和时间的关系是十分重要的，因此，在本章中我们将较为深入地研究这个问题。

“静止”的观察者测得的位置和时间 (x, y, z, t) 和在以速度 u “运动”的宇宙飞船里的观察者所测得的相应的坐标和时间 (x', y', z', t') 之间的洛伦兹变换为

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{17.1}$$

我们来比较一下这些式子和式 (11.5)。式 (11.5) 也涉及在两个坐标系中的测量关系，不过在那里一个坐标系相对于另一个坐标系作转动

$$\begin{aligned}x' &= x \cos\theta + y \sin\theta, \\y' &= y \cos\theta - x \sin\theta,\end{aligned}$$

$$z' = z.$$

(17.2)

在此特例中，莫和乔用的坐标轴中的 x -轴和 x' -轴之间有一夹角 θ 。在上述各种情况中，我们看到带撇的量是不带撇的量“混合”：新的 x' 是 x 和 y 的混合，新的 y' 也是 x 和 y 的混合。

打一个比方来说：当我们观察一个物体时，有一个我们称之为“视宽度”和另一个我们称之为“深度”的概念。但是，宽度和深度这两个概念不是物体的基本特性，因为如果我们走开一点，从不同的角度来观察同一物体，就得到不同的宽度和深度，并且我们可以建立一些从旧的量和有关角度来计算新的量的公式。式(17.2)就是这样的一些公式。人们可以认为一个给定的深度是所有宽度和所有深度的一种混合。假如物体是永远不能移动的，而且我们总是从同一位置来观察一个给定物体，这时情况就完全不同了——我们将总是看到“真实”的宽度和“真实”的深度，它们好像具有完全不同的性质，因为一个表现为视张角，而另一个与眼睛的聚焦或直觉有关；它们好像是非常不同的两件事，而且永远不会混合。但是，由于我们能够从不同的角度进行观察，所以我们认识到深度和宽度从某种意义上来说，正好是同一事物的两个不同方面。

我们能否用同样的方式来看待洛伦兹变换呢？这里也有一个位置和时间的混合。空间量度和时间量度之间的差值产生了一个新的空间量度。换句话说，某人的空间量度，在另一个人看来，却掺入了一些时间的量度。上述比方使我们产生这样的概念：我们所观察的客体的“实际”（粗略地、直观地说）总是比它的“宽度”和“深度”更为重要，因为“宽度”和“深度”与我们如何观察物体有关；当我们移动到一个新的位置时，我们可以立即重新算出它的宽度和深度。但是，当我们以高速运动时，不能立即重新算出坐标和时间，因为我们还没有以接近

光速运动的实际经验，来鉴别时间和空间也具有相同的性质。这就像我们只能总是固定在一定的位置上来看某一物体的宽度，而不能这样或那样明显地移动我们的位置；如果我们能够的话，那么按照现在的理解，我们就应当能够看到一些别人的时间——比方说“滞后的”，即便是一点点。

因此，就像物体在普通的空间世界里是实在的，并能从不同的方向上被观察到一样，我们将试图在一种空间和时间混合在一起的新的世界里来想象客体。我们将认为，占有空间并延续了某一时间间隔的物体在新的世界里占有一个“小块”，而当我们以不同的速度运动时，我们就能从不同的角度观察到这个“小块”。这个新的世界是这样的几何实体，其中每一小块都占有位置并包含一定量的时间。我们称这个新的世界为时空。在时空中的一个给定点 (x, y, z, t) 称为一个事件。例如，可以设想，在水平方向作 x 轴，在另外两个方向作 y 和 z 轴，其中两两互成“直角”，并且“垂直”于纸面（！），在竖直方向上作时间轴。那么一个运动粒子在这个图中会是什么样子呢？如果粒子是静止的，它具有某一 x 值；随着时间的推移，它具有的 x 值不变，因此，它的“轨迹”是平行于 t 轴的一条直线 [见图17-1 (a)]。另一方面，如果它向前漂移，则随着时间的推移， x 将增大 [图17-1 (b)]。如果有一个粒子，开始时向外漂移，以后又逐渐地缓慢下来，那么它具有的运动就像图17-1 (c) 所示的那样。换句话说，一个永久的不蜕变的粒子在时空中用一条线表示。一个蜕变的粒子要用一条分叉线来表示，因为它在分叉点处开始变成两个粒子。

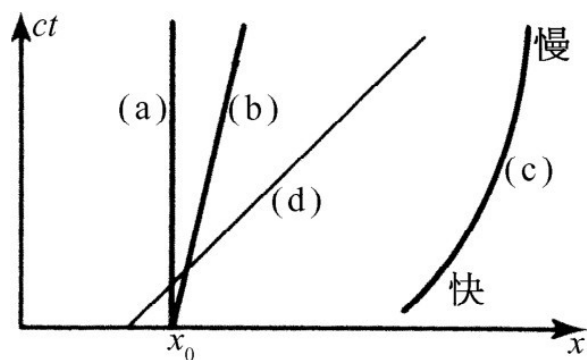


图17-1 三个粒子在时空中的轨迹：（a）静止在 $x = x_0$ 处的粒子轨迹；（b）以恒定速度在 $x = x_0$ 处开始运动的粒子轨迹；（c）以高速开始运动，但逐步缓慢下来的粒子轨迹；（d）光线运动的轨迹

光的情况怎样呢？光是以速度 c 运动的，因而应该用具有一定斜率的直线来表示〔图17-1（d）〕。

现在按照我们的新概念，假如一个粒子发生了某一给定事件，比如说，它在某一时空点突然蜕变成两个新粒子，并沿某些新的轨迹运动，而且这一有趣事件是发生在某一确定的 x 和 t 值处，那么我们或许会预期，如果这是有意义的话，只要取一对新的轴，并把它们转过一个角度，在这个新的系统里，我们将得到新的 t 和新的 x ，如图17-2（a）所示。但是，这是错误的，因为式（17.1）和（17.2）并不是完全相同的数学变换。例如，两者之间的符号就不一样，事实上一个是用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 项来表示，而另一个是一些代数量（当然，把代数量写成余弦和正弦的形式并不是不可能的，但实际上却不能这样做）。尽管如此，这两种表示式还是很相似的。我们将会看到，由于符号的不同，把空-时看成是一个实在的普通几何空间确实是不可能的。实际上，虽然我们不强调这一点，但可以证明，一个正在运动的人必须选用一组与光线成相同倾角的坐标轴，它的 x' 和 t' 如图17-2（b）所示，

须用平行于 x' 轴与 t' 轴的一种特殊投影得出。我们将不讨论这种几何，因为它用处不大，而用方程式来研究则更容易一些。

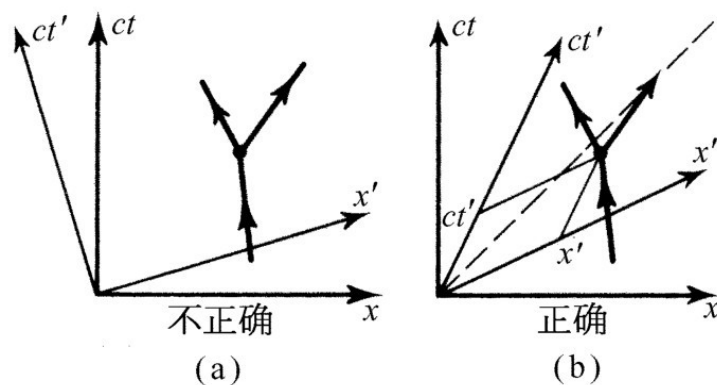


图17-2 对一个蜕变粒子的两种看法

§17-2 时空间隔

虽然时空几何不是通常意义下的欧几里得几何，但是存在一种与欧氏几何非常相似的几何学，不过它在某些方面有其特殊之处。如果这种几何概念是正确的，就应存在一些与坐标系无关的坐标和时间的函数。例如，通常在转动时，如果取两点，为了简单起见，一点取在 origin，另一点取在任何地方，两个系统具有同一原点，则从一点到另一点的距离在这两个系统中是相同的。这一性质与测量距离的特定方法无关。距离的平方是 $x^2 + y^2 + z^2$ 。那么，时空的几何情况如何呢？不难证明，这里也有一个量是不变的，即在变换前后组合 $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 不变

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (17.3)$$

因此就某种意义来说，这个量像距离一样，是“实在”的。我们把它称为两个时空点之间的间隔，在此例中，一个时空点取在原点（当然，实际上它是间隔的平方，就像 $x^2+y^2+z^2$ 是距离的平方一样）。由于是在不同的几何学中，所以我们给它起了个不同的名称，但值得注意的只是式中有几个符号相反，而且其中含有一个因子 c 。

让我们把 c 去掉；如果我们找到一个 x 和 y 可以互换的奇妙空间，那似乎是荒唐的。没有经验的人可能会引起的混淆之一是，比方说，用眼睛的张角测量宽度，而用另一种方法，如用聚焦时眼肌肉的紧张程度来测量深度，从而以英尺计量深度，以公尺计量宽度。这样，人们在做像式（17.2）这类变换时，会感到方程式极为复杂，并且由于用了两种不同的单位去计量同一事物这样一个非常简单的技巧上的原因，使人们不能看到事物的鲜明性和简易性。现在方程式（17.1）和（17.3）的性质告诉我们，时间和空间是等价的；时间变成了空间；它们应该用相同的单位计量。什么是1 s的距离？从式（17.3）很容易算出1 s的距离是 3×10^8 m，也就是光在1 s内所走过的距离。换句话说，如果我们用同一单位，如秒，来计量所有的距离和时间，则距离的单位就是 3×10^8 m，这样，方程式就比较简单了。使单位一致起来的另一个办法是用米来计量时间。什么是1 m的时间呢？1 m的时间就是光走过1 m所用的时间，也就是 $1/3 \times 10^{-8}$ s，或者是1 s的十亿分之三点三！换句话说，我们希望用 $c=1$ 的单位系统来写出所有的方程式。如果时间和空间真如我们设想的那样用同一单位来计量，那么方程式就会明显地大为简化。它们是

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}},
\end{aligned}
\tag{17.4}$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{17.5}$$

如果在采用 $c=1$ 的单位系统后，我们担心或害怕再也不能使这些方程式成立，答案完全相反。这些没有 c 的方程式更容易记，并且通过考虑量纲，很容易把 c 又放回去。例如，在 $\sqrt{1-u^2}$ 中，我们知道不可能从纯粹的数目中减去一个有单位的速度平方，因此，必须用 c^2 去除 u^2 以保证它没有单位。这就是我们采用的办法。

时空空间和普通空间之间的区别，以及与距离相应的间隔的特性是很有趣的。按照式（17.5），如果我们考虑在一给定坐标系中时间为零，只有空间的一个点，则它的间隔平方为负值，于是我们就得到一个虚的间隔，即一个负数的平方根。在相对论中，间隔可以是实数，也可以是虚数。间隔的平方可以是正的，也可以是负的，不像距离只有正的平方值。当间隔为虚数时，我们说这两点之间有一个类空间隔（而不说虚数），因为这个间隔比较更像空间而不像时间。另一方面，如果两个物体在一给定坐标系中的同一地方，仅是时间不同，这时时间的平方是正的，距离为零，间隔的平方为正值；这个间隔称为类时间隔。因此，在时空图中，应有某种类似于这样的表示：在 45° 角处，有两条线（实际上，在四维空间中，这些线构成“圆锥”，称为光锥），这些线上的点与原点的间隔均为零。正如在式（17.5）中看到的那样，从某一给定点出发的光线，与原来出发点之间的间隔总

是零。顺便说一下，我们刚才已经证明了若光在一个坐标系中以速度 c 传播，它在另一个坐标系中也将以速度 c 传播，因为，如果间隔在两个坐标系中是相同的，亦即，在一个坐标系中的间隔为零，在另一个坐标系中的间隔也为零，那么，光的传播速度不变的说法与间隔为零的说法是相同的。

§17-3 过去，现在和将来

如图17-3所示，在一给定时空点周围的时空区可以分成三个区域。在一个区域内具有类空间隔，在另两个区域内具有类时间隔。从物理意义上来看，由一给定点周围的时空分成的这三个区域与该点有一种有趣的物理联系：一个物理客体或信号可以低于光速的速率从区域2的一点到达事件 O 处。因此，在此区域里的事件能够影响 O 点，也能从过去来影响它。当然事实上，在负 t 轴上 P 点处的客体相对于 O 点正处在“过去”，它与 O 是同样的空间点，只是较早而已。在那里那时发生过的事件，现在正影响着 O （遗憾的是，生活正是如此）。在 Q 点处的另一个客体能以低于 c 的某一速率运动到 O 点，因而如果这是正在运动着的宇宙飞船中的物体，它也会是同一空间点的过去。也就是说，在另一坐标系中，时间轴可以同时通过 O 和 Q 两点。因此，在区域2内的所有点都是处在 O 点的“过去”，在此区域内发生的任何事件都能影响 O 点。所以区域2有时称为可感知的过去或有影响的过去；所有能以任何方式影响 O 点的事件都位于这个区域。

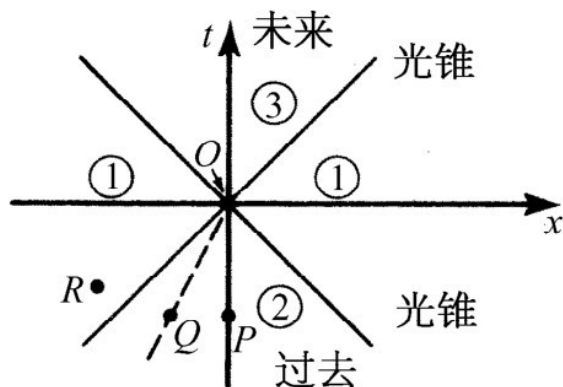


图17-3 在原点周围的时空区域

另一方面，区域3是受 O 点影响的一个区域，在这个区域中，以低于光速 c 的速率射出的“子弹”能够“击中”物体。因此，在这个世界里，我们能影响它的未来，所以我们称它为可感知的未来 或有影响的未来。现在，时空剩下的部分就是区域1，关于这个区域令人感兴趣的是，我们既不能从现在的 O 点影响它，它也不能影响我们现在的 O 点，因为没有任何东西能跑得比光速更快。当然，在 R 处发生的事件还是能在较晚的时候影响我们的；比如说，如果太阳“此刻”正在爆炸，我们得在八分钟以后才能知道，在这之前，它不可能对我们有所影响。

我们所说的“此刻”是一个很神秘的东西，我们既不能对它加以定义，也不能对它施加影响，但它却能在较晚的时候影响我们，或者如果我们在足够遥远的过去完成某些事情，我们已经能影响它了。当我们观察半人马座 α 星时，看到的是四年以前的它；我们也许想知道它“现在”是什么样子。“现在”意味着，从我们这个特定的坐标系来看是在同一时刻的意思。我们只能从我们的过去，即四年前，从半人马座 α 星发出的光线来看它，而并不知道它的“现在”，它“现在”发生的情况要能影响到我们，那已经是四年以后了。半人马座 α 星的“现在”仅是我们头脑中的一个概念或想象，它并不是此刻在物理上真正可以定

义的，因为我们必须等待着去观察它；我们甚至不能就在“现在”定义它。还有“现在”是取决于坐标系的。例如，假定半人马座 α 星在运动，它上面的观察者将和我们的看法不同，因为他必须使他的坐标轴处在某一个角度，他的“现在”应是另一个时间。我们已经讲过，同时性并不是唯一的。

有些江湖术士、占卜算命之流告诉我们，他们能知道未来，而且还杜撰了许多某人突然发现他有预知未来的本领等荒诞无稽的故事。显然，此中充满了很多似是而非的悖理，因为如果我们知道将发生什么事，那么，我们就肯定能够在适当时间采取适当措施来避免它，等等。但是，实际上甚至没有任何一个占卜算命之流能告诉我们现在！没有任何一个人能够告诉我们在任何适当的距离刚好在现在正在发生什么事情，因为那是不能观察的。我们可以向自己提出这样一个问题，我们把它留给同学们去试作回答：如果在区域1的类空间隔中发生的事情突然变为可知的，那么将会产生什么样的佯谬？

§17-4 四维矢量的进一步讨论

现在我们再回过头来讨论洛伦兹变换和空间轴转动的类比。我们已经知道了把一群与坐标具有同样变换性质的其他量合在一起，以构成我们称之为矢量的有向线段的用处。在通常的转动情况下，有很多量的变换方式与在转动情况下的 x ， y 和 z 的变换方式一样，例如，速度有三个分量，即 x ， y 和 z 分量；当在另一个坐标系观察时，这些分量没有一个保持相同，它们都变换成新的值。但是，不管怎样，速度“本身”要比它的特殊分量具有更大的实在性，我们用一根有向线段来表示它。

因此，我们要问：是否也存在着这样一些量，它们在运动坐标系和静止坐标系中的变换方式，或者它们之间的相互关系与 x ， y ， z 和 t 相同？从我们关于矢量的经验，我们知道，其中的三个量类似于 x ， y ， z 将构成一个普通的空间矢量的三个分量，但是第四个量，在空间转动下看起来像一个普通的标量，因为只要我们不是处于运动坐标系中，它总是不变的。那么，是否可以把我们称之为“时间分量”的第四个量与某些我们已知的“三维矢量”以一定方式联系起来，而使这四个量一起按照在时空中的位置和时间同样的方式“转动”呢？我们现在将证明，的确存在着这样的一种情况（实际上有许多种这样的情况）：动量的三个分量和作为时间分量的能量一起变换，就构成一个所谓“四维矢量”。在论证这一点时，因为到处都带有 c 书写起来很不方便，所以我们将采用在式（17.4）中用过的同样技巧来处理能量、质量和动量的单位。例如，能量和质量只相差一个因子 c^2 ，这仅仅是单位的问题，所以我们可以说能量就是质量。我们令 $E=m$ ，而不是写出 c^2 。当然，在遇到麻烦时，我们可以把正确的 c 代入，以便使单位在最后的方程式中得到纠正而直接出现，但在中间步骤中则略去 c 。

因此，能量和动量的方程式可以写成

$$\begin{aligned} E &= m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \\ p &= mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

在这种单位中，有

$$E^2 - p^2 = m_0^2. \quad (17.7)$$

例如，如果我们以电子伏（eV）来计量能量，那么1 eV的质量是什么意思呢？它是指静止能量为1 eV的质量，即 $m_0 c^2$ 是1 eV。又如一个电子的静止质量为 0.511×10^6 eV。

那么，动量和能量在新的坐标系中是什么样子呢？为了找出它们，我们就要对方程组（17.6）作一变换。我们之所以能这样做，是因为知道了速度是如何变换的。假设，我们在测量时，一个物体具有速度 v ，但是，我们是从以速度 u 运动的宇宙飞船上来观察这一物体的，所以我们在宇宙飞船坐标系中测得的相应量都打上一撇。为了使问题简化起见，在开始时我们将研究速度 v 和 u 在同一方向的情况（以后我们可以研究更一般的情况）。那么在宇宙飞船上看到的速度 v' 是什么呢？这是一个合速度，即 v 和 u 之“差”。根据我们前面得出的定律

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv}. \quad (17.8)$$

现在，我们来计算在宇宙飞船中的人看到的新的能量 E' 。当然，他应该采用同样的静止质量，但是应该用 v' 作为速度。我们必须计算 v' 的平方，算出 $1 - v'^2$ 的值，再将 $1 - v'^2$ 开方并算出其倒数值

$$v'^2 = \frac{v^2 - 2uv + u^2}{1 - 2uv + u^2 v^2},$$

$$1 - v'^2 = \frac{1 - 2uv + u^2 v^2 - v^2 + 2uv - u^2}{1 - 2uv + u^2 v^2} = \frac{1 - v^2 - u^2 + u^2 v^2}{1 - 2uv + u^2 v^2} = \frac{(1 - v^2)(1 - u^2)}{(1 - uv)^2}.$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{1 - uv}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}}. \quad (17.9)$$

能量 E' 就是 m_0 乘上式。但是，我们要求的是用不带撇的能量和动量来表示 E' ，我们注意到

$$E' = \frac{m_0 - m_0 uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} = \frac{(m_0/\sqrt{1-v^2}) - (m_0 v/\sqrt{1-v^2})u}{\sqrt{1-u^2}}$$

或

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (17.10)$$

这个式子与下式

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}}$$

的形式完全一样。其次，我们必须找出新动量 p'_x 。这正是能量 E' 和 v 的乘积，也可以简单地用 E 和 p 来表示，即

$$p'_x = E'v' = \frac{m_0(1-uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{v-u}{(1-uv)} = \frac{m_0 v - m_0 u}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

因此

$$p'_x = \frac{p_x - uE}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (17.11)$$

此式又和下式

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}$$

的形式完全一样。

由此可见，用原来的能量和动量来表示新的能量和动量的变换与用 t 和 x 来表示 t' 及用 x 和 t 来表示 x' 的变换完全一样：我们需要做的是将式（17.4）中的 t 换成 E ， x 换成 p_x ，这样，式（17.4）就变得与式

（17.10）和（17.11）完全相同。如果这一切都是完全正确的，就应该包含着另一条规则： $p'_y = p_y$ 和 $p'_z = p_z$ 。要证明这一点，就需要我们回过头来研究上下运动的情况。实际上，在上一章中我们已经研究过上下运动的情况。我们分析过一个复杂的碰撞，并且注意到，事实上，从运动的坐标系来看，动量的横向分量是不变的；因此，我们就证明了 $p'_y = p_y$ 和 $p'_z = p_z$ 。而整个变换为

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z, \\ E' &= \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2}}. \end{aligned} \tag{17.12}$$

因此，在这些变换中，我们发现了四个和 x ， y ， z 和 t 的变换相同的量，我们称它为四维动量矢量。既然动量是一个四维矢量，那么在运动质点的时空图上，可以用一个与轨道相切的箭头来表示，如图17-4所示。这个箭头的时空间分量等于能量，空间分量代表它的三维动量矢量；这个箭头要比能量或者动量都更为“实在”，因为能量和动量与我们观察这个图的方式有关。

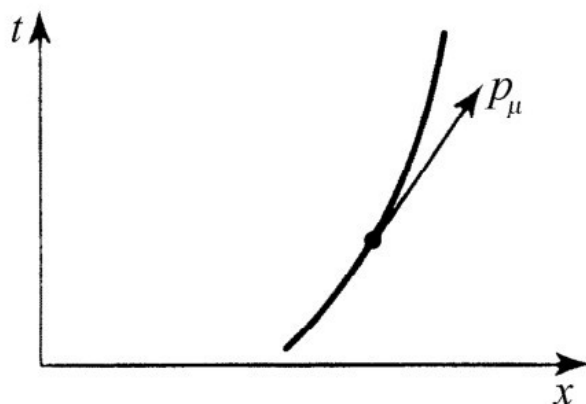


图17-4 一个质点的四维动量矢量

§17-5 四维矢量代数

四维矢量的表示法与三维矢量的表示法不同。在三维矢量中，我们用 $\mathbf{p}$ 表示通常的三维动量矢量，如果说得更明确一些，我们可以说对于所研究的坐标轴，它具有三个分量 p_x ， p_y 和 p_z ，或者简单地用 p_i 来表示一般分量， i 既可以是 x ， y ，也可以是 z ，这样就得出了三个分量；也就是说，设想 i 是 x ， y 或 z 三个方向中的任何一个。四维矢量的表示法与此类似； p_μ 表示四维矢量， μ 代表四个可能方向 t ， x ， y 或 z 中的任何一个。

当然，我们可以用我们所需要的任何符号；但不要轻视这些符号，要看到它们的出现是很有用的。实际上，数学在很大程度上就在于找出日益完善的符号。事实上，四维矢量的整个观念就在于改进符号的表示法，使得变换易于记住。 A_μ 是一个一般的四维矢量，但对动量这个特殊的例子来说， p_t 被确定为能量， p_x 是 x 方向的动量， p_y 是

y 方向的动量， p_z 是 z 方向的动量。使四维矢量相加，也就是把它们
的相应分量加起来。

如果有一个四维矢量的方程式，那么这个方程式对每一个分量 都是正确的。例如，如果在粒子碰撞中三维动量矢量的守恒定律是正确的，也就是说，如果大量相互作用或碰撞的粒子的动量之和是一个常数，那么，这就必然意味着，所有粒子在 x ， y 和 z 的每一个方向上的动量之和都应分别为常数。在相对论中，单独这条定律是不成立的，因为它不完全；这就像对一个三维矢量只讲它的两个分量一样。说它不完全是因为如果我们转动坐标轴，就把各个分量混合起来了，因而，在我们的定律中，必须包括所有的三个分量。同样，在相对论中，我们必须推广动量守恒定律使它包括时间 分量，以保持完整。把它和其他三个分量合在一起是绝对必要的，否则，就不可能有相对论不变性。能量守恒 是第四个方程式，它和动量守恒一起在时空几何中构成了一个正确的四维矢量关系式。这样，在四维表示方式中能量和动量守恒定律为

$$\sum_{\text{进来的粒子}} p_{\mu} = \sum_{\text{出去的粒子}} p_{\mu} \quad (17.13)$$

或写成一个稍微不同的表示形式

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{j\mu}, \quad (17.14)$$

这里 $i=1, 2, \dots$ 表示即将发生碰撞的粒子， $j=1, 2, \dots$ 表示碰撞后离开的粒子，而 $\mu=x, y, z$ 或 t 。也许你要问，“这是相对于什么坐标轴？”这没有关系，因为采用任何 坐标轴，这条定律对每一个分量都是适用的。

在矢量分析中，我们曾讨论过另一个问题，即两个矢量的点积。现在我们来考虑在时空中相应的情形。在一般的转动问题中，我们发现，有一个不变量 $x^2 + y^2 + z^2$ 。在四维问题中，我们发现相应的量是 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ （式17.3）。如何把它表示出来呢？一种方法是在两个矢量之间加一个中间带点的四边形，如 $A_\mu \diamond B_\mu$ ；实际采用的一种表示法是

$$\sum_{\mu}' A_\mu A_\mu = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2. \quad (17.15)$$

在 Σ 上加一撇表示第一项，即“时间”项为正的，而其他三个项都带有负号。这样，在任何坐标系中这个量都一样，我们称它为四维矢量长度的平方。例如，一个质点的四维动量矢量长度平方是什么呢？它等于 $p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$ ，或者换一种形式为 $E^2 - p^2$ ，因为我们知道 p_t 就是 E 。什么是 $E^2 - p^2$ 呢？它必须是在每一个坐标系中都不变的量。特别是，对于一个始终随着粒子一起运动的坐标系，即粒子在其中保持静止的坐标系，这个量应该保持不变。如果粒子是静止的，它就不会有动量。因此，在这种坐标系中，它只有纯粹的能量，并与它的静止质量相同。这就是说， $E^2 - p^2 = m_0^2$ 。由此可知，四维动量矢量长度的平方等于 m_0^2 。

从一个矢量的平方出发，我们可以进而定出“点积”，即它的乘积是一个标量的积：如果 a_μ 是一个四维矢量， b_μ 是另一个四维矢量，则标积是

$$\sum_{\mu}' a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (17.16)$$

在所有坐标系中，它都是一样的。

最后，我们还要提一下某些静止质量 m_0 为零的情形。例如，光子。光子就像一个粒子，带有一定的能量和动量。光子的能量是一个确定的常数（称为普朗克常数）乘以光子的频率： $E=h\nu$ 。这种光子也带有一定的动量，光子（实际上，任何粒子）的动量等于普朗克常数除以波长： $p=h/\lambda$ 。但是，对于光子来说，频率和波长之间有一个确定的关系： $\nu=c/\lambda$ （每秒钟的波数乘上每个波的波长就是光在1 s内走过的距离，显然就是 c ）。因此，我们立即可以看出，光子的能量一定是动量乘 c ，或者，如果 $c=1$ ，能量和动量就相等。这就是说，静止质量为零。让我们再来看一看，这是非常奇怪的。如果一个粒子的静止质量为零，当它停止时，会发生什么情况呢？它永远不会停止！它总是以速度 c 运动着。能量的一般公式是 $m_0/\sqrt{1-v^2}$ 。那么，我们能否说，因为 $m_0=0$ ， $v=1$ ，所以能量也是零？我们不能说它等于零；尽管光子没有静止质量，它实际上能够（而且也确实）具有能量，不过这是因为它永远以光速运动才具有能量！

我们还知道，任何粒子的动量都等于它的总能量乘它的速度：如果 $c=1$ ， $p=vE$ ，或者在通常单位中 $p=vE/c$ 。对于任何以光速运动的粒子来说，如果 $c=1$ ，则 $p=E$ 。从运动坐标系来看，光子的能量公式显然是由式（17.12）给出，对于动量，我们应该用能量乘 c 来代替（或在这种情况下乘以1）。经过变换后不同的能量意味着具有不同的频率。这叫做多普勒效应，用 $E=p$ 和 $E=h\nu$ ，我们就能很容易从式（17.12）算出它来。

正如闵可夫斯基所说的：“空间本身和时间本身将消失在完全的阴影之中，只有它们之间的某种结合才将得以生存。”

第18章 二维空间中的转动

§18-1 质心

在前面几章中，我们研究了点或者是小粒子的力学，在那里不涉及它们的内部结构。在下面几章，我们将研究牛顿定律对较为复杂问题的应用。当世界变得更复杂时，它也就变得更有趣了，而且，我们将发现与较复杂物体的力学相联系的现象比起只是一个点来说确实要吸引人得多。当然，这些现象除了牛顿定律的组合之外并不包含其他任何东西，有时却难于使人置信，只有 $F=ma$ 在起作用。

我们研究的较为复杂物体可以分为如下几类：流动的水，旋转着的星系，等等。在开始时，要分析的最简单的“复杂”物体是所谓的刚体，也就是在运动时会发生转动的固体。然而，尽管是这样一个简单的物体，也可能具有非常复杂的运动。因此，首先我们将研究这种运动的最简单的形式，即一个伸展的物体绕固定轴的转动。该物体上的某一给定点在与这根轴垂直的平面里运动。这样一种物体绕固定轴的转动称为平面转动，或在二维空间中的转动。以后我们将把结果推广到三维空间，但在这样做的时候我们将发现，它不像通常的质点力学那样易于推广，如果我们不首先在二维空间中打好坚实的基础，则三维空间中的转动是难于理解和难以捉摸的。

如果把一个由弦线连在一起的许多木块和木条所组成的物体抛到空中，我们就可以在这个过程中观察到第一个有趣的有关复杂物体运

动的定理在起作用。当然，我们知道，如果我们研究的是一个质点，它将沿一条抛物线运动。但是，现在我们的物体不是一个质点，它将摇摆和翻滚等。尽管如此，人们仍能看到，它还是沿抛物线运动。但究竟是什么沿抛物线运动呢？当然不是木块边角上的点，因为它在上下翻滚；也不是木条的端点和木块或木条的中间部分。但是，确实有某个东西沿抛物线运动，那就是有效“中心”。因而第一个关于复杂物体的定理就是要表明：存在着一个在数学上可以定义的平均位置，但不一定是物体上的一个点沿抛物线运动。这就叫做质心定理，下面就来证明这一个定理。

我们可以把任何物体都看成由大量微小的粒子，即原子所组成的，在这些粒子之间存在着各种力。用 i 来表示某一个粒子的标记（它们的数目极大，比方说， i 可以大到 10^{23} ）。那么，作用在第 i 个粒子上的力当然是质量乘这个粒子的加速度

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}. \quad (18.1)$$

在下面几章中，运动物体的各个部分都是以远小于光速的速率运动，所以对所有的量我们将用非相对论近似。在这种情况下，质量是常数，因此

$$\mathbf{F}_i = \frac{d^2 (m_i \mathbf{r}_i)}{dt^2}. \quad (18.2)$$

如果我们把作用在所有粒子上的力都加起来，也就是说，假如对所有不同标记的 $\mathbf{F}_i$ 求和，我们就得到总的力 $\mathbf{F}$ 。在等式的另一端，我们在微分之前先相加

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d^2(\sum_i m_i \mathbf{r}_i)}{dt^2}. \quad (18.3)$$

因此，总的力就等于各个质量与位置乘积之和的二阶微商。

现在作用在所有粒子上的总的力与外力相同。为什么呢？虽然由于弦线的存在，作用在粒子上有各种各样的力，如摆动力、推力、拉力、原子力以及天知道还有什么形式的力，我们应该把所有这些力都加起来，但牛顿第三定律却帮助我们。由于在任何两个粒子之间的作用和反作用是相等的，因而当我们把所有的方程式加起来时，如果任何两个粒子之间有力作用着，那么在求和时这些力将相互抵消。因此，最后的结果是只剩下那些来自其他粒子的作用力，这些粒子不包含在我们所要求和的那个物体里面。因此，假如式（18.3）是对一定数量的粒子求和，这些粒子一起构成了所谓“物体”，那么作用在整个物体上的外力就等于作用在组成它的各个粒子上的所有力的和。

如果我们能够把式（18.3）写成总质量和某一个加速度的乘积，那么问题就好办多了。这是可以做到的。我们用 M 来代表所有质量的总和，也就是总质量。如果我们定义一个矢量 $\mathbf{R}$ 为

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (18.4)$$

由于 M 是常数，则式（18.3）将简化成

$$\mathbf{F} = \frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2} = \frac{M d^2 \mathbf{R}}{dt^2}. \quad (18.5)$$

于是我们得出，外力等于总质量和某一位于 $\mathbf{R}$ 的假想点的加速度的乘积。这个点称为物体的质心。它是位于物体“中间”某处的一个点，是

$\mathbf{r}$ 的一种平均值。在这种平均值中，各个不同的 $\mathbf{r}_i$ 的权重（即重要性）与其质量成正比。

在下一章中我们将更详细地讨论这个定理，这里我们只限于指出两点：第一，假如外力为零，物体在真空中漂移，它可以以旋转、晃动、扭转等形式做各种运动。但是它的质心——这个人为地创造和计算出来、位于其中的某一位置——将以一个恒定的速度运动。特别是，假如它原来是静止的，它将保持静止。因此，假如有某种容器，比方说载人的宇宙飞船，我们算出它的质心位置，并且发现这个质心是静止的，那么，如果没有外力作用在这个容器上，它将一直保持静止。当然，由于人在内部来回走动，宇宙飞船可以作某种微小的运动；当人向前走的时候，飞船就向后退，以保持所有质量的平均位置严格处于同一点。

那么，由于人们不能使质心运动，是不是就绝对不可能发射火箭呢？显然不是。但是，我们当然也会发现要想推动火箭中的有用部分，就要把一些无用部分抛掉。换句话说，如果开始时火箭的速度为零，我们让气体从它的尾部喷出，那么，当这股小气流向一个方向喷出时，火箭飞船就向另一个方向运动，但是它们的质心仍旧严格地处于原来的位置。因此，我们只是使有用的那部分相对于无用的另一部分作运动而已。

关于质心的第二点，也就是我们在这个时候要引进它的原因，在于质心的运动可以和物体“内部”的运动分开来处理，因此，我们在讨论转动时可以不考虑它。

§18-2 刚体的转动

现在我们来讨论物体的转动。当然，一般物体不仅会转动，还会晃动，摇动和弯曲。为了使问题简化起见，我们将讨论一种称为刚体——但实际上并不存在的理想物体——的运动。刚体的意思是说这个物体的原子之间的作用力非常强，由于这种特性，使它运动所需的很小的力，不会使它发生形变。当刚体运动的时候，它的形状实质上是保持不变的。如果我们希望研究这种物体的运动，并且不去考虑它的质心的运动，那么就只剩下转动了。我们怎样来描写转动呢？假如在物体上有一条线保持不动（它可以穿过质心，也可以不穿过），物体就以这根特殊的线为轴转动。如何来确定转动呢？这很容易，在物体上除轴线以外的任何一个地方记下一点，只要知道这个点运动到什么地方，我们就能够准确地说出物体的位置。描述这个点的位置，只要用一个角度就够了。所以转动就是研究这个角度随时间的变化。

为了研究转动，我们来观察一个物体转过的角度。当然，我们并不是指物体本身内部的某一特定的角度；也不是说我们在物体上画出某一角度。我们指的是从某一时刻到另一时刻整个物体位置的角变化。

首先，我们来研究转动运动学。角度随着时间而变化，就像我们在一维情况下讨论位置和速度那样，在平面转动中可以讨论角位置和角速度。实际上，在二维转动和一维位移之间存在着一个非常有趣的联系，几乎每一个量都有它的对应的量。首先，这里有一个确定物体转过多远的角度 θ ，它代替了确定物体移动多远的距离 y 。同样，正如在一维空间中有一个表示物体运动得多快，或者在一秒钟内走了多远的速度 $v = ds/dt$ 那样，这里也有一个表示一秒钟内角度的变化多大的转动速度， $\omega = d\theta/dt$ 。假如用弧度来测量角度，那么角速度 ω 就是每秒多少弧度。角速度越大，物体转动得越快，角度变化也越快。再

继续下去，我们可以把角速度对时间微分，并称 $\alpha = d\omega / dt = d^2 \theta / dt^2$ 为角加速度。它与通常的加速度相对应。

当然，我们还应该把转动动力学和构成物体的质点动力学规律联系起来，因此，我们应求出，当角速度为某一值时，某一特定质点是如何运动的。为此，通常的做法是，我们在离开轴的距离为 r 处取一质点，在一给定时刻它处于某一位置 $P(x, y)$ ，如图(18.1)所示。假如经过 Δt 时间后，整个物体转过 $\Delta \theta$ 角，这个质点也和物体一起运动。它离开 O 点的距离和以前一样，但被带到了 Q 点。我们要知道的第一件事是它在 x 方向上的距离变化了多少，在 y 方向上的距离又变化了多少。令 OP 为 r ，那么根据角度的定义， PQ 的长度为 $r \Delta \theta$ 。这样， x 值的变化就正好是 $r \Delta \theta$ 在 x 方向上的投影

$$\Delta x = PQ \sin \theta = -r \Delta \theta \cdot \frac{y}{r} = -y \Delta \theta. \quad (18.6)$$

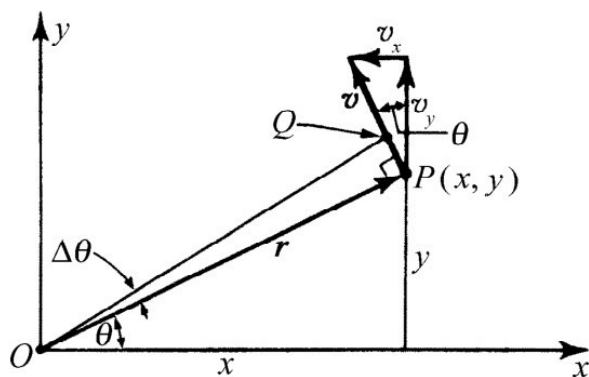


图18-1 二维转动动力学图示

同样

$$\Delta y = +x \Delta \theta. \quad (18.7)$$

假如物体是以一个给定的角速度 ω 转动，用 Δt 去除式（18.6）和（18.7）的两边后，我们发现质点的速度为

$$v_x = -\omega y \text{ 和 } v_y = +\omega x. \quad (18.8)$$

当然，如果要求出速度的大小，则可写成

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r. \quad (18.9)$$

这个速度的大小为 ωr ，这并不是不可思议的；实际上，这应当是不证自明的，因为它走过的距离是 $r \Delta\theta$ ，而每秒钟走过的距离就是 $r \Delta\theta / \Delta t$ ，即 $r\omega$ 。

现在我们转向研究转动动力学。这里必须引进一个力的新的概念。我们要考察一下是否能够找到某个量，它对转动的关系就像力对线性运动的关系那样，我们称它为转矩（转矩的英文名称torque，这个字起源于拉丁文torquere，即扭转的意思）。力是产生线性运动所必须的，而要使某一物体转动就需要有一个“旋转力”或“扭转力”，即转矩。定性地说，转矩就是“扭转”；但定量地说，转矩又是什么呢？因为定义力的一个最好的办法是看在力作用下通过某一给定的位移时，它做了多少功，所以通过研究转动一个物体时做了多少功就能定量地得出转矩的理论。为了保持线性运动和角运动的各个量之间的对应关系，我们让在力作用下物体转过一个微小距离时所做的功等于转矩与物体转过的角度的乘积。换句话说，我们是这样来定义转矩，使得功的定理对两者完全相同：力乘距离是功，转矩乘角度也是功。这就告诉了我们转矩是什么。例如，我们来考虑一个有几种不同的力同时作用在上面的刚体，它绕一根轴转动。首先，我们集中注意观察一个

力，并假定这个力作用于某一点 (x, y) 上。那么，如果物体转过一个很小的角度，它做了多少功呢？这很容易，所做的功是

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y. \quad (18.10)$$

我们只要用式 (18.6) 和式 (18.7) 两者来代替 Δx 和 Δy 就得出

$$\Delta W = (xF_y - yF_x) \Delta\theta. \quad (18.11)$$

这就是说，所做的功的大小实际上等于物体转过的角度乘上一种看上去很奇特的力和距离的组合。这个“奇特的组合”正是我们所说的转矩。由于功的变化定义为转矩乘角度，所以我们就得出了用力表示的转矩公式（显然，转矩并不是一个与牛顿力学完全无关的新的概念，转矩必须有一个明确的借助于力的定义）。

当有几个力同时作用时，当然，所做的功应等于各个力所做的功之和，因此， ΔW 将包括很多项，即把对应于所有力的各项加到一起，而每一项都与 $\Delta\theta$ 成正比。 我们可以把 $\Delta\theta$ 提出来，因此可以说，功的改变等于各个不同的作用力产生的所有转矩之和与 $\Delta\theta$ 的乘积。这个和称为总转矩 τ 。因而，转矩能用一般的代数规律相加，但以后会看到，这仅仅适用于在一个平面里的运动。就像在一维的动力学中，力可以用简单的代数法相加一样，但这只是因为它们都处在同一个方向上。在三维空间中情况就比较复杂。对于二维转动有

$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \quad (18.12)$$

和

$$\tau = \sum \tau_i. \quad (18.13)$$

必须强调指出，转矩是相对于某一给定轴而言的。假如选取不同的轴，则所有的 x_i 和 y_i 都改变了，转矩的值（一般说来）也要改变。

现在我们稍微注意一下，在前面从功的概念引出转矩时，也给出了物体在平衡时的一个很重要的结果：如果作用在一个物体上的所有的力对平动和转动而言都是平衡的，则不仅净力为零，而且总转矩也为零，因为假如一个物体处于平衡，那么对于微小的位移外力不做功。因此既然 $\Delta W = \tau \Delta\theta = 0$ ，则所有转矩之和也应为零。这样对平衡来说就有两个条件：力的和是零，转矩的和也是零。读者可以证明，在平衡时，必须保证绕任何一根轴（在二维空间中）的转矩之和都为零。

现在我们来考虑单个力，并试图用几何法来画出奇特的项 $x F_y - y F_x$ 。在图18-2中，我们看到一个力 $\mathbf{F}$ 作用在点 P 上。当物体转过一个小的角度 $\Delta\theta$ 时，所做的功应该等于力在位移方向上的分量和位移的乘积。换句话说，需要计算的只是力的切向分量和距离 $r \Delta\theta$ 。因此，我们看到转矩也等于力的切向分量（垂直于半径）和半径的乘积。根据转矩的一般概念就能了解，假如力完全是径向的，它就不能使物体“扭转”；很明显，扭转效应仅与不是把它从中心拉出来的那部分力有关，这部分力就是切向分量。此外，显然，一个给定的力作用在长臂上要比接近轴线时效果更大。实际上，如果我们正好推在轴上，根本不会发生扭转。因此，这就使我们了解到，扭转或转矩的大小是与径向距离和力的切向分量成正比的。

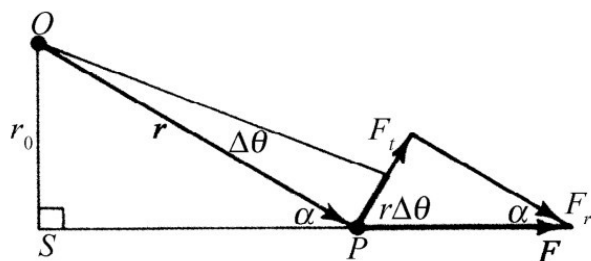


图18-2 一个力产生的转矩

转矩还有第三个非常有趣的公式。我们刚刚在图18-2中已经看到转矩等于力乘半径再乘 $\sin\alpha$ 。但是，假如我们延长力的作用线，并画一条与力的作用线垂直的直线 OS （即力臂），我们发现这个力臂相对于 r 之比等于力的切向分量相对于总力之比。因此，转矩公式还可以写成力的大小乘力臂的长度。

转矩通常也叫力矩。这个字的来源不很清楚，但是moment是从拉丁语中的movimentum衍生出来的，而且一个力移动物体的能力（力作用在一个杠杆或一根撬棒上）是随力臂长度的增加而增加的，因此，它的来源可能与此有关。在数学上“矩”（“moment”）的意思是用离开轴的距离多少来加权的。

§18-3 角动量

虽然到目前为止我们只考虑了刚体这一特殊情况，但是转矩的性质和它的数学关系式即使对非刚体也是有意义的。实际上，我们可以证明一个非常值得注意的定理：就像外力是一群质点的总动量 p 的变化率一样，外转矩是一群质点的角动量 L 的变化率。

为了证明这一点，我们假设有某些力作用在一个由许多质点组成的系统上，并观察在这些力产生的转矩的作用下，系统会发生什么变化。当然，首先我们只考虑一个质点。图18-3所示的是一个质量为 m 的质点和一根轴 O ；这个质点不一定绕 O 作圆周运动，它可以像行星绕太阳一样沿一个椭圆运动，或者沿某个其他曲线运动，反正它在运动，而且有力作用在上面，并且按照通常的公式，即力的 x 分量等于

质量乘加速度 x 的分量，等等。但是我们再来看一下转矩是什么呢？转矩等于 $x F_y - y F_x$ ，而在 x 或 y 方向上的力是质量乘上在 x 或 y 方向上的加速度

$$\tau = x F_y - y F_x = x m \frac{d^2 y}{dt^2} - y m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (18.14)$$

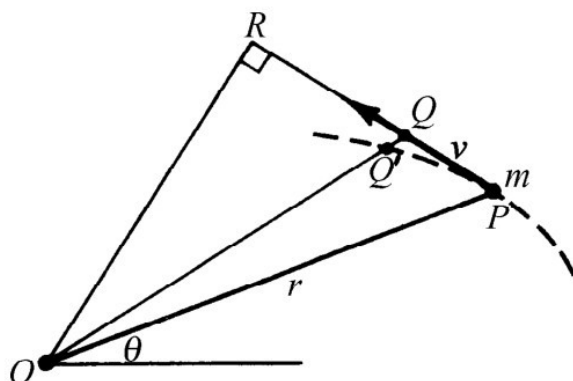


图18-3 一个围绕轴 O 运动的质点

虽然，看来这个式子不是一个简单的量的微商，但实际上它是量 $xm \left(\frac{dy}{dt} \right) - ym \left(\frac{dx}{dt} \right)$ 的微商

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[x m \left(\frac{dy}{dt} \right) - y m \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] &= x m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) + \left(\frac{dx}{dt} \right) m \left(\frac{dy}{dt} \right) - y m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) - \left(\frac{dy}{dt} \right) m \left(\frac{dx}{dt} \right) \\ &= x m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) - y m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (18.15)$$

因此，转矩确实是某个量随时间的变化率，所以“某个量”引起了我们的注意，我们给它一个名称，叫角动量，并用 L 来表示

$$L = x m \frac{dy}{dt} - y m \frac{dx}{dt} = x p_y - y p_x. \quad (18.16)$$

虽然，我们目前的讨论是非相对论的，但 L 的第二种形式对相对论也是正确的。因此，我们发现对于动量也有一个转动的对应量，这就是角动量，它是用线动量的分量来表示的，就像转矩公式是用力的分量来表示的一样！这样，假如我们要知道一个质点相对于某一个轴的角动量，只要用动量的切向分量和半径相乘就行了。换句话说，计算角动量并不是看它离开原点有多快，而是看它围绕原点转动有多快。在角动量中只计及动量的切向部分。而且，动量作用线伸展得越远，角动量就越大。此外，由于不管这个量记为 p 还是 F ，其几何图像相同，因此，必定存在着一个动量臂（与作用在质点上的力臂不一样），只要延长动量的作用线，再找出到轴的垂直距离就可以求出它。因此，角动量就是动量的大小和动量臂的乘积。像转矩有三个公式一样，角动量也有三个公式

$$L = xp_y - yp_x = rp_{\text{切向}} = p \cdot \text{动量臂}. \quad (18.17)$$

与转矩一样，角动量与所要计算的轴的位置有关。

在我们着手处理一个以上的质点问题之前，先让我们应用上面的结果来讨论行星围绕太阳旋转的问题。力在什么方向？力是指向太阳的。那么作用在物体上的转矩是什么？当然，这与我们把轴取在哪里有关。但是，因为转矩是力和力臂的乘积，或者说是力垂直于 r 的分量与 r 的乘积，所以如果以太阳本身作为轴，就可以得到很简单的结果。因为这时没有切向力，所以相对于在太阳处的轴的转矩为零。因此，围绕太阳转动的行星的角动量不变。我们来看看这意味着什么。速度的切向分量乘质量再乘半径将是一个常数，因为它就是角动量，而角动量的变化率是转矩，在这个问题中，转矩为零。当然，既然质量也是一个常数，这必然意味着切向速度乘半径是一个常数。对行星

运动而言，这正是某种我们早已知道的结果。假设，我们考虑一个微小的时间增量 Δt 。当行星从 P 点运动到 Q 点（图18-3）时，它将走多远？它将扫过多大的面积？因为面积 $QQ'P$ 与面积 OPQ 相比非常小，可以略去，所以只要用基线 PQ 的一半乘高 OR 就可求出扫过的面积。换句话说，单位时间内所扫过的面积等于速度乘速度臂（再乘以 $1/2$ ）。这就是说，面积的变化率正比于角动量，而角动量是一个常数。因此，当力产生的转矩为零时，在相等的时间内扫过相等的面积的开普勒定律正是角动量守恒定律的一种文字表述。

§18-4 角动量守恒

现在我们继续讨论当有大量质点存在以及一个物体由很多部分组成，各部分之间有很多力相互作用，同时它们还受到外力作用时，会发生什么情况？当然，我们已经知道，相对于任何一个固定轴，作用在第 i 个质点上的转矩（也就是作用在第 i 个质点上的力乘该力的力臂），等于这个质点的角动量的变化率，而第 i 个质点的角动量就是它的动量和动量臂之积。假设我们把所有质点的转矩 τ_i 相加，并把它们的和称为总转矩 τ ，那么这就是所有质点角动量 L_i 之和的变化率， L_i 之和定义一个新的量，我们称它为总角动量 L 。就像一个物体的总动量是它所有各部分的动量之和一样，总角动量是所有各部分的角动量之和。于是总角动量 L 的变化率就是总转矩

$$\tau = \sum \tau_i = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}. \quad (18.18)$$

总转矩似乎是很复杂的。这里的所有内力和所有外力都必须考虑。但是，假如考虑到牛顿的作用和反作用定律，作用和反作用不仅大小相

等，而且在同一条直线上，方向完全相反（不管牛顿是否真正这样说过，但他确是默认了这一点），那么，在两个相互作用的物体上，因为相互作用对于任一转轴的力臂都相等，由它们产生的两个转矩相等、方向相反。因此，内转矩成对地抵消掉，从而得出一个值得注意的定理：相对于任何轴的总角动量的变化率等于相对于该轴的外转矩！

$$\tau = \sum \tau_i = \tau_{\text{外}} = dL / dt . \quad (18.19)$$

这样，关于大量质点的集合的运动，我们就有了一个十分有用的定理，它使我们研究整体运动时不需要考虑其内部的详细机制。对于任何物体的集合，不管它们是否组成刚体，这个定理都是适用的。

上述定理的一个极其重要的情况是角动量守恒定律：如果一个质点系统不受外转矩作用时，其角动量保持不变。

一个非常重要的特例是刚体，即具有确定形状且只作转动的物体。现在来考虑一个几何大小一定，且绕一个固定轴转动的物体。在任何时刻，物体的各个部分彼此间的关系都相同。现在来求这个物体的总角动量。假如该物体中某个质点的质量为 m_i ，它的位置是 (x_i, y_i) ，那么问题就是要求出这个质点的角动量，因为总角动量就是在物体中所有这些质点的角动量之和。当然，对于作圆周运动的物体来说，它的角动量等于质量乘速度再乘离开轴的距离，而速度等于角速度乘以离开轴的距离

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega , \quad (18.20)$$

对所有的质点之求和，则得

$$L = I\omega, \quad (18.21)$$

这里

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (18.22)$$

这与动量等于质量乘速度的定律相对应。速度被角速度代替，而且我们看到，质量被一个新的量所代替，这个新的量称为转动惯量 I ，它与质量相当。式(18.21)和(18.22)指出一个物体所具有的转动惯量不仅与物体各质点的质量有关，还与它们离轴的距离有关。因此，如果我们具有两个质量相同的物体，当把这两个物体放得离轴较远时，转动惯量将变大。这很容易用图18-4所示的装置来演示，在那里重物 M 不能很快地落下是因为它必须转动一根有重量的长杆。首先把质量为 m 的两个物体放置在靠近轴处， M 就以某一变化率加速运动。但当把这两个质量为 m 的物体移到距轴较远处以改变转动惯量时，我们看到 M 的加速度比先前小得多，因为这时物体阻碍转动的惯量要大得多。转动惯量是阻碍转动的惯量，它等于各个质量与它们离轴距离平方的乘积之和。

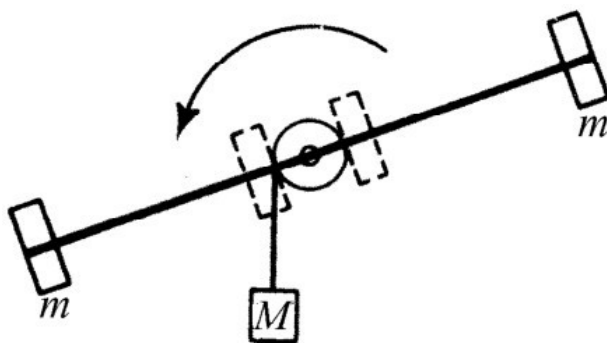


图18-4 转动惯量与质量臂有关

质量和转动惯量之间有一个重要的和非常引人注意的区别。物体的质量是永远不变的，而它的转动惯量可以改变。假如我们站在一个

无摩擦的转台上，把手臂伸开，并在缓慢转动时手里拿着一些重物，只要我们把手臂收拢就可以改变转动惯量，但质量并没有改变。当我们这样做时，按照角动量守恒定律，会发生各种奇妙的事情：假如外转矩为零，那么角动量，即转动惯量乘 ω 将保持不变。开始时，我们以一个较大的转动惯量 I_1 和较低的角速度 ω_1 转动，这时的角动量为 $I_1 \omega_1$ 。接着，由于把手臂收拢而使转动惯量变为一个较小的值 I_2 。这样， $I\omega$ 的乘积 $I_2 \omega_2$ 将保持不变，因为总角动量应该守恒。因此 $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ ，这就是说，如果转动惯量减少，则角速度必然增大。

第19章 质心、转动惯量

§19-1 质心的性质

在前一章中，我们发现假如有许多力作用在一个由粒子组成的复合体上，不管这些粒子构成刚体或者非刚体，还是星云或者其他任何东西，我们总能求出所有这些力的和（当然，这里是指外力，因为内力已相互抵消）。如果我们把这个物体看成是一个整体，具有总质量 M ，并且在物体“内部”有一个称为质心的点，那么整个物体的质量就可以看成正好集中在该点上，外力的合力使这个点产生一个加速度。现在我们来较详细地讨论质心问题。

质心（缩写成CM）的位置由下式给出

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \quad (19.1)$$

当然，这是一个矢量式，实际上是三个式子，在 x ， y ， z 三个方向上每个方向一个。我们将只考虑 x -方向，因为这个方向搞清楚了，其他两个方向也就清楚了。 $X_{\text{CM}} = \sum m_i x_i / \sum m_i$ 表示什么呢？先假设物体被分成一些小块，每一小块都有相同的质量 m ；因此，总质量简单地就等于块数 N 乘每块的质量，比方说1克，或其他单位。这样，这个式子就可以简单地写成所有 x 量的总和除以小块的数目： $X_{\text{CM}} = m \sum x_i / (mN) = \sum x_i / N$ 。换句话说，假如每块质量相等， X_{CM} 就是所有 x 的

平均值。但是，如果其中有一块的重量是其他块重量的两倍，则在求和时，相应的 x 应出现两次。这是很容易理解的，我们可以设想把这两倍的质量分开成相等的两块，每块刚好和其他小块一样，这样，在求平均值时，因为那里有两个质量， x 当然应计算两次。因此 X 是所有质量在 x 方向上的平均位置，其中每个质量所计算的次数都正比于这个质量的大小，就好像它已分为“小粒”一样。由此出发，容易证明 X 一定在最大的 x 和最小的 x 之间，即在包住整个物体的包络之内。它并不一定就在组成物体的材料中，因为物体可以是一个圆环，如一个铁箍，它的质心就是铁箍的中心，并不是在铁箍自身上面。

当然，如果一个物体具有某种对称性，例如矩形，它有一个对称面，其质心就处在对称面上，在矩形特例中，有两个对称面，这就唯一地确定了质心。假如是一个具有任何对称性的物体，它的重心位于对称轴上，因为在这种情况下，有多少个负 x 就有多少个正 x 。

下面来讨论一个非常有趣而又奇妙的问题，假如我们设想一个物体由A和B两部分组成（图19-1）。整个物体的质心可用如下办法求出：首先求出A的质心，然后求出B的质心，再求出每一部分的总质量 M_A 和 M_B 。接着考虑一个新的问题，在物体A的质心处有一个质量为 M_A 的点，在物体B的质心处有一个质量为 M_B 的点。这两个质点的质心也就是整个物体的质心。换句话说，假如已经求出一个物体的各部分的质心，我们就不需要再从头开始来找出整个物体的质心，只需要把每一部分都当作位于其质心的一个质点，再把各个部分放在一起来处理就行了。我们来看看为什么可以这样做。假设我们要计算整个物体的质心，而这个物体的一部分粒子可看成是包含在物体A内，另一些粒子包含在物体B内。总的和 $\sum m_i x_i$ 可以分成两个部分： $\sum A m_i x_i$

只对物体A求和， $\sum_B m_i x_i$ 只对物体B求和。现在来单独计算物体A的质心，这正是总和的第一部分。我们知道这一部分本身就是 $M_A X_A$ ，即在A中的所有粒子的总质量乘A的质心位置，因为这正是对物体A应用质心定理的结果。同理，对于物体B，有 $M_B X_B$ ，当然，两者相加就得到 MX_{CM}

$$MX_{CM} = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B . \quad (19.2)$$

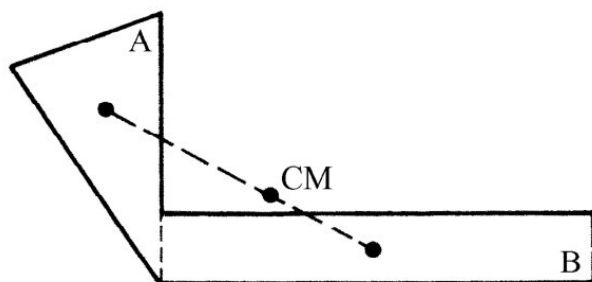


图19-1 一个复合体的质心在两个组成部分的各自质心的连线上

显然，由于 M_A 和 M_B 之和为 M ，所以式(19.2)可以看成是两个点状物体：一个质量为 M_A ，位于 X_A ，另一个质量为 M_B ，位于 X_B ——质心公式的一个特例。

关于质心运动的定理是非常有趣的，而且它在我们了解物理学的发展过程中具有很重要的作用。假设牛顿定律对于一个比较大的物体的各个较小的组成部分都成立，那么这个定理表明，即使我们不去研究这个大的物体的细节，而只研究作用在它上面的总的力和它的质量，牛顿定律对这个大的物体也是适用的。换句话说，牛顿定律有这样一种独特的性质，如果它在某一小尺度范围内是正确的，那么在大尺度范围内也将是正确的。假如我们不考虑棒球是由无数相互作用的

粒子组成的极端复杂的结构，而只研究它的质心运动和作用在棒球上的外力，我们得到 $F=ma$ ，这里 F 是作用在棒球上的外力， m 是它的质量， a 是它的质心的加速度。因此， $F=ma$ 是一个在较大的尺度范围内也能重现其自身的定律（也许应有一个来源于希腊文的较好的字来描述在大尺度范围内也能重现同样规律的那种定律）。

当然，人们可以猜想人类最初能够发现的定律应该是能在较大的尺度范围内重现的。为什么呢？因为宇宙基本齿轮的实际尺度是原子的尺度，而它比我们观察到的尺度要小得多，因而在通常的观察中离这种尺度很远。所以我们最初得以发现的定律对于这种非原子尺度那样特殊大小的物体必定是正确的。如果有关小粒子的定律不能在较大尺度范围内重现，我们就不能那么容易地发现它们。那么，反过来问题又会怎样呢？小尺度范围内适用的定律必须和大尺度范围的定律相同吗？当然，适用于原子范围的定律在本质上并不一定要与在大尺度范围内适用的定律相同。假设原子运动的真正规律由某种奇特的方程确定，这个方程并不具有当我们研究大尺度问题时重现同样规律的性质，而是具有这样的性质：当我们处理大尺度问题时，我们可以用某种表示式作为近似，以致如果我们一步一步地推广这个表示式，它就能在越来越大的尺度下不断重现。这是可能的，而且正符合实际情况。牛顿定律就是推广至非常大的尺度范围的原子规律的“末端”。在微观尺度下粒子运动的真正规律是非常特殊的，但是如果取大量的粒子，把它们组合起来，它们就近似于而且也仅仅是近似于牛顿定律。牛顿定律使我们能够继续处理尺度越来越大的问题，而且看来仍然是同一定律。实际上，随着尺度的不断变大，牛顿定律也就越来越精确。牛顿定律这种自我重现的因素并不真正是自然界的根本特色，而是一个重要的历史特色。在最初的观察中，我们决不会发现原子微粒的基本规律，因为最初的观察太粗糙了。实际上，现在知道，基本的

原子规律，即所谓的量子力学，与牛顿力学非常不同，而且很难理解，因为我们所有的直接经验都与大尺度的物体有关，而尺度很小的原子的行为与我们在大尺度上所见到的根本不一样。因此，我们不能讲：“一个原子就像一个围绕太阳运转的行星”，或诸如此类的话。它不像我们所熟悉的任何东西，因为没有任何东西与之相似。当我们把量子力学应用到越来越大的物体上时，关于许多原子集合在一起的行为的规律并不是原子行为规律的再现，而是产生一些新的规律，即牛顿定律，至于牛顿定律本身则不断地重现，比如说从小至微微克的物体——它已经包含有数以兆亿计的原子——到大至地球，甚至更大的物体都适用。

现在，我们再回到质心问题上来。质心有时也叫重心，因为在许多情况下，重力可以看成是均匀的。假设有一个尺度相当小的物体，其重力不仅与质量成正比，而且到处都与某一固定线段平行。然后考虑一个物体，在这个物体的每一个组成部分上都有重力作用。用 m_i 表示某一部分的质量，作用于这一部分的重力是 m_i 乘 g 。现在要问，应在何处加一个力，使它和作用在整个物体上的重力相平衡，从而使得整个物体，如果它是一个刚体的话，不发生转动？答案是这个力必须通过质心，我们将用下面的方法来说明这个问题。要使物体不转动，所有力产生的转矩之和应为零，因为假如转矩不为零，就会有角动量的变化，也就必然会有转动。因此，我们必须算出作用在所有粒子上的总转矩，看一下它相对于任一给定轴有多大；如果轴通过质心，则总转矩必定为零。现在以水平方向表示 x 轴，竖直方向表示 y 轴，我们知道转矩就是在 y 方向的力乘力臂 x （也就是说，力乘我们所要量度的转矩的力臂）。整个转矩是

$$\tau = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i, \quad (19.3)$$

因此，如果总转矩为零，则和 $\sum m_i x_i$ 必为零。但是 $\sum m_i x_i = MX$ ，即等于总质量乘质心与轴的距离。这就是说，质心离开轴的距离 x 为零。

当然，这里我们只对 x 距离验证了结果，但是如果我们采用真正的质心，物体将在任何位置上都平衡，因为假如把物体转过 90° ， y 就取代了原来的 x 。换句话说，当一个物体的支点在质心上时，由于作用在物体上的是一个平行的重力场，因而转矩为零。在物体很大，以致重力明显不平行的情况下，我们必须在那上面施加平衡力的中心就很难简单地描述，它与质心略有偏离。这就是人们为什么必须把质心和重心区别开来的原因。物体的支点在质心上将在所有位置上都平衡的事实具有另一个有趣的结果。如果用加速度引起的惯性力来代替万有引力，我们可以用完全相同的数学程序来求出支撑物体的某个位置，使得加速度的惯性力不产生任何转矩。假设把物体以某种方式放在一个盒子内，这个盒子和盒子内的一切物体都作加速运动。我们知道，在和加速盒子相对静止的人看来，有一个由惯性产生的有效力。这就是说，要使物体和盒子一起运动，我们必须推它，使之加速，而这个推力被“惯性力”所“平衡”，这个“惯性力”是一种惯性力，其大小等于质量乘盒子的加速度。对于在盒子里的人来说，就像物体处于一个均匀重力场的情况一样，不过这里“ g ”的值等于加速度 a 。因此，由于加速一个物体所引起的惯性力对质心的转矩为零。

这一事实产生了一个非常有趣的结论。在没有加速度的惯性参照系中，转矩始终等于角动量的变化率。然而，对于穿过正在加速的物体质心的轴来说，其转矩等于角动量的变化率仍然成立。即使质心在作加速运动，我们仍可找出一根特殊的通过质心的轴，使转矩等于绕这根轴的角动量的变化率的结论仍然成立。因此，转矩等于角动量的

变化率这个定理，在两个普通的情况下都是正确的：（1）惯性空间中一根固定轴；（2）一根轴通过质心，即使物体可能在作加速运动。

§19-2 质心位置的确定

计算质心的数学技巧属于数学课的范围，这类问题为积分计算提供了很好的练习。然而在学过积分后，要想知道如何求质心位置，了解一些用以处理这类问题的技巧还是大有好处的。其中一个技巧是利用所谓帕普斯（Pappus）定理。它是这样的：假如在一个平面上取任一闭合区域，并使它在空间运动而形成一个立体，在运动时，令各点的运动方向始终垂直于该区域的平面，这样形成的立体的总体积就等于它的横截面乘质心在运动过程中所经过的距离！假如我们使这个区域沿着一条与它本身垂直的直线运动，毫无疑问，这个定理是成立的，但是假如使它沿着一个圆或某种其他曲线运动，就得出一个相当特殊的体积。对于曲线路径来说，其外部走得较远，内部走得较近，而这种效果正好相互抵消。因此，假如要求出一个密度均匀的薄板的质心位置，我们可以记住，薄片绕某一轴旋转形成的体积就等于其质心走过的距离乘薄板的面积。

例如，我们要求出底边为 D ，高度为 H （如图19-2）的直角三角形的质心，可用如下的办法解这个问题。想象一根沿 H 的轴，使三角形绕轴旋转整整 360° 。这就形成了一个锥体。质心的 x 坐标走过的距离是 $2\pi x$ 。被移动的面积就是三角形的面积，为 $HD/2$ 。因此，质心的 x 距离乘上三角形的面积就是所扫过的体积，这个体积当然应是 $\pi D^2 H/3$ 。这样就有 $(2\pi x)(HD/2) = \pi D^2 H/3$ ，即 $x = D/3$ 。用类似的方法使它绕另一轴转动，或根据对称性，可以求出 $y = H/3$ 。实际上，任何

均匀三角形面积的质心都是在三条中线，即从顶点到对边中点的连线的交点上。这一点在每条中线的1/3处。线索是：把三角形分成许多小片，每一片都和底边平行。可以看到中线平分每一小片，因此质心一定在中线上。

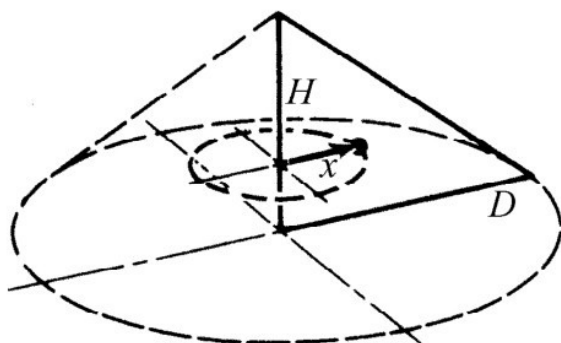


图19-2 旋转三角形后产生的直角三角形和正圆锥体

现在来研究一个较为复杂的图形。假设要求出一个均匀半圆盘——把一个圆盘一分为二的质心的位置。质心在何处？对整个圆盘来说，它无疑是在中心，但是，一个半圆盘要困难一些。用 r 表示圆盘半径， x 为质心到半圆盘直边的距离。以直边为轴，使半圆盘旋转，得到一个球体。这样，质心走过了 $2\pi x$ ，半圆盘的面积是 $\pi r^2/2$ （因为只有圆的一半）。当然，形成的体积应为 $4\pi r^3/3$ ，由此可得

$$(2\pi x) \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) = \frac{4\pi r^3}{3},$$

即

$$x = \frac{4r}{3\pi}.$$

帕普斯还有另一个定理，它是上述例子的一个特殊情况，因此同样是正确的。假设，用一段质量密度均匀的半圆形的导线来代替实心的半圆盘，我们要求出它的质心。在这种情况下，内部没有质量，质量都在导线上。结果表明一条平面曲线按上述方式运动时扫过的面积等于质心运动的距离乘线的长度（可以把导线看成是一个非常窄的面，因而对它也能应用上述定理）。

§19-3 转动惯量的求法

现在我们来讨论求出各种物体转动惯量的问题。一个物体对 z 轴的转动惯量的公式是

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

或

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dv. \quad (19.4)$$

这就是说，必须让每一个质量乘以它离开轴的距离的平方($x_i^2 + y_i^2$)，然后求和。必须注意，这不是三维距离，而只是二维距离的平方，对三维的物体也是如此。在大多数情况下，我们将仅限于研究二维物体，但是在三维情况下绕 z 轴转动的公式是完全相同的。

作为一个简单的例子，我们考虑一根木棒绕穿过其一端的垂直轴转动的情况（图19-3）。现在应该对所有质量与 x 距离平方的乘积求和（在此例中 y 为零）。“求和”指的是什么呢？当然是指 x^2 乘小质量

元的积分。假如我们把木棒分成很小的长度元 dx ，相应的质量元和 dx 成比例，并用 L 表示整个棒的长度， M 表示总质量。因此有

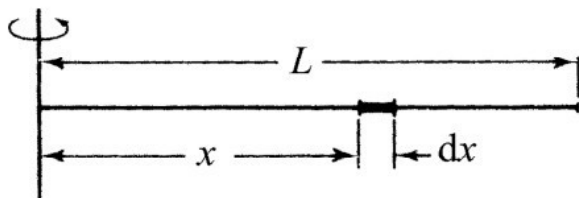


图19-3 长度为 L ，绕穿过其一端的垂直轴线转动的直棒

$$dm = \frac{Mdx}{L},$$

于是

$$I = \int_0^L x^2 \frac{Mdx}{L} = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}. \quad (19.5)$$

转动惯量的量纲总是质量乘长度平方，因此，我们真正需要求出的是因子 $1/3$ 。

假如转轴取在棒的中心，那么 I 是什么呢？我们可以重做一次积分，将 x 的范围取为从 $-L/2$ 到 $+L/2$ 。但是我们注意关于转动惯量的几个特点。可以把这根棒设想成两根棒，每根棒的质量为 $M/2$ ，长度为 $L/2$ ，则两根小棒的转动惯量相等，且都由式（19.5）给出。因此，转动惯量为

$$I = \frac{2(M/2)(L/2)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \quad (19.6)$$

由此可见，绕中心转动的一根棒要比绕它的端点转动容易得多。

当然，我们可以继续计算各种其他有关物体的转动惯量。但是，尽管这种计算为积分运算提供了一定数量的重要练习机会，但从根本上对我们来说并不是太感兴趣的。然而，这里有一个十分有用的有趣定理。假设有一个物体，我们要求出它绕某个轴的转动惯量。这意味着我们要求出使它对某个轴转动时所需要的惯性。假如支撑这个物体的支点就在质心处，使物体绕轴旋转时，本身并不转动（因为惯性力的效果对它不产生转矩作用，因此当我们使它运动时，它本身不会转动），那么它绕轴旋转所需要的力就像把它的所有质量都集中在质心上的情况一样，转动惯量可以简单地写成 $I_1 = MR_{CM}^2$ ，式中 R_{CM} 为轴到质心的距离。当然这不是在绕轴旋转时本身打转的物体的转动惯量的正确公式，因为这时不仅因为质心作圆周运动而对转动惯量有一个贡献 I_1 ，而且它还要绕质心转动。因此，有理由在 I_1 上还要加上相对于质心的转动惯量 I_c 。所以可以推测，相对于任何一个轴的总转动惯量应为

$$I = I_c + MR_{CM}^2. \quad (19.7)$$

这个定理叫做平行轴定理，它很容易证明。相对于任何轴的转动惯量都是质量乘 x_i 的平方和 y_i 的平方之和： $I = \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i$ 。我们着重研究 x 项，当然 y 项的情况也完全一样。这里 x 是某一特定质点离开原点的距离，但是如果用它到质心 CM 的距离 x' 来代替它到原点的距离 x ，将会出现什么情况呢？为了分析方便起见，可写成

$$x_i = x'_i + X_{CM}$$

然后，将两端平方，得

$$x_i^2 = x_i'^2 + 2X_{\text{CM}}x_i' + X_{\text{CM}}^2.$$

那么，当此式乘以 m_i 再对所有 i 求和，会得到什么情况呢？把常数提到求和符号外边，得到

$$I_x = \sum m_i x_i'^2 + 2X_{\text{CM}} \sum m_i x_i' + X_{\text{CM}}^2 \sum m_i.$$

第三项求和很简单，就是 MX_{CM}^2 。在第二项求和中有两部分，一部分为 $\sum m_i x_i'$ ，是总质量乘质心的坐标 x' 。但是这部分没有贡献，因为 x' 是从质心量起的，在这些轴中，以粒子质量为权重的所有粒子的平均位置为零。第一求和项，当然就是 I_c 的 x 分量。因此，我们就得到了式（19.7），和我们推测的完全一样。

让我们举一个例子来验证式（19.7）。我们来看一下它是否适用于木棒的情形。对于通过一个端点的轴，转动惯量为 $ML^2/3$ ，我们已经算过了。棒的质心当然就在它的中点，在 $L/2$ 距离处。因此，应该有 $ML^2/3 = ML^2/12 + M(L/2)^2$ 。既然 $1/4$ 加 $1/12$ 是 $1/3$ ，所以我们没有犯根本的错误。

附带提一下，我们并不真正需要积分去求式（19.5）的转动惯量。只要假定它等于 ML^2 乘一个未知系数 γ ，然后利用分为两半的论证法去得出式（19.6）的系数为 $\gamma/4$ ，再根据平移轴线的论证，就能得到 $\gamma = \gamma/4 + 1/4$ ，因此 γ 一定是 $1/3$ 。求转动惯量常常有不同的方法。

在应用平行轴定理时，记住 I_c 的轴必须平行于要求的那个转动惯量所对应的轴，显然是十分重要的。

转动惯量还有一个性质值得一提，因为它对求某些形式物体的转动惯量非常有用。这就是：假如有一个平面图形和一组原点就在此平面上， z 轴垂直于此平面的坐标轴，那么这个图形对 z 轴的转动惯量等于相对于 x 轴和 y 轴的转动惯量之和。这是很容易证明的，只需注意

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2$$

（由于 $z_i=0$ ）。同样

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i x_i^2,$$

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

举一个例子，有一质量为 M ，宽为 w ，长为 L 的均匀矩形板，对于穿过平板中心且与之垂直的轴线来说，平板的转动惯量为

$$I = \frac{M(w^2 + L^2)}{12},$$

因为相对于一根在平面内并且平行于它的边长的轴来说，就像长为 w 的棒一样，它的转动惯量是 $Mw^2/12$ ；而相对于平面内的另一根轴，也像长为 L 的棒一样，它的转动惯量是 $ML^2/12$ 。

概括地说，一个物体对某一给定轴（我们称之为 z 轴）的转动惯量具有如下性质：

（1）转动惯量是

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2) dm.$$

（2）假如一个物体由很多部分组成，每一部分的转动惯量已知，则总转动惯量就是各部分转动惯量之和。

（3）相对于任一给定轴的转动惯量等于相对于通过质心的平行轴的转动惯量再加上总质量与给定轴到质心距离平方的乘积。

（4）假如物体是一个平面图形，它相对于与平面垂直的轴的转动惯量等于相对于在平面内两根相互垂直且与前述垂直轴相交的任意两根轴的转动惯量之和。

表19-1列出了一些质量密度均匀的基本图形的转动惯量。应用上述性质，可以从表19-1推导出一些其他物体的转动惯量，我们将它列于表19-2中。

表 19-1

物 体	z 轴	I_z
细棒,长为 L	与棒垂直,通过中心	$ML^2/12$
细同心圆环,半径为 r_1 和 r_2	与环垂直,通过中心	$M(r_1^2 + r_2^2)/2$
球,半径为 r	穿过球心	$2Mr^2/5$

表 19-2

--	--	--

物 体	z 轴	I_z
矩形薄片, 边长为 a, b	与 b 平行, 通过中心	$Ma^2/12$
矩形薄片, 边长为 a, b	与薄片垂直, 通过中心	$M(a^2 + b^2)/12$
薄圆环, 半径为 r_1 和 r_2	任一直径	$M(r_1^2 + r_2^2)/4$
长方形, 边长为 a, b, c	与 c 平行, 通过中心	$M(a^2 + b^2)/12$
圆柱体, 半径 r , 长度 L	与 L 平行, 通过中心	$Mr^2/2$
圆柱体, 半径 r , 长度 L	与 L 垂直, 通过中心	$M(r^2/4 + L^2/12)$

§19-4 转动动能

现在我们来进一步讨论动力学问题。在第18章中我们讨论直线运动和角运动之间的类比关系时，应用了功的原理，但没有谈到动能。一个绕某一给定轴以角速度 ω 转动的刚体的动能是什么呢？通过类比，我们可以马上猜出正确的答案。转动惯量相应于质量，角速度相应于速度，因此，动能应该是 $I\omega^2/2$ 。正是这样，下面就来证明：假设物体绕一个轴转动，因而它上面的每一点都有一个速度，其大小为 ωr_i ，这里 r_i 是特定点到轴的半径，假如 m_i 为这个点的质量，则整个物体的总动能是所有小块的动能之和

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (r_i \omega)^2.$$

因为 ω^2 是常数，对各个点都是一样，所以

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (19.8)$$

在第18章末，我们指出了某种物体的一些有趣现象，这种物体不是刚体，但它可以从具有一定转动惯量的一种刚体状况变成另一种刚体状况。例如，在我们的转台实验中，当手伸开时，我们有一定的转

动惯量 I_1 和一定的角速度 ω_1 。当把手缩回时，我们有另一个转动惯量 I_2 和角速度 ω_2 ，但是，我们还是“刚体”。因为相对于转台的竖直轴没有转矩，所以角动量应守恒。这就是说， $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ 。但能量的情况如何呢？这是一个很有趣的问题。当手缩回时，我们转得更快了，但转动惯量变小了，这样看来好像能量应该相等。但并非如此，因为保持守恒的是 $I\omega$ ，而不是 $I\omega^2$ 。假如我们比较一下前后的动能，开始的动能是 $I_1 \omega_1^2 / 2 = L \omega_1 / 2$ ，这里 $L = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ 是角动量。后来，根据同样的论证，有 $T = L \omega_2 / 2$ ，由于 $\omega_2 > \omega_1$ ，所以转动动能比开始时大了。因此，当手伸开时，我们有一定的能量，当手缩回时，我们转得更快，并有更大的动能。这与能量守恒定律矛盾吗？一定有某人做了功。这就是我们自己！什么时候我们做了功呢？当我们水平移动一个重物时，我们没有做任何功。假如我们拿着一个东西，把手伸出去再缩回来，我们没有做任何功。但这是我们不作转动的情况！当我们在转动时，就有一个离心力作用在重物上，并且重物有飞开的趋势，因此我们必须拉着它以克服离心力。所以，我们克服离心力所做的功应该与转动能量之差相一致，确实是这样。这就是额外动能的来源。

还有一个有趣的特征，我们把它作为一个普遍关心的问题，作一些说明，这个特征要更深奥一点，但值得一提，因为它非常奇特而且能产生很多有趣的效果。

再来看一下转台实验。从转动着的人的观点来分别考虑身体和手臂。在重物拉回来以后，整个物体旋转加快，不过请注意，身体的中心部分没有变化，但它也比以前转得快了。假如我们围绕身体这部分画一个圆，只考虑圆内的物体，它们的角动量必将变化；它们运动得

更快了。因此，当我们把手缩回时，一定有一个转矩作用在身体上。离心力不会有转矩作用，因为它是沿径向的。这就是说，出现在转动系统的力中，不仅仅有离心力，还有其他力。这另一个力叫做科里奥利力，它具有非常奇怪的性质，即当我们在转动系统中移动一个物体时，它似乎被推向侧面。和离心力一样，它是一个表观上的力。但是假如我们生活在转动着的系统中，要沿径向移动某个物体时，我们将发现要从侧面推它才能使它沿径向运动。我们必须施加的这个侧向推力正是使我们身体转动的原因。

现在我们引进一个公式来表示科里奥利力的实际作用。假如莫坐在旋转木马上，在他看来木马是静止的。但是对站在地面上，并对力学规律有很好了解的乔来说，旋转木马在转动。假设我们在旋转木马上画一条径向线，莫正在沿这条径向线移动某个有质量的物体。我们将证明要这样做需要有一个侧向作用力。为了证明这一点，只要注意物体的角动量。因为它一直以同一角速度 ω 转动，所以角动量是

$$L = mv_{\text{切向}} r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2,$$

因此，当物体靠近中心时，它具有相对较小的角动量。但是假如把它移到一个较远的新的位置，即增大 r ，则 m 具有较大的角动量，因此一定要施加一个转矩，才能使物体沿径向移动（要沿着旋转木马的径向行走，你就必须把身子斜过来，向旁边作用一个推力。有机会时试试看）。在 m 沿径向移动时，所需要的转矩等于 L 随时间的变化率。如果 m 只沿径向运动， ω 保持恒定，那么转矩就是

$$\tau = F_c r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt},$$

这里 F_c 是科里奥利力。我们真正想要知道的是莫必须作用一个怎样的侧向力，才能使 m 以速率 $v_r = dr/dt$ 向外移动。这个力就是 $F_c = \tau/r = 2m\omega v_r$ 。

这样，我们就得出了科里奥利力的公式，让我们再仔细地观察一下，看看是否能从更基本的观点来理解这个力的来源。我们注意到科里奥利力在各个径向上都是一样的，甚至在原点也明显地存在。但在原点处特别容易理解这个力，只要从站在地面上的乔的惯性系中来观察所发生的情况就行了。图19-4表示物体 m 的三个连续位置，在 $t=0$ 时，正好通过原点。由于旋转木马在转动，我们看到 m 不是沿一条直线运动，而是沿一条曲线运动，这条曲线在 $r=0$ 处与旋转木马的直径相切。要使物体 m 沿曲线运动，在绝对空间中必须有一个力使它加速。这就是科里奥利力。

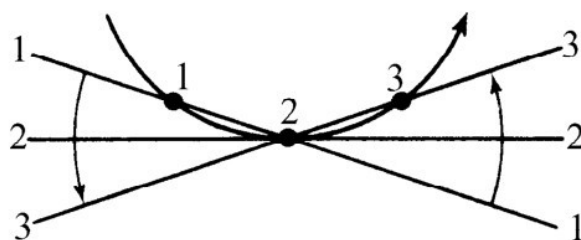


图19-4 在旋转转台上作径向移动的一个点的三个连续位置

这并不是发生科里奥利力的唯一情况。我们还可以证明，假如一个物体作匀速圆周运动，也有科里奥利力。为什么？莫看到沿圆周运动的速度是 v_M ，而另一方面，在乔看来， m 是以速度 $v_J = v_M + \omega r$ 绕圆周运动，因为 m 正被旋转木马带着一起运动。因此，我们认识到，这个力实际上就是速度 v_J 产生的总的向心力，即 mv_J^2/r ；这是实际

存在的力。现在，从莫看来，这个向心力有三个部分。我们可以把它全部写出

$$F_r = -\frac{mv_J^2}{r} = \frac{mv_M^2}{r} - 2mv_M\omega - m\omega^2 r.$$

这里， F_r 是莫应该看到的力。我们试试看来理解它。莫会感觉到第一项吗？他一定会说，“是的，即使在我转动的时候，假如我以速度 v_M 沿圆周跑，也一定会有一个向心力”。这就是莫一定会预料到的向心力，它与转动无关。此外，莫也十分清楚，还有另外一个向心力，甚至当物体静止在他的旋转木马上时，这个力也要对它发生作用。这就是第三项。除此两项外，还有一项，即第二项，它又是 $2m\omega v$ 。当速度是径向时，科里奥利力 F_c 是沿切向的，而当速度沿切向时，它是径向的。实际上，这个式子与另一个式子差一个负号，不管速度的方向如何变，这个力相对于速度的方向总是一样的。它与速度方向垂直，大小为 $2m\omega v$ 。

第20章 空间转动

§20-1 三维空间中的转矩

在本章中我们将讨论转轮的行为，这是力学中最引人注目和最有趣的成果之一。为此，我们必须首先把转动的数学公式、角动量原理、转矩等概念推广到三维空间中去。我们不准备使用这些公式的最一般的形式，也不准备研究它们的全部结果，因为这可能要花几年的时间，而我们必须很快转向讨论其他课题。在一门导论课程中，我们只能介绍一些基本定律，并把它们应用到少数几个特别有趣的情况中。

首先，我们注意到，对于在三维空间中的转动，无论转动体是刚体或其他任何系统，在二维空间中导出的定理仍然是正确的。也就是说， $xF_y - yF_x$ 仍是在“ xy 平面”的转矩，或“相对于 z 轴”的转矩。而且这个转矩也仍然等于 $xp_y - yp_x$ 的变化率，因为假如重温一下从牛顿定律推导式 (18.15) 的过程，我们就可以看到毋须假设运动是在平面内进行的；当我们对 $xp_y - yp_x$ 微分时，就得到 $xF_y - yF_x$ ，所以，这个定理仍然是正确的。于是，量 $xp_y - yp_x$ 称为属于 xy 平面的角动量，或相对于 z 轴的角动量。这一点既然成立，我们可以采用其他任何一对轴，并得出另一个公式。例如，我们可以采用 yz 平面，很明显，根据对称性，只要用 y 代替 x ，用 z 代替 y ，我们就可以找到转矩 $yF_z - zF_y$

，以及与yz平面相联系的角动量 $yp_z - zp_y$ 。当然，我们还可以采用zx平面，对这个平面，将有 $zF_x - xF_z = d(zp_x - xp_z)/dt$ 。

十分清楚，对于单个粒子的运动可以推导出这三个公式。而且，假如把许多粒子的诸如 $xp_y - yp_x$ 这样的量加在一起，并称之为总角动量，那么对于xy，yz，zx的三个平面，我们可以得到三类表示式。用同样的办法处理力，我们也可以得到在xy，yz，zx平面的转矩。因此，可以得出这样的定律，即与任一平面相联系的外转矩等于与此平面相联系的角动量的变化率。这正是二维空间中我们曾经写出的表示式的推广。

但是，也许有人会说：“噢，不过平面不只三个，还有许多平面，难道我们不能在某一角度上取某一平面，并由力来计算出在这个平面上的转矩吗？对于每一个这样的平面，我们都可以写出一组不同的方程式，这样，我们将有多少方程式啊！”十分有趣的是，结果表明，假如我们对另一个平面测出 $x', F_{y'}$ ，等等，从而得出关于该平面的表示式 $x'F_{y'} - y'F_{x'}$ ，那么结果可以写成对于xy，yz，zx三个平面的三个表示式的某种组合。这里毫无新的东西。换句话说，假如我们知道在xy，yz，zx平面内的三个转矩，则在任何其他平面上的转矩和相应的角动量总可以写成这三个转矩的某种组合：比如其中一个的6%加另一个的92%，等等。现在，我们将要分析这个性质。

假如，在xyz这组轴中，乔得出了他的三个平面的所有转矩和角动量，但莫具有在另一方向的轴 x', y', z' 。为了使问题简单一些，我们将假定只是x和y轴转了一个角度。莫的 x' 和 y' 是新的，但是他的 z' 正好和z相同。这就是说他具有新的yz和zx平面。因此，他得求出

新的转矩和角动量。例如，在 $x'y'$ 平面内，他的转矩应该是 $x'F_{y'}$ ， $-y'F_{x'}$ ，等等。现在，我们要做的是求出新转矩和旧转矩之间的关系，从而使我们能够建立从一组坐标轴到另一组坐标轴之间的联系。可能又有人会说：“这看起来正和处理矢量的问题一样。”确实如此，我们就是要那样做。然后他可能还会问：“那么，转矩不正是一个矢量吗？”结果表明，它是是一个矢量，但是如果不加分析，我们就不能立即明白这一点。因此，下面来作分析。我们将不打算详细地讨论每一步骤，因为我们只需要说明如何处理问题。乔算出的转矩为

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= xF_y - yF_x, \\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y, \\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z.\end{aligned}\tag{20.1}$$

这里我们离题插一句，请注意，在类似于这样的情况下，如果坐标处理不当，人们可能会把某些量的符号搞错。为什么不写成 $\tau_{yz} = zF_y - yF_z$ ？问题在于：一个坐标系既可以是“右旋的”，也可以是“左旋的”。一旦对它们（任意地）选定一种符号，如 τ_{xy} ，则其他两个量的正确表达式总可以根据下面任何一种次序中 xyz 字母的互换而求出



莫在他的坐标系中算出的转矩为

$$\begin{aligned}
\tau_{x'y'} &= x'F_{y'} - y'F_{x'}, \\
\tau_{y'z'} &= y'F_{z'} - z'F_{y'}, \\
\tau_{z'x'} &= z'F_{x'} - x'F_{z'}.
\end{aligned} \tag{20.2}$$

现在假设某一个坐标系转过了一个固定角度 θ ，从而使得 z 和 z' 相同（这个角度 θ 与物体的转动无关，也与坐标系内发生什么情况无关。它仅仅是一个人所采用的坐标轴与另一个人采用的坐标轴之间的联系，我们假定它是常数）。因此，两个坐标系中的坐标之间的关系为

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos\theta + y \sin\theta, \\
y' &= y \cos\theta - x \sin\theta, \\
z' &= z.
\end{aligned} \tag{20.3}$$

同样，因为力是矢量，所以它以与 x ， y ， z 相同的方式变换到新的坐标系，这是由于当且仅当一个量的各个分量以与 x ， y ， z 同样的方式变换时，才是矢量

$$\begin{aligned}
F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta, \\
F_{y'} &= F_y \cos\theta - F_x \sin\theta, \\
F_{z'} &= F_z.
\end{aligned} \tag{20.4}$$

现在，只要把式（20.3）的 x' ， y' 和 z' 与式（20.4）的 $F_{x'}$ ， $F_{y'}$ 和 $F_{z'}$ 统统代入式（20.2），我们就能求出转矩的变换。这样，我们就得出 $\tau_{x'y'}$ 的包含有一长串项的表达式，而结果（乍一看来，颇觉惊讶）它正好简化成 $x F_y - y F_x$ ，这正是 xy 平面内的转矩

$$\begin{aligned}
\tau_{x'y'} &= (x \cos\theta + y \sin\theta) (F_y \cos\theta - F_x \sin\theta) - (y \cos\theta - x \sin\theta) (F_x \cos\theta + F_y \sin\theta) \\
&= xF_y (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - yF_x (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + xF_x (-\sin\theta \cos\theta + \sin\theta \cos\theta) + yF_y (\sin\theta \cos\theta - \sin\theta \cos\theta) \\
&= xF_y - yF_x = \tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{20.5}$$

这个结果是很清楚的，因为假如我们仅在平面上转动轴，则在那个平面内对 z 轴的扭转与以前不会有什么不同，因为这是同一个平面！我们更感兴趣的是 $\tau_{y'z'}$ 的表达式，因为这是一个新的平面。现在在 $y'z'$ 平面来进行完全相同的变换，结果如下

$$\begin{aligned}
\tau_{y'z'} &= (y \cos\theta - x \sin\theta) F_z - z (F_y \cos\theta - F_x \sin\theta) \\
&= (yF_z - zF_y) \cos\theta + (zF_x - xF_z) \sin\theta \\
&= \tau_{yz} \cos\theta + \tau_{zx} \sin\theta.
\end{aligned} \tag{20.6}$$

最后，对 $z'x'$ 平面有

$$\begin{aligned}
\tau_{z'x'} &= z (F_x \cos\theta + F_y \sin\theta) - (x \cos\theta + y \sin\theta) F_z \\
&= (zF_x - xF_z) \cos\theta - (yF_z - zF_y) \sin\theta \\
&= \tau_{zx} \cos\theta - \tau_{yz} \sin\theta.
\end{aligned} \tag{20.7}$$

我们需要求出借助于旧坐标轴的转矩来表示新坐标轴转矩的规则，现在已经有了这条规则。我们怎样才能记住它呢？仔细观察一下式（20.5），（20.6）和（20.7），就可以看出这些等式与 x ， y 和 z 的等式之间有一个密切的关系。如果我们把 τ_{xy} 叫做某个量的 z 分量，例如称它为 τ 的 z 分量，那就好了，因为 z 分量应该不变，而式（20.5）正是如此，所以可以把式（20.5）理解为一个矢量变换。同样，如果我们把新引入的矢量的 x 分量和 yz 平面联系起来；把 y 分量和 zx 平面联系起来，则这些变换的表示式可以写成

$$\begin{aligned}\tau_{z'} &= \tau_z, \\ \tau_{x'} &= \tau_x \cos\theta + \tau_y \sin\theta, \\ \tau_{y'} &= \tau_y \cos\theta - \tau_x \sin\theta,\end{aligned}\tag{20.8}$$

这正是矢量变换的法则！

因此，这就证明了我们可以把组合式 $x F_y - y F_x$ 与矢量的 z 分量等同起来。虽然转矩是在一个平面上的扭转，并不具有先验的矢量特征，但在数学上它的确就像一个矢量。这个矢量垂直于扭转平面，它的大小与扭转强度成正比。这样一个量的三个分量就像真正的矢量一样变换。

因此，我们就用矢量来表示转矩；假设转矩作用在一个平面上，用尺画一条垂直于该平面的直线。但是仅仅说“垂直”于平面，还没有规定符号。为了正确确定符号，我们必须采用一个规则，使得利用这个规则，能够告诉我们假如转矩以某种方式作用在 xy 平面上，那么与之相联系的轴是沿 z 的正方向。也就是说，人们必须规定“左”和“右”。假设坐标系是右旋系统中的 x ， y ， z ，那么这个法则可以描述如下：

如果我们把扭转想象为旋转一个具有右旋螺纹的螺钉，那么与扭转有关的那个矢量的方向就是螺钉前进的方向。

为什么转矩是一个矢量呢？我们能够把一个平面和单一的一根轴联系起来，从而能把矢量和转矩联系起来是十分幸运的奇迹；这是三维空间的一个特性。在二维空间中，转矩是一个普通的标量，没有规定方向的必要。在三维空间中，它是一个矢量。假如是四维空间，困难就很大，因为（例如我们取时间为第四维）不仅有 xy ， yz 和 zx 平面，还有 tx ， ty 和 tz 平面。这里有6个面，人们不能把6个量表示为四维空间中的一个矢量。

我们长期地生活在三维空间中，因此值得指出，前面的数学处理与 x 代表位置， F 代表力这些事实无关，它只依赖于矢量的变换规律。因此，如果用某个其他矢量的 x 分量来代替 x ，结果将毫无差别。换句话说，假如我们要计算 $a_x b_y - a_y b_x$ （这里 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是矢量），并把它称为某一新的量 c 的 z 分量，那么这些新的量组成了矢量 $\mathbf{c}$ 。我们需要找出一个数学表达式来表示具有三个分量的这个新的矢量与矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的关系。为此而设想的表示方法是 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。这样，除了在矢量分析理论中通常的标积之外，又有一种新的乘法，称为矢积。因而假如 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ，就等于写成下面的形式

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \quad (20.9)$$

假如把 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的次序颠倒一下，即把 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 改为 $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{a}$ ，则 $\mathbf{c}$ 的符号也必须颠倒一下，因为 c_z 应该是 $b_x a_y - b_y a_x$ 。因此，叉积与一般的

乘法不一样，在一般的乘法中 $ab=ba$ ，而对叉积 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。由此我们立即可以证明，假如 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ，其叉积为零，即 $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ 。

叉积对表达转动的特性十分重要，因此，掌握三个矢量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{c}$ 的几何关系是很重要的。当然，分量之间的关系已由式(20.9)给出，从那里也可以确定它们在几何上的关系。结果是首先矢量 $\mathbf{c}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ （试计算 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ ，看它是否为零）。其次， $\mathbf{c}$ 的大小可以证明等于 $\mathbf{a}$ 的大小乘 $\mathbf{b}$ 的大小再乘两者之间夹角的正弦。 $\mathbf{c}$ 指向什么方向呢？设想把 $\mathbf{a}$ 转过一个小于 180° 的角到 $\mathbf{b}$ ；用这样的方法转动一个右旋螺纹的螺钉，螺钉前进的方向就是 $\mathbf{c}$ 的方向。我们用右旋螺钉而不用左旋螺钉，这是一个习惯问题，而且它不断提醒我们，假如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是一般意义下的“真正的”矢量，那么由 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 创造的新的“矢量”是人为的，它的性质与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 略有差别，因为它是由一个特殊法则构成的。假如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是所谓的普通矢量，我们给它们取一个专门的名称叫做极矢量。例如坐标 $\mathbf{r}$ 、力 $\mathbf{F}$ 、动量 $\mathbf{p}$ 、速度 $\mathbf{v}$ 、电场 $\mathbf{E}$ 等等都是这种矢量，这些都是通常的极矢量。在它们的定义中只包含一次叉积的矢量叫做轴矢量或赝矢量。转矩 $\boldsymbol{\tau}$ 和角动量 $\mathbf{L}$ 当然就是赝矢量的例子。还可以发现角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 也是赝矢量。

为了使矢量的数学性质完整，我们应该知道关于矢量的点积和叉积的所有规则。在目前的应用中，我们只需要知道很少一点就够了，但是为了完整起见，我们将写出所有矢量乘法的规则，便于今后应用。它们是

$$(a) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$(b) \quad (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

$$(c) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

$$\begin{aligned}
& \text{(d)} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\
& \text{(e)} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \\
& \text{(f)} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.
\end{aligned} \tag{20.10}$$

§20-2 用叉积表示的转动方程式

现在我们要问，是否在物理学中的任何方程都可以写成叉积的形式呢？回答是大多数的方程都可以这样写。例如，我们立即可以看出转矩等于位置矢量和力的叉积

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{20.11}$$

这是包含 $\tau_x = yF_z - zF_y$ 等三个方程式的一个矢量。根据同样的想法，假如只有一个粒子时，角动量矢量就是离原点的距离乘以动量矢量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{20.12}$$

对于三维空间转动来说，与牛顿的 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ 定律相类似的动力学定律是：转矩矢量等于角动量矢量随时间的变化率

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt. \tag{20.13}$$

假如把式（20.13）对很多粒子求和，那么作用在一个系统上的外转矩是总角动量的变化率

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{外}} = d\mathbf{L}_{\text{总}}/dt. \tag{20.14}$$

另一个定理是：若总的外转矩为零，则这个系统的总角动量矢量不变。这称为角动量守恒定律。假如没有转矩作用在一个给定系统上，它的角动量就不会改变。

角速度情况如何呢？它是矢量吗？我们已经讨论过固体绕一个给定轴的转动，现在假定我们使它同时绕两根轴转动。它可以一方面绕盒子内部的一根轴转动，同时整个盒子再绕另一个轴转动。这种组合运动的结果是物体简单地围绕某一个新的轴转动。这个新的轴的奇特之处可以这样来描写：假如以 z 方向上的一个矢量来表示在 xy 平面内的转动率，并令其长度等于在该平面内的转动率，再在 y 方向上画出另一个矢量，以表示在 zx 平面内的转动率，则按照平行四边形法则把它们加起来，得出的矢量其大小就表示物体转动的快慢，其方向则代表转动是在哪个平面中进行的。简言之，角速度是一个矢量，而在三个平面内转动的快慢，就是该矢量在垂直于各个平面的方向上的投影[1]。

作为角速度矢量的一个简单应用，我们可以计算一下作用在一个刚体上的转矩所消耗的功率。功率当然是功随时间的变化率，在三维空间中，可以证明功率是 $P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$ 。

所有平面转动的公式都可以推广到三维空间。例如，假定一个刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕某一轴转动，我们可以问，“在矢径 $\boldsymbol{r}$ 处的一个点的速度是什么？”可以证明刚体上一个粒子的速度是 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ ，这里 $\boldsymbol{\omega}$ 是角速度， $\boldsymbol{r}$ 是矢径，我们把它作为一个问题留给学生去证明。叉积的又一个例子是：科里奥利力的公式也可以把它写成叉积的形式： $\boldsymbol{F}_c = 2m \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}$ 。即假如一个坐标系以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，一个粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 在

这个坐标系内运动，在这个转动坐标系中考虑问题，就必须加上赝力 F_c 。

§20-3 回转仪

现在再来讨论角动量守恒定律。这个定律可以用快速旋转的轮子或下面的回转器来演示（见图20-1）。假如我们站在一个转椅上，并拿着绕水平轴转动的轮子，这个轮子绕水平轴有一个角动量。绕竖直轴的角动量不会因为椅子的支轴（无摩擦）而改变，假如我们把轮子的轴转到竖直方向，那么轮子就具有绕竖直轴的角动量，因为这时它在绕竖直轴转动。但是，这个系统（轮子，我们自己和椅子）不可能有竖直分量的角动量，因此，我们和椅子必须沿与轮子自旋相反的方向转动，以与轮子的转动平衡。

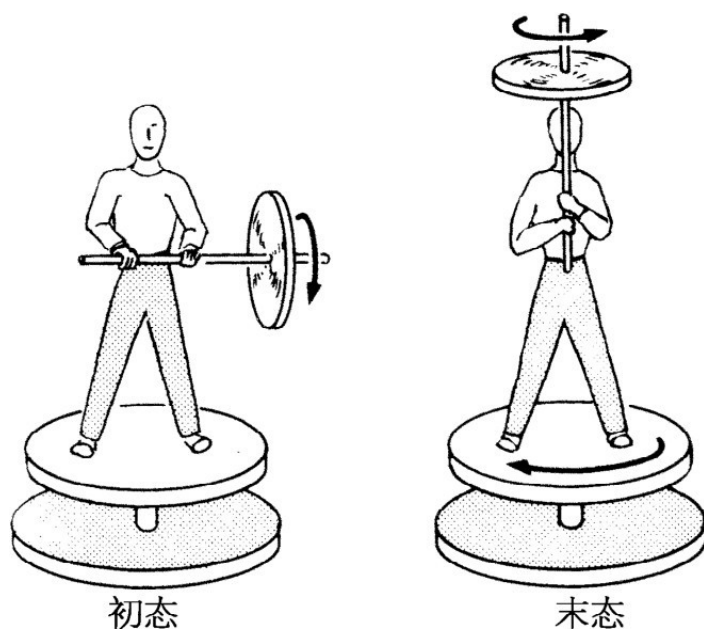


图20-1 起先：轴是水平的，绕竖直轴的转矩等于0；后来：轴在竖直方向，绕竖直轴的角动量仍然为零，人和椅子的转动方向与轮子的转动方向相反

首先我们来较详细地分析一下刚才叙述的事情。使我们感到惊奇和需要理解的是，当我们把回转仪的轴转向竖直方向时，从哪里来的力使我们和椅子转动的。图20-2表示轮子绕y轴快速转动。因此，它的角速度是沿着绕它转动的轴，结果表明它的角动量也同样在y方向上。现在假如我们想使轮子以很小的角速度 Ω 绕x轴转动，那么需要多大的力呢？在经过一个很短的时间 Δt 之后，轴转到一个新的位置，与水平方向成 $\Delta\theta$ 角。因为角动量的主要部分是由于绕轴旋转而产生的（很小一部分是由慢慢转动引起的），所以我们看到角动量矢量发生了变化。角动量发生了什么变化呢？角动量的大小没有变，但是它的方向改变了 $\Delta\theta$ 。这样，矢量 ΔL 的大小为 $\Delta L = L_0 \Delta\theta$ ，因此，转矩，即角动量随时间的变化率是

$$\tau = \Delta L / \Delta t = L_0 \Delta\theta / \Delta t = L_0 \Omega .$$

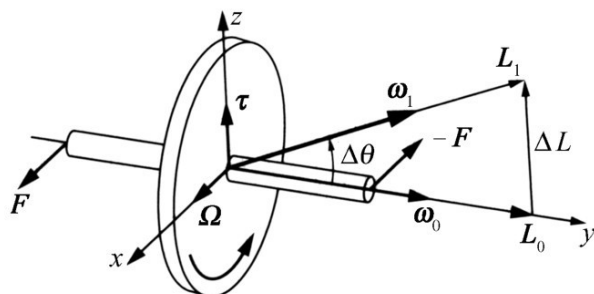


图20-2 回转仪

考虑到各个量的方向，我们知道

$$\tau = \Omega \times L_0 . \quad (20.15)$$

由此可见，如果 Ω 和 L_0 如图所示，都在水平方向， τ 就在竖直方向。为了产生这个转矩，一定要有水平方向的力 F 和 $-F$ 作用在轴的两

端。这些力是如何作用的呢？在我们试图使轮子的轴往竖直方向转动时，通过我们的手施加了这种作用力。但是，牛顿第三定律要求有大小相等、方向相反的力（和大小相等、方向相反的转矩）作用在我们身上。这就使我们绕竖直轴 z 沿相反方向转动。

这个结果可以推广到快速旋转的陀螺上去。对于常见的旋转陀螺，作用在它质心上的重力提供了一个相对于与地板接触点的转矩（见图20-3）。这个转矩在水平方向，它使陀螺的轴绕竖直方向在一个圆锥上进动。假如 Ω 是（竖直方向的）进动角速度，我们再次发现

$$\tau = dL/dt = \Omega \times L_0.$$

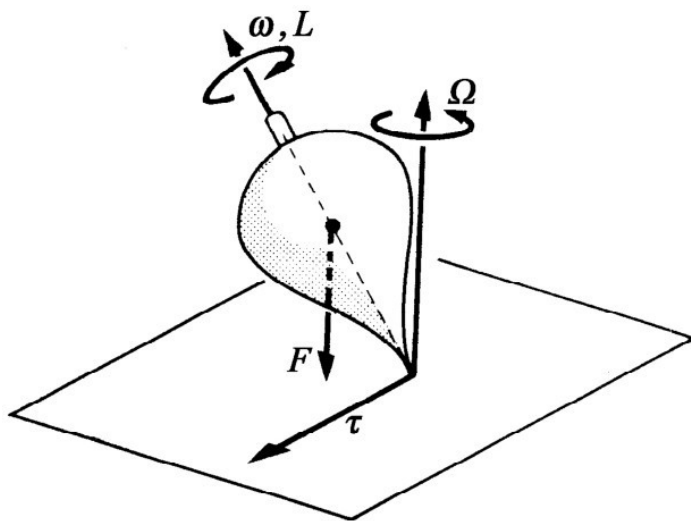


图20-3 一个快速旋转的陀螺注意：转矩矢量的方向就是进动的方向

因此，当我们对快速旋转着的陀螺施加转矩时，其进动方向就在转矩的方向上，也就是与产生转矩的力垂直的方向。

现在我们可以说是理解了回转仪的进动，实际上，我们是从数学上去理解的。然而，这只是数学上的事情，而且在某种意义上简直是

“奇迹”。当我们深入到越来越高级的物理学时，将会看到很多简单的东西用数学的方法来推导要比从基本的或简单的意义上去真正理解它们来得快一些。这是一个很奇怪的特性，而且在我们接触越来越高深的研究工作时，就会遇到这些情况，其中数学导出了结果，但这些结果没有一个人能以任何直接的方式真正理解它。狄喇克方程就是一个例子，它的形式非常简单而优美，但是它的结论却很难理解。对于我们所讨论的特殊情形，陀螺的进动看上去像是包含有直角和圆周，扭转和右手螺旋的一类奇迹。我们要做的是怎样用更符合物理的方式去理解它。

怎样用实际的力和加速度来说明转矩呢？我们注意到，当轮子进动时，在轮子上的质点并不是真正在一个平面内运动，因为轮子正在进动（见图20-4）。正如我们在前面（图19-4）所解释过的那样，穿过进动轴的质点沿曲线路径运动，从而要求有一个侧向作用力。这个力是通过我们推轴时施加的，它通过轮子的辐条传到轮子的边缘。“等一等”，也许有人要问，“在轮子的另一侧往相反方向运动的粒子的情况如何呢？”不难确定必须有一个沿反方向的力作用在那一边。因此，我们所应施加的合力为零。这些力相互抵消，但是其中的一个力必须作用在轮子的一边，另一个力作用在轮子的另一边。我们可以在轮子上直接用力，但是因为轮子是固体，它的辐条可以传递力，这就使我们可以通过推轴而施加力。

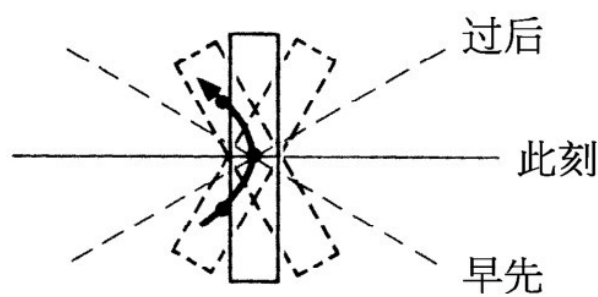


图 20-4 当图 20-2 的自旋轮子的轴在转动时，轮子上的质点是沿曲线运动的

到目前为止，我们已经证明了，假如轮子在进动，它就能够与重力转矩或某种其他转矩相平衡。但是，我们所证明的这一切只是方程式的一个解。即，假如有转矩作用，并且恰当地使轮子开始旋转，那么它将平稳地和均匀地进动。但是我们并没有证明（而且这是不对的），由于一个给定转矩的作用，自旋物体可能进行的最一般运动就是均匀进动。一般运动还包含有相对于平均进动的“晃动”。这个“晃动”称为章动。

有人喜欢说，当人们在回转仪上施加一个转矩时，它就转动，并进动，即这个转矩产生了进动。非常奇怪的是，当突然把回转器放开的时候，它不是在重力的作用下下落，而是向旁边运动！为什么我们所知道并感觉到的向下的重力会使它侧向运动呢？世界上像式（20.15）之类的所有公式都不能回答这个问题，因为式（20.15）是一个特殊方程，仅在回转仪正常进动时才适用。说得详细一点，所发生的真实情况如下：假如我们紧紧抓住轴使其不能以任何方式进动（但是陀螺在自旋），这样就没有转矩作用着，甚至连重力转矩都没有，因为它被我们的手指平衡了。但是，在我们突然把手放开的一瞬间，立即就有一个重力转矩。任何头脑正常的人都会认为陀螺将掉下来，确实如此，当陀螺自转不太快时，确实看到它在开始时是在下落。

正如我们预期的那样，回转器确实是在下落。但当它一旦下降时，它就开始转动，假如要使这个转动继续下去，就需要有一个转矩。由于在这个方向上没有转矩，回转仪就沿与失去的力相反的方向“落下”。这就使回转仪有一个绕竖直轴运动的分量，就像在稳定进动时一样。但是，实际运动要“超过”稳定的进动速度，实际上轴又再升回到原来开始时的水平位置。轴的一端所走的路径是一条摆线（即像

粘在汽车轮胎上的石子所走过的路径)。通常这种运动很快,以致眼睛无法跟踪,而且由于滚珠轴承的摩擦力,使它很快衰减下来,变成稳定的进动(图20-5)。轮子旋转得越慢,章动就越明显。

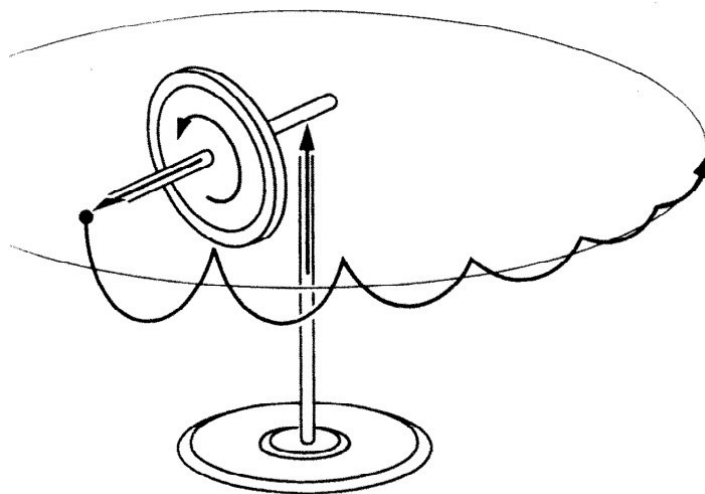


图20-5 原来被紧紧抓住的回转器刚刚放开之后,在重力的作用下,其轴端的实际运动情况

当运动稳定之后,回转仪的轴要比开始时略低一点。为什么呢(这里有更复杂的细节,我们所以要进行讨论是为了不使读者产生回转仪是绝对不可思议的奇迹的想法。它确实是很奇特的,但绝非不可思议的奇迹)?假如我们绝对水平地抓住回转仪的轴,然后突然放开,那么简单的进动方程就可以告诉我们,它是在水平面内进动的。然而这是不可能的!轮子对于进动轴有一定的转动惯量,这一点尽管前面忽略了,但确是存在的,如果它相对于这个轴转动,即使很慢,它对这个轴也有一个比较弱的角动量。这个角动量是从哪里来的呢?如果支轴很理想,相对于竖直轴就没有转矩。如果角动量不变,进动是怎么来的呢?回答是轴端的摆线运动衰减为等效的滚动圆中心的平均和稳定的运动。也就是说,它处于略微低一点的位置上。因为它较低,自旋角动量就有一个微小的竖直分量,这正是进动所需要的。这

样，你就明白，为了继续保持转动，必须使它低一些，同时向重力作一点让步；通过把它的轴放低一些来保持其绕竖直轴的转动，这就是回转器的旋转过程。

§20-4 固体的角动量

在我们结束三维空间转动的课题之前，我们至少还要定性地讨论几个在三维转动中发生的效应，这些效应本身不是自明的。一般说来，主要的效应是一个刚体的角动量并不一定必须和角速度在同一个方向上。我们来考虑一个轮子，这个轮子倾斜地固定在一根杆上，但轴通过其重心，如图20-6所示。当我们使轮子绕轴旋转时，任何人都知道，因为轮子倾斜地安装着，轴承将发生震动。定性地说，我们知道在转动系统中有一个离心力作用在轮子上，试图把轮子上的物体抛到离轴尽可能远的地方。这趋向于使轮子的平面排成与轴相垂直。为了反抗这种趋势，轴承就要施加一个转矩。如果轴承施加了转矩，必然会有一个角动量的变化率。当我们仅使轮子绕轴旋转时，怎么会有角动量的变化率呢？假使我们把角速度 ω 分成 ω_1 和 ω_2 ， ω_1 垂直于轮子的平面， ω_2 平行于轮子的平面。什么是角动量呢？相对于这两个轴的转动惯量是不同的，因此，角动量的两个分量（只在这两个特殊的轴上）等于转动惯量乘相应的角速度分量，它们的比值与角速度分量之比值不一样。因而角动量矢量在空间的方向不是沿着轴的方向。当我们转动物体时，我们也在空间中转动了角动量矢量，这就必须在轴上施加一个转矩。

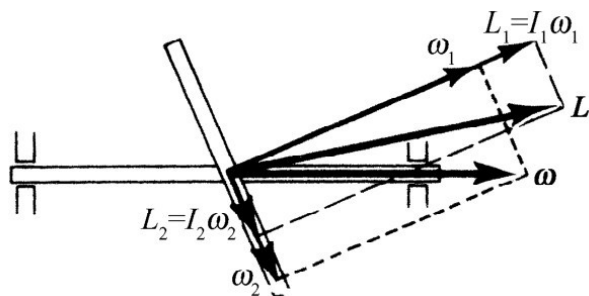


图20-6 一个转动物体的角动量并不一定平行于角速度

转动惯量有一个非常重要而有趣的性质，很容易叙述，也很容易应用，它是上述分析的基础，但它太复杂，难于在这里证明。这个性质叙述如下：任何刚体，即使是像马铃薯之类不规则的物体，都有通过质心的三根互相垂直的轴，使得相对于这三根轴中某一根轴的转动惯量与通过质心的任何轴相比具有最大可能值；相对于这三根轴中另一根轴的转动惯量则具有最小可能值；而对于第三根轴的转动惯量则处于两者之间（或等于其中之一）。这三根轴称为物体的主轴，它们具有一个很重要的性质——如果物体绕其中一个轴转动，它的角动量与角速度的方向相同。对于具有对称轴的物体来说，它的主轴就是对称轴。

假如我们用 x ， y 和 z 轴来表示主轴，并称相应的主转动惯量为 A ， B 和 C ，我们就能很容易算出以任一角速度 ω 转动的物体的角动量和动能（图20-7）。如果将 ω 沿 x ， y ， z 方向分解成 ω_x ， ω_y ， ω_z 分量，并在 x ， y ， z 轴上取单位矢量 i ， j ， k ，我们就可以把角动量写成

$$L = A \omega_x i + B \omega_y j + C \omega_z k. \quad (20.16)$$

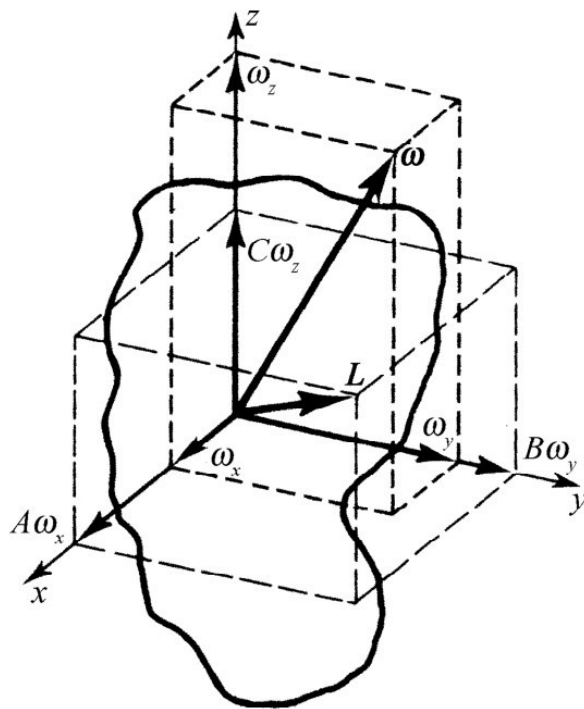


图20-7 一个刚体的角速度和角动量 ($A > B > C$)

转动动能是

$$\text{K. E.} = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (20.17)$$

[1] 这一点的正确性也可以通过把无限小时间 Δt 内物体所有粒子的位移合在一起的办法推导出来。它本身不是自明的，留给有兴趣的读者自己证明。

第21章 谐振子

§21-1 线性微分方程

在学习物理学时，通常是把课程分成一系列的科目，如力学、电学、光学，等等，并且总是一门课程接着一门课程地学习。例如，到目前为止本门课程主要讨论的是力学。但是，有一件奇怪的事情却一再出现：即在物理学的不同领域中，甚至在其他的学科中，出现的方程式往往几乎是完全一样的，因此在这些不同领域中很多现象都有其类似之处。举一个最简单的例子，声波的传播在很多方面就与光波的传播相类似。如果我们深入地研究声学，就会发现要做的很多工作与我们深入研究光学时相同。所以，对一个领域中某种现象的研究可以扩展我们对另一个领域的知识。最好从一开始就认识到这种扩展是可能的，否则，人们就可能对为什么要花这么多的时间和精力来研究仅仅是力学中的很小一部分，感到不可理解。

我们将要学习的谐振子，在许多其他领域中都有相类似的东西，虽然我们从力学的例子，如挂在弹簧上的重物，小振幅的摆，或者某些其他的力学装置出发，但实际上我们是在学习某一种微分方程。这种方程在物理学和其他学科中反复出现，而且事实上它是许多现象中的一部分，是值得我们认真研究的。包含这个方程式的现象有：挂在弹簧上的一个具有质量的物体的振动；在电路中电荷的来回振荡；正在产生声波的音叉的振动；电子在原子中产生光波的类似振动；描写调节温度的恒温器之类的伺服系统的操作方程；化学反应中一些复杂

的相互作用；在养料供给和细菌产生的毒素共同作用下菌落的繁殖和生长；狐狸吃兔子，兔子吃青草等等；所有这些现象遵循一些彼此非常相似的方程式，这就是为什么我们要这样详细地研究机械振子的原因。这些方程称为常系数线性微分方程。一个常系数线性微分方程包含几项之和，每一项都是因变量对自变量的微商再乘以某一个常数。如

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (21.1)$$

称为 n 阶常系数线性微分方程（每一个 a_i 都是常数）。

§21-2 谐振子

遵循常系数线性微分方程的最简单的力学系统大概要算是挂在弹簧上的一个具有质量的物体的运动：先是弹簧伸长以和重力平衡，待其达到平衡后，我们来讨论物体离开其平衡位置的垂直位移（图21-1）。我们称这个向上的位移为 x ，并假设弹簧是完全线性的，因此，当弹簧伸长时，弹簧往回拉的力严格地正比于它的伸长的量。即力为 $-kx$ （负号提醒我们这个力是往回拉的）。这样，质量乘加速度应等于 $-kx$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (21.2)$$

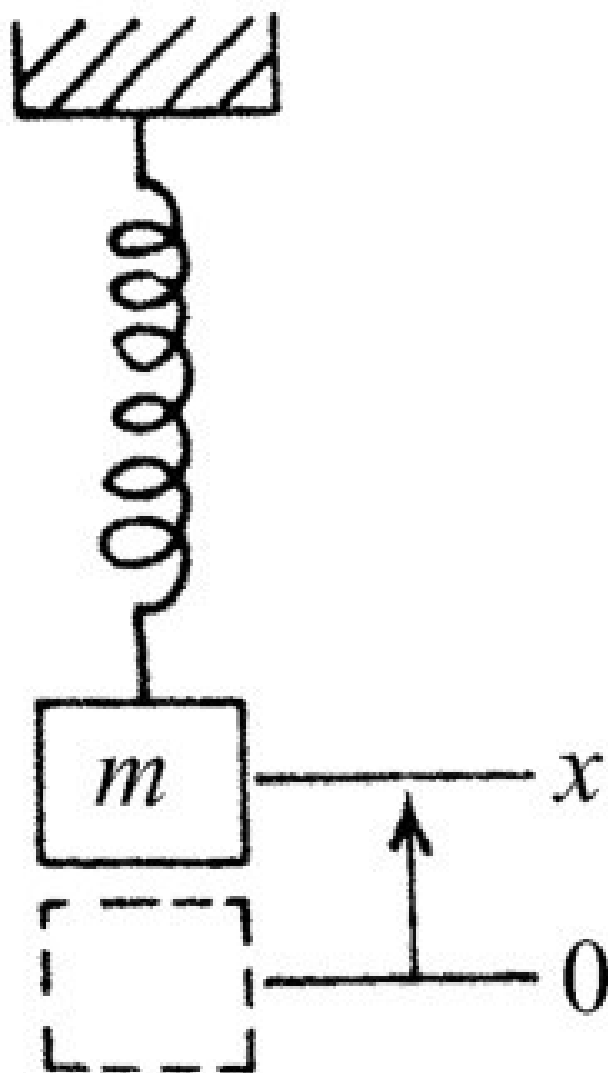


图21-1 挂在弹簧上的物体：谐振子的一个简单例子

为了简单起见，假设碰巧（或改变时间的量度单位）比值 $k/m=1$ 。我们先来研究方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x, \quad (21.3)$$

然后再回过头来研究明显含有 k 和 m 的式（21.2）。

我们已经对式(21.3)作过详细的数值分析；在最初引进力学课题时，为了寻求运动规律，我们解过这个方程[见式(9.12)]。利用数值积分，我们得出了一条曲线(图9-4)，该曲线表明，假如质量为 m 的物体在开始时就有位移，但处于静止状态，它将向下运动并通过零点；当时我们没有进一步讨论下去，但我们当然知道它一定在继续上下运动——即作振动。当我们对这个运动进行数值计算时，曾发现，在 $t=1.570$ 时它通过平衡点。而整个周期是这个量的四倍，即 $t_0=6.28$ “秒”。这还是在我们对微积分不怎么理解的时候，用数值计算得出的。同时，我们设想数学系已经发表了一个函数，它的两次微商等于它本身再加上一个负号（当然也有直接得出这个函数的方法，但是这些方法比已经知道了答案再来讨论要复杂得多）。这个函数就是 $x=\cos t$ 。对此式求微分得出： $dx/dt=-\sin t$ 和 $d^2x/dt^2=-\cos t=-x$ 。函数 $x=\cos t$ 在 $t=0$ 时从 $x=1$ 开始，也没有初速度；这就是我们以前进行数值计算时的初始状态。现在知道了函数 $x=\cos t$ ，我们就能算出通过 $x=0$ 处的时间的准确值。答案是 $t=\pi/2$ ，即1.571 08，由于数值计算有误差，所以我们以前得出的最后一位数字是错的，但它是非常接近的！

现在进一步研究原来的问题，我们把时间的单位恢复为真正的秒。这时方程的解又是什么呢？首先，我们也许会认为可以用 $\cos t$ 乘上某个量的形式引入常数 k 和 m 。因此，我们来试一下方程式 $x=A \cos t$ ；于是得到 $dx/dt=-A \sin t$ 和 $d^2x/dt^2=-A \cos t=-x$ 。令人惊讶的是我们发现，我们并没有解出式(21.2)，而是又一次得到了式(21.3)。这个事实说明了线性微分方程的一个极其重要的性质：如果用任意常数乘方程的一个解，所得结果仍是方程的解。关于这一点的数学含义是很清楚的。假如 x 是一个解，如果在方程两边同时乘上 A ，可以看到所有微商也同样乘上了 A ，所以 Ax 就像 x 一样正好是原方程的解。它的

物理含义如下：假如我们在弹簧上挂上一个重物，并把它拉下两倍远的距离，则作用力就为两倍，由此产生的加速度也为两倍，在某一给定时间内得到的速度也为两倍，在给定的时间内走过的距离也为两倍；但是它回到原点要走的距离也是两倍，因为它被拉下了两倍。因此，它回到原点所花的时间是一样的，与初始位移无关。换句话说，对于遵循线性方程的运动来说，不管运动有多“强”，都具有同样的时间图像。

上面的做法是错误的，它仅仅告诉我们线性方程的解乘任意常数后，仍满足同样的方程，而不是另一个方程。经过小小的挫折和一番尝试后，我们发现要得到 x 项前有不同系数的方程，必须改变时间的标度，换句话说，式（21.2）的解应取如下的形式

$$x = \cos \omega_0 t. \quad (21.4)$$

（必须注意，这里的 ω_0 不是旋转物体的角速度，但是，如果不准用同一个字母表示一个以上事物的话，字母就不够用了。）在 ω 下角写一个“0”的原因是因为不久我们将要遇到更多的 ω ；我们记住 ω_0 与这个振子的固有运动有关。现在来试一下式（21.4），这次比较成功，因为 $dx/dt = -\omega_0 \sin \omega_0 t$ 及 $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x$ 。这样，终于解出了我们真正要解的方程。若取 $\omega_0^2 = k/m$ ，那么方程式 $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$ 就和式（21.2）相同。

接下来我们要研究的是 ω_0 的物理意义，我们知道，当角度改变 2π 时，余弦函数就自行重复，所以，当“角度”改变 2π 时， $x = \cos \omega_0 t$ 将重复原来的运动，它将经历一个完整的循环。通常把 $\omega_0 t$ 这个量称

为运动的相位。要使 $\omega_0 t$ 改变 2π ，时间必须改变一个量 t_0 ， t_0 就叫做一次完全振动的周期；显然， t_0 必须满足 $\omega_0 t_0 = 2\pi$ 。这就是说， $\omega_0 t_0$ 应该是振动一周的角度，如果使 t 增加 t_0 ，相位就增加 2π ，各个量都将自行重复。因此

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (21.5)$$

由此可见，物体的质量越大，在弹簧上来回振动一次所花的时间就越长。这是因为它有更大的惯性，所以当作用力相同时，要花较长的时间才能使它运动。另外，如果弹簧的弹性越强，它就运动得越快，因此得出：弹簧的弹性越强，周期就越短。

必须注意，挂在弹簧上的物体的振动周期与它的初始运动状态以及弹簧被拉下的长度都毫无关系。运动方程式(21.2)能确定周期，但不能确定振幅。实际上，振幅是由我们如何放开物体，即由所谓初始条件或起始条件来决定的。

实际上，我们还没有真正找到方程式(21.2)的最一般的可能解。它还有别的解。其原因很清楚：因为 $x = a \cos \omega_0 t$ 所概括的情况都是以一定的初始位移而无初速度开始的运动。但是，物体从 $x = 0$ 处开始振动是可能的，例如，我们可以冲击它一下，使它在 $t = 0$ 时具有一定的速度。这种运动不能用余弦表示，而要用正弦来表示。换个方式讲，假如 $x = \cos \omega_0 t$ 是一个解，那么如果我们在某一时刻（可以把它叫做 $t = 0$ ）突然走进房间，正好看到物体通过 $x = 0$ 处，它将照样运动下去，这种情况难道不是明显存在的吗？因此， $x = \cos \omega_0 t$ 不可能是最一般的解；应该说时间的起点必须是可以移动的。例如，我们可以把

解写成这样的形式： $x = a \cos \omega_0 (t - t_1)$ ，其中 t_1 是某一常数。这相当于把时间的起点移到某一新的时刻。进一步，我们可以展开下式

$$\cos (\omega_0 t + \Delta) = \cos \omega_0 t \cos \Delta - \sin \omega_0 t \sin \Delta,$$

并写成

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

其中 $A = a \cos \Delta$ ，而 $B = -a \sin \Delta$ 。这些形式中的任何一个都是描写式(21.2)完整的通解的可能形式：即微分方程 $d^2 x / dt^2 = -\omega_0^2 x$ 的每一个解都可以写成

$$(a) \quad x = a \cos \omega_0 (t - t_1)$$

或

$$(b) \quad x = a \cos (\omega_0 t + \Delta) \quad (21.6)$$

或

$$(c) \quad x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

式(21.6)中的一些量的名称如下： ω_0 称为角频率；它是1 s内相位变化的弧度数，由微分方程所决定。其他常数不是由方程式，而是由运动的初始条件来决定的。其中 a 表征物体能达到的最大位移，称为振幅。常数 Δ 有时称为振动的相位，但是这样的叫法有点混乱，因为有些人把 $\omega_0 t + \Delta$ 称为相位，并且说相位是随时间而变化的。我们

或许可以说， Δ 是相对于某一确定零点的相移。让我们各有各的说法吧！不同的 Δ 对应于不同相位的运动，这是确定无疑的，至于是否要把 Δ 称作相位，这是另一个问题。

§21-3 简谐运动和圆周运动

方程式（21.2）的解中含有余弦项这一事实使我们想到：这种运动可能与圆有某种关系。当然这是人为的，因为实际上在直线运动中并不涉及圆——物体仅作上下运动。不过可以指出，事实上在研究圆周运动力学的时候，我们就已解过这个微分方程。假如一个粒子以恒定的速率 v 沿一圆周运动，从圆心指向粒子的矢径所转过的角度的大小与时间成正比。如果令此角度为 $\theta=vt/R$ （图21-2），那么 $d\theta/dt=\omega_0=v/R$ 。我们知道还有一个向心加速度 $a=v^2/R=\omega_0^2 R$ ；同时我们还知道，在某一给定时刻的位置 x 是圆的半径乘 $\cos\theta$ ，位置 y 是半径乘以 $\sin\theta$

$$x=R\cos\theta, \quad y=R\sin\theta.$$

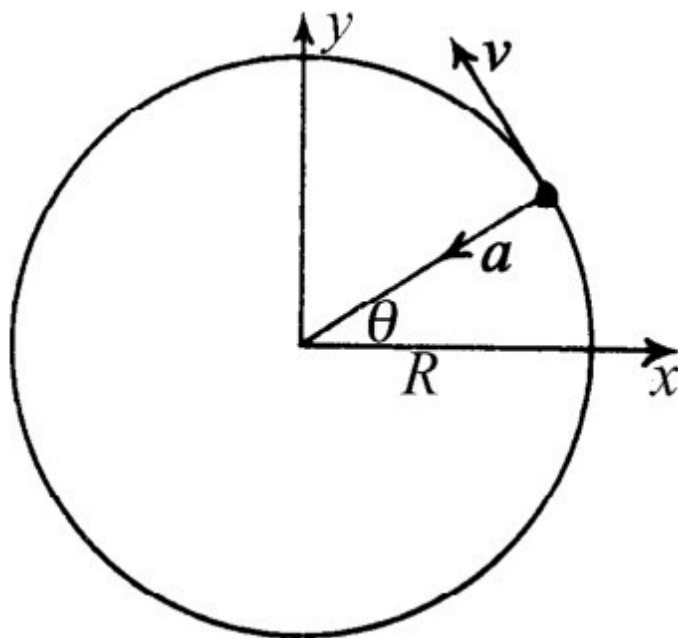


图21-2 以恒速在一圆形轨道上运动的粒子

那么加速度将怎样呢？加速度的 x 分量 d^2x/dt^2 是什么？我们已经用几何方法得出：它等于加速度的大小乘投影角的余弦，再加上负号，因为它是指向圆心的

$$a_x = -a \cos \theta = -\omega_0^2 R \cos \theta = -\omega_0^2 x. \quad (21.7)$$

换句话说，当一个粒子作圆周运动时，它的运动的水平分量具有的加速度与离圆心的水平位移成正比。显然，对于圆周运动也有解： $x = R \cos \omega_0 t$ 。式(21.7)与圆的半径无关，因此，当 ω_0 给定时，对于任何半径的圆都得到同样的方程。这样，我们就有种种理由预计，挂在弹簧上的物体的位移最终将与 $\cos \omega_0 t$ 成正比，而且实际上，与我们在观察以角速度 ω_0 作圆周运动的物体的位置的 x 分量时所看到的运动完全一样。为了验证这一点，我们可以设计一个实验来证明挂在弹簧上的物体的上下运动和一个点作圆周运动完全一样。在图21-3中，一束

弧光把装在转动轴上的曲柄销和一个作垂直振动的物体的影子并排地投射到屏上。如果我们使物体在一个适当的时刻和适当的位置开始运动，并且小心地调节转轴的转速，使两者的频率相匹配，则每一个将严格地跟着另一个运动。此外，还可以验证前面用余弦函数求得的数值解，看看是否很好地符合。

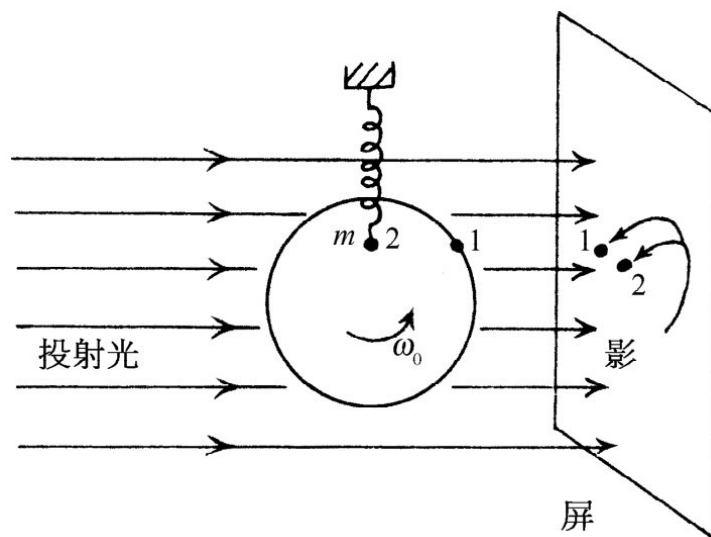


图21-3 演示简谐运动和匀速圆周运动之间等同性的实验

这里我们要指出，因为匀速圆周运动与上下振动在数学上有很密切的联系，假如把振动看成是某物作圆周运动的投影，我们就能用比较简单的方法来分析振动。换句话说，虽然距离 y 在振子问题中完全是多余的，我们仍然可以人为地给式(21.3)再补充一个用 y 表示的方程式，并把这两个方程放在一起。如果这样做，我们就可以用圆周运动来分析一维振子，这比解微分方程要容易得多。解这种问题的技巧是应用复数，在下一章中我们将介绍这个方法。

§21-4 初始条件

现在我们来考虑是什么确定了常数 A 和 B ，或 a 和 Δ 的。当然，这些是由我们怎样使运动开始来决定的。如果我们仅仅是以一个很小的位移开始运动，这是振动中的一种类型；如果开始时有一初始位移，并在放手时再推一下，我们就得到另一种运动。常数 A 和 B ，或 a 和 Δ ，或用其他任何形式表达的常数，都是由运动的初始状态来决定的，而与这种情况下的任何其他特征无关。这些就叫初始条件。我们希望把初始条件和这些常数联系起来。虽然采用式（21.6）中的任一形式都能做到这一点，不过用式（21.6c）最为方便。假如在 $t=0$ 时，物体从初始位移 x_0 处以一定速度 v_0 开始运动，这是开始运动的最一般的方式（我们不能指定开始运动的加速度，因为在 x_0 给定之后，加速度要由弹簧的性质来决定）。现在来计算 A 和 B 。从 x 的方程式着手

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t .$$

因为后面还要用到速度，我们对 x 求微商，得到

$$v = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t .$$

这些式子对所有的 t 都适用，但是我们已经知道了在 $t=0$ 时的 x 和 v 。因此，假如把 $t=0$ 代入这些方程，在式子左边就得到 x_0 和 v_0 ，因为这是在 $t=0$ 时的 x 和 v 的值。另外，我们知道 $\cos 0=1$ ， $\sin 0=0$ 。因此得到

$$x_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$$

和

$$v_0 = -\omega_0 A \cdot 0 + \omega_0 B \cdot 1 = \omega_0 B .$$

所以，对于这种特殊情况，我们求得

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

如果需要的话，我们就能从这些 A 和 B 的值求出 a 和 Δ 。

我们的解就到此为止，但是还有一个在物理上很有意义的问题，即能量守恒的问题需要验证。既然没有摩擦耗损，能量就应该守恒。应用公式

$$x = a \cos(\omega_0 t + \Delta),$$

于是

$$v = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta).$$

现在来求动能 T 和势能 U 。势能在任何时刻都是 $kx^2/2$ ，这里 x 是位移， k 是弹性系数。如果把上面 x 的式子代入，则有

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \Delta).$$

显然，势能不是常数；它也不会是负值，这是很自然的——弹簧上总是有些势能，但是它的数值是随 x 而变化的。另一方面，动能是 $mv^2/2$ ，把 v 的式子代入，就得到

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \Delta).$$

当 x 取最大值时，动能为零，因为这时的速度为零；另一方面，当 x 为零时，动能取最大值，因为这时速度最大。动能的这种变化正好与势能相反。但是，总能量应为常数。注意到 $k = m\omega_0^2$ ，我们就会看到

$$T + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 [\cos^2(\omega_0 t + \Delta) + \sin^2(\omega_0 t + \Delta)] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2.$$

能量与振幅的平方有关；如果振幅是原来的两倍，那么振动的能量就是原来的四倍。势能的平均值是最大值的一半，也就是总能量的一半，同样，动能的平均值也是总能量的一半。

§21-5 受迫振动

下面我们将要讨论受迫谐振子，即有外策力作用的谐振子。此时的方程式如下

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F(t). \quad (21.8)$$

我们要求出在这种条件下会出现什么情况。外策力可以与时间有各种函数关系，我们将要分析的第一个函数非常简单——假设力是振动的

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (21.9)$$

然而必须注意，这里的 ω 不一定等于 ω_0 。 ω 是在我们控制之下的，可以用不同频率的外力迫使物体振动。我们试以作用力为式（21.9）的特殊力来解式（21.8）。式（21.8）的解是什么呢？它的一个特解（更一般的情况将在以后讨论）是

$$x = C \cos \omega t, \quad (21.10)$$

其中常数 C 待确定。换句话说，可以设想，假如我们不断地来回推动物体，物体必将与力同步地来回运动。是否如此，我们总可试一下。因此，把式（21.9）和（21.10）代入式（21.8），则得到

$$-m\omega^2 C \cos \omega t = -m\omega_0^2 C \cos \omega t + F_0 \cos \omega t, \quad (21.11)$$

其中也代入了 $k = m\omega_0^2$ ，以便我们最后能更好地理解这个式子。现在，因为各项中都有余弦因子，可以消去，这样就可以看出，只要 C 取得适当，式（21.10）确是一个解。 C 必须取为

$$C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (21.12)$$

这就表明，质量为 m 的物体以与力相同的频率振动，但是它的振幅不仅与力的频率有关，而且还与振子的固有运动频率有关。这就是说：首先，假如 ω 远小于 ω_0 ，则位移和力就在同一方向上。另一方面，如果使物体来回摆动得非常快， ω 大于谐振子的固有频率 ω_0 ，那么式（21.12）告诉我们， C 是负值（我们称 ω_0 为谐振子的固有频率， ω 为外加频率）。当频率很高时，分母变得很大，振幅也就不会太大。

显然，我们所得出的解只是物体在适当的初始条件下开始运动的解，否则还有一部分，这部分是转瞬即逝的，称为 $F(t)$ 的瞬变响应，式（21.10）和（21.12）则称为稳态响应。

根据我们的公式（21.12），还会出现一个非常值得注意的情况：如果 ω 几乎和 ω_0 完全一样，那么 C 应趋于无穷大。因此，如果调整力的频率，使它与固有频率“合拍”，就应该得到很大的位移。凡是推过

小孩荡秋千的人，对此都有体会。如果闭着眼睛，随使用某一速度乱推，秋千就不可能荡得很好。如果推得恰到好处，秋千就能荡得很高，但是，如果推得不合适时，在应该拉的时候，你反而去推，等等，它就荡不起来。

如果使 ω 严格等于 ω_0 ，我们发现它应以无限大 的振幅振荡，这显然是不可能的。其原因是方程式有问题，式（21.8）没有把一些实际存在的摩擦力以及其他力考虑进去。因此，由于某种原因振幅不会达到无限大；它可能是弹簧的断裂！

第22章 代数学

§22-1 加法和乘法

在研究振动系统时，我们将有机会用到一个在全部数学中最值得注意，而且几乎令人惊奇的公式。从物理学家的观点来说，可以在二三分钟内写出这个公式，然后应用下去。但是科学不仅具有它的实际用途，而且也是一种理智上的享受。因此，对于这种令人惊异的珍宝，我们不是只花几分钟时间写出算了事，而是围绕这个珍宝精心设计出一个数学分支，这个数学分支就称为初等代数学。

也许你要问，“在物理课上，讲数学干什么？”可能有几个原因：首先，当然数学是一种重要的工具，但这只能成为我们花上两分钟写出公式的理由。另一方面，在理论物理中，我们发现所有定律都能写成数学形式，从而使它们变得简单而优美。所以，从根本上说，为了了解自然界，就得对数学关系式有深刻的理解。但是，真正原因还在于研究这个课题本身就是一种乐趣，虽然我们人类把自然界划分为各种不同的领域，而且在不同的系科中设有不同的课程，但是这种划分完全是人为的，我们既然发现了这种理智上的乐趣，就应享受这种乐趣。

我们在这个时候更详细地来研究代数学，还有另一个原因，那就是尽管我们大多数人在高中学过代数，但那毕竟是第一次接触，所有的公式都是陌生的，学起来就像现在学物理一样吃力。经常回顾一下

我们曾经学过的领域，看一下整个事物的概貌和图像，常常会引起我们的无穷的乐趣。也许有一天，数学系的人会和我们说明在物理课上要学数学的同样方式，在他们的课程中开出一门力学课来。

我们将不去严格按照数学家的观点来讲代数学，因为数学家的主要兴趣是如何证明数学上的各种命题，并有多少假定是绝对必需的，那些则不需要。他们对已经证明的结果不那么感兴趣，我们则不然。例如，我们会发现毕达哥拉斯定理，即直角三角形两边平方之和等于斜边的平方是十分有趣的；这是一个很有意义的事实和一件奇妙而简单的事情，无需讨论它是怎样证明的、在证明过程中用到哪些公理，就可以正确判断它的价值。因此，本着同样的精神，如果可能，我们将定性地叙述初等代数体系。我们说初等代数，是因为存在着另一个称为现代代数的数学分支，在那里有些规律，如 $ab=ba$ ，被抛弃了，它仍然称为代数，但我们不准备进行讨论。

我们将从中间开始讨论这门学科。假定大家已经知道了什么是整数，什么是零，以及把一个数增加一个单位是什么意思。你也许会说：“这不是中间！”但是，从数学观点来看，这确是中间，因为我们还可以进一步追溯，为了导出整数的某些性质而叙述集合论。但是我们不向这个数理哲学和数理逻辑的方向探讨，而是向另一个假定我们已经知道整数是什么以及它是如何计算的方向去进行研究。

假如开始时有某一个整数 a ，我们一个单位接一个单位地共数了 b 次，这样得到的一个数，我们称之为 $a+b$ ，这就定义了整数的加法。

一经定义了加法，我们就能考虑下面的问题：假如开始时什么都没有，然后加上 a ，接连加 b 次，所得结果就叫整数的乘法，并称之为 b 乘 a 。

现在，我们也能进行连乘：假如开始时是1，连续用 a 乘 b 次，我们称之为乘方或幂： a 的 b 次方即 a^b 。

根据这些定义，很容易证明，所有下述关系式都成立

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad a+b=b+a, \\
 & \text{(b)} \quad a+(b+c)=(a+b)+c, \\
 & \text{(c)} \quad ab=ba, \\
 & \text{(d)} \quad a(b+c)=ab+ac, \\
 & \text{(e)} \quad (ab)c=a(bc), \\
 & \text{(f)} \quad (ab)^c=a^c b^c, \\
 & \text{(g)} \quad a^b a^c=a^{(b+c)}, \\
 & \text{(h)} \quad (a^b)^c=a^{(bc)}, \\
 & \text{(i)} \quad a+0=a, \\
 & \text{(j)} \quad a \cdot 1=a, \\
 & \text{(k)} \quad a^1=a. \tag{22.1}
 \end{aligned}$$

这些结果是众所周知的，我们只是把它们列出，不再多加说明。当然，1和0具有一些特殊性质；例如 $a+0=a$ ， $a \times 1=a$ ， a 的一次方还是 a 。

在上面的讨论中，我们还必须假定其他一些性质，如连续性和有序性，对这些性质是很难下定义的，这里就把它留给严格的理论去探讨吧！此外，我们写下的“法则”肯定是太多了，其中有一些是可以从另一些推导出来的，但是我们不考虑这些了。

§22-2 逆运算

除了进行加法，乘法和幂的直接运算外，还有逆运算，其定义如下：设 a 和 c 为已知，我们要求出满足等式 $a+b=c$ ， $ab=c$ ， $b^a=c$ 这些方程的 b 的值。假如 $a+b=c$ ， b 就定义为 $c-a$ ，这就叫减法。称为除法的运算也很清楚：如果 $ab=c$ ，则 $b=c/a$ 定义了除法——它是等式 $ab=c$ 的一个反过来的解。再如有一个幂 $b^a=c$ ，我们要问“ b 是什么？”， b 称为 c 的 a 次方根： $b=\sqrt[a]{c}$ 。例如，假使问“什么整数自乘到3次幂等于8？”答案是8的立方根，即2。因为 b^a 和 a^b 不等，就有两个与幂有关的逆问题，另一个逆问题是：“2的几次幂等于8？”这叫取对数。如果 $a^b=c$ ，我们写作 $b=\log_a c$ 。这种与其他运算相比，较为繁琐的表示方法并不意味着它已超出初等范围，至少对于整数来说是如此。虽然，对数在代数课程中出现较晚，实际上，它和开方问题一样简单，不过是同一代数方程的另一类解而已。直接运算和逆运算可归纳如下

(a) 加法	(a') 减法	
$a+b=c$	$b=c-a$	
(b) 乘法	(b') 除法	
$ab=c$	$b=c/a$	(22.2)
(c) 幂	(c') 根	
$b^a=c$	$b=\sqrt[a]{c}$	
(d) 幂	(d') 对数	
$a^b=c$	$b=\log_a c$	

这就是整个概念。这些关系式或法则对整数来说是正确的，因为它们是由加法、乘法与幂的定义推得的。我们打算讨论一下是否能使 a ， b ， c 所代表的客体的范围扩大，而又使它们同样遵循这些法则，虽然在那种情况下 $(a+b)$ 之类的运算已经不能直接应用，比方说通过加1或整数连乘等运算方式来定义了。

§22-3 抽象和推广

当我们用所有这些定义去解简单的代数方程时，很快就会发现下述这些不可解的问题。假使我们要解等式 $b=3-5$ ，根据减法的定义，我们必须找一个数，加上5之后得到3。当然，找不出这个数，因为我们只考虑正整数；这是一个不可解的问题。然而，有一个方法，这就是加以抽象和推广，这是一个伟大的设想。我们在包括整数和那些运算法则的整个代数结构中抽象出加法和乘法的原始定义，保留式（22.1）和式（22.2）的法则，并认为它们对更广泛的一类数一般也是正确的，尽管这些法则原来是从一小部分数（正数）中得出的。这样，不是用符号化的整数来定义法则，而是用法则作为符号的定义，从而使符号代表了更一般的数类。例如，只从运算法则出发，我们就能说明 $3-5=0-2$ 。实际上，不难证明，只要定义一组新的数列： $0-1$ ， $0-2$ ， $0-3$ ， $0-4$ ，等等，并称之为负整数，我们就能做所有的减法。然后，我们也可以应用所有其他法则，如 $a(b+c)=ab+ac$ 等，来找出负整数相乘的法则，并将发现，实际上对负整数来说，所有法则仍和正整数相同。

于是，我们扩大了这些法则的适用范围，但符号的含义不同了。

人们不能说-2乘5的真正含义是把5连续相加-2次，这是毫无意义的。但尽管如此，根据这些法则所做的一切事情仍然都是正确的。

在取幂时出现了一个有趣的问题。假如我们希望找出 $a^{(3-5)}$ 的含义，我们只知道 $3-5$ 是方程式 $(3-5)+5=3$ 的一个解。由于知道了这一点，也就知道了 $a^{(3-5)} \cdot a^5 = a^3$ 。因此，根据除法的定义， $a^{(3-5)} = a^3 / a^5$ 。稍加整理，就可简化成 $1/a^2$ 。因此，我们发现，负幂是正

幂的倒数，但 $1/a^2$ 是一个没有意义的符号，因为假如 a 是一个正整数或负整数，它的平方大于1，而我们仍然不知道1被大于1的数去除是什么意思！

前进！伟大的构思在于继续进行推广；当我们发现另一个不能解决的问题时，就延拓数的领域。考虑除法：我们找不出这样一个整数，即使是负整数，它等于3除以5所得出的结果。但是，如果假定所有的分数也满足这些法则，我们就能够讨论分数乘法和加法，而且一切运算都能像前面一样顺利进行。

再举一个幂的例子： $a^{3/5}$ 是什么？我们只知道 $(3/5) \cdot 5=3$ ，因为这是 $3/5$ 的定义。于是我们也可以知道 $(a^{(3/5)})^5 = a^{(3/5) \cdot 5} = a^3$ ，因为这是法则之一。然后，根据根的定义，我们得出 $a^{(3/5)} = \sqrt[5]{a^3}$ 。

按照这种方式，利用运算法则本身来帮助我们下定义，我们就能够解释在各种符号中引进分数的含义——这些并不是任意的。值得注意的是所有这些法则对于正整数和负整数以及分数都同样适用！

我们继续进行推广。还有什么不能解的方程吗？是的，还有。例如，下面一个方程就不能解： $b = 2^{1/2} = \sqrt{2}$ ，找不到一个有理数（一个分数），它的平方等于2。当然现在这个问题是很容易回答的。我们懂得十进位制，因此不难理解可以用一个无穷尽的小数作为2的平方根的一种近似。在历史上，这个想法给古希腊人带来了很大困难。为了真正严格地对此下定义，就需要引进与连续性和有序性有关的内容，而在推广的过程中，这一点恰恰是最困难的一步。戴德金（Dedekind）正式和严格地解决了这个问题。但是，如果不考虑问题的数学严格性，也很容易理解我们意思是要找出一个近似的分数，或理想的分数数列（因为任何十进小数，在某一处中断的时候，肯定是

一个有理数)，这个数列一直继续下去，就越来越接近所要求的结果。我们所要讨论的问题到此已经足够了，它使我们能够处理无理数的问题，只要功夫深，我们就能计算像2的平方根之类的数，并准确到任何需要的精度。

§22-4 无理数的近似计算

下一个问题是研究幂为无理数的情形。例如，我们想定义 $10^{\sqrt{2}}$ 。在原则上答案是很简单的。假如我们把2的平方根近似计算到某一位小数，那么幂就成了有理数，我们利用上面的办法取这个近似根，就能得出 $10^{\sqrt{2}}$ 的近似值。然后，我们还可以多取几位小数（它仍为有理数），找出它相应的根，这是更高次方的根，因为分数的分母更大，这样就得到一个比较好的近似式。当然，这里包含要求出某种开很高次方的根，然而这项工作是相当困难的，那么，怎样来对付这个问题呢？

在计算平方根、立方根和其他低次方根时，我们可以采用一种算术方法，一位小数接着一位小数地求出根来。但是计算无理数幂以及随同出现的对数（逆问题）时，所需的劳动量极大，而且不能用简单的算术方法得出。因此，有人作了一些帮助我们计算这些幂的表——对数表或幂指数表，分别视表的制作方式而定。这仅仅是为了节省时间，如果我们要计算某个数的无理数幂，只要查一下表，而无需去计算它。当然，这种计算只是一个技术问题，但也是一个有意义的问题，而且具有重大的历史价值。首先，我们不仅要解 $x = 10^{\sqrt{2}}$ ，而且要解 $10^x = 2$ ，即 $x = \log_{10} 2$ 的问题。这不是一个对所得结果要定义一

类新的数的问题，而仅仅是一个计算问题。答案就是一个普通的无理数，一个无穷尽的小数，而不是一类新的数。

现在我们就来讨论这类方程求解的问题。整个概念实际上是非常简单的。假如我们能计算 10^1 ， $10^{4/10}$ ， $10^{1/100}$ ， $10^{4/1000}$ 等等，并把它们乘在一起，我们就能得到 $10^{1.414\dots}$ ，即 $10^{\sqrt{2}}$ ，这就是计算这类问题的一般想法。但是，代替计算 $10^{1/10}$ 等等，我们将计算 $10^{1/2}$ ， $10^{1/4}$ 等等。在开始计算之前，应该解释一下，为什么用10做这么多工作，而不用其他数。当然，我们知道，对数表具有很大的实用价值，完全不限于开方的数学问题，因为对于任何底，都有

$$\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c. \quad (22.3)$$

这个关系我们都很熟悉，只要有一张对数表，就可以用这个关系式来实际计算几个数相乘。唯一的问题是我们将取什么样的底 b 来进行计算？用什么作底都无关紧要，在任何时候都可应用同样的公式；如果我们采用某一特定底的对数，那么，只要改变一下尺度，即乘上一个因子就可以求得任何其他底的对数。假如用61乘等式(22.3)，这个等式仍然是千真万确的，又如果我们有一张以 b 为底的对数表，某个人用61去乘表上的所有数，这不会引起任何本质差别。假使我们已经知道以 b 为底的所有数的对数，也就是说，因为我们已经有了一个表，我们就能解方程 $b^a = c$ ，不管 c 取什么数值。现在的问题是要求出同一个数 c 对别的底，比如说 x 的对数。我们想要解方程 $x^{a'} = c$ 。这是很容易的，因为我们总可以写出 $x = b^t$ ，知道了 x 和 b ，就可以确定 t 。实际上， $t = \log_b x$ 。如果把 $x = b^t$ 代入前式，再对 a' 求解，我们看到 $(b^t)^{a'} = b^{ta'} = c$ 。换句话说， ta' 是以 b 为底的 c 的对数。这样 $a' = a/t$

，因而以 x 为底的对数正好等于一个常数 $1/t$ 乘以 b 为底的对数。因此，只要乘上一个常数 $1/\log_b x$ ，任何对数表就与其他底的对数表相等。这就允许我们选择一个特殊的底，而为了方便起见，我们就取10为底（可能有人还会提出这样的问题，是否存在某一个自然的底，以它为底时，所有事情会变得更简单一些，以后我们会找出这个问题的答案。目前，我们仅采用以10为底）。

现在就来看一看如何计算对数。开始时我们曾用尝试法来逐次计算10的平方根。其结果如表22-1所示。10的幂指数列在第一列，而 10^s 的值列在第三列。于是 $10^1=10$ 。10的 $1/2$ 次方很容易得出，因为这是10的平方根，对计算任何一个数的平方根有一个众所周知的简单办法^[1]。用这个办法得出的第一个平方根是3.162 28。这有什么用呢？它已经告诉我们一件事，即如何求 $10^{0.5}$ ，因此我们现在至少已经知道了一个对数。假如我们要想知道3.162 28的对数，那么答案是接近0.500 00。但是，这还不够，很清楚，我们需要知道更多的知识。因此，我们再次求平方根，得出 $10^{1/4}$ 是1.778 28。现在我们有了比以前更多的对数，1.250是17.78的对数。附带说一句，如果碰巧有人问到 $10^{0.75}$ ，这个值可以求出，因为它就是 $10^{(0.5+0.25)}$ ，因此，它就是表中第二个数和第三个数的乘积。如果在第一列中 s 的数目足够多，使得可以由它们构成几乎任何数，那么在第三列中取适当的数相乘后，我们就能求出10的任何次幂。这就是我们的打算。这样，我们依次求出了10个10的平方根，这就是计算过程中的主要工作。

表22-1 10的逐次平方根

幂指数 s	$1024s$	10^s	$(10^s - 1)/s$
1	1024	10.000 00	9.00
1/2	512	3.162 28	4.32
1/4	256	1.778 28	3.113
1/8	128	1.333 52	2.668
1/16	64	1.154 78	2.476
1/32	32	1.074 607	2.387 4
1/64	16	1.036 633	2.344 5
1/128	8	1.018 152	2.323 4 ²¹¹
1/256	4	1.009 035 0	2.313 0 ¹⁰⁴
1/512	2	1.004 507 3	2.307 7 ⁵³
1/1024	1	1.002 251 1	2.305 1 ²⁶
$\Delta/1024(\Delta \rightarrow 0)$	Δ	$1 + 0.000\,224\,86\Delta$	$\downarrow$ $\leftarrow 2.302\,5$

为什么我们不把表继续做下去，以求得越来越精确的值呢？因为我们开始注意到一些事情。当求10的一个非常小的幂时，我们得到1加上一个很小的数值，这个道理很清楚，如果要从 $10^{1/1\,000}$ 得到10，就必须取它的1 000次方，因此，我们最好不从一个太大的数入手，它应该接近于1。我们还注意到加在1后面的小数初看起来好像只是每次被2去除，我们看到从1 815变成903，再变成450，225等；因此，很清楚，假如要求出下一个根，我们将取1.001 12左右，作为一种很好的近似。这里我们不是真正求出所有平方根，而只是猜测最后的极限。我们取一个很小的分数 $\Delta/1\,024$ 作幂时，当 Δ 接近于0，那么答案是什么呢？当然，它一定是某一个接近于 $1+0.002\,251\,1\Delta$ 的数。它不严格等于 $1+0.002\,251\,1\Delta$ ，然而，利用下面的技巧，可以得到一个更好的值：从 10^s 中减去1，再用幂指数 s 去除。这应当把所有超过的数量修正到同一数值，我们看到它们都近似相等。在表的上端，它们并不相等，但越到下面，它们越接近一个常数。这个常数的值是什么？我们再来看一看这个数列是怎么进行的，它是如何随 s 而变化的。它的改变分别为211，104，53，26。很明显，这些变化中的每一个量都非常接近前一个量的一半，越到下面越是如此。因此，如果继续下去，下面的变化量应是13，7，3，2和1，略有上下，或总和为26。因此，只不过多出了26，这样，我们就求出了真正的数目是2.302 5（实际上，以后

我们会看到准确的数应是2.302 6，但是为了保持真实起见，我们将不改动算术上的任何东西）。根据这张表，通过把幂化为以1 024为分母的 fractions 的组合，就能算出10的任何次幂。

我们来实际计算一个对数，因为我们将采用的过程就是实际制作对数表的过程。运算程序如表22-2所示，数值取自于表22-1（第二和第三栏）。

表 22-2 对数的计算： $\log_{10} 2$

$$\begin{aligned}
 2 \div 1.778\,28 &= 1.124\,682 \\
 1.124\,682 \div 1.074\,607 &= 1.046\,598, \text{ 等等} \\
 \therefore 2 &= (1.778\,28)(1.074\,607)(1.036\,633)(1.009\,035\,0)(1.000\,573) \\
 &= 10 \left[\frac{1}{1\,024} (256 + 32 + 16 + 4 + 0.254) \right]^* = 10 \left[\frac{308.254}{1\,024} \right] = 10^{0.301\,03} \\
 \therefore \log_{10} 2 &= 0.301\,03.
 \end{aligned}$$

*这里方括号内的数字应是10的幂。——译者注

假设我们要求2的对数，也就是要知道10的几次幂等于2。能用10的1/2次幂吗？不能，太大了。换句话说，我们可以看出答案应比1/4大，而比1/2小。让我们把因子 $10^{1/4}$ 去掉，用1.778...去除2，得到1.124...，等等。我们知道应从对数中减去0.250 000。现在我们要求出1.124...的对数，最后，我们再加回1/4，即256/1 024。然后在表中找出刚好低于1.124...的数，那是1.074 607。所以我们再用1.074 607去除，得1.046 598。从这里，我们发现2可以写成表22-1中如下几个数字的连乘积

$$2 = (1.778\,28) (1.074\,607) (1.036\,633) (1.009\,035\,0) (1.000\,573) .$$

剩下来还有一个因子（1.000 573），自然，它已超出了我们表中的范围。要求出这个因子的对数，我们采用已有的结果 $10^{1/1024} \approx 1 + 2.30254/1024$ ，求得 $\Delta = 0.254$ 。因此，我们的答案就是10的如下次幂：
 $(256 + 32 + 16 + 4 + 0.254)/1024$ ，加起来就得到 $308.254/1024$ 。除得的结果是0.301 03，因此，我们求出 $\log_{10} 2 = 0.301 03$ ，这正好精确到五位数字！

这就是1620年哈利法克斯（Halifax）的布里格斯（Briggs）先生原来计算对数的方法。他说：“我连续计算了10的54个平方根。”我们知道他只是真正计算了前面27个，因为其余的可以利用 Δ 的技巧得出。他的工作包括计算了27次10的平方根，就次数来说，并不比我们做的10次超过很多。然而他的工作量要比我们的大得多，因为他计算到16位小数，而且在发表时，把结果减到14位小数，所以没有四舍五入的误差。他用这个方法列出了一个14位小数的对数表，这是十分冗长单调的工作。但是300年来所有的对数表都借用了布里格斯先生的表，只是减少了几位小数。直到现在，由于有了计算机，才有独立计算出来的新对数表。今天，利用某些级数的展开，已成为计算对数更有效的办法。

在上述过程中，我们发现了一些相当有趣的事情，即对于一个非常小的幂指数 ε 来说，我们可以很容易算出 10^ε ；通过单纯的数值分析，我们发现 $10^\varepsilon = 1 + 2.3025\varepsilon$ 。当然，这也意味着如果 n 非常小的话， $10^{n/2.3025} = 1 + n$ 。现在任何其他底的对数只是以10为底的对数的倍数。我们以10为底仅仅是由于我们有10个手指头，用在算术上（十进制）比较方便，但是假如我们要找出一个数学上自然的底，这就与人的手指头的数目毫无关系了，我们可以试用某种方便而自然的方式

来改变对数的标度。人们已经采用的方法是利用2.302 5...去乘所有的以10为底的对数来重新定义对数。这相当于采用了另外的底，叫做自然底或以e为底。注意当 $n \rightarrow 0$ 时， $\log_e (1+n) \approx n$ ，或 $e^n \approx 1+n$ 。

很容易求出e： $e=10^{1/2.302\ 5}$ 或 $10^{0.434\ 294\ \dots}$ ，是一个无理数幂。我们那张10的逐次平方根表不仅可以用来计算对数，还能用来计算10的任何次幂，现在我们用它来计算这个自然底e。为了方便起见，我们把0.434 294... 改写成 $444.73/1\ 024$ 。这里， $444.73=256+128+32+16+8+4+0.73$ 。既然它是一个和的指数，因此e将是下面几个数的乘积

$$(1.778\ 28) (1.333\ 52) (1.074\ 607) (1.036\ 633) (1.018\ 152) (1.009\ 035) (1.001\ 643) = 2.718\ 4.$$

（唯一的问题是最后一个数0.73，表上没有，但是我们知道，假如 Δ 足够小，则结果是 $1+2.302\ 5\Delta / 1\ 024$ ）。把各个数相乘就得到2.718 4（它应该是2.718 3，但这已经相当好了）。这个表提供了计算所有的无理数幂和无理数对数的方法。处理无理数时就可应用这个表。

§22-5 复数

到目前为止，尽管做了上面的全部工作，我们仍不能解出所有的方程！例如，-1的平方根是什么？假设我们要求出 $x^2=-1$ 。没有一个有理数，一个无理数，或我们迄今所发现的任何一个数的平方等于-1。因此，我们又得把数推广到更为广泛的范畴。假设 $x^2=-1$ 有一个特定的解，我们称之为i，根据定义，i具有这种性质，它的平方等

于-1。这几乎是我们对它所能讲的全部东西。当然，方程 $x^2=-1$ 的根不只是这一个。有人会写出 i ，但别的人也可能说：“不，我宁愿写 $-i$ ，我的 i 是你的 i 的负值。”实际上这也正是一个解。由于 i 具有唯一的一个定义是 $i^2=-1$ ，在我们所能写出的任何方程中，如果所有 i 都改变符号，则方程同样成立。这个过程称为取共轭复数。现在，我们可以根据所有的法则，把 i 依次递加，用其他数乘 i ，使 i 和其他数相加等等，以此来构成种种数。以这种方式得出的数，我们发现它们全部都可以写成 $p+iq$ 的形式，这里 p 和 q 称为实数，也就是直到现在为止我们曾定义过的数。数 i 称为虚数单位。 i 的任何实数倍称为纯虚数。最一般的取 $p+iq$ 的形式的数 a 称为复数。应用过去的法则，比方说，把两个这样的数相乘，即 $(r+is)(p+iq)$ ，不会出现任何差错。因而我们有

$$\begin{aligned}(r+is)(p+iq) &= rp + r(iq) + (is)p + (is)(iq) \\ &= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq) \\ &= (rp - sq) + i(rq + sp),\end{aligned}\tag{22.4}$$

因为 $i \cdot i = i^2 = -1$ 。所以，属于法则式(22.1)的所有数，一定具有这种数学形式。

现在，也许你还会说：“这样下去就没有底了！我们定义了虚数的幂和所有其他数，但当我们把这一切都做完了之后，又会有人提出另一个不能解的问题，如 $x^6+3x^2=-2$ 。于是，我们又得重新推广！”但是，结果表明，有了-1平方根这个发明，任何代数方程都能解了！这是一个奇妙的事实，我们留给数学系的人去证明。证明非常漂亮，也非常有趣，但当然不是自明的。实际上，最自然的推测是我们必须一

次又一次地发明。但最使人惊讶的是我们并不需要这样做。这是最后一次发明。在发明复数之后，我们发现，运算法则对复数仍然适用，我们不需要再发明新东西了。借助于这些数目有限的符号，我们能求出任何复数的复指数幂和能够解任何写成代数形式的方程。我们再也找不到新的数了。例如， i 的平方根具有确定的结果，它不是新的量；而 i^i 也是某一个量。我们现在就来讨论这一点。

我们已经讨论过乘法，加法也很容易；假如我们把两个复数相加， $(p+iq) + (r+is)$ ，结果是 $(p+r) + i(q+s)$ 。现在，我们能做复数的加法和乘法了。但是，真正的问题当然在于计算复数的复指数幂。事实证明，这个问题实际上并不比计算实数的复指数幂困难。因此，现在我们着重研究计算 10 的复指数幂的问题，这不只是一个无理数幂，而且是 $10^{(r+is)}$ 。当然，在任何时候我们都要用到式(22.1)和(22.2)的法则。于是

$$10^{(r+is)} = 10^r \cdot 10^{is} \quad (22.5)$$

我们已经知道如何计算 10^r ，而且总可以把某个数和其他某个数相乘，因此问题仅在于计算 10^{is} 。我们令它为某一个复数 $x+iy$ 。于是问题成为，已知 s ，求出 x 和 y 。现在假如有

$$10^{is} = x + iy.$$

这个等式的共轭复数也一定成立，即有

$$10^{-is} = x - iy.$$

（这里我们看到，利用我们的法则，无需进行任何实际计算，就能推导出一些结果）。把两式相乘，就能推导出另一些有趣的结果

$$10^{is} 10^{-is} = 10^0 = 1 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (22.6)$$

由此可见，如果求出 x ，也就有了 y 。

现在的问题是如何计算10的一个虚指数幂。有什么窍门没有？我们可以应用所有的法则，直到碰壁为止，但是这里有一条合理的途径：假如对任一特定的 s 我们能够计算，那么对所有其他的数我们也能够计算。如果对某一个 s 我们知道了 10^{is} 的值，那么要求出与两倍 s 所对应的幂，可以把前一个数平方，依此类推。但是，即使对一个特殊的 s 值，我们怎样来求 10^{is} 呢？为此，我们将再作一个补充假定，它不完全属于所有其他法则的范畴，但是它能导出一个合理的结果，并帮助我们前进：当幂很小时，我们将认为，只要 ε 很小，不管是实数 ε 还是复数 ε ， $10^\varepsilon = 1 + 2.3025\varepsilon$ ，这个“定律”都正确。于是从这个定律是普遍正确的假定出发，它告诉我们，当 $s \rightarrow 0$ 时， $10^{is} = 1 + 2.3025 \cdot is$ 。因此，我们确信当 s 很小时，比如说 s 是 $1/1024$ ，就能得到 10^{is} 的一个相当好的近似值。

现在，我们来列出一个表，根据这个表我们能够算出10的所有虚指数幂，即算出 x 和 y 。具体过程如下：开始的第一个幂是指数幂 $1/1024$ ，我们认为它非常接近于 $(1 + 2.3025i/1024)$ 。这样，我们在开始时有

$$10^{i/1024} = 1.0000 + 0.0022486i, \quad (22.7)$$

取这个数自乘，我们就能得出更高一级的虚指数幂。实际上，我们可以把计算对数表的步骤反过来，计算式（22.7）的平方，4次方，8次方等，从而建立表22-3中的值。我们发现一件有趣的事， x 的值开始时是正的，然后转为负。等一会儿我们将稍微详细地研究这个问题。但首先我们非常想找出对于怎样的 s 值， 10^{is} 的实部为零。此时， y 值将是1，因此，应该有 $10^{is}=i$ ，或 $is=\log_{10} i$ 。作为应用这个表的一个例子，就像前面计算 $\log_{10} 2$ 一样，现在我们利用表22-3来计算 $\log_{10} i$ 。

表22-3 $10^{i/1\ 024}=1+0.002\ 248\ 6i$ 的逐次平方值

幂指数 is	$1\ 024s$	10^{is}
$i/1\ 024$	1	$1.000\ 00+0.002\ 25i^*$
$i/512$	2	$1.000\ 00+0.004\ 50i$
$i/256$	4	$0.999\ 96+0.009\ 00i$
$i/128$	8	$0.999\ 84+0.018\ 00i$
$i/64$	16	$0.999\ 36+0.035\ 99i$
$i/32$	32	$0.997\ 42+0.071\ 93i$
$i/16$	64	$0.989\ 67+0.143\ 49i$
$i/8$	128	$0.958\ 85+0.284\ 02i$
$i/4$	256	$0.838\ 72+0.544\ 67i$
$i/2$	512	$0.406\ 79+0.913\ 65i$
$i/1$	1\ 024	$-0.669\ 28+0.743\ 32i$

*应该是 $0.002\ 248\ 6i$ 。

表22-3中的哪些数相乘才会得到一个纯虚数呢？经过稍加采取尝试法之后，我们发现，要想最大程度地减小 x ，最好是用“128”乘“512”。相乘的结果是 $0.130\ 56+0.991\ 59i$ 。接着我们发现，应该用一个数来乘这个结果，这个数的虚部差不多等于我们想消去的实部的大小。因此，我们选“64”，它的 y 值是 $0.143\ 49$ ，最接近 $0.130\ 56$ 。第二次乘的结果是 $-0.013\ 08+1.000\ 08i$ 。现在我们走过头了，必须用 $0.999\ 96+0.009\ 00i$ 去除。我们该如何来做这一步呢？通过改变 i 的符号，用 $(0.999\ 96-0.009\ 00i)$ 去乘（假如 $x^2+y^2=1$ ，就能这样做）即可。继续这样做下去，我们求出要给出 i 所需的10的整个幂数是

$i(512+128+64-4-2+0.20)/1\ 024$ ，即 $698.20i/1\ 024$ 。

如果10取这个指数幂，就能得出 i 。因此， $\log_{10} i=0.681\ 84i$ 。

§22-6 虚指数

为了进一步研究取复数虚指数幂的问题，我们来观察一下10的幂。为了进一步按照表22-3的方式来看一下其中的负号会出现什么情况，我们逐次取10的幂，但不是每次将幂增加一倍。这些都列在表22-4上，其中我们取 $10^{i/8}$ ，并每次乘上 $10^{i/8}$ 这个数。我们看到 x 不断减小，经过0，又几乎达到-1（如果我们能够求出 $p=10$ 和 $p=11$ 之间的值，那么很明显它就趋近于-1），接着又向回摆。 y 的值也是在来回变化。

表22-4 $10^{i/8}$ 的逐次幂

$p = -\text{指数} \cdot 8i$	$10^{ip/8}$	$p = -\text{指数} \cdot 8i$	$10^{ip/8}$
0	1.000 00 + 0.000 00i	10	-0.965 96 + 0.258 80i
1	0.958 85 + 0.284 02i	11	-0.999 69 - 0.026 20i
2	0.838 67 + 0.544 65i	12	-0.951 04 - 0.309 05i
3	0.649 44 + 0.760 42i	14	-0.629 28 - 0.777 17i
4	0.406 72 + 0.913 56i	16	-0.104 47 - 0.994 53i
5	0.130 50 + 0.991 46i	18	+0.454 54 - 0.890 98i
6	-0.156 47 + 0.987 70i	20	+0.866 48 - 0.499 67i
7	-0.430 55 + 0.902 60i	22	+0.998 84 + 0.052 87i
8	-0.669 17 + 0.743 15i	24	+0.808 90 + 0.588 36i
9	-0.852 68 + 0.522 49i		

在图22-1中，黑点表示在表22-4中出现的数，画出线来只是为了帮助你更加形象化。因此，我们可以看到数 x 和 y 在振动； 10^{si} 在不断重复，这是一个周期性变化的量，这一点是相当容易解释的，因为假如10的某次幂是 i ，那么它的4次方就是 i^2 的平方。这必将又是+1，因

此，既然 $10^{0.68i}$ 等于 i ，取它的4次方后，我们发现 $10^{2.72i}$ 等于 $+1$ 。所以，如果要求出 $10^{3.00i}$ ，我们可以把它写成 $10^{2.72i}$ 乘 $10^{0.28i}$ 。换句话说，它有一个周期，并且不断重复出现。当然，我们可以辨认这条曲线的形状像什么！它们看上去就像正弦和余弦曲线，我们暂且称它们为代数正弦和代数余弦。然而，我们将不用10为底，而是把它换成自然底，这只是变一下水平标度；因此，我们用 t 来表示 $2.3025s$ ，并写出 $10^{si}=e^{it}$ ，这里 t 是一个实数。现在 $e^{it}=x+iy$ ，我们将把此式写成 t 的代数余弦加上 i 乘 t 的代数正弦。即

$$e^{ti} = \cos t + i \sin t. \quad (22.8)$$

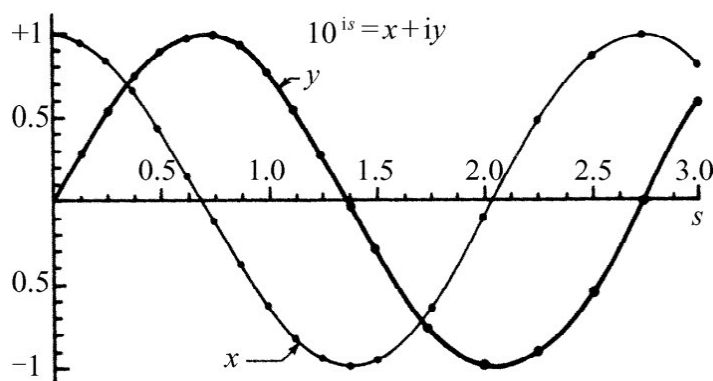


图 22-1

$\cos t$ 和 $\sin t$ 有哪些性质呢？首先，比如说，我们知道 $x^2 + y^2$ 必须等于1；这一点以前证明过，这对以 e 为底和以10为底都同样正确。因此有 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 。我们还知道，当 t 很小时， $e^{it} = 1 + it$ ，因此， $\cos t$ 接近于1，而 $\sin t$ 接近于 t ，如此等等，这些从取虚指数幂得来的值得注意的函数的所有各种性质都和三角学中的正弦和余弦的性质相同。

周期也一样吗？我们来求求看。 e 的几次方等于 i ？以 e 为底的 i 的对数是什么？前面已经得出，以10为底时它是 $0.68184i$ ，但是当把对数

的标量改为 e 时，我们必须乘上2.302 5，由此得出1.570 9。这就是“代数的 $\pi/2$ ”。但是，我们看到，它与正规的 $\pi/2$ 仅在最后一位数上不同，那当然是我们算术运算的误差所造成的！这样，我们用纯粹代数的方法创造了两个新的函数，余弦和正弦，它们属于代数学，而且也仅仅属于代数学。最后，我们终于领悟到这些所发现的函数当然也是几何学的。因此，我们看到在代数和几何之间最终是有联系的。

由此我们总结出数学上最值得注意的公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (22.9)$$

这就是我们的无价之宝！

我们可以用在一个平面上表示复数的办法把几何和代数联系起来，平面上一个点的水平位置是 x ，垂直位置是 y （图22-2）。我们用 $x + iy$ 表示任何复数。假如这个点的径向距离是 r ，角度为 θ ，根据代数定律， $x + iy$ 可写成 $r e^{i\theta}$ 的形式，其中 x ， y ， r 和 θ 之间的几何关系如图所示。这就是代数和几何的统一。

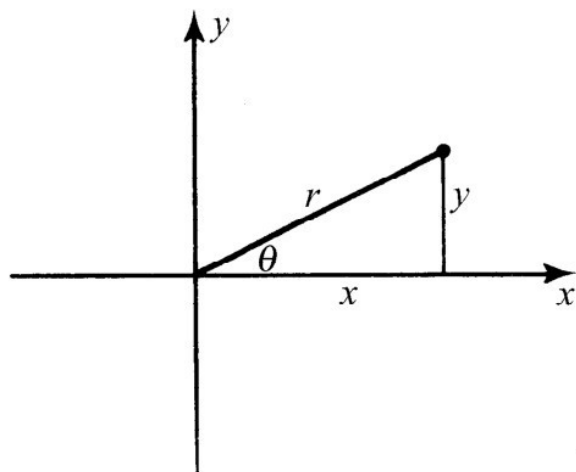


图22-2 $x + iy = r e^{i\theta}$

在本章开始时，我们只懂得整数的基本概念以及如何计算，还不大知道抽象过程和推广过程的威力。由于采用了一组代数“定律”，像式（22.1）所表示的数的性质和式（22.2）所表达的逆运算的定义，我们在这里不仅能依靠自己创造出一些数，而且能制作一些有用的东西，如对数表、指数表和三角函数表（因为这些函数就是实数的虚指数幂），所有这些都只要用到10的10个逐次平方根而已！

[1] 有一个确定的算术方法可以求出任何数 N 的平方根，但是最简单的办法是选择某一个相当接近的数 a ，求出 N/a 及平均值 $a' = [a + (N/a)]/2$ ，用这个平均值 a' 作为下一次选用的 a 值。收敛是很快——每次有效数字的个数要加倍。

第23章 共振

§23-1 复数和简谐运动

本章我们将继续讨论谐振子，特别是受迫谐振子，但在分析时将采用一种新的技巧和方法。在前一章中我们引进了复数的概念，它具有实部和虚部，可以在一个图上表示，图的纵坐标表示虚部，横坐标表示实部。如果 a 是一个复数，就可写成 $a = a_r + ia_i$ ，其中下标 r 表示 a 的实部， i 表示 a 的虚部。参看图23-1，我们看到一个复数 $a = x + iy$ ，还可以写成 $x + iy = r e^{i\theta}$ 的形式，这里

$$r^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = a \cdot a^*.$$

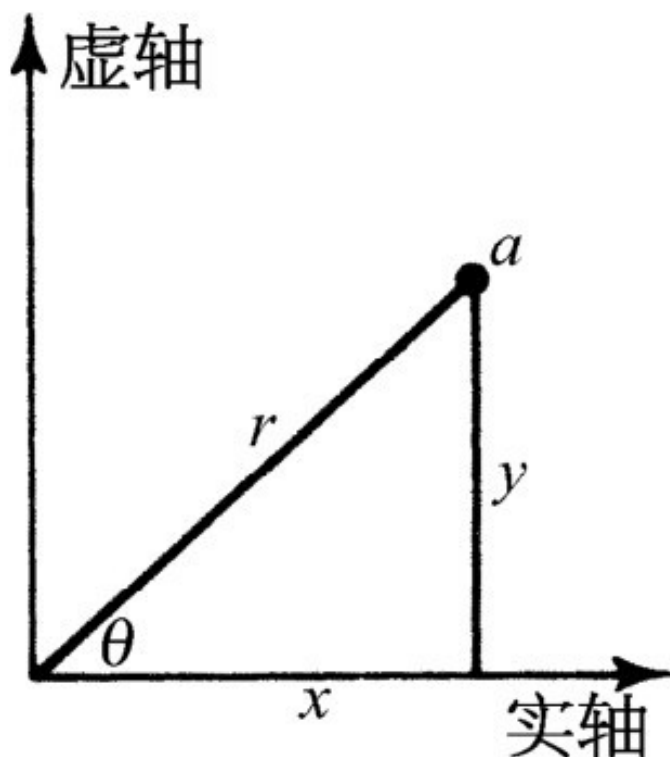


图23-1 一个复数可以用“复平面”上的一个点来表示

（ a 的共轭复数写成 a^* ，它由改变 a 中 i 的符号而得到）。因此，我们可以把一个复数表示成两种形式：一个实部加一个虚部，或一个模 r 和一个叫做辐角的 θ 。给定 r 和 θ ， x 和 y 显然是 $r \cos\theta$ 和 $r \sin\theta$ ，反过来，给定一个复数 $x + iy$ ，则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $\tan\theta = y/x$ ，即虚部和实部之比。

我们通过下述技巧用复数来分析物理现象。我们以物体的振动为例子，振动可以具有一个其大小等于某一个常数乘 $\cos\omega t$ 的策动力。现在可以把这种力 $F = F_0 \cos\omega t$ 写成复数 $F = F_0 e^{i\omega t}$ 的实部，因为 $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ 。我们这样做的原因是因为用指数函数运算要比用余弦函数容易。所以整个技巧就是把振动函数表示成某个复函数的实部。我们这样定义的复数 F 不是实际的物理力，因为在物理中没有有一个力

会是复数；实际的力没有虚部，只有实部。但是，我们将要以 $F_0 e^{i\omega t}$ 表示“力”，当然实际力是这个表示式的实部。

再来举一个例子。假设我们要表示一个力，它是余弦波，但相位滞后为 Δ 。当然，这个力是 $F_0 e^{i(\omega t - \Delta)}$ 的实部，但根据指数函数本身的性质，我们可以写成 $e^{i(\omega t - \Delta)} = e^{i\omega t} e^{-i\Delta}$ 。由此可见，指数的代数运算要比正弦和余弦的运算容易得多，这就是我们选用复数的原因。我们以后将经常用这样的写法

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}. \quad (23.1)$$

我们在 F 上写上小符号（ $\wedge$ ）是为了提醒我们，这个量是复数，即在上式中

$$\hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}.$$

现在我们用复数来解方程，看看是否能解决实际问题。例如，试解

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (23.2)$$

这里 F 是策动振动的外力， x 是位移。我们假定 x 和 F 是真正的复数，尽管这样做似乎有些荒谬，但这仅仅是为了数学上的目的。这就是说， x 有一个实部和一个虚部乘 i ， F 也有一个实部和一个虚部乘 i 。假如式（23.2）有一个复数解，把这个复数代入方程，就得

$$\frac{d^2(x_r + ix_i)}{dt^2} + \frac{k(x_r + ix_i)}{m} = \frac{F_r + iF_i}{m}$$

或

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + \frac{kx_r}{m} + i\left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{kx_i}{m}\right) = \frac{F_r}{m} + \frac{iF_i}{m}.$$

因为若两个复数相等，则它们的实部必须相等，并且虚部也必须相等，由此可以推知， x 的实部满足只有实部的力的方程。然而，我们必须强调指出，这种把实部和虚部分开的方法不是普遍正确的，只有对线性方程才适用，亦即只对那些每一项中只出现 x 的一次幂或零次幂的方程才适用。例如，假如在方程中有一项 λx^2 ，当把 $x_r + ix_i$ 代入之后，将得到 $\lambda (x_r + ix_i)^2$ ，但在分离实部和虚部时，得到实部为 $\lambda(x_r^2 - x_i^2)$ ，虚部为 $2i\lambda x_r x_i$ 。因此，可以看到方程的实部不仅包含 λx_r^2 ，还有 $-\lambda x_i^2$ 。在这种情况下，我们得到了一个与我们要解的方程不一样的方程，在这个方程中混有 x_i ，而 x_i 是我们在分析问题时完全人为引进的一个量。

现在试用我们的新方法来解决受迫振子的问题，这个问题怎么解我们已经知道了。像先前那样，我们可以解式(23.2)，但在这里我们打算解下面的方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \hat{F} e^{i\omega t}/m, \quad (23.3)$$

这里 $\hat{F} e^{i\omega t}$ 是一个复数。当然， x 也是复数，但要记住一个规则：取实部作为真正发生的解。我们先来求受迫振动式(23.3)的解，以后再

讨论其他解。受迫振动的解和所加的策动力具有相同的频率，而且也具有某个振幅和相位，因此，它也可以用一个复数 $\hat{x}$ 来表示，它的大小表示 x 的摆幅，它的相位表示时间上的延迟，与力的相位含义相同。指数函数有一个很奇妙的特征，即 $d(\hat{x} e^{i\omega t})/dt = i\omega \hat{x} e^{i\omega t}$ 。当对一个指数函数求微商时，只要取指数作为一个简单的乘数。二级微商的情况也一样，再取另一个 $i\omega$ ，因此，观察一下就很容易立即写出 $\hat{x}$ 的方程：每微分一次，就简单地乘上 $i\omega$ （微分现在就像乘法一样容易！在线性微分方程中应用指数的想法几乎与发明对数同样伟大，在对数中乘法被加法所代替，这里微分被乘法代替）。这样，我们的方程变成

$$(i\omega)^2 \hat{x} + \frac{k\hat{x}}{m} = \frac{\hat{F}}{m}, \quad (23.4)$$

（我们已经消去了公因子 $e^{i\omega t}$ ）。看，多么简单！通过观察就立即把微分方程变成了纯粹的代数方程；实际上就能得出解，即

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(k/m) - \omega^2},$$

因为 $(i\omega)^2 = -\omega^2$ 。把 $k/m = \omega_0^2$ 代入，将此式略加简化，即得

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (23.5)$$

当然，这就是我们前面得出的解；由于 $m(\omega_0^2 - \omega^2)$ 是实数，故 $\hat{F}$ 和 $\hat{x}$ 的辐角相同（或者，当 $\omega^2 > \omega_0^2$ 时，可能相差 180° ），所以就像前面说的一样， $\hat{x}$ 的模——它量度振动有多远——与 $\hat{F}$ 的大小差一

个因子 $1/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$ ，当 ω 接近 ω_0 时，这个因子变得非常大。

因此，当适当选择外加频率 ω 时，我们会得到一个非常强的响应。

（假如在弦的一端悬挂一个摆，用一个适当的频率使它摆动，可以摆得很高。）

§23-2 有阻尼的受迫振子

上面，我们用比较优美的数学技巧分析了振动。但是对于那种易于用其他方法解决的问题，这个技巧的优越性是丝毫也显示不出来的。要显示它的优越性，只有把它应用到较复杂的问题上。因此，我们来解另一个更困难的、但也比前一个更具有现实意义的问题。式

（23.5）告诉我们，如果频率 ω 严格等于 ω_0 ，我们应得到一个无限大的响应。当然，实际上，不会有这种无限大的响应出现，因为到目前为止，我们略去了像摩擦等一类使响应受到限制的其他东西。所以让我们在方程式（23.2）上加一个摩擦项。

由于摩擦这一项的特征和复杂性，这个问题通常是非常困难的。但是，在很多情况下，摩擦力与物体的运动速度成正比。一个物体在油或很浓的液体中作低速运动时的摩擦就是这种摩擦的一个例子。在物体静止时，没有作用力，但物体运动得越快，油必须让物体尽快通过，产生的阻力也就越大。因此，除了式（23.2）中几项外，我们认为还应加上一个与速度成正比的阻力项： $F_f = -c \, dx/dt$ 。把常数 c 改写为 $m \gamma$ 可使方程略为简化。这样，在我们的数学分析中就会方便一些。这和我们用 $m\omega_0^2$ 代替 k 使代数运算简化的技巧完全相同。这样，方程变成

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F, \quad (23.6)$$

或取 $c = m\gamma$ 和 $k = m\omega_0^2$ ，再用质量 m 去除式 (23.6) 就得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}. \quad (23.6a)$$

现在我们已经把方程写成了最便于求解的形式。如果 γ 非常小，就表示摩擦很小；如果 γ 很大，则表示有很大的摩擦力。我们怎么来解这个新的线性微分方程呢？假设，策动力等于 $F_0 \cos(\omega t + \Delta)$ ；我们可以把它代入式 (23.6a) 去试着求解，但是我们不这样做而改用新的方法来解此方程。为此我们把 F 写成 $\hat{F} e^{i\omega t}$ 的实部， x 写成 $\hat{x} e^{i\omega t}$ 的实部，并把它们代入方程 (23.6a) 中。其实，连这种代换也不必要，因为通过观察我们就能看出方程将变成

$$[(i\omega)^2 \hat{x} + \gamma(i\omega) \hat{x} + \omega_0^2 \hat{x}] e^{i\omega t} = (\hat{F}/m) e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

[事实上，如果试用我们老的直接求解的方法去解方程式 (23.6a)，我们就会真正体会到“复数法”的妙处]。两边除以 $e^{i\omega t}$ ，就能得出对给定的力 $\hat{F}$ 的响应 $\hat{x}$ ，即

$$\hat{x} = \hat{F}/m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega). \quad (23.8)$$

于是又得出了 $\hat{x}$ 等于 $\hat{F}$ 乘上一个确定的因子。这个因子没有专门术语，也没有专门符号，但是为了讨论方便起见，我们令它为 R

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)},$$

于是

$$\hat{x} = \hat{F} R. \quad (23.9)$$

（虽然字母 γ 和 ω_0 被广泛采用，但 R 没有特别名称）。这个因子 R 可以写成 $p+iq$ ，或某个模 ρ 乘 $e^{i\theta}$ 。如果写成某个模乘 $e^{i\theta}$ 的形式，让我们来看看它表示什么意思。这里 $\hat{F} = F_0 e^{i\Delta}$ ，而实际的力是 $F_0 e^{i\Delta} e^{i\omega t}$ 的实部，即 $F_0 \cos(\omega t + \Delta)$ 。其次，式（23.9）告诉我们 $\hat{x}$ 等于 $\hat{F} R$ 。因此，作为 R 的另一个表示法，写出 $R = \rho e^{i\theta}$ ，我们就有

$$\hat{x} = R \hat{F} = \rho e^{i\theta} F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta+\Delta)}.$$

最后，追溯得更远一些，我们看到作为复数 $\hat{x} e^{i\omega t}$ 的实数部分的物理量 x ，等于 $\rho F_0 e^{i(\theta+\Delta)} e^{i\omega t}$ 的实部。但 ρ 和 F_0 是实数，而 $e^{i(\theta+\Delta+\omega t)}$ 的实部就是 $\cos(\omega t + \Delta + \theta)$ 。因此

$$x = \rho F_0 \cos(\omega t + \Delta + \theta). \quad (23.10)$$

由此可知，响应的振幅是力 F 的幅值与某一放大因子 ρ 的乘积；它给出了振动的幅度。但是，它还告诉我们， x 的振动与力不是处于同一相位的，力的初始相位是 Δ ，而 x 则还要再移过一个额外的量 θ 。因此， ρ 和 θ 表示响应的大小和响应的相移。

现在，我们来计算 ρ 。我们知道一个复数模的平方等于这个复数乘它的共轭复数，即

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{1}{m^2 [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}. \quad (23.11)$$

此外，相角 θ 也容易求出。因为如果写出

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \left(\frac{1}{\rho}\right) e^{-i\theta} = m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega),$$

我们看到

$$\tan \theta = -\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2). \quad (23.12)$$

故 θ 是负值，因为 $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ 。对所有的 ω ，所得的 θ 均为负值，这相应于位移 x 落后于力 F 。

图23-2表示 ρ^2 作为一个频率的函数变化的情况（ ρ^2 在物理上比 ρ 更有用，因为 ρ^2 与振幅的平方成正比，或多或少与力加到振子上产生的能量成正比）。我们看到，若 γ 很小，则 $1/(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ 是最重要的项，当 ω 等于 ω_0 时，响应趋于无限大。这里的“无限大”不是真正的无限大，因为如果 $\omega = \omega_0$ ，那么 $1/\gamma^2 \omega^2$ 依然存在。相移的变化如图23-3所示。

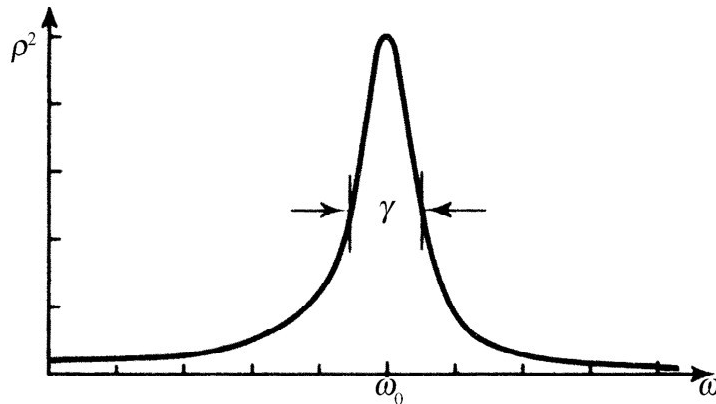


图23-2 ρ^2 对 ω 的关系图

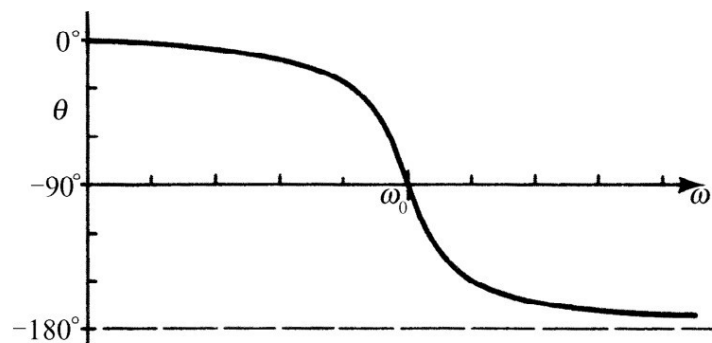


图23-3 θ 对 ω 的关系图

在某些情况下，我们得到一个与式（23.8）略有不同的公式，它也称为“共振”公式，人们可能会认为它代表另一种现象，但实际上并非如此。原因是，如果 γ 很小，曲线的最有意义的部分是 $\omega = \omega_0$ 附近的部分，因此我们可以用一个近似公式来代替式（23.8），当 γ 很小且 ω 接近 ω_0 时，这个近似公式是非常正确的。因为 $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$ ，如果 ω 接近 ω_0 ，上式接近于 $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ （ $\omega_0 - \omega$ ），而 $\gamma\omega$ 又接近于 $\gamma\omega_0$ 。把这些关系用到式（23.8），我们看到 $\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)$ ，因此

$$\hat{x} \approx \hat{F}/2m\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2) \quad (\text{如果 } \gamma \ll \omega_0 \text{ 和 } \omega \approx \omega_0). \quad (23.13)$$

很容易求出 ρ^2 的相应公式。它是

$$\rho^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4]}.$$

我们将留给读者去证明如下事实：如果将 ρ^2 - ω 曲线的最大高度称为1个单位，我们要求出在最大高度一半处曲线的宽度 $\Delta\omega$ ；假定 γ

很小时，曲线最大高度一半处的全宽度是 $\Delta\omega = \gamma$ 。当摩擦的影响越来越小时，共振越来越尖锐。

有人用一个定义为 $Q = \omega_0 / \gamma$ 的量 Q 作为宽度的另一种量度。共振越窄， Q 就越高； $Q=1\ 000$ 的意思是说，这个共振的宽度只有频率的千分之一。在图23-2所示的共振曲线中 Q 是5。

共振现象的重要性在于它在很多其他情况中也会出现，因此，本章的其余部分将描述其他一些共振情况。

§23-3 电共振

共振的最简单和最广泛的技术应用是在电学方面。在电学世界中，有很多能够连接成电路的装置。通常所说的无源电路元件有三种主要类型，虽然其中的每一种都混有少量的另外两种元件。在详细叙述它们之前，我们必须注意由悬挂在弹簧一端的物体构成的机械振子的整个概念只是一种近似。所有的质量并不真正集中在“物体”上，有些质量表现为弹簧的惯性。同样，全部弹性也并不集中在“弹簧”上，物体本身也有一点点弹性，虽然它看来很像一个刚体，但不是绝对刚性的，当它上下运动时，在弹簧拉力的作用下会有一点弯曲。在电学中情况也一样。作为一种近似，我们可以将一些东西归结为“电路元件”，并假定它们具有纯粹的理想特性。现在讨论这种近似还不是时候，我们先简单地承认在目前的情况下它是正确的。

三种主要的电路元件如下：第一种是电容器（图23-4），将两块金属平板用绝缘物质分开一个很小的距离就是一个例子。当金属板充电后，在两块板之间就有一定的电压降，亦即有一定的电位差。在端

点A和B之间出现相同的电位差，因为如果沿着相连的导线有任何电位差的话，电荷会立即流动。因此，如果两块板分别具有电荷 $+q$ 和 $-q$ ，它们之间就有一定的电位差 V 。于是两块板之间将存在某一电场，对此我们已经得出过一个公式（见第13章和第14章）

$$V = \sigma d / \varepsilon_0 = qd / \varepsilon_0 A, \quad (23.14)$$

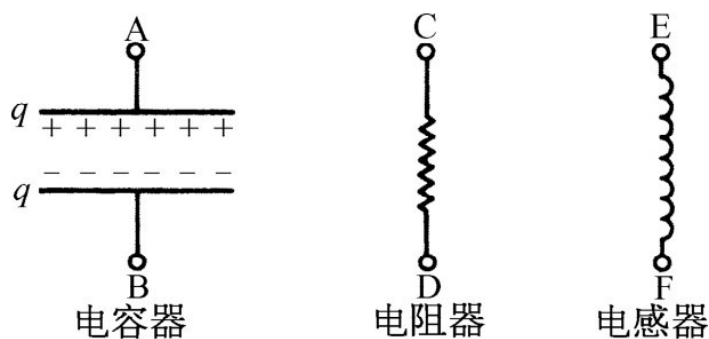


图23-4 三个无源电路元件

这里 d 是两块板的间距， A 是板的面积。注意，电位差是电荷的线性函数。如果不是平行板，而是任意形状的绝缘电极，其电位差仍然严格地和电荷成正比，不过比例常数可能不大容易计算。但是，我们需要知道的只是电容器两端的电位差与电荷成正比： $V = q / C$ ；比例常数是 $1/C$ ，这里的 C 就是物体的电容。

第二种电路元件叫做电阻器，它起着阻碍电流流动的作用。已经证明金属导线和许多其他物质都以如下方式阻碍电荷流动：如果某段物质的两端有一电压差，就有电流 $I = dq / dt$ ，它与电压差成正比

$$V = RI = R dq / dt. \quad (23.15)$$

比例系数叫做电阻 R 。可能你对这个关系式已经很熟悉，它就是欧姆定律。

假如我们把电容器上的电荷 q 类比为力学系统的位移 x ，可以看到，电流 $I = dq/dt$ ，它相应于速度， $1/C$ 相应于弹性系数 k ， R 相应于方程(23.6)中的电阻系数 $c = m\gamma$ 。十分有趣的是还存在另一个与质量相对应的电路元件！这是一个线圈，当线圈内有电流时，在它内部就建立了磁场。变化的磁场在线圈内产生电压，电压的大小与 dI/dt 成正比（实际上，这就是变压器的工作原理）。磁场与电流成正比，在这种线圈内的（所谓）感生电压与电流的变化率成正比

$$V = L dI/dt = L d^2 q/dt^2. \quad (23.16)$$

系数 L 是自感，它与机械振动回路系统中的质量相对应。

假设我们把这三个电路元件串联成一个电路（图23-5），则加在从1到2整个回路两端的电压就是在回路中移动单位电荷所做的功，它等于几部分电压之和：在电感器两端的 $V_L = L d^2 q/dt^2$ ；在电阻两端的 $V_R = R dq/dt$ ；在电容器两端的 $V_C = q/C$ 。它们的和等于外加电压 V

$$L d^2 q/dt^2 + R dq/dt + q/C = V(t). \quad (23.17)$$

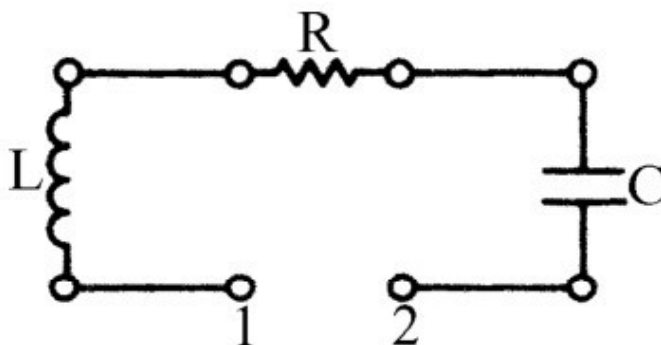


图23-5 由电阻、电容和电感组成的振荡电路

这个方程式与力学方程式（23.6）完全一样，当然可以用完全相同的方式来解。假设 $V(t)$ 是振荡的：我们用一个纯正弦波振荡发生器来驱动电路。于是就能把 $V(t)$ 写成一个复数 $\hat{V}$ ，只须理解为若要求真正的 V ，则最后必须乘上 $e^{i\omega t}$ ，再取它的实部即可。同样，电荷 q 也能这样分析，于是完全和处理式（23.8）的方法一样，我们写出相应的方程式： $\hat{q}$ 的两次微商是 $(i\omega)^2 \hat{q}$ ，一次微商是 $(i\omega) \hat{q}$ 。这样，方程式（23.17）就变成

$$\left[L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C} \right] \hat{q} = \hat{V}$$

或

$$\hat{q} = \frac{\hat{V}}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + 1/C},$$

还可以把它写成如下形式

$$\hat{q} = \hat{V} / L(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega), \quad (23.18)$$

这里 $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ， $\gamma = R/L$ 。式（23.18）中的分母与力学的情况完全相同，因而具有完全相同的共振性质！电学和力学情况的对应关系列于表23-1中。

表 23-1

一 般 特 征	力 学 性 质	电 学 性 质
自 变 量	时间(t)	时间(t)
因 变 量	位置(x)	电荷(q)
惯 性	质量(m)	电感(L)
阻 抗	曳力系数($c = \gamma m$)	电阻($R = \gamma L$)
刚 性	刚性(k)	电容的倒数($1/C$)
共振频率	$\omega_0^2 = k/m$	$\omega_0^2 = 1/(LC)$
周 期	$t_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$	$t_0 = 2\pi \sqrt{LC}$
品质因素	$Q = \omega_0/\gamma$	$Q = \omega_0 L/R$

我们必须指出一个小的技术性问题。在电学文献中，常采用不同的符号（从一个领域到另一个领域，课题实际上没有任何不同，但是书写符号的方式常常不同）。首先在电工中常用 j 代替 i 来表示 $\sqrt{-1}$ （这是因为 i 必须用以表示电流）。此外，工程师喜欢利用 $\hat{V}$ 和 $\hat{I}$ 的关系式，而不太采用 $\hat{v}$ 和 $\hat{q}$ 的关系式，这是因为他们对前一种方式更习惯一些。因为 $\hat{I} = d\hat{q}/dt = i\omega\hat{q}$ ，所以我们能用 $\hat{I}/i\omega$ 代替 $\hat{q}$ ，并得出

$$\hat{V} = \left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \right) \hat{I} = \hat{Z} \hat{I}. \quad (23.19)$$

另一个做法是改写式（23.17），使它变成更熟悉的形式。即可写为

$$\frac{LdI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = V(t). \quad (23.20)$$

无论如何，我们找到的电压 $\hat{V}$ 和电流 $\hat{I}$ 之间的关系式（23.19），除了被 $i\omega$ 去除之外，和式（23.18）完全一样，这样就得出了式（23.19）。量 $R + i\omega L + 1/(i\omega C)$ 是一个复数，在电工上应用得很多，以致有一个名称，叫做复阻抗 $\hat{Z}$ 。于是我们就可以写成 $\hat{V} = \hat{Z} \hat{I}$ 。工程师喜欢这样做的原因是因为在他们年轻时，只知道电阻和直流电，对于电阻他们学过 $V=RI$ 。现在，他们受到更多的教育，知道了交流电路，然而还想看到同样的等式。因此，他们写出 $\hat{V} = \hat{Z} \hat{I}$ ，唯一的区别是电阻被一个更复杂的复数的量所代替。因此，他们坚持

不能采用世界上其他人都采用的表示虚数的形式，而要用一个 j 来表示，但奇怪的是他们并没有坚持把字母 Z 也写成 R （于是在讨论电流密度时，他们就遇到了麻烦，因为电流密度也用 j 表示。科学的困难在很大的程度上不是来自自然界，而是来自符号、单位和所有其他人们所发明的人为事物造成的困难）！

§23-4 自然界中的共振现象

虽然我们详细讨论的是电学的情况，但也能够在很多领域里举出一个又一个例子，用来说明其共振方程的确是何等的一致。在自然界中存在着很多发生“振动”和共振的情况。在前面某一章中我们曾讲起过这类情况，现在我们来加以证明。如果我们在书房里踱步，从书架上取出一些书，去找找看有没有一个来自相同的方程，且能画出像图23-2那样曲线的例子，我们会发现什么呢？只要查阅五六本书，就能找到一系列显示共振的现象，这些少量的现象足够说明共振所涉及的范围之广。

最初两个例子来自力学，第一个现象是大规模的，即整个地球的大气层。我们认为整个地球由大气层均匀地包围着，如果大气被月亮吸引到一边，或更确切地说，被拉扁成双潮汐，那么让它这样下去，它就会继续上下涨落，这就是一个振子。这个振子是由月亮驱动的，实际上月亮绕着地球转动，策动力的任何一个分量，比如说，在 x 方向上的分量，是一个余弦分量，因此地球的大气层对月亮的潮汐拉力的响应是一个振子的响应。预期的大气响应如图23-6中曲线b所示（曲线a是所引的那本书中讨论过的另一条理论曲线）。现在，人们可能会认为，在这条共振曲线上只有一点，因为与在月亮作用下的地球的转

动相应的频率只有一个，它转动的周期为12.42 h——12 h是由于地球的转动（潮汐是两个隆起部分）。由于月亮也在转动，还要加上一点。但是从大气潮汐的大小和相位（即推迟的数量）来看，我们能同时得出 ρ 和 θ 。由此又可得出 ω_0 和 γ ，从而画出整条曲线！这是一个非常蹩脚的科学例子。我们从两个数得出两个数，再从那两个数画出一条漂亮的曲线，它当然正好通过决定曲线的那个点。除非我们能够测量某些其他量，否则这条曲线是毫无用处的，而对地球物理学来说，这通常又是非常困难的。但在这个特殊情况中，可以从理论上证明，一定还有与固有频率 ω_0 同样计时的东西：那就是，如果能扰动大气层，它就会以频率 ω_0 振动。1883年曾发生过一次激烈的扰动，喀拉喀托^[1]火山爆发时，将半个岛屿掀掉了，在大气中造成了一次如此可怕的爆炸，使得能够测量出大气的振动周期。得出的结果是10.5 h，从图23-6得出的 ω_0 是10.20 h，于是我们至少找到了一个验证对大气潮汐理解的真实性的数据。

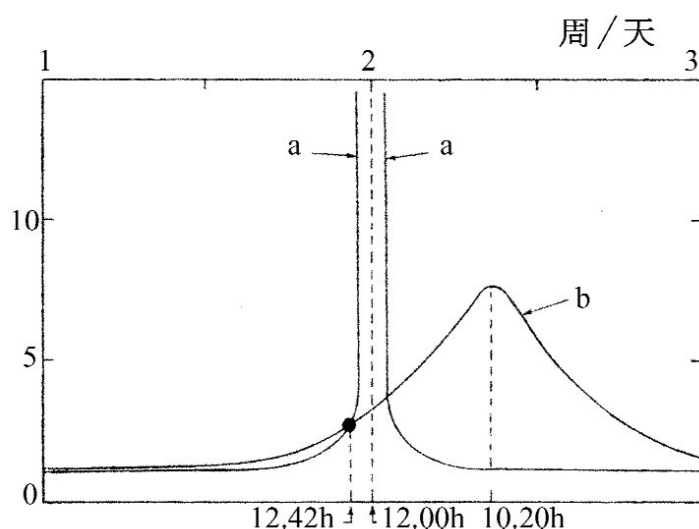


图23-6 大气层对外来激发的响应，如果大气层 S_2 -潮汐是由万有引力引起的，a就是这种条件下所需的响应；峰值的放大率是100:1。b是从 M_2 -潮汐观察的倍数和相位

导出的

(转载自Munk W H, MacDonald G J F. *Rotation of the Earth*. London: Cambridge University Press, 1960)

下面我们将研究小尺度的机械振动。这次我们取氯化钠晶体，在前面的一章中我们曾描述过，氯化钠晶体中，钠离子和氯离子是一个接一个地排列着的。钠离子带正电，氯离子带负电。现在有可能存在一种有趣的振动。假定我们把所有的正电荷赶到右边，把所有的负电荷赶到左边，然后任其运动，这样钠晶格相对氯晶格就会来回振动。怎样才能造成这种情况呢？这很容易，如果在晶体上外加一个电场，电场会把正电荷推向一边，而把负电荷推向另一边。因此，通过引进外加电场，我们或许能够使晶体振动。但是所要求的电场频率很高，它相应于红外辐射！因此，我们可以通过测量氯化钠对红外光的吸收来找出一条共振曲线。图23-7所示就是这样的一条曲线。横坐标不是频率，而是波长，但这仅仅是一个技术问题，因为对于波来说，频率和波长之间有确定的关系，因而它实际上也是一种频率的标度，而某一个确定频率与共振频率相对应。

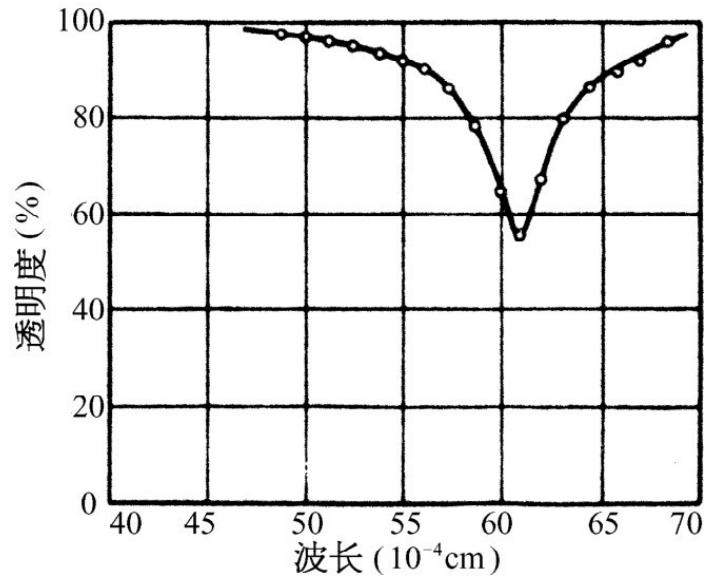


图23-7 通过一个薄氯化钠膜 ($0.17 \mu\text{m}$) 的红外辐射透射

(转载自Barnes R B. *Z Physik*, 1932, 75:723; Kittel C. *Introduction to Solid State, Physics*. New York: Wiley, 1956)

但是，宽度有多大？由什么来确定宽度呢？在很多情况下，曲线中所看到的宽度实际上并不是理论上应有的固有宽度 γ 。为什么会有较理论曲线更宽的曲线呢？这有两个原因。第一，如果晶体的某个区域发生应变，则晶体的不同部分可能不都具有相同的频率，因此，在这些区域中振动频率与其他区域相比略有不同，这时我们就具有许多彼此靠得很近的共振曲线，于是，看上去曲线就比较宽。第二个原因是这样的：或许我们不能足够精确地测量出频率——假如我们把分光计的狭缝开得相当宽，尽管我们认为只有一种频率，实际上则有一个范围 $\Delta\omega$ ，于是我们并没有足够的分辨率去观察一条窄的曲线。因此，我们不能随便讲图23-7的宽度是否是自然的，还是由晶体中的不均匀性或分光计狭缝的一定宽度所引起的。

现在转而研究一个比较深奥的例子，这就是磁铁的振动。如果把一个带有南、北极性的磁铁放在一个恒定的磁场内，磁铁的N端将被推向一方，而S端则被推向另一方，一般说来有转矩作用在磁铁上，因此，它将在平衡位置附近振动，就像罗盘的指针那样。但是，我们所说的磁铁指的是原子。这些原子具有一个角动量，转矩并不产生沿着场的方向的简单运动，而显然会产生进动。现在，从旁边来观察时，可以看到任何一个分量都在“摆动”，我们可以扰动或驱动这种摆动，并测量吸收。图23-8中的曲线表示一个典型的这类共振曲线。这里所做的在技术上稍有差别。现在，用以驱动这种摆动的横向场的频率总是保持不变，虽然我们曾预料研究者们会改变它而画出曲线来。他们可以这样做，但是在技术上更容易做的是让频率 ω 固定，改变恒定磁场的强度，这相当于在我们的公式中改变 ω_0 。他们画出相对于 ω_0 的共振曲线。不管怎样，这是具有某一确定的 ω_0 和 γ 的典型共振。

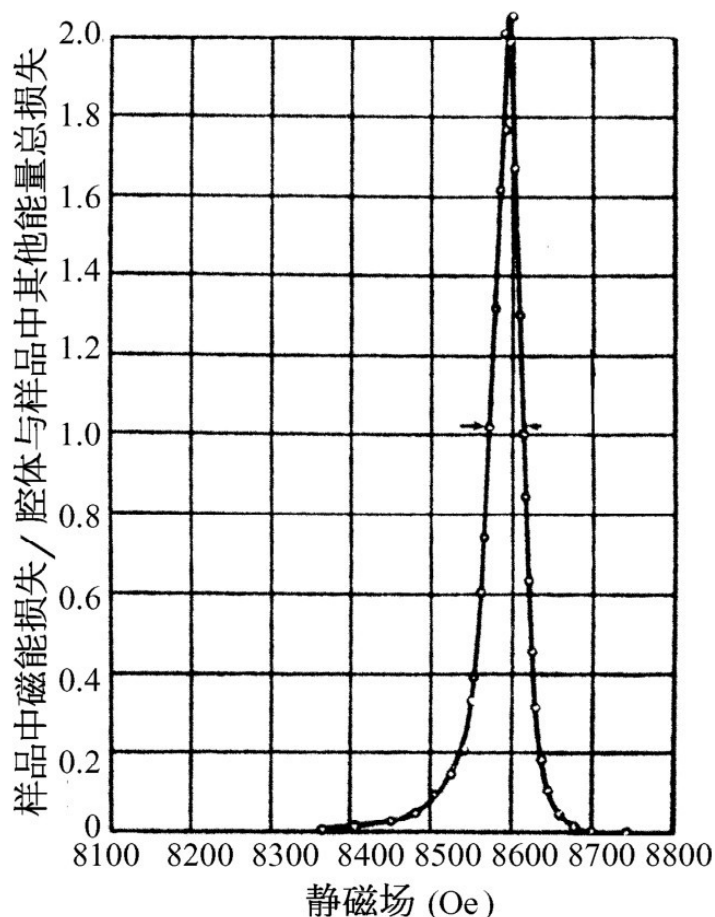


图23-8 在顺磁有机化合物中，磁能损失与外加磁场强度的关系

(转载自Holden A N, *et al. Phys Rev* , 1949, 75:1614)

现在我们要进一步讨论下去。下一个例子与原子核有关。原子核中的质子和中子以某种方式作振动，这可以用下面的实验来证实。我们用质子轰击一个Li原子，发现产生 γ 射线的某种反应，实际上是具有一个非常尖锐的极大的典型共振。但是，在图23-9中，我们看到和其他情况有一个不同：水平标度不是频率，而是能量！原因是在量子力学中，经典能量的含义实际上与波振动的频率有关。如果我们分析某个在一般宏观物理学中与频率有关的事物时，我们发现在用原子物质做量子力学实验时，得到的是相应的作为能量函数的曲线。实际上，

从某种意义上来说，这条曲线就是这种联系的一个证明。它表明频率和能量之间有某种深刻的内在联系，当然，事实上也是如此。

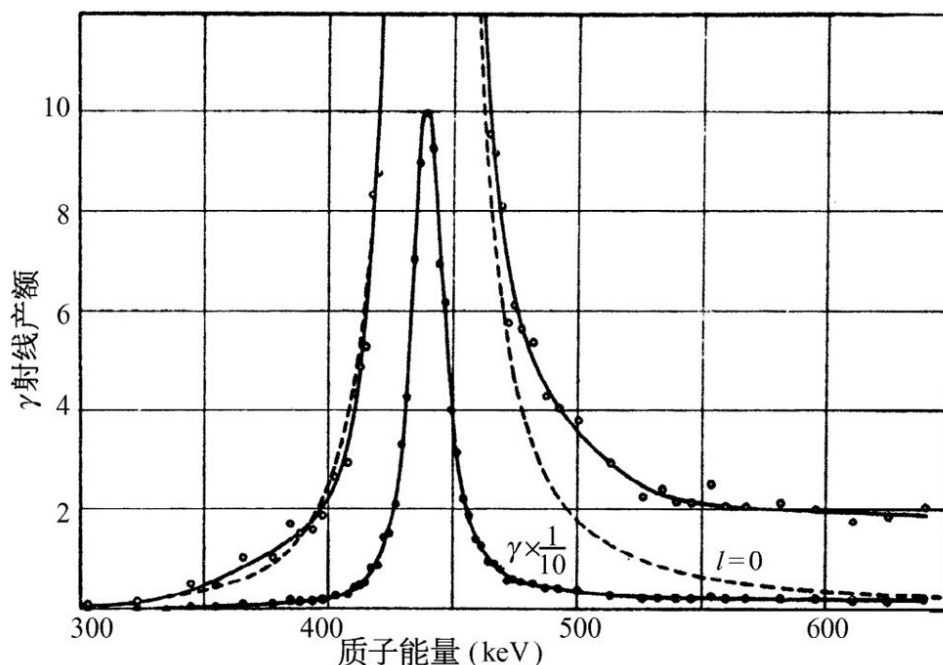


图23-9 从Li原子中射出的 γ 射线强度与轰击质子能量的关系。虚线是对角动量 $l=0$ 的质子进行计算时得出的理论曲线

(转载自 Bonner T W, Evans J E. *Phys Rev*, 1948, 73:666)

现在我们来研究另一个与原子核能级有关的例子，不过它是很窄很窄的。在图23-10中， ω_0 相当于100 000 eV的能量，而宽度 γ 大致为 10^{-5} eV；换句话说， Q 为 10^{10} ！当这条曲线被测定时，它是所有已经测定的振子中 Q 值最大的。这是由穆斯堡尔博士测出的，这奠定了他获得诺贝尔奖的基础。在这里水平标度是速度，因为要获得相差很小的频率的技术是采用源相对于吸收体运动的多普勒效应。当我们知道所包含的速度只有每秒几厘米时，人们就会感到这个实验是多么精

巧！在图中的实际标度下，零频率相应于左边约 10^{10} cm处的一个点——有些超出纸面了！

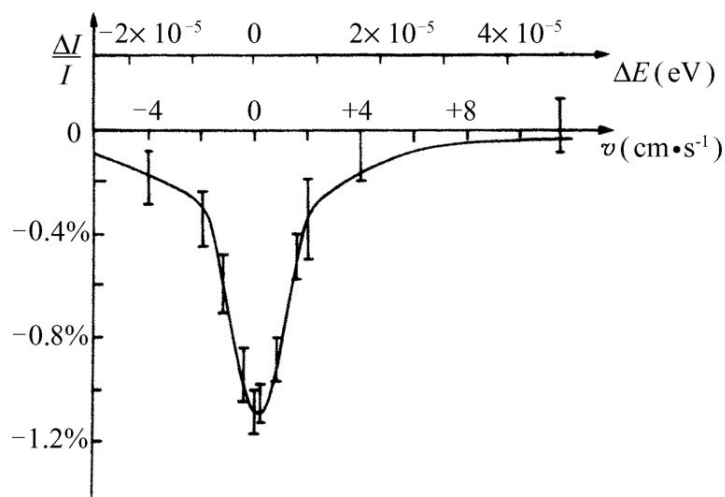


图 23-10

（承穆斯堡尔博士同意提供）

最后，我们来看一下某一期《物理评论》（*Physics Review*）杂志，比方说是1962年1月1日出版的那一期，我们能看到共振曲线吗？每期中都有这条曲线，图23-11就是这一期里的共振曲线。这条曲线是很有趣的。这种共振是在一些奇异粒子间的某种反应中发现的，在这个反应中一个 K^- 介子和一个质子相互作用。这种共振是通过观察放出来的某种粒子数目的多少来探测的，它依赖于放出粒子的数目和放出的是什么粒子，我们得到不同的曲线，但是这些曲线有相同的形状，并且峰值出现在相同的能量处。因此，我们确认对 K^- 介子，在某确定能量时存在着共振。这可能意味着，有某种状态或条件相应于这种共振，把一个 K^- 和一个质子放在一起就能得到这种状态或条件。这是一种新的粒子或共振。今天，我们还不知道是否能称这样的突起部分为“粒子”，还是干脆就叫共振。当有一个非常尖锐的共振时，就相应于

一个非常确定的能量，就好像有一个粒子以这种能量存在于自然界中一样。当共振变宽的时候，我们就不知道是否应该说存在一个寿命不长的粒子，或者仅仅说在反应概率中存在着一个共振。在第2章中讲到粒子时，这一点已经提起过，但在写第2章时，还不知道这个共振，因此在我们的基本粒子表中还应该加上另一个粒子！

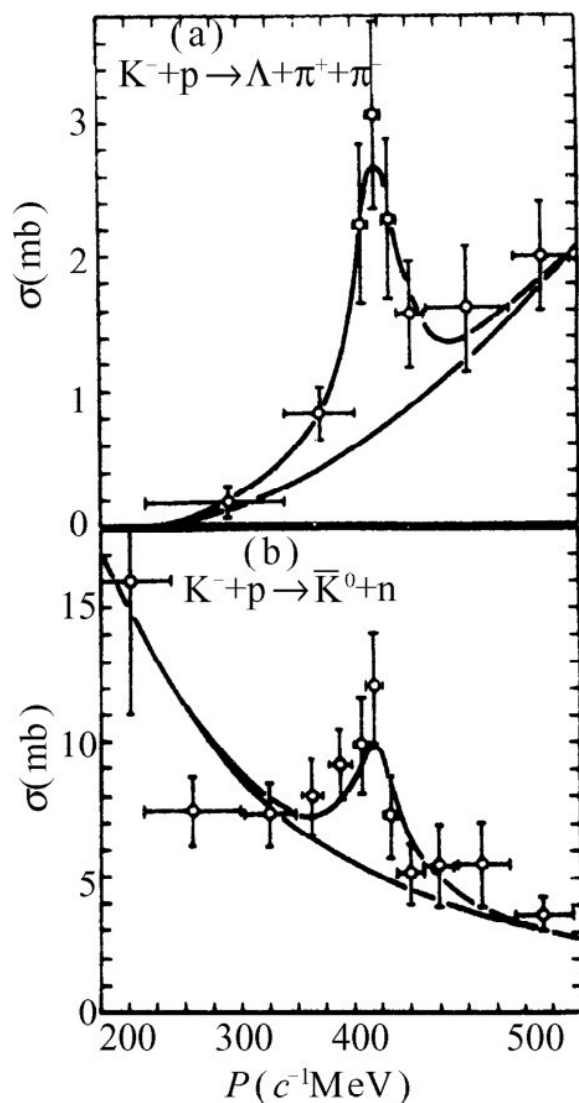


图23-11 动量与反应截面的依赖关系 (a) $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^-$ 和 (b) $K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$ 。在 (a) 和 (b) 中下面的曲线代表假定的非共振背景，而上面的曲线是在背景上再叠加共振

(转载自Ferro-Luzzi M, *et al. Phys Rev Lett* , 1962, 8:28)

[1] 靠近印度尼西亚爪哇岛西端的海中火山。——译者注

第24章 瞬变态

§24-1 振子的能量

虽然本章的题目是“瞬变态”，但是从某种角度来看，本章的某些部分是上一章受迫振动的继续。受迫振动的特点之一是振动的能量，对此我们还没有讨论过。现在就来考虑这个问题。

一个机械振子的动能有多大？它与速度的平方成正比。现在我们谈到了一个重要问题。试考虑一个任意量 A ，它既可以是速度，也可以是我们要讨论的其他东西。当我们把 A 写成一个复数 $A = \hat{A} e^{i\omega t}$ 时，在物理世界中具有真实意义的 A 只是它的实部；因此，如果为了某种原因，我们要用的平方时，把复数平方，然后取实部是不对的，因为一个复数平方的实部并不正好等于实部的平方，还包含有虚部。因此，当我们想要求出能量时，我们得暂时丢开复数表示，先去看看它的实在内容是什么。

真实的物理量 A 是 $A_0 e^{i(\omega t + \Delta)}$ 的实部，即 $A = A_0 \cos(\omega t + \Delta)$ ，这里复数 $\hat{A}$ 可写成 $A_0 e^{i\Delta}$ 。现在，这个真实的物理量的平方是 $A^2 = A_0^2 \cos^2(\omega t + \Delta)$ 。因此，这个量的平方像余弦的平方一样，在最大值和零之间来回变化。余弦平方的最大值是1，最小值是0，它的平均值是1/2。

在很多情况下，我们并不对振动过程中任何特定时刻的能量感兴趣。在大量的应用中，我们只需要 A^2 的平均值——即在一段比振动周期大得多的时间内 A 平方的平均值。在这些情况下，可用余弦平方的平均值，因此，我们有如下的定理：如果用一个复数表示 A ，那么 A^2 的平均值等于 $A_0^2/2$ 。这里 A_0^2 是复数 $\hat{A}$ 的模的平方（它可以写成很多形式——有些人喜欢写 $|\hat{A}|^2$ ；也有些人写 $\hat{A} \hat{A}^*$ ，即 $\hat{A}$ 乘它的共轭复数）。我们将要多次用到这个定理。

现在来考虑受迫振子的能量。受迫振子的方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F(t). \quad (24.1)$$

在我们的问题中，当然， $F(t)$ 是 t 的余弦函数。现在我们来分析一下这个问题：外力 F 做了多少功？每秒钟外力做的功，即功率，等于力乘速度（我们知道在时间 dt 内的元功是 $F dx$ ，功率是 $F dx/dt$ ），即

$$P = F \frac{dx}{dt} = m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \omega_0^2 x \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] + \gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (24.2)$$

但是，等式右端的前两项也可写成 $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (dx/dt)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right]$ ，只要对此式微分一下就能立即证实。也就是说，在方括号里的表示式是另外容易理解的两项之和的微商——一项是运动的动能，另一项是弹簧的势能。我们把这个量称为储能，即贮藏在振动中的能量。假如振子作受迫振动，并已运动了很长时间后，我们要求多次振动的平均功率。从长时间来看，储能不变——对它微商后得出的平均效果是零。换句话说，如果我们求功率的长时间平均值，则所有能量最终将被阻尼项

$\gamma m (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2$ 全部吸收。确定有些能量贮存在振动中，但是如果对多次振动取平均，它不随时间而变化。因此，平均功率 $\langle P \rangle$ 是

$$\langle P \rangle = \langle \gamma m (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2 \rangle. \quad (24.3)$$

用写成复数的方法和定理 $\langle A^2 \rangle = A_0^2/2$ ，我们可以求出这个平均功率。如果 $x = \hat{x} e^{i\omega t}$ ，那么 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = i\omega \hat{x} e^{i\omega t}$ 。因此，在这些情况中，平均功率可以写成

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \gamma m \omega^2 x_0^2. \quad (24.4)$$

在电路的符号中， $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 被电流 I （ I 是 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ ，这里 q 对应于 x ）所代替，而 $m\gamma$ 则对应于电阻 R 。因此，能量耗损率——强迫力函数消耗的功率——是电路中的电阻乘电流平方的平均值

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = R \frac{1}{2} I_0^2. \quad (24.5)$$

当然，这个能量使电阻变热；它有时被称为热耗损或焦耳热。

另一个需要讨论的有意义的特点是贮存了多少能量。这与功率不同，因为虽然在开始时要功率贮存一些能量，但是在这以后系统只在所具有的热耗损（电阻）的限度内继续吸收功率。在任何时刻，都有一定量的贮能，因此我们想计算一下平均贮能 $\langle E \rangle$ 。我们已经计算出 $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2$ 的平均值，因此得出

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega_0^2) \frac{1}{2} x_0^2. \quad (24.6)$$

当一个振子非常有效，而且 ω 接近 ω_0 时，则 $|\hat{x}|$ 很大，贮能就很高——我们能从一个比较小的力得到较大的储能。力在引起振动时做了大量功，但此后为了保持振动稳定，它所要做的一切就只是克服摩擦力。如果摩擦力很小，振子可以具有很大的能量，即使振动很强，能量的损失也很少。一个振子的效率可以由所贮存的能量与每振动一次力所做的功相比较来量度。

储能怎样与每振动一周力所做的功相比较呢？这称为系统的 Q 值， Q 值的定义是 2π 乘平均储能，再除以每周所做的功（如果用的是每弧度所做的功，而不是每周做的功，那就没有 2π ）

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}m(\omega^2 + \omega_0^2) \cdot \langle x^2 \rangle}{\gamma m \omega^2 \langle x^2 \rangle \cdot 2\pi/\omega} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}. \quad (24.7)$$

除非 Q 很大，否则它不是一个十分有用的数。当 Q 比较大时，它可以作为表征振子好坏的一种量度。人们企图用最简单和最有用的方式来定义 Q ；不同的定义之间略有差异，但当 Q 很大时，所有的定义都趋于一致。最普遍采用的定义是式（24.7），它与 ω 有关。对于一个好的接近共振的振子，可令 $\omega = \omega_0$ ，而使式（24.7）再简化一些，于是可得 $Q = \omega_0/\gamma$ ，这正是我们以前所用的 Q 的定义。

什么是电路的 Q 值呢？要求出它，我们只需把 m ， $m\gamma$ 和 $m\omega_0$ 分别换成 L ， R 和 $1/C$ （见表23-1）。在共振时， Q 是 $L\omega/R$ ，这里 ω 是共振频率。如果我们考虑一个具有高 Q 值的电路，这意味着在振动中所贮存的能量比起每振动一周驱使振动的机械所做的功的数量大得多。

§24-2 阻尼振动

现在我们回到讨论的主题：瞬变态，瞬变态是指当没有作用力存在，且系统不是简单地处于静止时，微分方程的一个解（当然，如果没有力的作用，又静止于原点时，那就再好没有了——它就停止在那里）。假设振动以另一种方式开始：比如说，它被力驱动了一会儿，然后把力去掉，那么会发生什么情况呢？让我们首先对一个 Q 值很高的系统将发生什么情况得出一个大致的看法。只要有力在作用，储能就保持不变，就有一定量的功来维持它不变。现在假定去掉力，就不会再做更多的功，这时再也没有额外的能量供消耗——驱动者不复存在。这时可以说损耗就得消耗所贮存的能量。假设 $Q/(2\pi)=1\,000$ ，那么每周所做的功就是储能的 $1/1\,000$ 。由于这是没有策动力的振动，因而系统振动一周时将消耗它的能量 E 的千分之一，这个能量通常是由外界提供的，并且在它继续振动时，每周总是消耗它的能量的 $1/1\,000$ ，这难道是不合理的吗？所以，可以猜测，对于 Q 值相当高的系统，可以假定下面的方程大体上是正确的（以后我们将要严格证明它是正确的）

$$\frac{dE}{dt} = -\omega E/Q. \quad (24.8)$$

说它大体上正确是因为它只适用于大的 Q 值。每经过一个弧度，系统就损失储能 E 的 $1/Q$ 。这样，在给定的时间 dt 内，能量将改变 $\omega dt/Q$ 数量，因为在 dt 时间内改变的弧度数是 ωdt 。什么是频率呢？我们假定系统在几乎没有力作用时运动得很好，如果让它自己运动下去，它将基本上按自身同样的频率振动。因而我们可以推测 ω 就是共振频率 ω_0 。这样，从式（24.8），就可推出储能将按

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t/Q} = E_0 e^{-\gamma t} \quad (24.9)$$

变化。这将是任何时刻的能量的量度。对于作为时间函数的振幅，公式将大致如何呢？完全一样吗？不会！比方说，弹簧上位能的大小随位移的平方而变化；动能则随速度的平方而变化；因此，总能量按位移的平方而变化。因而，由于平方关系，位移，即振幅减小的速率只有能量减小的速率的一半。换句话说，我们猜测阻尼瞬变运动的解将是频率接近于共振频率 ω_0 的振动，其中正弦波运动的振幅将按 $e^{-\gamma t/2}$ 衰减

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t. \quad (24.10)$$

这个等式和图24-1表达了我们所预期的一些想法，现在我们打算通过解运动微分方程本身来精确地分析这种运动。

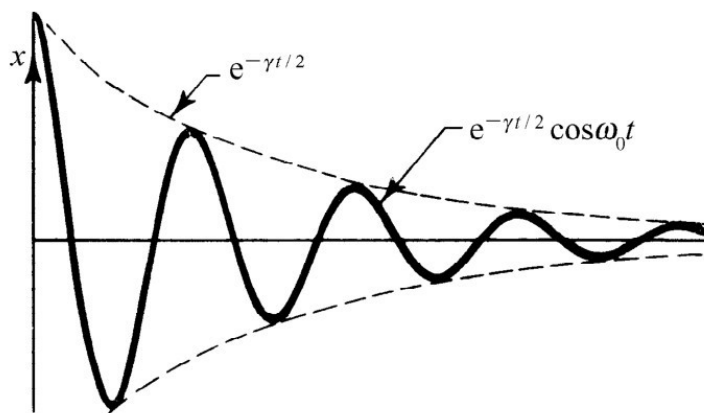


图 24-1 一个阻尼余弦振动

那么，从式（24.1）出发，在不存在外力时，如何解这个方程呢？作为物理学家，我们对解题方法并不像对求出的解大致是什么样子那样操心。根据前面的经验，我们把指数曲线 $x = A e^{i \alpha t}$ 作为一个试解（为什么要这样试呢？因为这最容易微分），把它代入式（24.1）

[其中 $F(t) = 0$] 并用 x 对 t 每微分一次，就是乘上一个 $i\alpha$ 的规则。因而这种代换确实是很简单的。这样我们的公式就变成

$$(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2)Ae^{i\alpha t} = 0. \quad (24.11)$$

要使上式的结果在任何时候都等于0，则除非 (a) $A = 0$ ，但这根本不是解——因为它静止不动；或 (b)

$$-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (24.12)$$

否则，式(24.11)就不能满足。假如能解此式，并求出 α ，我们将得到一个 A 不必为零的解

$$\alpha = i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}. \quad (24.13)$$

我们暂且假设 γ 与 ω_0 相比极其小，所以 $\omega_0^2 - \gamma^2/4$ 肯定是正值，求它的平方根是不会有问题的。麻烦的事情在于我们得到了两个解，即

$$\alpha_1 = i\gamma/2 + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = i\gamma/2 + \omega_\gamma \quad (24.14)$$

和

$$\alpha_2 = i\gamma/2 - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = i\gamma/2 - \omega_\gamma. \quad (24.15)$$

假定我们没有注意到平方根有两个可能值，而来考虑第一个解。我们知道对于 x 的一个解是 $x_1 = Ae^{i\alpha_1 t}$ ，这里 A 是任意常数。现在，将 α_1 代入，因为出现的次数很多，写起来又很长，所以我们令 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = \omega_\gamma$ 。这样， $i\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_\gamma$ ，我们就得到

$x_1 = Ae^{(\gamma/2 + i\omega_\gamma)t}$ ，因为指数具有奇妙的性质，所以此式还可写成

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} e^{i\omega_\gamma t}. \quad (24.16)$$

首先，我们看出这是一个振动，振动频率是 ω_γ ，并非正好等于频率 ω_0 ，但如果它是一个良好的系统， ω_γ 可以相当接近于 ω_0 。其次，振动的振幅按指数衰减！举例说，如果我们取式（24.16）的实部，就有

$$x_1 = A e^{-\gamma t/2} \cos \omega_\gamma t. \quad (24.17)$$

这非常像我们推测的解式（24.10），只是频率实际上是 ω_γ ，这是唯一的误差。因此，可以说是同一回事——我们的概念是正确的。但是并非所有的东西全部都正确！不对的地方是还存在另外一个解。

另一个解是 α_2 ，我们看到它与 α_1 的差别仅仅在于 ω_γ 的符号相反

$$x_2 = B e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}. \quad (24.18)$$

这是什么意思呢？我们可以很快证明，如果 x_1 和 x_2 都是 $F=0$ 时方程式（24.1）的一个可能解，那么， $x_1 + x_2$ 也是同一方程的解！所以 x 的通解的数学形式是

$$x = e^{-\gamma t/2} (A e^{i\omega_\gamma t} + B e^{-i\omega_\gamma t}). \quad (24.19)$$

我们可能会感到奇怪，既然我们对得到的第一个解很满意，为什么还要给出另一个解。因为我们当然知道应当只取实部，那么这个多余的解到底是作什么用呢？我们知道应该取实部，但是利用数学方程怎么

能够知道我们只需要实部呢？当策动力 $F(t)$ 不为零时，我们就加上一个人为的力与之相匹配，而使方程的虚部以一种确定的方式被利用。但是，当 $F(t) \equiv 0$ 时，我们关于 x 应当只取某个量的实部这一规定纯粹是自己的事，而利用数学方程并不知道这一点。物理世界有一个实数解，但是我们以前那么满意的答案却不是实数，而是复数。利用数学方程并不知道我们要任意地取实部，因此可以说，它总是要向我们提供一个复数共轭型的解，这样把这两个解放在一起，我们能够构成一个真正的实数解；这就是 α_2 对我们的用处。为了使 x 成为实数， $Be^{-i\omega_\gamma t}$ 必将是 $Ae^{i\omega_\gamma t}$ 的共轭复数，以便使虚部消失。因此，结果表明 B 是 A 的共轭复数，而实数解为

$$x = e^{-\gamma t/2} (Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}). \quad (24.20)$$

所以，正如前面所说的，我们的实数解是一个具有相移和阻尼的振动。

§24-3 电瞬变态

现在我们来查看一看上述分析是否真正成立。我们构成一个如图24-2所示的电路，在此电路中，我们通过闭合开关 S ，突然接通电源后，将电感 L 两端的电压加到示波器上。它是一个振荡电路，并产生某种类型的瞬变态。这相当于我们突然在某个系统上加上一个力，而使它开始振动的情况。这一电学情况与阻尼机械振子相类似，我们可在示波器上观察这个振荡，在那里可以看到所要分析的曲线（示波器的水平运动是以均匀速度驱动的，竖直运动由电感两端的电压控制。电路的其他部分仅是技术细节。因为视觉的住留不足以看清屏幕上的唯一

的一条径迹，所以我们要多次重复这个实验。因此，我们每秒钟闭合开关60次来一再重复这个实验；每次闭合开关时，也就开始了示波器的水平扫描，于是就一遍又一遍地画出曲线）。在图24-3到24-6中，我们看到的是阻尼振荡的几个例子，这些图是从示波器屏幕上实际拍摄下来的。图24-3所示的是在一个 Q 值很高， γ 很小的电路上的阻尼振荡。它消失得不很快，并且在衰减过程中振荡了好多次。

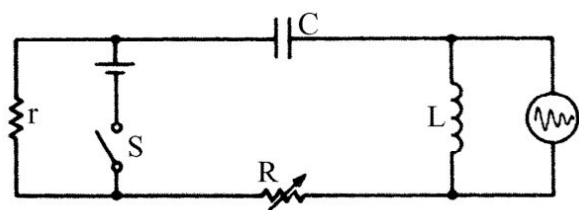


图24-2 演示瞬变态的电路

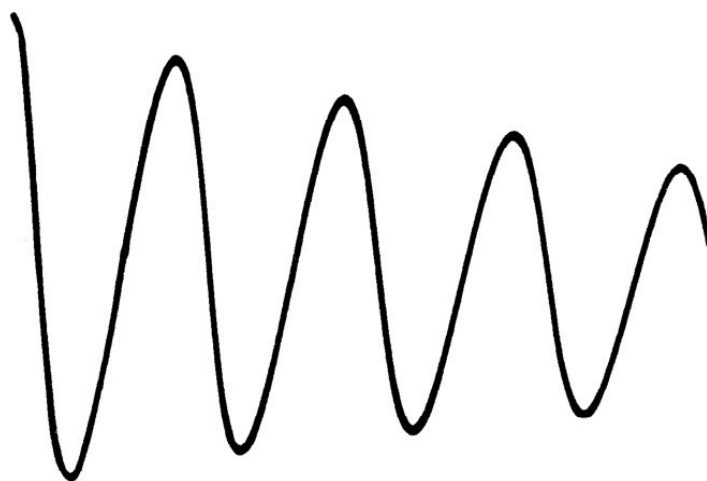


图24-3

现在我们来看看当 Q 值减小，使振荡较快消失时将发生什么情况。增加电路中的电阻 R 就能减小 Q 值。当我们增加电路中的电阻时，它就消失得较快（图24-4）。当电路中的电阻增加得更多时，它就消失得更快（图24-5）。但当电阻增加到超过某一个数值时，我们

就根本看不到任何振荡了！问题在哪里呢？是不是因为我们的眼睛不够好？如果我们再继续增大电阻，就得出一条像图24-6所示的曲线，除了可能有一次之外，在这根曲线上根本看不出有任何振荡。那么如何用数学来解释这种现象呢？

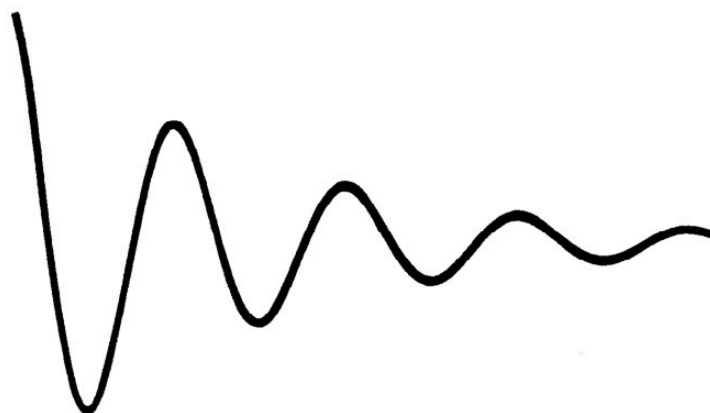


图 24-4

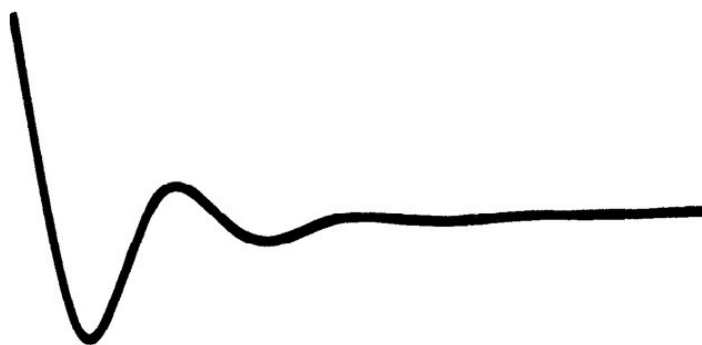


图 24-5



图 24-6

电阻当然与力学装置中的 γ 项成正比。明确地说， γ 就是 R/L 。如果在我们以前认为满意的解（24.14）和（24.15）中，使 γ 增大，那么当 $\gamma/2$ 大于 ω_0 时，将会出现混乱，我们必须把它写成另一种形式，如

$$i\gamma/2 + i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} \quad \text{和} \quad i\gamma/2 - i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}.$$

这就是现在的两个解，按照上述同样的数学推理过程，我们又得出两个解： $e^{i\alpha_1 t}$ 和 $e^{i\alpha_2 t}$ 。如果现在把 α_1 代入，就有

$$x = Ae^{-(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t},$$

这是一个无振荡的有规则的指数衰减。同样，另一个解是

$$x = Be^{-(\gamma/2 - \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t}.$$

注意，平方根不能超过 $\gamma/2$ ，因为即使 $\omega_0=0$ ，平方根也只不过刚好等于 $\gamma/2$ 。现在要从 $\gamma^2/4$ 中减去 ω_0^2 ，因此平方根小于 $\gamma/2$ ，所以括号里的项总是正数。为什么？因为如果它是负值，我们将得到 e 的指数是一个正因子乘 t ，这意味着要发生爆炸！在电路中逐步增大电阻时，我们知道，不会发生爆炸——而是正好相反。因此，我们现在有两个解，每一个本身都作指数衰减，不过一个的“衰减率”比另一个快得多。当然，通解是这两个解的组合，组合系数由运动是如何开始——即问题的初始条件而定。如果在一个特殊的条件下接通电路，使 A 为负值， B 为正值，那么我们就得到这两个指数曲线的差。

现在我们来讨论，在知道了运动的初始状态后，如何求出这两个系数 A 和 B （或 A 和 A^* ）。

设在 $t=0$ 时，已知 $x=x_0$ 和 $dx/dt=v_0$ 。若我们在表示式

$$x = e^{-\gamma t/2} (Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}),$$

$$dx/dt = e^{-\gamma t/2} [(-\gamma/2 + i\omega_\gamma)Ae^{i\omega_\gamma t} + (-\gamma/2 - i\omega_\gamma)A^* e^{-i\omega_\gamma t}]$$

中令 $t=0$ ， $x=x_0$ 和 $dx/dt=v_0$ ，因为 $e^0=e^{i0}=1$ ，得

$$x_0 = A + A^* = 2A_R,$$

$$v_0 = (-\gamma/2)(A + A^*) + i\omega_\gamma(A - A^*) = -\gamma x_0/2 + i\omega_\gamma(2iA_I),$$

这里 $A = A_R - iA_I$ ，而 $A^* = A_R + iA_I$ ，因此得到

$$A_R = x_0/2$$

和

$$A_I = -(v_0 + \gamma x_0/2)/2\omega_\gamma. \quad (24.21)$$

这完全确定了 A 和 A^* 。因此，根据它是如何开始的，就完全确定了瞬变态解的整根曲线。附带说一下，如果注意到

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \text{ 和 } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta,$$

我们就可以用另一方式写一下这个解。

我们还可以把这个完整的解写成

$$x = e^{-\gamma t/2} \left[x_0 \cos \omega_\gamma t + \frac{v_0 + \gamma x_0/2}{\omega_\gamma} \sin \omega_\gamma t \right], \quad (24.22)$$

这里 $\omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ 。这就是振动衰减方式的数学表达式。我们将不直接采用这个表达式，但有几点我们想强调一下，它适用于更一般的情况。

首先，这种没有外力作用的系统的行为可表示为纯时间指数函数（我们写成 $e^{i\alpha t}$ ）的和或叠加。在这种情况下，这是一个很好的解。 α 的值在一般情况下可以是复数，其虚部表示阻尼。最后，当某个物理参数（在此例中，是阻力 γ ）超过某一临界值时，我们在第22章中讨论过的正弦函数和指数函数之间的密切的数学关系，在物理上就表现为从振动到指数行为的变化。

第25章 线性系统及其综述

§25-1 线性微分方程

在本章中我们将讨论振动系统的某些方面，它比我们曾在特定的振动系统中讨论过的更具有普遍性。我们已经解过的特殊系统的微分方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F(t). \quad (25.1)$$

这种施加在变量 x 上的特殊的“运算”组合有一个重要的性质，即如果用 $(x+y)$ 代替 x ，则得出的是分别作用在 x 上和 y 上同样的运算之和；或者如果用 a 乘 x ，则得到的正好是 a 乘原先的组合。这很容易证明。因为把式(25.1)中的所有字母都写出来很麻烦，我们将采用符号 $\underline{L}(x)$ 作为一种“速写”记法。当我们看到这个符号，就知道它的意思是以 x 代入后的式(25.1)的左边各项。按照这种书写方法， $\underline{L}(x+y)$ 的含义如下

$$\underline{L}(x+y) = m \frac{d^2(x+y)}{dt^2} + \gamma m \frac{d(x+y)}{dt} + m\omega_0^2(x+y). \quad (25.2)$$

(我们在 $\underline{L}$ 下面加一短划是为了提醒我们，它不是一个普通函数。) 我们有时称这是算符记法，但是把它叫做什么，这无关紧要，反正它仅仅是一种“速写”记法。

我们首先要说明的是

$$\underline{L}(x+y) = \underline{L}(x) + \underline{L}(y), \quad (25.3)$$

当然，这是由 $a(x+y) = ax + ay$ ， $d(x+y)/dt = dx/dt + dy/dt$ 等事实得出的。

其次我们要说明的是，当 a 为常数时

$$\underline{L}(ax) = a \underline{L}(x). \quad (25.4)$$

实际上，式 (25.3) 和 (25.4) 有着非常密切的关系，因为如果我们用 $(x+x)$ 代入式 (25.3)，这就与式 (25.4) 中令 $a=2$ 相同，依此类推。

对于更复杂的问题，在 L -中可能有更多的导数和更多的项，我们所关心的是式 (25.3) 和式 (25.4) 是否仍然成立。如果它们成立，我们就称这类问题为线性问题。在本章中我们将讨论线性系统所具有的一些性质，以了解我们在特殊方程的特殊分析中曾得出的某些结果所具有的普适性。

现在我们来研究线性微分方程的某些特性，这些特性我们曾在仔细研究特殊方程式 (25.1) 时说明过了。第一个有趣的性质是：假设我们需要解的是微分方程的某个瞬变态，即没有策动力的自由振动，也就是说我们需要解的是

$$\underline{L}(x) = 0. \quad (25.5)$$

假设我们用某种方法求出了一个特解，并称此解为 x_1 ，也就是说，对于 x_1 有 $\underline{L}(x_1) = 0$ 。现在，我们注意到 ax_1 也是同一方程的一个解；也就是说我们能用任意常数去乘这个特解；并得到一个新的解。换句话说，如果有某一个一定“大小”的运动，那么它的两倍“大”的运动也是一个解。证明： $\underline{L}(ax_1) = a\underline{L}(x_1) = a \cdot 0 = 0$ 。

其次，假设用某种方法不仅求出了一个解 x_1 ，还求出了另一个解 x_2 （回忆一下，当我们代入 $x = e^{i\omega t}$ 来求瞬变态时，我们求出了两个 α 的值，那就是 x_1 和 x_2 两个解），现在我们来证明组合 $(x_1 + x_2)$ 也是一个解。换句话说，若令 $x = x_1 + x_2$ ， x 也是方程的一个解。为什么？因为，如果 $\underline{L}(x_1) = 0$ 和 $\underline{L}(x_2) = 0$ ，则 $\underline{L}(x_1 + x_2) = \underline{L}(x_1) + \underline{L}(x_2) = 0 + 0 = 0$ 。因此，如果我们求出一个线性系统运动的几个解，我们可以把它们加在一起。

把这两个想法结合起来，显然我们可以把一个解的六倍加上另一个解的两倍，这也是解；因为如果 x_1 是一个解，则 ax_1 也是一个解。因此，这两个解的任何形式的和，如 $(\alpha x_1 + \beta x_2)$ 也是一个解。如果我们碰巧能够求出三个解，那么我们发现这三个解的任意组合也是一个解，如此等等。可以证明，对于振子问题，我们已经求得的称为独立解 [\[1\]](#)的数目只有两个。在一般情况下，人们求得的独立解的数目与所谓自由度有关。现在我们不准备详细讨论这个问题，但是，对于一个二阶微分方程，只有两个独立解，这两个解我们都已经找到，因此我们有了最一般的解。

现在我们继续讨论另一个命题，它适用于有外力作用于系统时的情况。假设方程是

$$\underline{L}(x) = F(t), \quad (25.6)$$

并假设我们已求出了它的一个特解。设乔的解是 x_J ，则 $\underline{L}(x_J) = F(t)$ 。现在我们要求出另一个解；设想把自由方程式（25.5）的一个解，比如说 x_1 加到乔的解上去，那么根据式（25.3），我们得到

$$\underline{L}(x_J + x_1) = \underline{L}(x_J) + \underline{L}(x_1) = F(t) + 0 = F(t). \quad (25.7)$$

因此，我们可以把任何“自由”解加到“受迫”解上去，这仍然是一个解。自由解称为瞬变态解。

如果起先在一个系统上没有力的作用，然后突然加上作用力，我们不能立即得到以正弦波表示的稳定解，而是在一段时间内存在着瞬变态，但只要等待的时间足够长，瞬变态迟早总会消失。“受迫”解是不会消失的，因为它始终受力的作用。最后，经过了一段较长的时间后，解变成唯一的，但是在不同情况下初始运动是不同的，它取决于系统开始时如何运动。

§25-2 解的叠加

现在我们来讨论另一个有趣的命题。假设我们有一个特定的策动力 F_a （比如说是一个具有一定的频率 $\omega = \omega_a$ 的振动，但我们的结论对 F_a 的任何函数形式都正确），并且我们已经解出这个受迫运动（具有或者没有瞬变态；这没有差别）。现在假定又有某一个其他的力作用着，比如说 F_b ，对 F_b 我们也解同样的问题，但只是对这一不同的力。再假定又来了一个人，他说：“我有一个新问题要你去解，我用的

力是 $F_a + F_b$ 。”我们能解吗？当然，我们能，因为这个解就是分别取这两个力时的解 x_a 和 x_b 之和。这的确是一个非常值得注意的情况。如果用式（25.3），我们看出

$$\underline{L}(x_a + x_b) = \underline{L}(x_a) + \underline{L}(x_b) = F_a(t) + F_b(t). \quad (25.8)$$

这就是所谓线性系统叠加原理的一个例子，它非常重要。其含义是：假如我们有一个复杂的力，它可以按任何方便的方式分解成几个分力之和，每个分力就某种意义而言都是简单的，也就是说，对于由复杂的力分解出的每一个特定的分力，我们都能解它的方程，这样得出的结果可用来解整个力的方程，因为我们可以把各个分力的解简单地再加回到一起，就像整个力是由各个分力合成的一样（图25-1）。

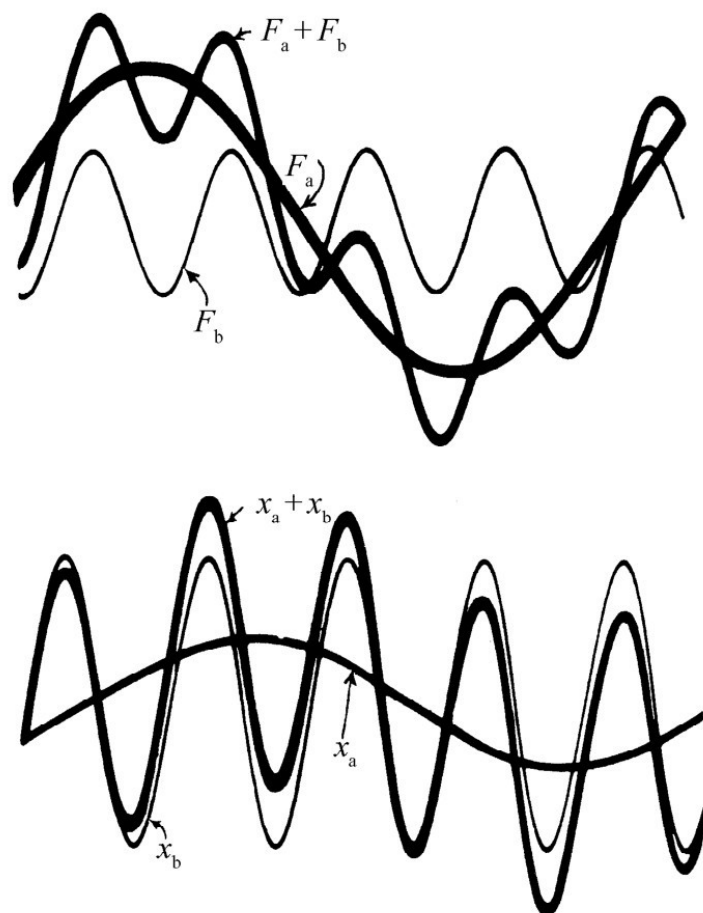


图25-1 线性系统叠加原理的一个例子

我们再来举一个叠加原理的例子。在第12章中，我们讲过一条重要的电学规律：如果给定一组电荷 q_a 的某种分布，并算出由这些电荷在某一给定位置 P 处产生的电场 $\mathbf{E}_a$ 。另一方面，假如还有一组电荷 q_b ，我们也算出了 q_b 在相应的位置所产生的电场 $\mathbf{E}_b$ ，那么，如果这两组电荷分布同时存在，在 P 点的电场 $\mathbf{E}$ 就是由第一组电荷产生的电场 $\mathbf{E}_a$ 与另一组电荷产生的电场 $\mathbf{E}_b$ 之和。换句话说，假如我们知道由一定的电荷所产生的场，那么由许多电荷产生的场只是各个电荷单独产生的场的矢量和。这与上述的命题完全相似：如果已知在某一时刻

两个给定的力作用的结果，那么，倘若把一个力看成是这两个力之和，则合力产生的响应就是这两个分力产生的响应之和（图25-2）。

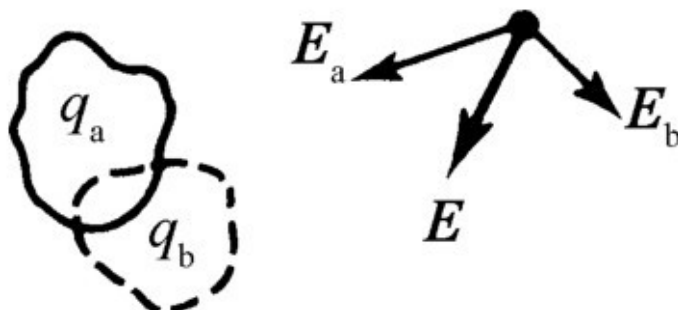


图25-2 静电学中的叠加原理

为什么这种情况在电学中也成立呢？原因在于确定电场的伟大的电学定律——麦克斯韦方程组事实上是线性微分方程，也就是说，它们具有式（25.3）的性质。与力相应的是产生电场的电荷，由电荷来确定电场的方程是线性的。

作为这个命题的另一个有意义的例子，我们可以问，当所有的电台同时广播时，怎么有可能“调谐”到一个特定的电台。无线电台实质上发送的是一个频率非常高的作用在我们的无线电天线上的振荡电场。为了传送声音的信号，电场的振幅是变化的和经过调制的，这是真的。但它变化得很慢，我们不会去关心它。当我们听到：“本台以780 kHz的频率广播”，这表明电台天线发射的电场频率为每秒振动780 000次，正是这个电场驱动我们天线里的电子以同样的频率上下运动。如果同时在同一个城市里还有另一个电台以不同频率，比如说以每秒550 kHz广播，那么天线里的电子也被这个频率驱动。现在的问题是，我们怎么能够把来自780 kHz的电台的信号与来自550 kHz电台的信号分开？当然我们不能同时收听两个电台。

按叠加原理，收音机电路（它的第一部分是线性电路）对电场引起的作用力 $F_a + F_b$ 的响应是 $x_a + x_b$ 。因此，看上去好像我们永远不能把它们分开。实际上，正是叠加原理使得我们的系统不可避免地要同时受到这两个信号的影响。但记住，对于共振电路来说，响应曲线，即每单位 F 的 x 值与频率的关系如图25-3所示。如果电路的 Q 值很高，响应将显示出一个非常尖锐的极大值。假设这两个电台强度可相比较，也就是说，这两个力的数量级相当，我们得到的响应是 x_a 和 x_b 的和。但是，在图25-3中， x_a 非常大，而 x_b 很小。因此，尽管两个信号强度相等，但当它们通过调谐到一个电台的发射频率 ω_a 的收音机的尖锐共振电路时，则这个电台的响应要比另一个电台强得多。因此，这两个信号所产生的整个响应几乎完全由 ω_a 构成，从而我们就选出了所需要的电台。

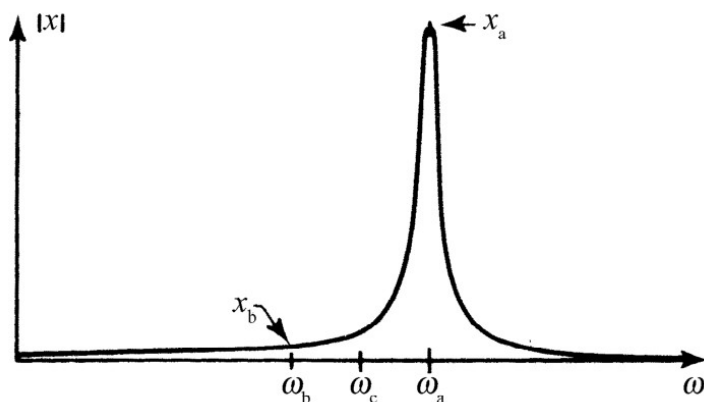


图 25-3 尖锐的谐曲线

什么是调谐？怎样进行调谐呢？我们通过改变电路的 L 或 C 来改变 ω_0 ，因为电路的频率与 L 和 C 的组合有关。特别是，大多数收音机做得使它的电容可以改变。我们调制收音机时，就是把刻度盘转到一个新的位置，而使电路的固有频率，比如说，移到 ω_c ，假如没有一

个电台的频率是 ω_c ，那么在这种情况下，我们既不能听到这个电台，也不能听到那个电台，也就是没有声音。如果我们继续改变电容，直到共振曲线处在 ω_b 的位置，那么我们当然就收到了另一个电台。这就是收音机的调谐过程，也是叠加原理和共振响应共同在起作用[2]。

在结束这一部分讨论的时候，我们来定性地描述一下，如果给定的力相当复杂，那么在深入分析这个力的线性问题时会遇到什么情况。在许多可能采用的方法中，对解这类问题有两个特别有用的一般方法。一个是：假设我们能对一些特殊的已知力，如不同频率的正弦波求解。我们已知求解正弦波的问题如同“儿戏”一般容易。因此我们称此为“儿戏”的情况。现在的问题是能否把十分复杂的力表示成两个或多个“儿戏”式的力之和。在图25-1中，已有一条相当复杂的曲线，当然，如果我们加入更多的正弦波，可以使它变得更加复杂。因此，肯定可以得到非常复杂的曲线。反之亦然：实际上每一条曲线都可由无数 波长（或频率）不同的正弦波相加得出，而它们中间每个正弦波的解我们都已知道。我们只要知道有多少个正弦波构成这个已知力 F ，则我们的答案 x 就是相应的 F 正弦波之和，其中每一个都要乘上 x 对 F 的有效比。这个解法叫作傅里叶变换，或傅里叶分析法。现在我们并不打算实际进行这种分析，只是想描述一下它所包含的想法。

下面是能解这类复杂问题的另一个非常有趣的方法。假设，经过冥思苦想以后，可以对一个特殊的名为冲击力 的问题求解。力很快加上去，又很快去掉，就此结束。实际上，我们只要解强度为某个单位的冲击力的问题，其他强度可以通过乘上一个适当因子而得出。我们知道对于冲击力的响应 x 是阻尼振动。那么我们又怎样来处理其他力，如像图25-4那样的力呢？

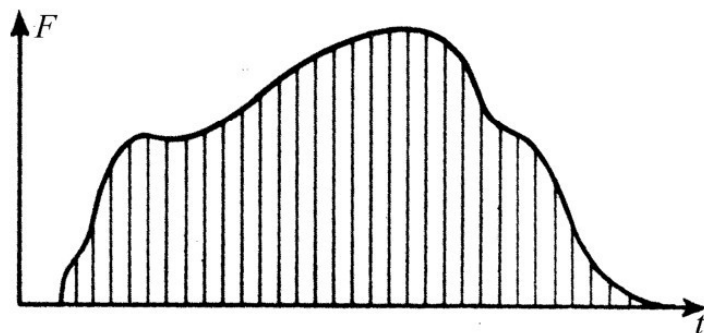


图25-4 一个复杂的力可以当作一连串强烈的冲力来处理

这种力可以比喻成一个铁锤的连续打击。开始时没有力，接着突然有一个稳定的力——冲力，冲力，冲力……然后停止。换句话说，我们可以把连续的力想象成是一连串紧靠在一起的冲力。现在，我们知道了一个冲力的结果，因而，整个一串冲力的结果将是整个一串阻尼振动：它将是第一个冲力的曲线，接着（稍晚一点）再加上第二个冲力的曲线，再加上第三个冲力的曲线，如此等等。因此，如果知道了一个冲力的答案，我们就能用数学表示出任意函数的完全的解。我们只要用积分，就能得出任何其他力的答案。这个方法称为格林函数法。一个格林函数就是对一个冲力的响应，通过把各个冲力的响应放在一起分析任何力的方法称为格林函数法。

这两个方法所包括的物理原理非常简单，仅涉及线性方程，因而很容易理解，但是它们所包含的数学问题，如复杂的积分等等，如果我们现在就学的话则显得太高深了一点。当你有了更多的数学实践之后，有朝一日你多半会再回到这个问题上来。但是，这个概念确实是非常简单的。

最后，对于线性系统为什么如此重要我们再来作一些说明。答案很简单：因为我们能够解它们！因此，在绝大部分时间里我们解的都是线性问题。其次（也是最重要的），实际情况表明物理基本定律常

常是线性的。例如，电学规律的麦克斯韦方程组就是线性的。就我们所知，量子力学的伟大定律也是线性方程。这就是我们要花如此多的时间来研究线性方程的理由。因为，如果我们了解线性方程，原则上，就可了解许多事物。

我们再举另一个也是线性方程的情况。当位移很小时，很多函数都近似地是线性的。例如，假如有一个单摆，它的运动正确方程是

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)\sin\theta. \quad (25.9)$$

这个方程可以用椭圆函数求解，但是解它最容易的办法是用如在第9章讨论牛顿运动定律时用过的数值解法。一般说来，一个非线性方程除去用数值方法外，没有别的方法可解。但当 θ 很小时， $\sin\theta$ 实际上等于 θ ，这样，我们就得到一个线性方程。事实表明存在着很多这样的情况，当效应很小时显示出线性的性质：摆通过很小一段弧度的振动就是一个例子。再举一个例子，如果我们稍微拉一下弹簧，弹簧的力就和伸长成正比。如果拉得很厉害，把弹簧拉断了，这时的力是距离的完全不同的函数！线性方程很重要。事实上，它是如此重要，以致在物理和工程中大概有百分之五十的时间要花在解线性方程上。

§25-3 线性系统中的振动

现在我们来回顾一下前几章所讨论的内容。有关振子的物理内容很容易被数学弄得难以理解。实际上它的物理内容是很简单的。如果暂时忘记数学，我们将会看到，我们能理解在振动系统中所发生的几乎每一件事。首先，如果只有弹簧和重物，那么很容易理解这个系统为什么会振动——这是惯性的结果。我们把物体拉下来，弹力又把它

向上拉回去，当它经过通常所处的位置——零点时，它不可能突然停下来，因为它具有动量，故要继续运动而向另一边摆动，从而不断来回振动。因此，如果没有摩擦力，无疑我们可以预见到这个振动，事实上也确是这样。但是，如果有摩擦力存在，即便是一点点，那么在往回摆动的一周里，摆动就没有第一次那样高了。

像这样一周一周地下去，会出现什么情况呢？这与摩擦力的种类和大小有关。假设我们能够找出一种摩擦力，当振幅变化时，它总是和其他力——惯性和弹簧中的力——保持相同的比例。换句话说，对于较小的振动，这个摩擦力比作大振动时弱。通常的摩擦力并没有这种性质，因此，为了得到一种与速度成正比的理想的摩擦力，必须细心地找出一种特殊的摩擦——对于大振动，摩擦力强，对于小振动，摩擦力弱。如果我们恰好找到这种摩擦力，那么，除了一点点小的差别外，在每个相继循环的最后，系统所处的条件和开始时一样。所有的力都按同样的比例变小：弹力减小，惯性作用变低，因为加速度变弱，而由于我们精心的设计，摩擦力也变小了。当我们确实找到这种摩擦力后，我们将发现，每次振动，除了振幅减小外，和第一次振动完全一样。如果第一周振幅下降为开始时的90%，第二次振幅下降为开始时90%的90%，如此等等：在每周中振动的大小都减小了它本身的同样的百分比。指数函数就是一个具有这样性质的曲线。在每一相同的时间间隔内，它改变同一个因子。也就是说，若相对于前一周，这一周的振幅为 a ，则下一周的振幅是 a^2 ，再下一周是 a^3 。因此，振幅是某个常数的指数幂，其幂指数等于振动的周数

$$A = A_0 a^n. \quad (25.10)$$

当然 n 正比于 t ，因此，非常清楚，通解将是某种振动—— $\sin\omega t$ 或 $\cos\omega t$ ——乘上一个大致按 b^t 而变化的振幅。但是，如果 b 是正值且小于1时，则 b 可写成 e^{-c} 。因此，这就是为什么解看上去像 $e^{-ct}\cos\omega t$ 的原因。这是很简单的。

如果摩擦不是像这样人为的，而是例如通常在桌子上的摩擦，则摩擦力是一个确定的常数，它与在每个半周内方向相反的振动的大小无关，这时会发生什么情况？此时，方程不再是线性的了，它变得很难求解，必须用第9章讲的数值方法，或者分别考虑每个半周才能求解。数值法是所有方法中最有效的方法，它能解任何方程。只有当遇到简单问题时，我们才能用数学分析法求解。

数学分析法并不如所说的那么富有成效，它只能解一些最简单的方程。只要方程稍微复杂一点，真正是一点点，就不能用分析方法求解。但是在本课程开始所介绍的数值方法，却能够应用于任何物理上感兴趣的方程。

其次，对共振曲线又如何呢？为什么有共振？我们先设想不存在摩擦时，一个物体本身振动的情况。假如单摆在摆动时，我们每次都在恰当的时候轻轻地推它一下，当然可以使它发生激烈运动。但是，如果我们闭上眼睛，不去看它，而在任意相等的时间间隔内轻轻地推它，将会发生什么情况？有时我们会发现，我们推得不是时候。当我们推得对头，并且每次推得都很适合时，那么，它就摆动得越来越高。因此，在没有摩擦力时，我们得出的曲线，其形状就像图25-5中对不同频率画出的实线。我们可以定性地理解共振曲线，但要求出曲线的准确的形状，大概就只好求助于数学了。当 $\omega = \omega_0$ 时，曲线趋于无穷大，这里 ω_0 是振子的固有频率。

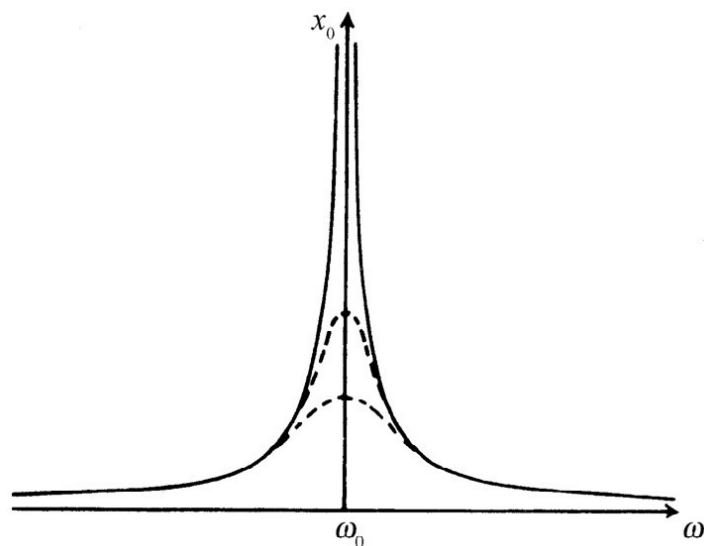


图 25-5 对应不同摩擦力的共振曲线

现在假设只有很小的摩擦，当振子的位移很小时，摩擦力对振子没有多大影响，除了在接近共振处外，其共振曲线是一样的。在接近共振时，振幅不是无限大，曲线只是上升到这么高，使得每次轻轻地推它所做的功足够补偿一周内摩擦力消耗的能量。因此，曲线的顶部是圆的——不会变得无穷大。摩擦力越大，曲线的顶部变得越圆。现在，有人可能会说：“我想曲线的宽度应与摩擦力有关。”这是因为通常画曲线时，总是画得使曲线的顶部作为一个单位。但是，如果把所有曲线都按同一尺度画出，则数学表达式就变得更易于理解；这时可以看出摩擦力使曲线顶部变低。当摩擦力较小时，在摩擦使运动停止之前，曲线已经达到比较尖细的部分，因此看上去比较窄。这就是说，曲线的峰值越高，在最大高度一半处的宽度也就越窄。

最后，我们考虑摩擦力很大的情况。事实表明，如果摩擦力过大，系统根本就振动不起来。弹簧的能量仅能使系统作克服摩擦力的运动，因此，系统慢慢地在平衡位置停下来。

§25-4 物理学中的类比

我们要说明的下一个问题是物体和弹簧不是唯一的线性系统，还有其他系统。特别是，还有称作线性电路的电学系统，我们发现它和力学系统完全类似。我们还没有严格研究过电路中每个元件为什么会按照各自具有的方式起作用——现在没有必要去了解这些；我们只把它们的行为作为实验证明的事实而接受下来。

我们举一个最简单的情况作为例子。取一段金属线，它相当于一个电阻，我们在上面加一个电位差 V 。电位差 V 的含义是：如果把电荷 q 从导线的一端移动到另一端，所做的功就是 qV 。电位差越高，电荷从高电位的一端“跌落”到低电位的一端所做的功就越多。因此，电荷从一端运动到另一端时要释放能量。但是电荷不是简单地从一端直接飞到另一端，导线中的原子对电流有阻碍作用，对于几乎所有通常的物质来说，这种阻力遵循如下的规律：如果有电流 I ，这就是说，每秒钟有这么多的电荷跌落下去，则每秒钟通过导线跌落下去的数目与我们给它们的推力多大成正比例——换句话说，与电压的大小成正比

$$V = IR = R \frac{dq}{dt}. \quad (25.11)$$

系数 R 称为电阻，这个方程就叫欧姆定律。电阻的单位是欧姆，它等于每安培一伏。在力学中，要得出与速度成比例的这种摩擦力是很困难的，但在电学系统中却很容易，对于绝大多数金属来说，这个定律是极其精确的。

我们通常感兴趣的是，当电荷在导线里跌落下去时，每秒钟所做的功，功率耗损或电荷释放的能量有多少。当我们通过电压 V 移动电荷 q 时，所做的功就是 qV ，因而每秒所做的功是 $V \left(\frac{dq}{dt} \right)$ ，也就是 VI 或 $IR \cdot I = I^2 R$ 。这叫热损失，根据能量守恒定律，这就是每秒钟在电阻上产生的热量。正是这种热量使普通的白炽灯泡发光。

当然，力学系统还有其他的重要性质，如质量（惯性），可以证明，惯性也有一个电学类比。我们可以制造某种称为电感器的东西，它有一种性质叫电感，以致当电流一旦开始通过电感时，就不想停下来。要改变电流就要有电压！如果电流不变，在电感上就没有电压。在直流电路上没有电感的概念，只有当电流改变时，电感的作用才显示出来，其方程为

$$V = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2 q}{dt^2}, \quad (25.12)$$

电感的单位叫亨利，它的意思是，在1H的电感上加1V的电压将使电流产生 $1\text{A} \cdot \text{s}^{-1}$ 的变化。如果你乐意的话，可以作如下的类比： V 相应于 F ， L 相应于 m ， I 相应于速度，这样方程式（25.12）就像是电学中的牛顿定律！由这两种系统得出的所有方程都具有相同的推导，因为在所有的方程中，我们可以把任何一个字母换成与它相应的字母，而得到同样的方程，我们推得的每一件事情在这两个系统中都具有对应性。

那么，电学中有什么东西与力学的弹簧（在弹簧中力与其伸长成比例）相对应呢？如果从 $F=kx$ 开始，并作如下代换： $F \rightarrow V$ 和 $x \rightarrow q$ ，就得到 $V=\alpha q$ ，事实证明确有此事，实际上，它是三个电路元件中我们能够真正理解的唯一的一个，因为我们曾研究过一对平行板，并

发现如果在每块板上有一大小相等、符号相反的电荷时，它们之间的电场必与电荷的大小成正比。因此，使单位电荷穿过空隙从一块板移到另一块板上所做的功正好与板上电荷成正比。这个功就是电位差的定义，它是电场从一块板到另一块板的线积分。由于历史上的原因，结果比例常数不称作 C ，而是 $1/C$ 。当然也可以把它叫作 C ，但是没有这样做。因此有

$$V = \frac{q}{C}. \quad (25.13)$$

电容 C 的单位是法拉，在一法拉的电容器的每块板上有一库仑电荷时，就产生一伏特的电位差。

这就是我们的类比，如果直接作 $L \rightarrow m$ ， $q \rightarrow x$ 等代换，就得到如下的相应于振荡电路的方程

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right) + kx = F, \quad (25.14)$$

$$L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = V. \quad (25.15)$$

因此，我们从式（25.14）学到的一切东西都能转而用于式（25.15），每个结果都相同，而且是如此地相同，以致我们能作出一项很出色的工作。

假设有一个相当复杂的力学系统，它并不仅仅是一个具有质量的物体悬挂在一根弹簧上，而是几个具有质量的物体悬挂在几根弹簧上，并且全都钩在一起。我们能做些什么呢？求解它？也许能，但是等一下，我们可以设计一个电路，使它具有与我们将要分析的事情相同的方程！比方说，如果我们要分析悬挂在一根弹簧上的物体，为什

么我们不能建立一个电路，在这个电路中，使电感正比于质量，电阻正比于相应的 $m\gamma$ ， $1/C$ 正比于 k ，而且都具有同样的比例呢？当然，这个电路将与我们的力学系统完全类似，这就是说，无论 q 随 V （ V 与作用力相对应）如何变化， x 就随力这样变化！因此，如果有一个由大量彼此互相联结的部件组成的复杂力学系统，我们就可以把很多电阻，电感和电容彼此互相联结在一起以仿造这个力学上很复杂的系统。这样做有什么好处？这两个问题的难易程度是完全相同的，因为它们完全等价。其优点并不在于找出一个电路之后，解数学方程会变得稍为容易一些（尽管这是电气工程师采用的方法），而是考虑这种类比的真正原因在于电路容易建立，而且也容易改变这个系统中的某些东西。

假如我们设计了一辆汽车，并想知道，当它走过某种崎岖不平的道路时，它要摇动多少次。可以建立一个电路，用电感代表轮子的惯性，电容代表轮子的弹性系数，电阻代表减震器，对汽车的其他部件也同样处理。现在需要一条崎岖不平的道路。好！我们从发电机那里引出一个电压来代表某种路的崎岖不平，然后用测量某个电容器上的电荷来观察左轮的跳动。测量后（这是容易做到的）我们发现颠簸得太厉害了。是否需要增加或减少减振器？对于像汽车这类复杂的东西，我们是否真正要改变减振器，再重新做一遍呢？不！我们只需要转动标度盘，标度盘读数10对应于减震器数3，这样我们就增加了减震器。颠簸得更厉害了——没关系，那就减少一点试试看。颠簸还是厉害，我们改变弹簧的硬度（标度盘读数17），所有这一切都按电学方法来调节，只要转动转盘。

这就叫模拟计算机。这是一种通过构成另一个问题来模仿我们需要解的问题的装置，这另一个问题与我们要解的问题具有相同的方程

式，但是，它是在自然界的另一种情况下得到的。它易于建立，易于测量，易于调节，也易于破坏。

§25-5 串联和并联阻抗

最后，还有一个并不完全属于复习性质的重要项目。这与具有一个以上的电路元件的电路有关。例如，当我们把一个电感器，电阻器和电容器像图24-2那样联接起来后，我们看到所有电荷都经过这三个元件中的每一个，因此在这个单独相联接的电路里导线各处的电流都相同。既然在每个元件的电流都一样，那么加在电阻 R 上的电压是 IR ， L 上的电压是 $L (dI/dt)$ ，等等。因此，总的电压降是各部分之和，这就得出了式(25.15)。应用复数，我们能够解由正弦力引起的稳定态的运动方程。并且发现， $\hat{V} = \hat{Z} \hat{I}$ ， $\hat{Z}$ 称为这个特定电路的阻抗。它告诉我们，如果加上一个正弦电压 $\hat{V}$ ，就得到一个电流 $\hat{I}$ 。

现在假设有一个由两部分组成的更复杂的电路，它们各有一定的阻抗 $\hat{Z}_1$ 和 $\hat{Z}_2$ ，我们把它们串联起来[图25-6(a)]，并加上一个电压。此时，会发生什么情况呢？现在的问题要稍微复杂一些了，但是，如果 $\hat{I}$ 是流过 $\hat{Z}_1$ 的电流，那么加在 $\hat{Z}_1$ 上的电压是 $\hat{V}_1 = \hat{I} \hat{Z}_1$ ；同样，加在 $\hat{Z}_2$ 上的电压是 $\hat{V}_2 = \hat{I} \hat{Z}_2$ 。流过两者的电流相同。因此，总电压是加在这两部分的电压之和，即 $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 = (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) \hat{I}$ 。这意味着加在整个电路上的电压可以写成 $\hat{V} = \hat{I} \hat{Z}_s$ ，这里串联电路的复合系统的 $\hat{Z}_s$ 是各部分 $\hat{Z}$ 的和

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \quad (25.16)$$

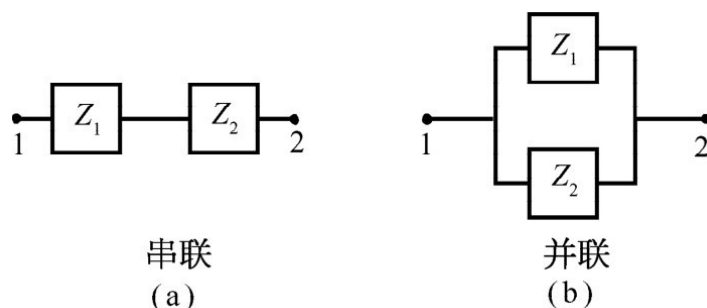


图25-6 两个阻抗的串联和并联

这并不是唯一的联接方法，我们还可以用另一种称为并联的方法来联结〔图25-6（b）〕。我们看到，如果联接导线是理想导体，则加在其两端的给定电压就有效地作用于两个阻抗上，并在每个阻抗上独立地产生电流。因此，流过 Z_1 的电流等于 $\hat{I}_1 = \hat{V} / \hat{Z}_1$ 。在 $\hat{Z}_2$ 上的电流是 $\hat{I}_2 = \hat{V} / \hat{Z}_2$ 。这时电压相同。对两端提供的总电流是这两部分电流之和： $\hat{I} = \hat{V} / \hat{Z}_1 + \hat{V} / \hat{Z}_2$ 。这可写成

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}}{\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}} = \hat{I} \hat{Z}_p.$$

因此

$$\frac{1}{\hat{Z}_p} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}. \quad (25.17)$$

通过把电路分成一些小段，计算出每一小段的阻抗，再用上述法则把各个部分的电路一步一步联接起来，有时可使较复杂的电路简化。如果有某种电路，包含有很多用各种方式联接起来的阻抗，并用无阻抗的小发电机引入电压（当有电荷通过它时，发电机加上一个 V

）时，那么可以用如下的原则：（1）在任何一个结点，流入结点的电流之和为零。也就是说，所有流进来的电流必须再流出去。（2）如果使电荷沿着一个回路运动，再回到开始时的位置，所做的净功等于零。这些法则称为电路的基尔霍夫定律。对复杂的电路系统地应用这些定律常常可以简化对这种电路的分析。在这里，我们把这些定律与式（25.16）和式（25.17）并提，是因为你们在实验室工作中可能已经遇到过需要分析这种电路。以后我们还要更详细地讨论这些法则。

[1] 不能用彼此之间的线性组合来表示的解称为独立解。

[2] 在现代超外差式收音机中，实际操作要更复杂一些。所有放大器都调谐到一个固定频率〔叫作中周（IF）频率〕，一个可变调谐频率的振子与一个输入信号在非线性电路中组合产生一个新的频率（信号和振子频率之差），它等于中周频率，然后再加以放大。这将在第50章中讨论。

第26章 光学：最短时间原理

§26-1 光

这是关于电磁辐射主题诸章中的第一章。我们看到的光，在同为辐射的宽广谱系中只占一小部分，这个谱系的各个部分是以某一个变量的不同数值来区分的。这个变量可以叫做“波长”。当它在可见光谱中变化时，光明显地从红色变到紫色。如果我们要系统地从长波长到短波长来考察这个谱系，那么就要从通常所谓的无线电波开始。工程技术上所能得到的无线电波，其波长很宽，有的甚至比通常广播上所用的波长还长；通常广播用的波长大约为500 m。接着是所谓“短波”，即雷达波、毫米波等等。在一个波长范围与另一个波长范围之间并没有实际的界线，因为大自然没有为我们提供明确的边界。与某一波段名称相联系的波长数值只是近似的，因而我们给不同波段所取的名字当然也是近似的。

在通过相当长一段毫米波之后，我们就来到了所谓的红外区，接着进入到可见光谱区。朝波长更短的方向走去，就进入所谓的紫外区。紫外区终止处，就开始出现X光区。但我们不能精确地确定这个分界处在哪儿；它大致在 10^{-8} m即 10^{-2} μ m处。这些是“软”X射线；随着所谓波长这一值的越来越小，接着是一般X射线和硬X射线；再就是 γ 射线等等。

在这个宽广的波长范围内，有三个或更多个大致范围特别令人感兴趣。其中的一个区域满足这样的条件，即所涉及的波长比用来研究它们的仪器的尺度要小得多；而且，用量子论来说，其光子的能量比仪器的能量灵敏度要小，在这些条件下，我们可以用一种叫做几何光学的方法来作粗略的一级近似。另一区域是，如果波长与仪器的尺度可以相比拟（这对可见光虽然难以实现，但对无线电波却比较容易做到），而光子的能量仍小得可以忽略不计，那么只要研究波的行为，就可以得到一种很有用的近似，仍然不必去考虑量子力学。这一方法是建立在电磁辐射经典理论的基础之上的。这一理论将在较后的一章中讨论。下一个，如果我们考察很短的波长，这里波的特性可以忽略，但光子却具有比仪器的灵敏度大得多的能量，那么事情又变得很简单了。这时就得用简单的光子图像，对此我们只能十分粗糙地加以描述。把整个事物统一于一个模型的完整图像，在相当长一段时间内我们将用不到。

在本章中我们的讨论将限于几何光学范围，在这里我们不去顾及光的波长和粒子特征，而这些都将在适当的时候再作解释。我们甚至不必操心去问光是什么，而只是要找出在与有关的尺度相比很大的范围内光的行为如何。所有这些都必须事先加以说明，以便强调这一事实，即我们打算讲述的内容仅仅是一种十分粗糙的近似；这是我们以后必须重新“忘掉”的几章之一。而且我们将会很快忘掉它，因为我们几乎马上就要讲到一个更精确的方法。

虽然几何光学只是一种近似的方法，但它在技术上非常重要，历史上也令人极感兴趣。为了使读者对物理理论或物理概念的发展获得一些知识，我们将把这个课题比别的一些课题更多地从历史上来加以叙述。

首先，光无疑是每个人所熟悉的，而且从无法回忆的时间起就早已熟悉了。现在的问题是，我们凭什么作用看见光？关于这个问题曾经提出过许多理论，但最后可归结到一个，即认为有某种东西进入眼睛——它是从物体上弹出而进入眼睛的。这种想法我们已听了这么久，以致习以为常，因而几乎不可能相信会有某一个十分聪明的人会提出相反的理论——比方说有什么东西由眼睛里射出而感触到了物体。另外一些观察到的重要事实是，当光从一处射到另一处时，如果途中没有障碍物，它就沿直线行进，并且光线之间似乎不会发生相互干扰。这就是说，虽然光在房间里在各个方向上相互交叉地射来射去，但横穿过我们视线的光并不影响从某一物体向我们射来的光。这曾经是惠更斯一度用来反对微粒说的一个最有力的证据。你想，如果光像许许多多飞逝着的箭，那么其他的箭怎么能如此容易地穿过它们？但这样的哲学论据并不具有很大的说服力。人们总是可以说光就是由可以相互贯穿的飞箭组成的！

§26-2 反射与折射

下面的讨论为几何光学提供了足够的基本概念，现在我们要稍微深入到定量一些的内容方向。到目前为止，我们只说明了光在两点之间沿直线行进；现在来研究一下光射向各种物质时的行为。最简单的物体是一面镜子，关于镜子的规律是，当光射到镜子时，就不再继续沿原来的直线行进，而从镜子跳到一条新的直线中，这条直线将随镜子倾角的改变而改变。对于前人来说，他们所面临的问题就是其中两个角之间有什么关系？这是一种很简单的关系，并且很早就已发现了。射向镜子的光的行迹是这样的：两束光的每一束与镜面形成一个

夹角，这两个夹角相等（图26-1）。由于某种原因，通常是从镜面的法线来量度这些角的。因此，所谓的反射定律就是

$$\theta_i = \theta_r. \quad (26.1)$$

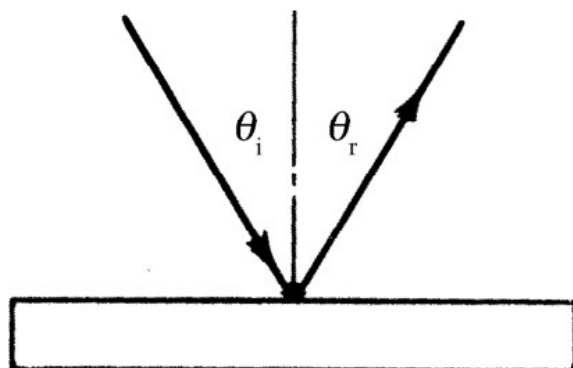


图26-1 入射角等于反射角

这是一个十分简单的命题，但是当光从一种介质进入另一种介质，例如从空气进入水中时，就碰到了较为困难的问题；这里与前面一样，我们也看到光不再沿原直线行进（图26-2）。光在水中的路线偏离了它在空气中的路线；如果我们改变 θ_i 角使之更接近于垂直入射，那么“偏折”角就不大。但是如果使光束的倾角变得很大，那么所偏离的角度就很大。现在的问题是，一个角与另一个角的关系如何？这个问题使前人迷惑了很长一段时间，而且对此他们从未找到过答案！然而，这正是人们在全部希腊物理学中可以发现的用表列出实验结果的少数场合之一。托勒玫把空气中若干个不同的角同与之一一对应的水中的角列成表。表26-1列出了以度为单位的空气中的角和在水中量得的相应的角。（一般认为希腊科学家从来不做任何实验。但是，如果不知道正确规律，则除了用实验外，要得到这张表是不可能的。然而必须指出，这些值并不表示对每个角度所作的独立和谨慎的

测量，而只是从少数几个测量中用内插法得到的一些数值而已，因为它们与一条抛物线完全相符合。)

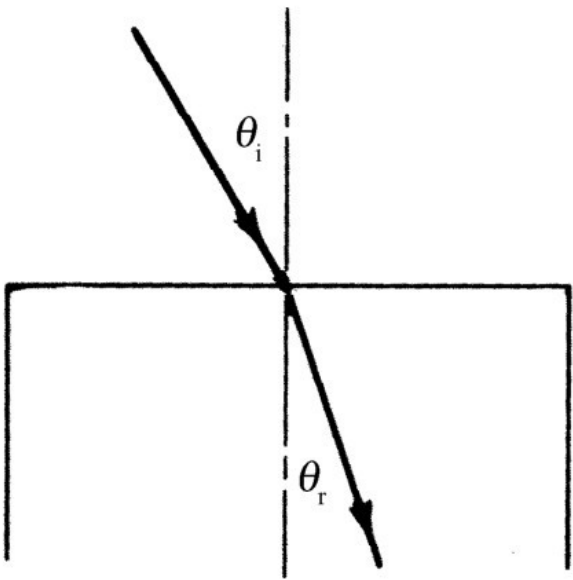


图26-2 当光从一种介质进入另一种介质时发生折射

表 26-1

空气中的角	水中的角	空气中的角	水中的角
10°	8°	50°	35°
20°	15.5°	60°	40.5°
30°	22.5°	70°	45.5°
40°	29°	80°	50°

我们首先观察一个效应，接着进行测量并把它列成表；然后试图找出可以把一事物与另一事物联系起来的规律；这是物理定律在发展过程中的重要步骤之一。上面的数值表是公元140年作的，但是直到1621年才有人终于找到了这个联系两个角的规律！这个由荷兰数学家斯涅耳所发现的规律可叙述如下：如果 θ_i 表示空气中的角， θ_r 表示水中的角，则 θ_i 的正弦等于某一常数乘上 θ_r 的正弦

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_r \quad (26.2)$$

对于水，常数 n 约为1.33。等式（26.2）称为斯涅耳定律；它使我们能预言 光从空气进入水中时将如何弯折。表26-2列出了根据斯涅耳定律得到的空气中的角和水中的角。注意它与托勒玫那张表非常一致。

表 26-2

空气中的角	水中的角	空气中的角	水中的角
10°	7.5°	50°	35°
20°	15°	60°	40.5°
30°	22°	70°	45°
40°	29°	80°	48°

§26-3 费马最短时间原理

随着科学的进一步发展，我们所要知道的是比仅仅一个公式更多的东西。首先我们作了观察，接着有了通过测量得到的数值，然后有了概括所有这些数值的定律。但是科学的真正光荣 在于我们能够找到一种思想方法，使得定律成为明显 的。

使得有关光的行为的那个定律成为明显事实的第一个思想方法是费马于1650年左右发现的，它称为最短时间原理 或费马原理。他的想法是这样的：在从一点行进到另一点的所有可能的路径中，光走的是需时最短的路径。

首先我们来证明这对镜子的情况是正确的，这个简单原理既包含了直线传播定律又包括了镜面反射定律。这样，我们的理解就加深了！我们来试着求下列问题的解。在图26-3中画了 A 、 B 两点和一平面镜 MM' 。哪一条是在最短时间内从 A 走到 B 的路径呢？回答是从 A 笔

直走到 B 的那条！但是如果我们附加一条规定，即光必须在最短时间内碰到镜面再返回到 B ，那么回答就不会这么容易了。一个方法是沿着 ADB 路径尽快到达镜子然后再走到 B 。当然，这时要走一条很长的路程 DB 。如果让 D 略向右偏移到 E ，虽然稍稍增加了第一段距离，但却大大减少了第二段距离，这样就使总的路程减少，从而使传播的时间也相应地减少。那么怎样来找到需要时间最短的 C 点呢？回答是：可以很巧妙地用几何技巧来找到它。

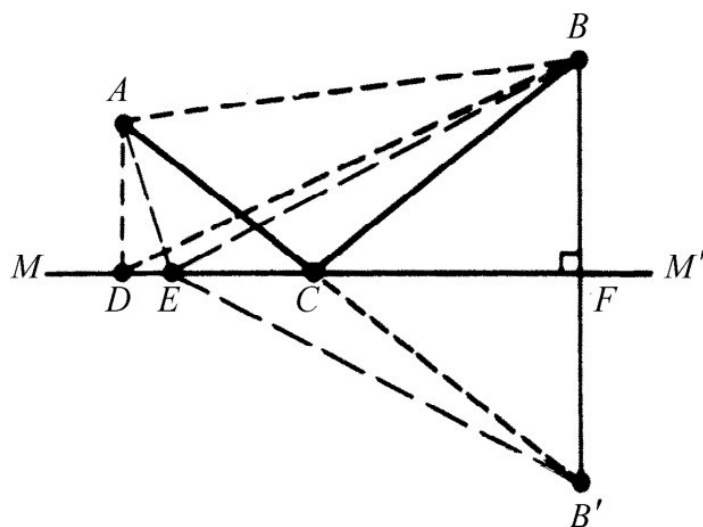


图26-3 最短时间原理的说明

在 MM' 的另一边作一个人为的点 B' ，使它在镜面 MM' 以下的距离跟 B 点在镜面以上的距离相同。然后作 EB' 线。由于 BFM 是直角，且 $BF=FB'$ ，所以 EB 等于 EB' 。于是两段距离之和 $AE+EB$ （光以不变速度传播时，它与光的传播时间成正比）即为两段长度 AE 与 EB' 之和。因此，问题就变为何时这两段长度之和最短？回答很简单：当线段经过 C 点使从 A 到 B' 成为一直线！换句话说，我们必须找出这个点，通过它能直达人为的点，那么这个点就是所要求的正确的点。现在 ACB' 既为一条直线，则角 BCF 等于角 $B'CF$ ，因而也等于角 ACM 。因此，入射角等于反射角的这种说法与光射向镜面沿着需时最短的路径返回

到 B 的说法是等效的。这一命题最初由亚历山大的希罗（Hero）所述：光走到镜面然后射向另一点时所取的是尽可能短的一段距离，因而这并不是一个新的理论。但正是这一点启发了费马，使他联想到光的折射也许是在同一基础上进行的。但在折射中，光显然不取最短距离的路径，所以费马试用了光取最短时间的思想。

在我们对折射进行分析之前，应就镜子再说几句话。如果在 B 点有一光源，它朝镜子发光，那么我们将看到自 B 点射到 A 点的光恰好像没有镜子时在 B' 点有一物体把光射到 A 点一样。眼睛当然只觉察到实际射进它的光，所以如果在 B 点有一物体，并有一面镜子，它使光进入眼睛完全好像物体是在 B' 处而把光射入眼睛一样，那么在视觉-大脑系统不太知道其他情况的假定下，它就会将此解释为有一物体在 B' 处。所以，认为有物体位于镜子后面的这种错觉，仅仅是由于这样的事实，即进入眼睛的光实际上完全好像来自镜子后面的一个物体一样（除了镜面上有灰尘，以及我们知道镜子的存在等等这些可在大脑中被校正的因素外）。

现在我们来证明最短时间原理将导出斯涅耳折射定律。但必须就光在水中的速率作一个假定。我们假定光在水中的速率比在空气中小一个因子 n 。

在图26-4中，我们的问题仍然是在最短时间内从 A 走到 B 。为了说明最好的办法并不是沿着直线走这一事实，设想有一个漂亮的少女从船上掉了下去，她正在水中的 B 点向人们呼救。以 X 标出的线表示河岸。我们是在陆地上的 A 点看到了这件事；我们既能跑步又能游泳，但跑得比游得更快。那么我们怎么办？笔直过去吗（是的，毫无疑问）？但只要稍加思索，就会领悟到在陆地上稍微多跑一些路以减少在水中的路程是有利的，因为我们在水中的速度要慢得多（按此推

理，我们将会说正确的做法是要十分仔细地算出应该怎么办）。不论如何，我们来证明问题的最终解答是路径 ACB ，并证明这是所有可能的路径中需时最短的一条。如果它是这样，那就意味着若取任何别的路径，需时就要较长。所以，如果我们以所需的时间对 X 点的位置作图，那么将会得到一条如图26-5所示的曲线，其中对应于 C 点的时间是所有可能的时间中最短的。这就是说如果我们将 X 点移到邻近 C 的各点，在一级近似下时间基本不变，因为曲线底部的斜率为零。所以，我们寻找这条规律的方法，就是设想把位置作很小的移动而要求时间基本不变（当然有一个二级无穷小的改变；对于从 C 点向两旁任何一个方向的移动来说，都应有一正的增量）。因此我们考察邻近的一点 X ，并算出从 A 到 B 沿这两条路径所需的时间各有多长，再将新路径的时间与旧路径的时间相比较。这很容易做到。当距离 XC 很短时，我们当然要求这个时间之差接近于零。先看岸上的路程。如果作垂线 XE ，就可看出这段路程比 AC 短了一段 EC 。我们说因为没有走这一段额外的距离而得到好处。另一方面，在水中，在作了相应的垂线 CF 后，发现必须多走一段额外的距离 XF ，而使我们有所损失。或者说，在时间上，我们赢得了走过距离 EC 所需的时间，但失掉了走过距离 XF 所需的时间。这两段时间必须相等，因为在一级近似下，总的时间应该不变。假定在水中的速率是空气中速率的 $1/n$ ，则必须有

$$EC = n \cdot XF. \quad (26.3)$$

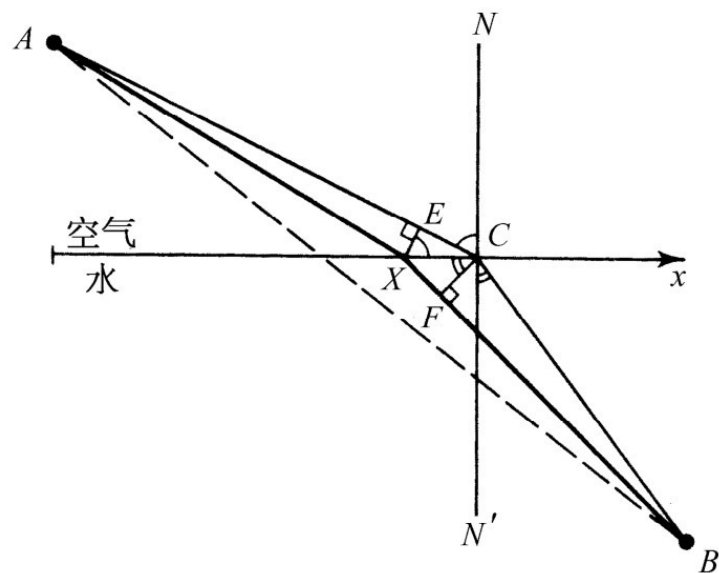


图26-4 费马原理对折射的说明

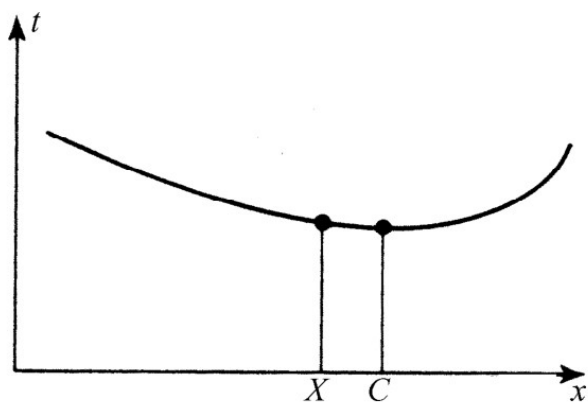


图26-5 C 点相应于最短时间，但其附近各点相应于几乎与之相同的时间

可见，当我们选择了正确的点时，就有 $XC \sin \angle EXC = nXC \sin \angle XCF$ ，消去公共斜边 XC ，并注意到

$$\angle EXC = \angle ECN = \theta_i \text{ 及 } \angle XCF \approx \angle BCN' = \theta_r \text{ (当 } X \text{ 位于 } C \text{ 附近时),}$$

就有

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_r. \quad (26.4)$$

所以，当速率之比为 n 时，为了在最短时间内从一点到达另一点，光应以这样的角入射，使得角 θ_i 和 θ_r 的正弦之比等于光在两种介质中的速率之比。

§26-4 费马原理的应用

现在我们来讨论最短时间原理的一些有趣的结果。首先是倒易原理。如果从 A 到 B 我们找到了需时最短的路径，那么沿相反方向走的（假定光沿任一方向行进的速率相等）需时最短的路径将是这同一条路径。因此，如果光可以沿一条路径行进，也就可以倒转过来行进。

另一个有趣的例子是一块具有平行平面的玻璃板，它与光束成一角度。当光从 A 点经过玻璃板走到 B 点时（图26-6），并不沿一直线通过，而代之以在玻璃板中使倾角较小的路径，以减少它在玻璃板中所花的时间，虽然这样使它在空气中所花的时间略有增加。光束只是本身平移了一下，因为入射角与出射角是相等的。

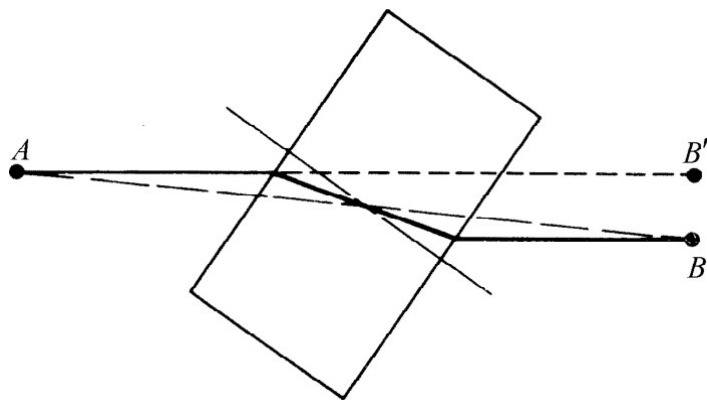


图26-6 当一束光通过一块透明板时，它被偏移了

第三个有趣的现象是这样一个事实：当我们看见落日时，它其实已在地平线以下了！它看起来似乎并不在地平线以下，但实际上确是如此（图26-7）。地球的大气高处稀薄而底部稠密。光在真空中传播得比空气中快，因而，如果太阳光不沿地平线行进，而从地平线以上以较陡的倾斜度通过稠密区，以尽量减少光在其中行进得慢的这一区域中的路程的话，它就能较快地到达 S 点。当太阳看来要落到地平线以下时，其实它已落到地平线以下好些时候了。这个现象的另一个例子是当人们在炎热的道路上驾车时，常常会见到的海市蜃楼现象。人们在路上见到“水”，但当他到达那里时，却干燥得像沙漠一样！这一现象可说明如下。其实我们真正见到的乃是从路上“反射”上来的天上的光，如图26-8所示。来自天空投射到道路上的光，能朝上到达眼睛。为什么呢？紧靠地面之上的空气很热，但越往高处则越冷。热空气比冷空气膨胀得多一些，因而更稀薄一些，这就使光的速率减小得少一些。也就是说，光在热的区域跑得比冷的区域快。这样一来，为了节省时间，光就选定不沿直线直接过来，而取了费时最短的路径，因而暂时走进它跑得快一些的区域。所以，光能沿着曲线行进。作为最短时间原理的另一个重要例子，假定我们设想一种装置，使所有发自一点 P 的光重新汇集到另一点 P' （如图26-9）。这当然意味着光能够沿一直线从 P 到达 P' 点。这完全对。但是，我们如何设法使光不仅能沿直线行进到达 P' 点，而且也能使从 P 点朝 Q 点发出的光终止于 P' 点呢？我们要把所有的光引回到所谓的“焦点”。怎么引呢？如果光老是走需时最短的路径，那么它当然不会沿所有其他的路径走。唯一使光能很好地做到也能沿着邻近的一些路径行进的方法，是使这些路径所需的时间恰好相等！否则，光就会选择需时最短的一条路径走。所以造成一个聚焦系统的问题，仅仅在于设计一个器件，使得光沿着所有不同路径走时所花的时间相等。

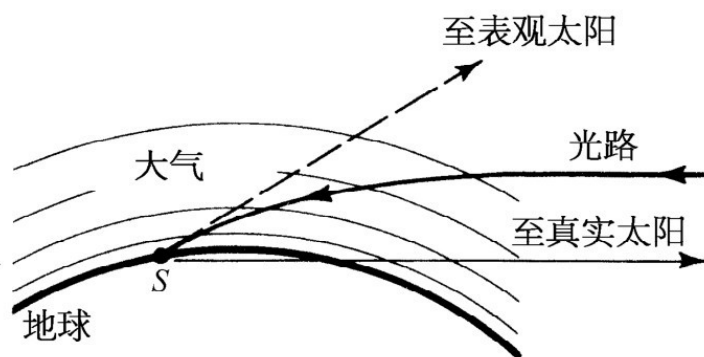


图26-7 地平线附近，表观太阳比真实太阳高出约 $1/2$ 度



图26-8 海市蜃楼现象

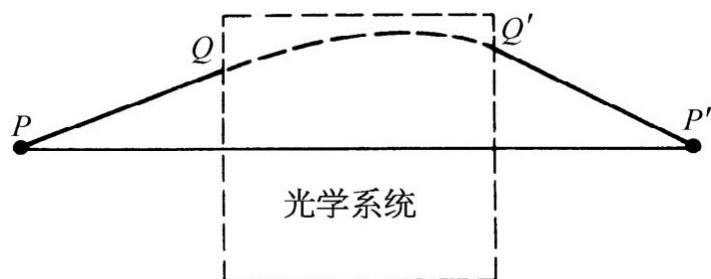


图26-9 光学“暗箱”

这很容易做到。假定我们有一片玻璃，光在其中走得比空气中慢（图26-10）。现在考察一条在空气中沿着 PQP' 路径走的光线。这是一条比直接从 P 点到 P' 点长的路径，无疑要花较长的时间。但是如果我们插入一片恰当厚度的玻璃（以后我们将算出它有多厚），它或许恰好能补偿因光倾斜着走而多花的时间！在这种情况下，我们就能使笔直通过的光所花的时间与沿着 PQP' 路径所花的时间相同。同样地，

如果我们取一条稍为倾斜的光线 $PRR'P'$ （它不如 PQP' 那么长），对它的补偿虽然不必像笔直的一条那么多，但总得补偿一些。我们竖着放置一片形如图26-10那样的玻璃。利用这种形状，所有从 P 发射的光就会到达 P' 。当然，这对我们来说很熟悉，我们称这种器件为会聚透镜。在下一章中，我们将实际计算为了达到完善的聚焦点，透镜应具有什么形状。

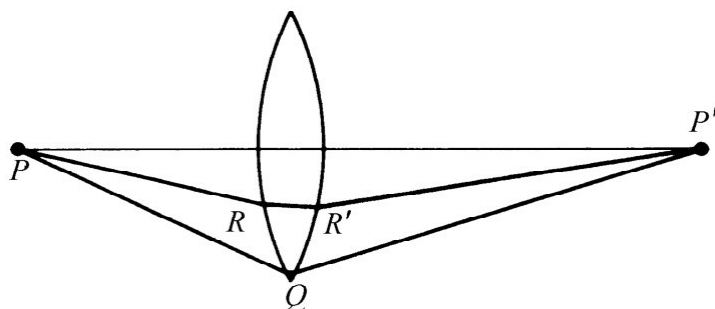


图26-10 一种光学聚焦系统

再举一个例子：假如我们想要设置几面镜子，使从 P 发出的光总是到达 P' （图26-11）。在任一路径上，光都射到某一面镜子然后返回到 P' ，而所有这些路径所花的时间必须相等。这里光一直在空气中行进，所以时间与距离成正比。于是所有时间都相同的说法跟所有距离都相同的说法完全一样。因而两段距离 r_1 与 r_2 之和必须是常数。椭圆就是具有这样一种性质的曲线，即从两个点到椭圆上任何一点的距离之和为一常数；这样我们就可保证从一个焦点发出的光都到达另一个焦点。

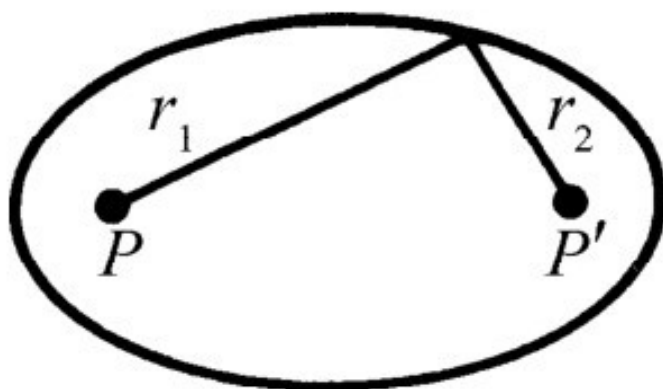


图26-11 椭球面镜

同样的原理适用于聚集来自一颗星的光。巨大的帕洛玛200 in望远镜就是用下述原理制成的。设想有一颗数 10^9 mi远的星；我们希望能使所有射来的光线都到达焦点。当然我们不能把一直到星的整段光路画出，但仍要核对一下各条光线所需的时间是否相等。我们当然知道，当各条光线到达与光线垂直的某一平面 KK' 时，它们所花的时间是相等的（图26-12）。于是所有光线必须在相等的时间内从这里射到镜面而再继续行进到 P' 。那就是说，我们必须找到一条曲线，它具有这种性质，不论 X 取在哪里，都能使距离之和 $XX'+X'P'$ 为一常数。寻找它的一个简便方法就是将 XX' 线延长到 LL' 平面。现在，如果我们把一条曲线安排得使 $A'A''=A'P'$ ， $B'B''=B'P'$ ， $C'C''=C'P'$ 等等，那么这就是我们所要求的曲线，因为这时 $AA'+A'P'=AA'+A'A''$ 显然是常数。因而我们的曲线就是所有与一点和与一直线等距离的点的轨迹。这样的曲线称为抛物线；镜面就被做成抛物线形状。

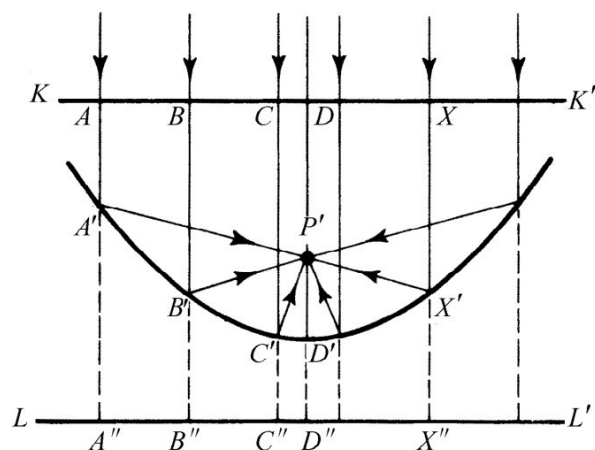


图 26-12 抛物面镜

上述例子说明了这些光学器件赖以设计的原理。严格的曲线可用这样的原理计算得到，即为了能够完全聚焦，所有光线的传播时间必须精确相等，同时也必须小于邻近任何一条路径所花的时间。

我们将在下一章中进一步讨论这些聚焦用的光学器件；现在我们来讨论这个理论的进一步发展。当一种像最短时间原理那样的新的理论发展起来时，我们首先会倾向于说：“嗯，那很漂亮；令人高兴；但问题是，它最终是否会对理解物理有所帮助？”有人会回答：“有，你看我们现在能理解多少东西呀！”另一个则说：“很好，但我也能理解抛物面镜。我只需要这样一条曲线，使它的每一个切面跟两条光线构成相等的角度。我也能画一个透镜，因为射到它上面的任何一条光线都将按斯涅耳定律给定的角度折射。”显然，最短时间的说法和在反射中两角度相等的说法以及在折射中两角度的正弦成比例的说法都是相同的。所以这是否只是一个哲学问题，或者只是一个审美上的问题？两方面都有充分的论据。

然而，一个有效原理的重要性在于它能预言新的东西。

很容易说明费马原理预言了许多新的东西。首先，假定有三种介质——玻璃、水和空气，我们做一个折射实验以测量一种介质对另一种介质的折射率 n 。把空气（1）对水（2）的折射率叫做 n_{12} ；空气（1）对玻璃（3）的折射率叫做 n_{13} 。如果就水对玻璃的折射率进行测量，那么将会找到另一个我们称之为 n_{23} 的折射率。但并无先验的理由可以说明 n_{12} 、 n_{13} 和 n_{23} 之间应有什么联系。然而，根据最短时间的思想，它们之间确实存在着一个确定的关系。折射率 n_{12} 是两个量，即空气中的速率和水中的速率之比； n_{13} 是空气中的速率和玻璃中的速率之比； n_{23} 是水中的速率和玻璃中的速率之比。所以如果消去空气中的速率，就得到

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \quad (26.5)$$

换句话说，我们可以预言一对新的介质的折射率可以从各个介质对空气或真空的折射率中求得。所以，如果对光在所有介质中的速率进行测量，并由此对每一种介质得到一个单一的数，即它相对于真空的折射率 n_i （例如 n_1 是真空中速率与空气中速率之比，等等），那么我们的公式就变得非常简单。于是任意两种介质 i 和 j 的折射率为

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \quad (26.6)$$

只用斯涅耳定律，就不存在作这类预言的基础[1]。但这一预言当然成立。关系式（26.5）很早就已知道，而且是最短时间原理的一个有力证据。

最短时间原理的另一证据即另一预言是，如果我们测量光在水中的速率，它定将比空气中的慢。这完全是另一种类型的预言。它是一个出色的预言，因为到此为止所有我们测得的量都是角度；而这里我们有了一个与观察十分不同的理论上的预言，费马则是由这些观察引出他的最短时间这个概念的。结果证明，光在水中的速率的确比空气中的速率慢，两者之比恰好等于折射率！

§26-5 费马原理的更精确表述

实际上，我们必须把最短时间原理表述得更正确一些。在前面，它并没有得到正确的表述。称它为最短时间原理是不正确的，我们只是为了方便起见，一直沿用着这个不正确的表述，但现在我们必须考虑正确的表述应该是怎样的。假如我们有如图26-3所示的一面镜子。是什么促使光一定要跑到镜面上来？最短 时间的路径显然是 AB 。所以有些人也许会说：“有时这是一条取时最长的路径。”但这里的时间并不是极大值，因为一条弯曲的路径需要的时间肯定要更长！正确的表述如下：在某一特定路径上行进的光具有这样的一种性质，那就是，如果我们不论用何种方式使光路作微小改变（比如说移动百分之一），例如改变它射到镜面上的路线的位置，或改变曲线的形状，或任何别的方式，都不会 有时间的一级变化；而只有时间的二级 变化。换句话说，这个原理是：光取的是这样一条路径，在它邻近有许多取时几乎与它完全相同 的其他路径。

下面是最短时间原理的另一个困难，它也是那些不喜欢这种理论的人所永远不能忍受的一个困难。利用斯涅耳理论我们能够“理解”光。当光在行进中遇见一个表面时，会因为它与表面有相互作用而发

生弯曲。光从一点跑到另一点，再到又一点等等的因果关系的思想是容易理解的。但最短时间原理却是关于自然界行为方式的完全另一种哲学原理。它不是把我们做了某件事后，又发生另一件事等等说成是因果关系，而是这样说：我们建立起一种装置，由光束判断哪一条是需时最短或最终的路径，从而选定由这条路径走。但它做了什么，又是如何找出这条路径的？它是否试探了邻近各条路径，并对它们进行了相互核对？回答是：是的，在某种程度上，它的确是这样做的。这个特征在几何光学中当然是无法知道的，但却包含在波长的概念之中；波长大致告诉我们，光必须在离开多远的地方“试探”这条路径以便进行核对。要在大尺度内用光来演示这一事实是困难的，因为光的波长实在太短。但对于无线电波，例如3厘米波，进行核对的距离就比较长了。如果我们有一个无线电波源，一个探测器和一条缝，如图26-13所示，波当然从S跑到D，因为这是一条直线，而且当我们把缝关小时仍然如此——波仍沿此直线走。但如果把探测器移到旁边的D'点，波将不会通过宽缝从S跑到D'，因为它们核对了邻近的几条路径，并且说：“不，我的朋友，那些路径都对应于不同的时间。”但是如果我们把缝关小到使之成一条很窄的缝隙，以阻止辐射波核对各条路径，那么只有一条路径可走，辐射波也就只好随着它走！用一条狭缝比起用宽缝来有更多的辐射能到达D'点！

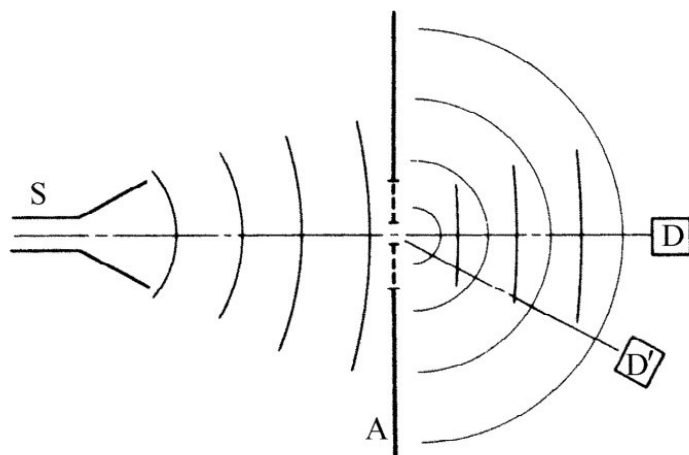


图26-13 无线电波通过一个狭缝

用光也能作同样的实验，但要在大尺度上来演示是困难的。其效应可在下述简单情况下看到。找一小而亮的光源，比如说远处街灯的一个非乳白灯泡，或太阳在弯曲的汽车缓冲器上的反射光。将两只手指放在一只眼睛前面，以便通过指间狭缝进行观察，然后慢慢地并拢手指使光减少到接近于零。此时，你将看到先前是一个小点的光源像变得相当长，甚至拉成一条长线。理由是手指靠得很近，原来认为沿直线过来的光散开成一个角度，因此当它进入眼睛时就从几个方向跑了进来。如果你很仔细的话，还会看到侧向极大，即许多与缝隙边缘平行的条纹，而且整个东西是彩色的。所有这些将在适当的时候加以解释，但就目前来说，它确是说明光并不总是沿着直线行进的一个演示实验，而且是一个很容易做的演示实验。

§26-6 最短时间原理是怎样起作用的

最后，从我们现在相信是正确的、量子动力学上精确的观点出发，对实际发生的是是什么以及整个事情是怎样起作用的提供一个粗略的概念，当然只能作定性的描述。在图26-3中，当我们随着光从A到B行进时，我们发现光似乎根本不具有波的形式。相反，光线倒是有点像由光子组成的，如果我们用一个光子计数器，它实际上会在其中产生咔嗒声。光的亮度与每秒钟进入计数器的平均光子数成正比，而我们所计算的则是光子从A（比如说碰到镜面后）到达B的机会。这种机会所遵循的是下述很奇怪的规律。取任一路径，并找出其相应的时间；然后写一复数或画一小的复矢量 $\rho e^{i\theta}$ ，令其角度 θ 正比于时间。复矢量每秒的旋转周数就是光的频率。再取另一路径，比如说它具有不同的时间，则其对应的矢量就转过不同的角度——角度总是与时间成正比的。取所有可取的路径，并为每一条路径加上一个小矢量；那么答案就是，光子到达的机会与从始端到末端的总矢量的长度平方成正比！

现在我们来说明对镜面来说这个结果如何隐含了最短时间原理。考虑图26-3中所有的光线和所有可能的路径ADB，AEB，ACB等等。路径ADB提供了某一小的贡献，但下一个路径AEB所花的时间就完全不同，故其角度 θ 也完全不同。设C点对应于时间的极小值，在它附近改变路径时，时间并不改变。因而，起初一会儿时间在改变，但当接近C点时，时间的变化就开始变得越来越小（图26-14）。所以在靠近C点的片刻所添加的箭头几乎都达到完全相同的角度。然后时间又开始逐渐增加，相角又朝相反方向旋转，等等。最后，得到一个收紧的结。总的概率就是从一端到另一端距离的平方。几乎所有对于概率的积累都发生在所有箭头沿同一方向（即同相位）的区域。所有来自那些当改变路径时具有十分不同时间的路径的贡献，由于指向不同方向而相互抵消了。这就是为什么当我们遮去镜子的边缘部分时，它的

反射几乎与以前相同的缘故，因为我们在这里所作的一切仅仅是抹去了位于图上的螺旋末端的一部分而已，它只引起光很少的改变。这就是最终的（其到达的概率取决于复矢量的累加）光子图像与最短时间原理之间的关系。

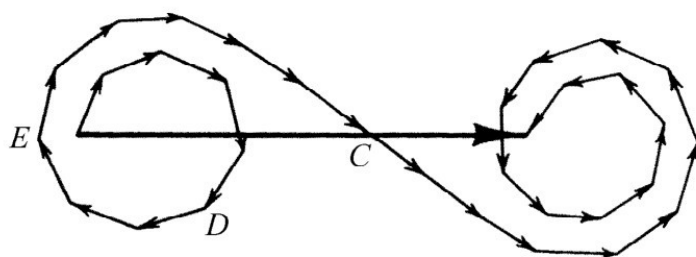


图26-14 许多邻近路径的概率振幅总和

[1] 虽然在作一个附加假定的条件下它可以推导出来。这个附加假定是：在一种物质的表面上加一层另一种物质，不会改变光在后一种物质中最终的折射角。

第27章 几何光学

§27-1 引言

本章将用所谓几何光学近似来讨论上一章的概念对许多实际装置和仪器的一些初步应用。这种近似是许多光学系统和仪器在其具体设计中最有用的一种方法。几何光学要么十分简单，要么非常复杂。这样说的意思是，或者我们只是很肤浅地学习它，使得我们利用它的一些规则就能粗糙地设计仪器，而这些规则又非常简单，以致在这里根本没有必要去讲述它们，因为它们实际上是中学水平的内容；或者如果我们想要知道透镜以及类似器件的微小误差，则题材又太复杂，以致在这里讨论它显得太深！如果有人想解决一个在透镜设计方面实际而详细的问题，包括像差分析在内，那么奉劝他去阅读有关著作，要不就利用折射定律找出光线通过各个表面的轨迹（这就是本书所要讲的做法），并求出它们从哪里射出以及是否形成一个满意的像。有人说这太麻烦了，但今天借助计算机，这是解决问题的一个正确的方法。人们可以提出问题，并且很容易一条光线接着一条光线地进行计算。因而问题最终确实变得十分简单，也用不到什么新的原理。而且事实证明，不论是初等还是高等光学，它们的规则对于别的领域来说，很少有什么特色，所以没有什么特殊的理由要把这一题材讲得太深，但有一个重要的例外。

几何光学最高深和抽象的理论是由哈密顿（W.R.Hamilton）完成的，结果证明，这种理论在力学中有很重要的应用。实际上它在力学

中甚至比在光学中更为重要，所以我们把哈密顿理论作为高等分析力学课程的一部分放到高年级或研究班去讲。在估计到几何光学除了为本身的目的以外很少有贡献之后，现在我们就在上一章所概括的原理的基础上对简单光学系统的基本性质进行讨论。

为了进行讨论，就必须有一个几何公式，其内容如下：如果有一个高（ h ）很小而底边（ d ）很长的直角三角形，则斜边 s （我们在求两条不同路径之间的时间差时将用到它）比底边长（图27-1）。长多少呢？其差值 $\Delta = s - d$ 可以用许多方法来求得。其中一种方法是这样：由图可见 $s^2 - d^2 = h^2$ ，或 $(s - d)(s + d) = h^2$ ，但 $s - d = \Delta$ ，而 $s + d \approx 2s$ ，于是

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (27.1)$$

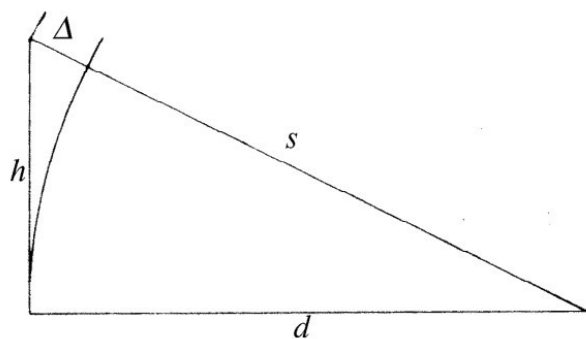


图 27-1

这就是讨论曲面成像时所需要的全部几何学！

§27-2 球面的焦距

我们所要讨论的第一个而且最简单的情况，是把两种折射率不同的介质分开的那种单折射面（图27-2）。我们把具有任意折射率的情况留给学生去做，因为最重要的往往是概念而不是特殊情况，并且这样的问题在任何情况下解决起来都是很简单的。所以我们假定光在左方的速率为1，在右方的速率为 $1/n$ ，这里 n 是折射率。光在玻璃中传播较慢，要小一个因子 n 。

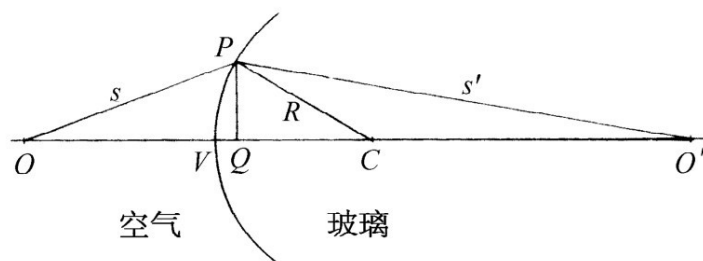


图27-2 单折射面聚焦

现在假定有一 O 点在玻璃表面之前距离 s 处，另一点 O' 在玻璃之内距离 s' 处。我们想这样来设计一个曲面，使每条从 O 点射到表面上任何一点 P 处的光线经折射后都行进到 O' 点。为了做到这一点，必须使表面具有这样的形状，使光从 O 走到 P 所花的时间，亦即距离 OP 除以光的速率（这里光速为1），加上 $n \cdot O'P$ ，也就是光从 P 走到 O' 所花的时间，等于一个常数（与 P 点无关）。这一条件为我们决定表面的形状提供了一个方程。它的解告诉我们此表面是一个非常复杂的四次曲面，学生如有兴趣可用解析几何来进行计算。但是如果计算一个对应于 $s \rightarrow \infty$ 的特殊情况，那么事情就比较简单，因为这时的曲面是一个二次曲面，我们对它比较熟悉。如果将这个曲面与当光来自无穷远时我们所求得的聚焦镜的抛物面进行比较，则是令人十分感兴趣的。

因而正确的表面不易制造，因为要把光从一点聚焦到另一点需要相当复杂的表面。事实证明，我们在实践中一般并不试图去制造这种

复杂的表面，而作一妥协。我们不想把所有的光线都聚焦到一点，而是这样做，使得只有相当靠近 OO' 轴的光线聚焦到一点。遗憾的是，离轴较远的光线即使想要聚焦到一点也会偏离，因为理想的表面很复杂，而我们只是用了一个在轴上具有适当曲率的球面来代替它的缘故。制造一个球面要比制造其他曲面容易得多，因此找出射到球面上的光线将会出现什么情况对我们是有用的，我们假定只有靠近轴的光线被完全聚焦。靠近轴的那些光线有时叫做傍轴光线，而我们所分析的就是傍轴光线聚焦的条件。以后我们还将讨论不是所有光线都是傍轴的情况下所导致的误差。

因此，假定 P 靠近轴，我们作垂线 PQ ，使 PQ 之高为 h ，并暂且设想表面是一个通过 P 的平面。在这种情况下，从 O 到 P 所需的时间将超过从 O 到 Q 的时间，同样，从 P 到 O' 的时间亦将超过从 Q 到 O' 的时间。但这正是玻璃所以必须弯曲的原因，因为所超过的总的时间必须由从 V 到 Q 所延迟的时间来补偿！现在沿路径 OP 所超过的时间为 $h^2/2s$ ，而在 PO' 路径上所超过的时间为 $nh^2/2s'$ 。所超过的时间必须与沿 VQ 所延迟的时间相抵消，而此延迟时间与在真空中的不同，因为有介质存在。换句话说，光从 V 行进到 Q 的时间不是像它直接在空气中行进时一样，而是比之慢了 n 倍，所以在这段距离内剩余的延迟时间为 $(n-1)VQ$ 。但 VQ 有多长？如果点 C 为球心， R 为其半径，那么由同一公式我们可以看到这段距离 VQ 等于 $h^2/2R$ ，因此我们发现联系距离 s 与 s' 而又给出所需表面的曲率半径 R 的规律为

$$\frac{h^2}{2s} + \frac{nh^2}{2s'} = \frac{(n-1)h^2}{2R} \quad (27.2)$$

或

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n-1}{R}. \quad (27.3)$$

如果我们有一点 O 及另一点 O' ，并且想把光从 O 点聚焦到 O' 点，那么就可用此公式来计算所需表面的曲率半径 R 。

现在有趣的是，结果表明：具有同样曲率半径 R 的同一透镜对于其他距离也能聚焦，也就是说，对于任何两个倒数之和（其中一个乘上 n ）为一常数的距离也能聚焦。因此，一个给定透镜（只要限于傍轴光线）不仅能把光从 O 聚焦到 O' ，而且也能把光在无数对其他点之间聚焦，只要这些成对的点满足 $1/s + n/s'$ 等于一个表征透镜特性的常数这个关系。

特别有趣的是 $s \rightarrow \infty$ 的情况。由公式可见，当 s 一个增加时，另一个则减少。换句话说，若点 O 向外移动，点 O' 就向内移动，反之亦然。当点 O 移向无穷远时，点 O' 在介质内也在移动，直到离表面一定距离为止，这段距离叫做焦距 f' 。如果平行光入射时，它们将在距离 f' 处与轴相交。同样，我们可以想象反方向的情况（请记住倒易规则：若光可从 O 行进到 O' ，当然也可从 O' 行进到 O ）。因此，假定说玻璃内有一光源，我们也许想知道其焦点在哪里。特别是，如果光在玻璃内无穷远地方入射（同样的问题），它将聚焦在外面的何处？这个距离叫做 f 。当然我们也可使光反方向而行之。若在 f 处有一光源，把光射进表面，则它将以平行光束射出。我们很容易求出 f 与 f' 的数值为

$$\frac{n}{f'} = \frac{n-1}{R} \quad \text{或} \quad f' = \frac{Rn}{n-1}, \quad (27.4)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R} \quad \text{或} \quad f = \frac{R}{n-1}. \quad (27.5)$$

从以上两式可以看到一个有趣的情形：如果把各焦距除以相应的折射率，即得相同的结果！事实上，这个定理是普遍成立的。它对任何透镜系统都是正确的，不论这一系统多么复杂，因而记住它是很有意义的。我们在这里并没有证明过它普遍成立——只是指出了对于单独一个表面，它是对的，然而碰巧它却普遍成立，以致系统的两个焦距就以这一方式互成关系。式（27.3）有时可写成下列形式

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.6)$$

这种形式比式（27.3）更为有用，因为测量 f 比测量透镜的曲率和折射率容易得多：如果我们对透镜的设计不感兴趣，也不想知道它如何制成，而只从架子上拿它来使用，那么我们感兴趣的量是 f ，而不是 n 与 1 和 R ！

如果 s 变得小于 f ，就会发生一种有趣的情况。那么发生什么情况呢？若 $s < f$ ，则 $(1/s) > (1/f)$ ，于是 s' 为负；方程指出光将只对负的 s' 值聚焦，这究竟意味着什么！它意味着一件很有趣和很确定的事。换句话说，即使数值为负，上式仍不失为一个有用的公式。它意味着什么已在图27-3中表示出。如果从 O 点画一些发散的光线，无疑它们要在表面上偏折，但它们不会聚焦成一点，因为 O 太靠近表面，以致“超过了折成平行光”的范围。然而，它们却这样地发散出去，好像是从玻璃外面一点 O' 发出的。 O' 是一个表观像，有时叫做虚像。图27-2中的像 O' 叫做实像。如果光真的射向一点，那么它就是一个实像。但是如果光看来好像来自一点（与原来的点不同的一个虚构的点），那么它就是一个虚像。所以当 s' 变成负时，就意味着 O' 在表面的另一边，这样一切就妥当了。

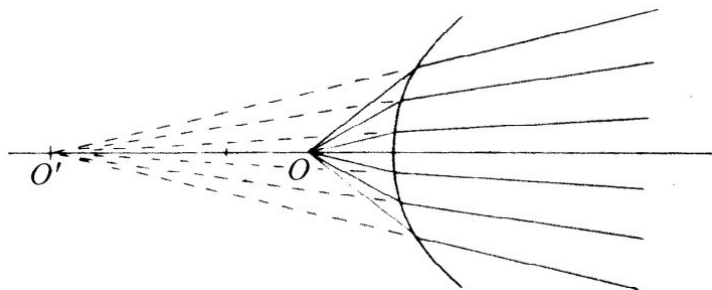


图27-3 虚像

现在我们来研究 R 等于无限大时的有趣情况；此时 $1/s + n/s' = 0$ 。换句话说 $s' = -ns$ 。这意味着当我们从密介质朝疏介质看其中一个点时，这个点看来好像深了 n 倍。同样，也可把同一个式子反过来用，因而当我们通过平表面看位于密介质内一定距离的物体时，它将看来好像光不是从那么深的地方射来的（图27-4）。当我们从上面看一个游泳池的底时，它看起来不像真的那么深，而只有原来深度的 $3/4$ ，此即水折射率的倒数。

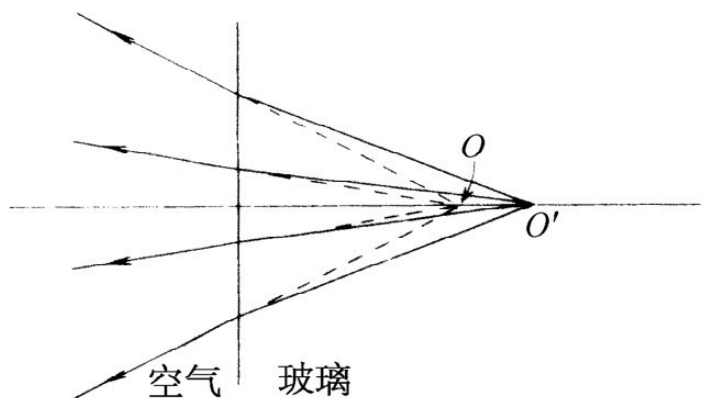


图27-4 一平表面把发自 O' 的光重新成像为 O

当然，我们可以继续来讨论球面镜。但是如果你理解了其中所包括的一些概念，那么你能自己来解决这个问题。所以我们让学生自己去求出球面镜的公式，但我们指出，对于所涉及的一些距离，如果采用一定的习惯规则较为方便：

- (1) 若点 O 在表面左方，则物距 s 为正；
- (2) 若点 O' 在表面右方，则像距 s' 为正；
- (3) 若球面中心在表面右方，则表面曲率半径为正。

例如，在图27-2中， s ， s' 和 R 皆为正；在图27-3中， s 和 R 为正，而 s' 为负。如果用一个凹表面，那么只要取 R 为负值，公式(27.3)仍然会给出正确结果。

在应用上述习惯规则求球面镜的相应公式时，你将发现，如果在整个公式(27.3)中都令 $n=-1$ （好像镜子后面的介质的折射率为-1一样），那么结果就得出镜子的正确公式！

虽然利用最短时间原理来导出公式(27.3)既简单又优美，但用斯涅尔定律当然也能导出同一公式，只要记住一点，那就是这里角度很小，以致角度的正弦可用角度本身来代替。

§27-3 透镜的焦距

现在我们继续讨论另一种很实用的情况。我们所使用的大多数透镜具有两个表面，而不是只有一个表面。这将对事情产生什么影响呢？假定有两个不同曲率的表面，它们之间的空间充满着玻璃（图27-5）。我们想研究从点 O 向另一点 O'' 聚焦的问题。怎么做呢？回答是：首先，对第一个表面应用式(27.3)而不考虑第二个表面。这将告诉我们，从 O 点发出的光好像是向另外某一点（比如说 O' ）会聚的或者是从这一点散发出来的，完全依符号而定。现在我们来考虑一个新的问题，即在玻璃（光线在其中会聚到某一点 O' ）与空气之间有另

一个表面。这时，光线实际上将向何处会聚呢？我们再应用同一个公式！我们发现它们会聚在 O'' 点。这样，如果需要，只要一个接一个地连续使用同一个公式，就是一共通过75个表面也行！

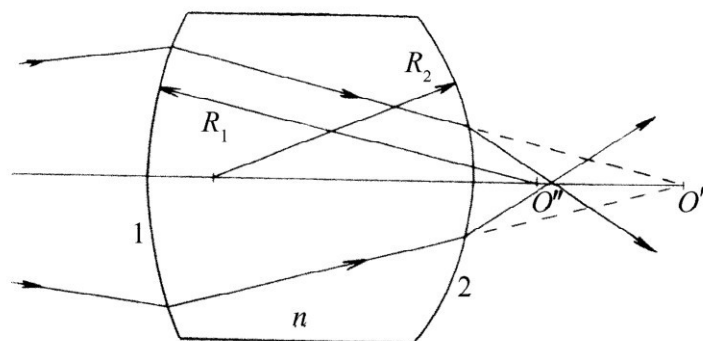


图 27-5 双面透镜成像

有一些相当高级的公式，在我们或许要追随光线通过5个表面时，将在有限的生命中给我们节省许多精力，但是当这种问题发生时，还是跟着光线通过5个表面，比之去记忆许多公式容易得多，因为说不定我们将根本不需要去跟着光线通过任何表面！

在任何情况下，我们的原则是，当通过一个表面时，找到一个新的位置，即一个新的聚焦点，然后把这个点当作下一个表面的出发点，如此等等。既然在第二个表面上我们是从 n 走到1，而不是从1走到 n ，而且在许多系统中有不止一种玻璃，以致其折射率为 n_1 ， n_2 ，...，那么为了实际做到这一点，我们的确需要把公式（27.3）普遍化，使之适用于两种不同折射率 n_1 与 n_2 的情况，而不是只有一种折射率 n 的情况。不难证明，公式（27.3）的普遍形式为

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (27.7)$$

特别简单的是两个表面靠得很近的特殊情况。靠得如此之近，可以忽略由于厚度引起的微小误差。如果把透镜画成如图27-6所示的那样，我们可以提出这样的问题：透镜必须怎样制成才能使光从 O 点聚焦到 O' 点？假定光正好到达透镜的边缘 P 点。暂且忽略折射率为 n_2 、厚度为 T 的玻璃的存在，则光从 O 行进到 O' 所超过的时间是 $(n_1 h^2 / 2s) + (n_1 h^2 / 2s')$ 。于是，为了使走直线路径的时间等于走路径 OPO' 的时间，必须用一片玻璃，它的中心厚度 T 应该这样，即足以使光通过这一厚度所引起的延迟时间补偿上述过量时间。因此，透镜的中心厚度必须由下列关系给出

$$\frac{n_1 h^2}{2s} + \frac{n_1 h^2}{2s'} = (n_2 - n_1) T. \quad (27.8)$$

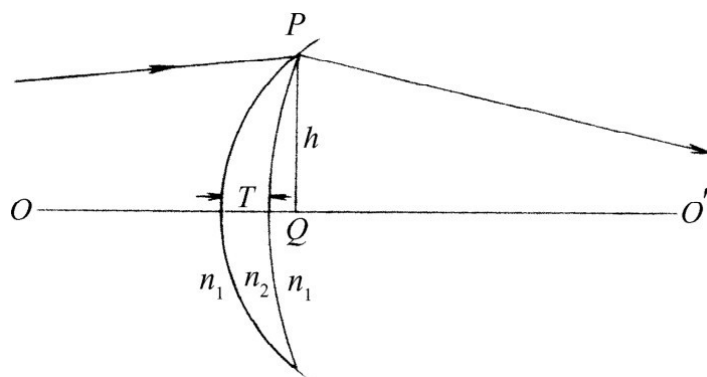


图27-6 两个曲率半径都为正的薄透镜

我们也可以用两个表面的半径 R_1 与 R_2 来表示 T 。注意到习惯规则(3)，对于 $R_1 < R_2$ （凸透镜），得到

$$T = \frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2}. \quad (27.9)$$

因而最后得到

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_1}{s'} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (27.10)$$

现在再记住当一点在无穷远时，另一点将在我们称之为焦距 f 的地方。焦距 f 由下式给出

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (27.11)$$

这里 $n = n_2 / n_1$ 。

如果现在取相反的情况，即 s 趋于无穷远，则 s' 等于焦距 f' 。这时两焦距相等（这是两焦距之比等于光在其中聚焦的两介质折射率之比这一普遍规则的又一特殊情况）。在这一特殊光学系统中，初始和最后两个折射率都相同，因而两焦距也相等。

我们暂且把焦距的实际公式忘掉，如果我们购到一个由某人设计、具有某种曲率半径和某种折射率的透镜，那么我们可以这样来测量焦距，比如说观察一下无穷远处的一点聚焦在何处。一旦有了焦距，最好是直接用焦距写出我们的等式，于是这一公式为

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.12)$$

现在我们来看一下如何应用这个公式及其在不同情况下的含意。首先它指出，如果 s （或 s' ）为无穷大，则 s' （或 s ）为 f 。这意味着平行光聚焦在距离 f 处，实际上它定义了 f 。它告诉我们的另一有趣事情是，两个点（物点和像点）都朝同一方向运动。如果一点朝右运动，另一点也朝右运动。此外它还告诉我们若 s 与 s' 都等于 $2f$ ，则它

们两者相等。换句话说，如果要得到一种对称情况，则我们发现它们都聚焦在距离 $2f$ 处。

§27-4 放大率

到现在为止，我们只讨论了轴上点的聚焦作用。现在我们来讨论不完全在轴上而稍为离开它一点的物体的成像，这样可以使我们了解放大率的性质。当我们装置一个透镜把来自灯丝的光聚焦在屏上一“点”时，我们注意到，在屏上得到同一灯丝的“图像”，只是其大小比实际的灯丝大一些或小一些而已。这必然意味着从灯丝上每一点发出的光都会聚到一焦点上。为了更好地理解这一点，我们来分析图27-7中所示的薄透镜系统。我们知道下列事实：

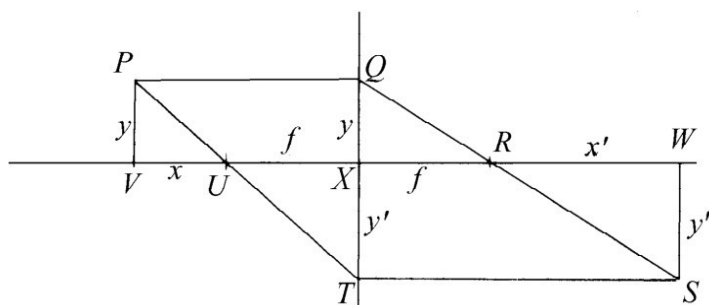


图27-7 薄透镜成像的几何图

(1) 从一边射来的任一平行于轴的光线都朝着另一边称为焦点的某一特殊点行进，这个点与透镜相距 f 。

(2) 任一从一边的焦点发出而到达透镜的光线，都在另一边平行于轴射出。

这就是我们用几何方法建立公式 (27.12) 所需要的全部知识，具体步骤如下：假定离焦点某一距离 x 处有一物体，其高为 y 。于是我们知道光线之中有一条光线（如 PQ ）将经透镜偏折而通过另一边的焦点 R 。如果现在这个透镜能完全使 P 点聚焦的话，那么只要找出另外一条光线的走向，就能找出这个焦点在哪里，因为新的焦点应在两条光线再次相交的地方。因此我们只要设法找出另外二条光线的实际方向，而我们记得平行的光线通过焦点，反之亦然：即通过焦点的光线将平行地射出！所以我们画出一条光线 PT 通过 U （诚然参与聚焦的实际光线可能比我们所画的两条光线的张角小得多，但它们画起来较为困难，所以我们假设能作这条光线）。既然它将平行射出，我们就画出 TS 平行于 XW 。交点 S 就是所要求的点。这个点决定了像的正确位置和正确高度。我们把高度称为 y' ，离焦点的距离称为 x' 。现在我们可以导出一个透镜公式。应用相似三角形 PVU 和 TXU ，得

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x}. \quad (27.13)$$

同样，从三角形 SWR 和 QXR ，得

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}. \quad (27.14)$$

由此上两式各解出 y'/y 后，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x}. \quad (27.15)$$

式 (27.15) 是有名的透镜公式；其中包括了我们关于透镜所需要知道的一切：它告诉我们放大率 y'/y ，用距离和焦距表示。它也把两个距离 x 和 x' 与 f 联系起来

$$xx' = f^2, \quad (27.16)$$

这是一个用起来比式(27.12)简洁得多的形式。我们让同学自己去证明，若令 $s = x + f$ ， $s' = x' + f$ ，则式(27.12)与式(27.16)相同。

§27-5 透镜组

当有许多透镜时，我们将简短地叙述一下其一般的结果，而不加实际推导。如果有一个由几个透镜组成的系统，那么我们怎样来分析它呢？这很容易。先从某个物体开始，并利用式(27.16)或(27.12)以及任何别的等效公式，或者用作图法，算出它被第一个透镜成像在哪里。这样就得到一个像。然后把这个像作为下一个透镜的光源，并用第二个透镜（不管它的焦距是多少）再找出一个像。我们就这样对一连串透镜一直追踪下去。这就是要做的一切。由于它原则上没有什么新的东西，所以我们不准备深入下去。但是，就任一序列的透镜对于在某一介质例如空气中发出而终止在同一介质中的光所产生的各效应却有一个很有趣的最后结果。任何一种光学仪器——包括任意数目的透镜和反射镜的望远镜或显微镜——都具有下列性质：它有两个平面，叫做系统的主平面（这些平面往往很接近第一个透镜的第一个表面和最后一个透镜的最后一个表面），它们具有下列性质：（1）如果光从第一边平行地射向系统，它就在一定的焦点射出，焦点位于离第二主平面的距离等于焦距处，就好像这个系统是置于这一平面的一个薄透镜一样。（2）如果平行光从相反方向射来，那么它将会聚到离第二主平面同一距离 f 处的焦点上，又好像有一个薄透镜位于主平面处一样（见图27-8）。

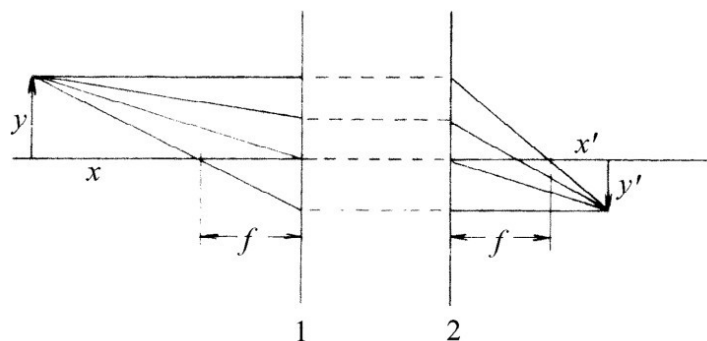


图27-8 光学系统主平面示意图

当然，如果我们像以前一样测出距离 x 与 x' ， y 与 y' ，那么对薄透镜所写的公式（27.16）在这里完全普遍适用，假定焦距从主平面而不是从透镜组中心算起的话。对薄透镜来说，两个主平面恰好重合。这种情况正像我们取来一个薄透镜，把它沿中间切开，再把它分开，而不去注意它已被分开一样。每一条射来的光线，会立即在第二个平面的另一边从光进入第一个平面的同一点突然射出！主平面与焦距可以用实验来求得，也可用计算来求得，于是光学系统的全部性质就此得到描述。当我们把这样巨大而复杂的光学系统处理完毕时，结果却并不复杂，这是一件很有趣的事。

§27-6 像差

在我们不致因透镜如此奇妙而感到过于兴奋之前，必须赶快补充一点，即透镜也有其严重的局限性，因为严格地说，我们的讨论只限于那些靠近轴的近轴光线。一个具有一定大小的真实透镜一般说来将显示出像差。例如，在轴上的一条光线当然会通过焦点；一条很靠近轴的光线仍然也会很好地会聚到焦点上。但当光线离轴较远时，就开始偏离焦点，也许落到离透镜更近的地方，射到靠近透镜边缘上的光

向下折射时将偏离焦点相当宽一段距离。因此，我们不是得到一个点像，而是得到一个模糊的光斑。这一效应称为球面像差，因为它是我们用以代替正确曲面的球面所具有的一种性质。对任一特定的物距来说，用修正透镜表面的形状，或者用几个透镜组合起来使各个透镜的像差趋于相互抵消的办法，球面像差可以得到纠正。

透镜还有另一个缺点：不同颜色的光在玻璃中具有不同的速率或不同的折射率，因而一个给定的透镜的焦距对不同颜色的光是不同的。所以，如果我们把一个白的光点成像，其像将会有颜色，因为当我们使红光聚焦时，蓝光就不聚焦，或者反过来。这种性质叫做色像差或色差。

透镜还有其他一些缺点：如果物体在轴之外，那么当它离轴足够远时，聚焦实际上已不再很完善。验证这一点的最容易的方法是把一块透镜聚焦，然后把它偏转一下，以使光线与轴成大角度地射来。这时所形成的像一般都很粗糙，而且可能没有一个聚焦得很好的地方。因此，透镜中有好几种像差，以致光学设计者要用许多个透镜以补偿相互的像差的办法来加以校正。

要消除像差，我们必须谨慎到何种程度？是否可能构成一个绝对完善的光学系统？假定我们已经构成一个光学系统，并且认为它能把光正确地会聚到一点，那么，从最短时间的观点来论证，能否找到一个关于系统必须完善到什么程度的条件？这个系统总有某种形式的能使光进入的开孔。如果我们取离轴最远的光线，而它也能到达焦点（当然假定系统是完善的），那么对于所有光线，时间是正确相等的。但完全完善的东西是不存在的，所以问题在于，这条光线的时间可以差多少才不需要对它作进一步校正？这取决于我们所要成的像达到多么完善的程度而定。假定我们要使像做到尽可能地完善，那么，

我们的想法当然是必须使每一条光线尽可能取几乎相同的时间。但结果证明这是不确切的，我们想做的事过于精细，以致超过了可能的限度，因为此时几何光学理论已不再适用！

记住最短时间原理并非一种精确的表述，不像能量守恒原理和动量守恒原理那样。它只是一种近似，而寻求允许多少误差仍不致造成明显偏差倒是颇有意义的。回答是，如果我们作这样的安排，使得位于最边缘的光线——即成像最差的光线，也就是离轴最远的光线——与中心光线之间的时间差别小于与光的一次振动相应的周期，那么再作进一步改进已经无益。光是一种以确定频率振动的东西，这一频率与波长有关，如果我们已把系统安排得使不同光线的时间差别小于约一个周期，那么进一步改进系统已没有用处了。

§27-7 分辨本领

另一个有趣的问题——一个对于所有光学仪器都很重要的技术问题——是它们的分辨本领有多大。如果我们制造一架显微镜，就想看清楚所观察的物体，举例来说，这意味着，如果我们正在观察一个两端都有斑点的细菌，那么我们就要做到在把它们放大时能看清楚有两个小点。人们也许会想，这只要把它们放足够大就行——我们总是可以再加上一个透镜，放大了又放大，而且凭着设计者的智慧，所有的球差和色差都可消除，因而没有理由说为什么不能不断地把像放大。所以显微镜的限度不在于不可能制造一个径向放大率大于2000倍的透镜。我们能够制造一个径向放大率为10000倍的透镜系统，但由于几何光学的局限性，以及最短时间原理并非精确成立这一事实，我们仍然不能看清楚靠得太近的两个点。

要找出用以决定两个点应分得多么开才能使它们的像看起来好像是分开的两个点的规则，可以结合不同光线所需的时间用一种很美妙的的方法来叙述。假定现在不考虑像差，并设想对某一特殊点 P 来说（图27-9），所有从物到像 T 的光线所花的时间完全相同。（这是不确切的，因为它不是一个完善的系统，但那是另一个问题。）现在取附近另一个点 P' ，并问其像是否能与 T 分清楚。换句话说，我们是否能辨认出它们之间的差别。按照几何光学，当然应该有两个点像，但我们看到的可能是一个比较模糊的斑点，以致无从辨认出那里有两个点。第二个点聚焦在与第一个点显著不同的另一地方的条件是，对于通过透镜大开孔的两个边缘的极端光线 $P'ST$ 与 $P'RT$ ，光从一端行进到另一端所花的两个时间，必须与从两个可能的物点到同一给定的像点所花的时间不同。为什么？因为，如果时间相同，两个物点当然都将聚焦在同一点上。所以这两个时间不应相同。但它们必须相差多少才可以说两个物点不都聚焦在同一点上，以致我们可以分清两个像点？对任何光学仪器，其分辨本领的一般规则是这样的：两个不同的点源，只有当一个点源聚焦在某一点，而从另一点源发出的两条极端光线到达这一点所花的时间与到达它自己的实际像点相比，相差大于一个周期时，才能被分辨。亦即顶端光线与底边光线到达非正确焦点的时间差别必须大于某一数值，这个数值近似地等于光的振动周期

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{\nu}, \quad (27.17)$$

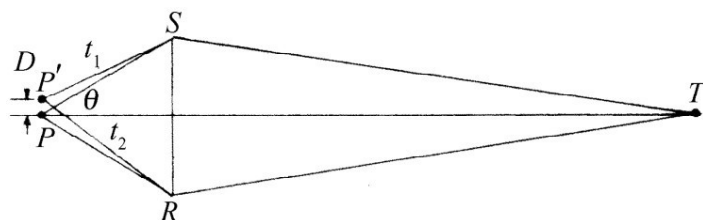


图27-9 光学系统的分辨本领

其中 ν 是光的频率（即每秒的振动次数，也就是速率除以波长）。如果两点源之间的距离为 D ，而透镜的张角为 θ ，那么可以证明式（27.17）与 D 必须大于 $\lambda / (n \sin \theta)$ 的说法是完全等效的。这里 n 是 P 处介质的折射率， λ 是波长。所以我们所能看清楚的最小物体，其线度大约等于光的波长。望远镜也有一个相应的公式，它告诉我们恰好能分辨的两颗星的最小角差该为多少^[1]。

[1] 这个角差约为 λ / D ，其中 D 是透镜的直径，你能看出为什么是这样吗？

第28章 电磁辐射

§28-1 电磁学

在物理学的发展中，最具戏剧性的时刻乃是不同现象得到高度综合的时刻，那时突然发现，以前看来似乎很不不同的现象，实际上只是同一事物的不同侧面而已。物理学史就是这种综合的历史，而物理科学所以能够取得成就，主要就是因为我们能够进行综合。

19世纪物理学发展中最具戏剧性的时刻，也许是在1860年的某一天当麦克斯韦（James Clerk Maxwell）把电与磁的规律与光的规律联系起来的时候。这样一来，光的性质就被部分地阐明了。光，这个司空见惯而又难以捉摸的东西，它是那么重要而又神秘，以致在写《创世记》的时候就觉得需要专门安排一天来创造它。然而当麦克斯韦完成他的发现时，他就可以说：“只要有了电与磁，就会有光！”

但是，为了达到这一登峰造极的时刻，却有一个逐渐发现并阐明关于电和磁的规律的漫长准备过程。这个准备过程我们留待下一学年去详细研究，现在仅简述如下。关于电和磁、电的斥力和引力以及磁力等等这些已被逐渐发现的性质表明，虽然这些力都很复杂，但它们都与距离平方成反比地衰减。例如我们知道，关于静止电荷的简单的库仑定律就表明，电力场的变化与距离平方成反比。因此，当距离足够大时，一个电荷体系对另一个电荷体系的影响就很小。当麦克斯韦试图把当时已经发现的所有方程或定律汇集在一起时，他注意到它们

之间是相互矛盾的；为了使整个方程体系不矛盾，就必须在他所建立的方程中加进另外一项。于是，他就从这个新的一项得出了一个惊人的预言，那就是电场与磁场的一部分随距离的衰减远比反平方关系来得慢，也就是与距离的一次方成反比！因而他认识到，一处的电流可以影响远处的电荷，并且预言了我们今天所熟悉的一些基本效应——无线电传输、雷达，等等。

一个人在欧洲讲话，仅仅借助于电的影响，就能够被几千英里以外的洛杉矶的人听到，这好像是个奇迹。这怎么可能呢？这是因为场不是按距离平方成反比地变化，而是按距离一次方成反比地变化。最后，连光本身也被认识到是原子中的电子以非常惊人的快速振荡所产生的电磁扰动在空间的传播。所有这些现象我们可以概括为一个词：辐射，或更加明确地叫做电磁辐射，因为还有一两种其他辐射。但辐射一般都意味着电磁辐射。

这样一来，天地万物就被联系起来了。遥远星体上的原子运动仍能产生足够的影响以使我们眼睛中的电子运动，因而使我们看到了这些星星。如果这个规律不存在，我们就会对外部世界一无所知！甚至离我们50亿光年远的星系——这是我们至今所发现的最远的物体——中的电涌仍能影响射电望远镜前的大“圆盘”，使它产生足够大的、可以探测的电流。正因为如此，所以我们能够看到星体和星系。

这一值得注意的现象就是本章所要讨论的内容。在本物理课程开始的时候，我们曾给自然界描绘了一幅广阔的图画，我们现在已有较好的基础知识去了解它的某些方面，因此我们就来较详细地讨论它的某些部分。我们从19世纪末物理学所处的地位开始叙述。那时已经知道的基本定律可概括如下。

首先，有关力的定律：一是万有引力定律，我们已几次写过，即质量为 M 的物体作用在质量为 m 的物体上的力由下式给出

$$\mathbf{F} = GmM \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}, \quad (28.1)$$

其中 $\mathbf{e}_r$ 是由 m 指向 M 的单位矢量， r 为它们之间的距离。

其次，是关于电与磁的定律，在19世纪末所了解的情况是这样的：作用在电荷 q 上的电力可用两个称为 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的场及电荷 q 的速度 $\mathbf{v}$ ，以下列等式描述

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (28.2)$$

为使此定律完善，我们必须说明在给定情况下 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的表示式。如果存在许多电荷，则 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 各为来自每个单独的电荷的贡献的总和。所以，如果我们能够找到单个电荷产生的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，只要将宇宙中所有电荷的效应加起来，就得到了总的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ！这就是叠加原理。

那么，由一个单独的电荷产生的电场与磁场的公式是怎样的呢？原来它很复杂，要懂得它必须做很多研究并花费许多精力。但这不要紧。我们现在写出这个公式来仅仅是为了使读者对大自然的美妙留下深刻的印象，我们之所以这样说，是因为我们可以用读者现在所熟悉的符号在一页内概括所有的基本知识。这一关于由单独的电荷产生的场的定律就我们所知（量子力学除外）是完善而正确的，但它看上去相当复杂。现在，我们不准备研究所有的细节；我们写出它来仅仅是给读者一个印象，以说明可以把它写出，而且这样可使我们预先看到它的大致面貌。其实，电与磁的正确规律的最有用的写法并不是我们现在的写法，而是包含所谓场方程的写法，我们将在下一学年学习这

些方程。但由于这些方程的数学符号形式特别而且新颖，所以我们用现在所知道的符号，而对于计算并不方便的形式写出定律。

电场 $\mathbf{E}$ 可表示为

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{r'}}{dt^2} \right]. \quad (28.3)$$

式中各项告诉我们一些什么？拿第一项 $\mathbf{E} = -\frac{q\mathbf{e}_{r'}}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$ 来说。这自然就是我们已经知道的库仑定律： q 是产生场的电荷， $\mathbf{e}_{r'}$ 是从测量 $\mathbf{E}$ 的 P 点出发的单位矢量， r 是从 P 到 q 的距离。但是，库仑定律是错误的。19 世纪的发现揭示出任何作用不可能传播得比某个基本速度 c 更快，这个速度我们现在称为光速。说第一项是库仑定律是不对的，这不仅因为我们不可能知道电荷 现在 在哪里以及 现在 的距离是多少，而且还因为在给定的地点和时间能够影响场的仅仅是电荷 过去 的行为。过去多久？时间的延迟，或者称为 延迟时间，是以速度 c 从电荷到场点 P 所需的时间，即延迟了 r'/c 。

考虑到这个时间延迟，我们在 r 上加一小撇，以表示现在到达 P 点的信号在离开 q 时离 P 有多远。暂且假定电荷带有光，而光只能以速度 c 到达 P 点。这样，当我们朝 q 看时，当然看不见它现在在哪里，而只看见它若干时间以前 曾在 哪里。在我们的公式中出现的是 表观 的方向 $\theta_{r'}$ ，——曾经所处的方向，即所谓 延迟方向，并处于 延迟距离 r' 。这大概也是十分容易理解的，但这也是错误的。整个事情还要复杂得多。

还有另外几项。如果我们十分粗略地看，第二项就好像自然界试图考虑到推迟效应这一事实似的。它提示我们应计算延迟的库仑场，

并附加一个改正项，即场的变化速率乘以所用的延迟时间。自然界似乎想用附加上变化速率乘以延迟时间这一项去推测现时的场要变成怎么样。但我们还没有完，还有第三项——在电荷方向上的单位矢量对时间的二次微商。现在公式总算完成了，这就是来自一个任意运动电荷的电场的所有成分。

磁场可表示为

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_r \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (28.4)$$

我们写下这些式子仅仅是为了显示自然界的美妙，或者在某种程度上，显示一下数学的威力。我们并不装作懂得怎么可能在这么小的篇幅写下这么多的东西，但式（28.3）、（28.4）的确包含了发电机如何工作，光如何作用，以及所有电与磁现象的道理。当然，为了使描述完善起见，我们还必须知道所包含的物质行为的某些知识——即物质性质，这在式（28.3）中并未得到适当的表述。

为了完成我们对19世纪世界的描述，必须提及发生在那一世纪的，麦克斯韦在其中也做过许多工作的另一个巨大的综合，这就是热现象与力学现象的综合。我们将很快地学习到这方面的内容。

在20世纪必须补充说明一下的是发现牛顿的力学定律完全错了。必须引进量子力学去修正它。当物体尺度充分大时牛顿定律才近似有效。直到最近，这些量子力学定律才与电的定律结合起来而形成一组称为量子电动力学的定律。另外，还发现了许多新的现象，其中首先是1898年[1]贝克勒尔发现的放射性现象——他只是在19世纪偷偷地把它带了进来。在发现这个放射性现象后，跟着就产生了关于原子核和

新型力的知识，这些力不是引力，也不是电力，而是新的粒子间的另一种相互作用，这是至今仍未被阐明的一个课题。

对于那些知识渊博的咬文嚼字者（例如偶然读到此文的教授们），我们应补充一点：当我们说式（28.3）是电动力学知识的完整表述时，我们并不完全准确。有一个在19世纪末还没有完全解决的问题。当我们想计算来自所有电荷的场，包括来自此场所作用的电荷本身的场时，在寻找例如从电荷到该电荷本身的距离以及某一量除以该距离时遇到了麻烦，因为此距离为零。关于如何处理电场中由场所作用的电荷本身产生的这部分场的问题，至今还未解决。所以我们让它留着；既然对此难点尚无完善的解决办法，我们就尽可能地避开它。

§28-2 辐射

以上就是世界面貌的概括。现在我们用它来讨论称为辐射的一些现象。为了讨论这些现象，我们必须从式（28.3）中选出跟距离成反比而不是跟距离平方成反比的那一项来。当我们终于找到那一项时，发现它的形式是那么简单，以致只要把它作为远处运动电荷产生电场的“定律”，就完全可以用初等方法去研究光学和电动力学。我们将暂且把它作为已知的定律，到下一学年再详细地学习它。

在式（28.3）的诸项中，第一项显然与距离的平方成反比，第二项只是因延迟而作的修正，所以容易证明它们两者都随距离的反平方而变化。所有我们感兴趣的效应来自第三项，它倒并不十分复杂。这一项讲的是：看着电荷，并注意单位矢量的方向（我们可以把矢量的尾端投射到单位球的球面上）。当电荷来回运动时，单位矢量开始摆动，而单位矢量的加速度就是我们所要求的。就这些。这样

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_r}{dt^2} \quad (28.5)$$

就是辐射定律的表述，因为当我们离得足够远时，它是唯一重要的项，这时场的变化与距离成反比（与距离平方成反比的部分已衰减为很小，以致我们对它们已不感兴趣）。

现在我们可以稍稍地深入一步来研究一下式（28.5），看看它的意义是什么。假定一电荷以任意方式运动，而我们在远处观察它。暂且想象在某种意义上它被“点亮”了（虽然我们想要解释的是光）；我们把它想象为一个小的白点。于是我们将看到此白点在来回跑动。但是因为我们已经讲过的延迟的缘故，我们看不清楚它此刻究竟在如何跑。重要的是它以前怎么运动。单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 是指向电荷的表观位置的。显然， $\mathbf{e}_r$ 的尾端沿着稍稍弯曲的路线运动，因此它的加速度有两个分量。一个是横向分量，因为其尾端在上下运动；另一个是径向分量，因为它停留在球面上。容易论证后者要小得多，并且当 r 很大时与 r 的平方成反比。这很容易看出的，因为当我们想象把一给定的源移到很远很远时， $\mathbf{e}_r$ 的摆动就显得很小很小，并与距离成反比，但加速度的径向分量比距离的倒数变化得更快。所以对实际目的来说，我们只要将运动投射在单位距离的平面上就行。于是我们得到下述规则：想象我们看着运动电荷，并且我们所看到的一切都是被延迟的——就像一位画家想把风景画在单位距离远的屏上一样。当然，真的画家并不考虑光以一定速率行进这一事实，而是画下他所见到的世界。我们想看看他的画将会是什么样子的。于是我们看到代表电荷的一个点在画面上运动，这个点的加速度与电场成正比。这就是我们需要的一切。

因而式(28.5)就是辐射的完整而正确的公式；甚至相对论效应也都包含在其中了。然而我们常常需要将它应用于电荷以比较慢的速度运动一段不大的距离这样更简单的情况。既然它们运动得较慢，它们就不会从始点移动太大的距离，所以延迟时间实际上不变。于是规律就更简单，因为延迟时间是固定的。因而我们想象电荷在实际上差不多不变的距离作很小的运动。在距离 r 上的延迟是 r/c 。这样我们的规则变为如下：如果带电物体作很小的运动，并横向位移了距离 x (t)，则单位矢量 $\mathbf{e}_{r'}$ 的角位移就是 x/r ，既然 r 实际上不变， $d^2 \mathbf{e}_{r'}/dt^2$ 的 x 分量就是 x 本身在前一时刻的加速度[2]，最后我们得到所需的定律为

$$E_x(t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a_x \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (28.6)$$

只有 a_x 的垂直于视线的分量是重要的。我们来看为什么是这样。显然，如果电荷笔直朝着我们运动或背向我们运动，此方向上的单位矢量根本就不会摆动，于是它没有加速度。所以只有横向运动是重要的，即我们所看到的投影在屏上的加速度是重要的。

§28-3 偶极辐射子

作为电磁辐射的基本“定律”，我们打算假定式(28.6)是正确的，也就是说，由一个在很远距离 r 处作非相对论运动的加速电荷产生的电场近似取那个形式。此电场与距离 r 成反比，与投影到“视平面”上的电荷的加速度成正比，这个加速度不是现在的加速度，而是前一时刻所具有的加速度，延迟的量是时间 r/c 。在本章的其余部分我

们将讨论这一定律，以使我们能更好地理解其物理意义，因为我们打算用它去理解光和无线电传播的所有现象，诸如反射、折射、干涉、衍射和散射等。这是主要的定律，而且是我们所要求的。我们写下式（28.3）的其余部分只是作为一个阶梯，使我们能够估计式（28.6）在哪里适用以及它是如何得出的。

下一学年我们将更深入地讨论式（28.3）。暂且我们当它是正确的，但不仅仅是在理论的基础上。我们可以设计许多实验来说明此定律的特征。为此，我们需要一个加速电荷。它应是单个电荷，但是如果我们使许多电荷一起作同样的运动，我们知道这时的场将是每个电荷单独产生的效果的总和，因而只要将它们加在一起就行了。作为一个例子，考虑两根与信号发生器相连接的导线，如图28-1所示。我们的想法是这样的：信号发生器产生一个电位差或电场，在某一瞬时它把电子从A拉出，推向B，经过极短时间以后，它又使过程反过来，把电子从B拉出而注回到A！所以可以说在这两根导线中的电荷一会儿在A线与B线上都向上加速，过一会儿在A线与B线上又都向下加速。我们之所以需要两根导线与一个发生器，只是因为那是做到这一点的一种方法。其净效果如同A和B是单根导线，只有一个电荷在其上下加速一样。一根长度比光在一个振动周期内传播的距离短得多的导线叫做电偶振子。这样我们就有了应用定律的条件，此定律告诉我们此电荷产生一个电场，因而我们需要用仪器去探测电场，而这类仪器就是同一个东西——像A和B一样的一对导线！如果有电场作用在这样的装置上，电场将产生一个力把两根导线上的电子都拉上或拉下。此信号用接于A和B之间的整流器来探测，并用一根纤细导线将其输入一个放大器，信号在其中放大后，我们就能听到调制在无线电频率上的声频音调。当这一探头探到电场时，将会有有一个响亮的声音从喇叭中发出，当没有电场激励它时，就不会有声音。

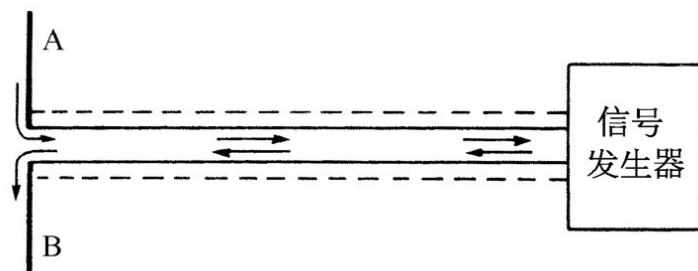


图28-1 高频信号发生器激励两根导线上的电荷上下运动

由于我们测量波所在的房间里还有其他一些东西，电场也将扰动这些东西上的电荷；电场使这些其他的电子上下运动，在这个过程中，电子也会对探头产生作用。所以为了使实验获得成功，必须把仪器放得相当靠近，这样，来自墙上和我们自己身上的影响——反射波——就比较小了。所以测出的现象的结果不会精确而完全地与式（28.6）相符，但将接近得足以使我们能够验证定律。

现在我们接上发生器来听音频信号。当处于位置1的探测器D与发生器G平行时（图28-2），我们发现一个强电场。在环绕G的轴的其他任何方位角上我们也发现同样大小的场，因为它没有方向性效应。另一方面，当探测器在位置3时场为零。这是对的，因为我们的公式表明场是由电荷的加速度对于视线的垂直投影引起的。当我们向下看G时，电荷朝着D或背离D运动，所以没有效应。因而它验证了第一个规则，即当电荷直接朝我们的方向运动时没有效应。其次，公式表明电场应垂直于 r ，并在G和 r 组成的平面内；所以如果我们把D放在1处而转过 90° ，应得不到信号。这正是我们所发现的，电场确实是竖直的，而不是水平的。当我们把D移到中间某角度时，我们看到最强的信号出现在D处如图所示的取向上，因为虽然G是竖直的，但它并不只简单地产生与G本身平行的场——起作用的是加速度在垂直于视线方向上的投影。在2处的信号比1处的弱，因为此处投影较小。

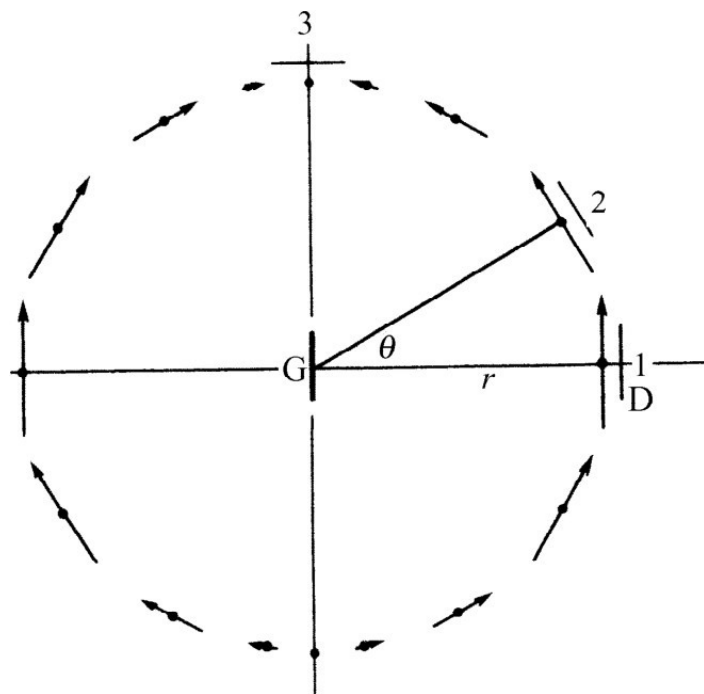


图28-2 位于球心作线性振动的电荷在球面上的瞬时电场

§28-4 干涉

接下来，我们试验一下当有两个源相距几个波长并排着时将发生什么现象（图28-3）。它的规律是：当两个源与同一发生器相联，其上电子以同一方式一起上下运动时，它们在1处的效应应当相加，因而总电场是两个电场的和，即为原来强度的两倍。

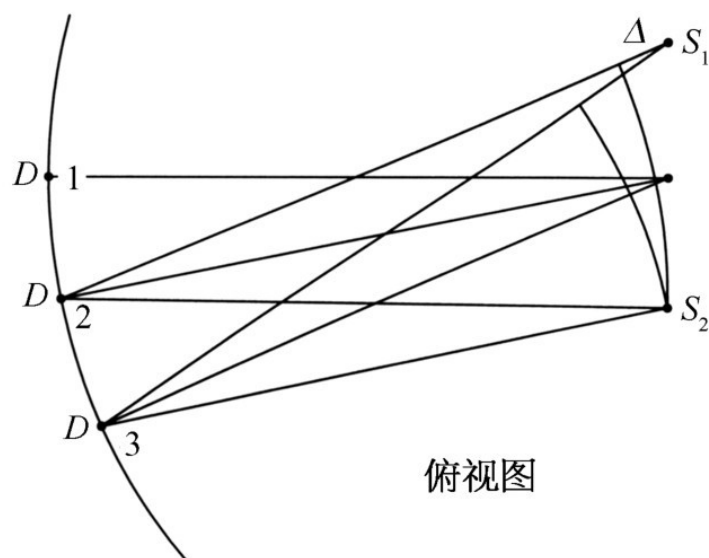


图28-3 两个源的干涉的示意图

现在出现了一个有趣的可能性。假如使 S_1 和 S_2 中的电荷都上下加速运动，但让 S_2 延迟一些时间，使它们的相位差 180° 。这样，在任一瞬时，若 S_1 产生的场沿某一方向， S_2 产生的场就沿相反方向，于是我们在1处就得到零效应。振荡的相位借助于将信号输送给 S_2 的一个管道可巧妙地加以调节。改变此管道的长度，我们可以改变信号到达 S_2 的时间，于是就改变了振荡的相位。调节这一长度，我们确实能够找到没有什么信号的地方，尽管 S_1 和 S_2 中的电子都在运动着！它们的电子都在运动这一事实是可以验证的，因为如果将一个源切断，就可观察到另一个源是在运动。所以，只要调节得恰当，两个源在一起能够产生零效应。

证明两个场的叠加是矢量叠加这一点是十分有趣的。我们刚才已验证了源的上下运动，现在我们来验证两个运动方向不平行的源。首先，让 S_1 与 S_2 恢复为同相；这就是说，它们又一起运动了。但现在把

S_1 转过 90° ，如图28-4所示。那么在1处我们应得两个效应之和，一为竖直的，另一为水平的。电场为此两个同相信号——它们同时达到最强又一起通过零——的矢量和；总的场应为在 45° 方向上的信号 R 。如果我们转动D以听到最大声音，它应在约 45° 方位，而非竖直方向。若我们将D转至与该方向垂直的方位，应得到零，那是很容易测量的。诚然，我们确实观察到这样的现象！

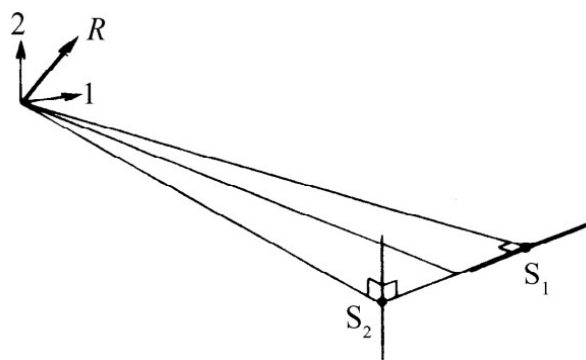


图28-4 两个源叠加时的矢量特征示意图

那么，推迟效应在哪里？我们如何演示信号被推迟了？我们可以利用大量装置来测量到达的时间，但另有一个非常简单的方法。再参看图28-3，假定 S_1 与 S_2 同相。它们一起振动，并在1处产生相等的电场。但是如果我们把D移到靠 S_2 较近，而离 S_1 较远的2处，那么，根据加速度应延迟一个 r/c 值的原理，如果两个延迟量不相等，两个信号就不再同相了。于是就能找到一个位置，使从D到 S_1 和到 S_2 的距离相差某一个量 λ ，在此位置上没有净信号。那就是说，距离 λ 即为光在发生器振荡半周期中所通过的距离。还可以把D再移过去一些，找到相差为一个整周的点；那就是说，信号从第一根天线 S_1 到达3处的延迟时间比第二根天线 S_2 到达3处的延迟时间正好长了电流振荡一次所

需的时间，因此在3处产生的两个电场又同相了。在3处信号又是强的。

这样就完成了我们对式(28.6)的一些重要特征的实验证明的讨论。当然我们没有真正验证电场强度按 $1/r$ 变化这一点，也没有验证磁场伴随电场行进这一点。要做到这几点需要相当复杂的技术，而且几乎不会增加我们对该点的理解。总之，我们已验证了那些对我们以后应用最重要的特征，下一学年我们将反过来再研究电磁波的另外一些性质。

[1] 应是1896年。——译者注

[2] $d^2 e_r / dt^2$ 的 x 分量应为 x 在前一时刻的加速度除以 r 。——译者注

第29章 干涉

§29-1 电磁波

在本章中我们将用较多的数学方法来讨论上一章的问题。我们已定性说明在两个源的辐射场中有极大与极小存在，现在的问题是用数学方法详细描述此辐射场，而不是只定性地描述它。

我们已经相当满意地分析了式（28.6）的物理意义，但尚有几点需要用数学方法分析一下。第一，如果一个电荷沿一直线作振幅很小的上下加速运动，在与运动轴成 θ 角的方位上的场就沿着与视线垂直的方向，并在包含加速度与视线的平面内（图29-1）。如果把距离叫做 r ，那么在 t 时刻电场的大小为

$$E(t) = - \frac{qa(t - r/c)\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad (29.1)$$

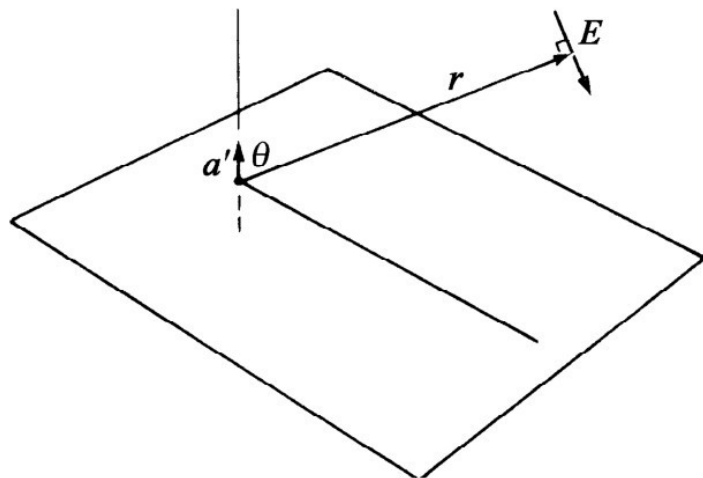


图29-1 由推迟加速度为 a' 的正电荷产生的电场 E

其中 $a(t-r/c)$ 是 $(t-r/c)$ 时刻的加速度，叫做推迟 加速度。

现在画出各种情况下电场的图像是很有意义的。当然，有趣的是因子 $a(t-r/c)$ 。为了理解它，可取最简单的情况，即 $\theta=90^\circ$ ，然后用图画出场来。我们以前所考虑的是站在某一位置上看该处的场如何随时间而变化，而现在我们来看一下在某一给定时刻，在空间不同位置上场是什么样的。所以，我们要的是能告诉我们在不同位置上电场如何的一幅“快照”。当然它取决于电荷的加速度。假如电荷起先作了某种特殊的运动：它原来静止着，突然以某种方式作加速运动，然后停止，如图29-2所示。过一会儿，我们就来测量不同地方的场。可以断言此场将如图29-3所示。每一点的场取决于前一时刻的加速度，而提前的时间即为延迟量 r/c 。越是远的点的场取决于越是提前的时刻的加速度。所以图29-3中的曲线在某种意义上其实就是“倒转”画的加速度作为时间函数的图；距离与时间以比例常数 c 联系起来，而 c 我们经常取作1。只要想一下 $a(t-r/c)$ 的数学性质，这一点是容易理解的。显然，如果使时间增加一个小量 Δt ，那么此时 $a(t-r/c)$ 的值将与距离减少一个小量 $\Delta r = -c \Delta t$ 所得的值相同。

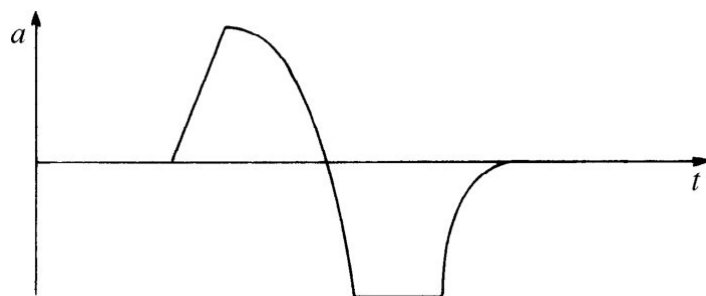


图29-2 某电荷的加速度与时间的关系

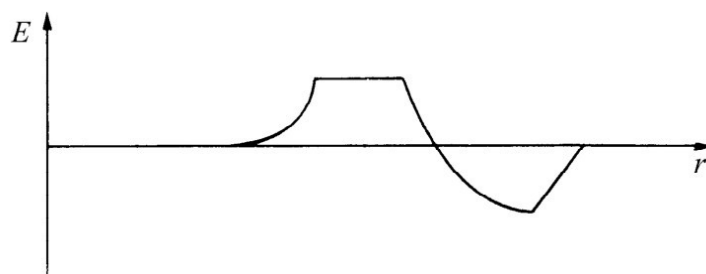


图29-3 下一时刻的电场与位置的关系（忽略 $1/r$ 引起的改变）

换一种说法：如果时间增加一个小量 Δt ，只要距离增加一个小量 $\Delta r = c \Delta t$ ，我们就能使 $a(t - r/c)$ 恢复到原来的值。那就是说，随着时间的延续，场像波一样从源点向外运动。这就是为什么我们有时说光像波一样传播的理由。说场被延迟了，或说电场随着时间的延续而向外运动，两者是等价的。

一个有趣的特殊情况是电荷 q 在那里以振荡方式作上下运动。我们在上一章中用实验方法研究过的就是这样一种情况，其任一时刻的位移 x 等于某一常量 x_0 ，即振荡的幅值，乘上 $\cos\omega t$ 。这样，加速度就是

$$a = -\omega^2 x_0 \cos\omega t = a_0 \cos\omega t, \quad (29.2)$$

其中 a_0 是最大加速度 $-\omega^2 x_0$ 。将此式代入式(29.1)，得

$$E = -q \sin \theta \frac{a_0 \cos \omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}. \quad (29.3)$$

现在，我们忽略角度 θ 和常数因子，来看一看它作为时间和位置的函数是什么样子。

§29-2 辐射的能量

首先，在任一特定时刻和任一特定地点，场的强度与距离 r 成反比，正如我们以前所提及的。现在，我们必须指出，波所包含的能量，或这样的电场所具有的能量效应，与场的平方成正比。因为，如果电场中有某种电荷或振子，那么让电场作用于其上时，它将使其运动。如果这是一个线性振子，则由作用在电荷上的电场产生的加速度、速度和位移与场成正比。因此在电荷中出现的动能与场的平方成正比。所以我们就把场所能传递给系统的能量当作与场的平方成正比。

这意味着当我们远离源时，源所能提供的能量减少了；事实上，它与距离的平方成反比。这有一个很简单的解释：如果我们想要在距离 r_1 处收集起包含在某一角锥中的波的全部能量（图29-4），同时又在另一距离 r_2 处收集之，我们发现在任一处单位面积的能量与 r 的平方成反比，但角锥所截的面积则直接与 r 的平方成正比。所以不论我们离得多远，从给定锥角的波中所能获取的能量是相同的！特别是，若在四周放置一圈吸收振子，则从整个波中所能获取的总能量是某一定值。因而， E 的振幅随 $1/r$ 而变化这一事实与存在一个永不散失的能

流以及一个不断行进着的、散布在越来越大的有效面积中的能量这一说法是一样的。这样我们就看到，当一电荷发生振荡以后，它就损失了永远不能收回的若干能量；此能量不断地向越来越远的地方散失，并不减少。因而，如果我们离得足够远，使我们的基本近似很好成立，电荷就不可能收回它所辐射掉的能量。当然能量仍存在于某处，并且可以被其他系统所收集。我们将在第32章中进一步研究这种能量“损失”。

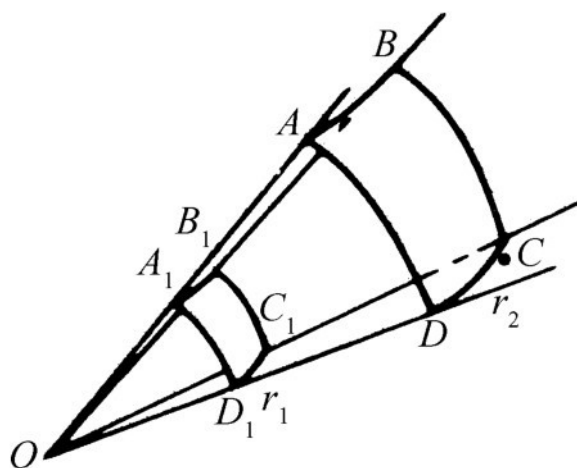


图29-4 包含在角锥 $OABCD$ 中的能流与测量的距离 r 无关

现在我们来较仔细地考虑式(29.3)所表示的波在给定的地点如何随时间变化，以及在给定时刻如何随位置变化。我们仍忽略常数及 $1/r$ 所引起的变化。

§29-3 正弦波

首先固定位置 r ，观察作为时间函数的场，它以角频率 ω 振荡着。角频率可以定义为相位随时间的变化率（每秒弧度）。我们已学过这样的量，因此现在我们对它应很熟悉。周期是振荡一次——即一

整周所需的时间，我们也已经得出过这个量，它是 $2\pi/\omega$ ，因为 ω 乘上周期是余弦的一周。

现在我们引入一个物理学中十分常用的新的量。这与相反的情况有关，即固定 t 而观察波作为距离 r 的函数。当然我们注意到，作为 r 的函数，波（29.3）仍是振荡的。这就是说，暂且不考虑所忽略的 $1/r$ ，当我们改变位置时，会看到 E 在振荡。因而，与 ω 类似，我们可以定义一个叫做波数的量，记为 k 。它被定义为相位随距离的变化率（每米弧度）。这就是说，当我们于一固定时刻在空间运动时，相位在改变着。

另有一个与周期相应的量，我们可以称之为空间的周期，但它常被称为波长，记为 λ 。波长是一个整周的波所占的距离。容易看出，波长是 $2\pi/k$ ，因为 k 乘以波长，即每米弧度的改变值乘上一周中的米数，应为一整周中相位改变的弧度数，而一周中相位必须改变 2π 。所以 $k\lambda = 2\pi$ 与 $\omega t_0 = 2\pi$ 恰好类似。

在我们所要讨论的波中，频率与波长之间有着确定的关系，但上述 k 与 ω 的定义都十分一般。这就是说，在其他物理条件下，波长与频率的关系不一定一样。但在我们的情况下，相位随距离的变化率容易决定，因为，如果把 $\phi = \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ 叫做相位，则 ϕ 对距离 r 的偏导数即变化率 $\frac{\partial\phi}{\partial r}$ 为

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right| = k = \frac{\omega}{c}. \quad (29.4)$$

同样的关系可以有許多表示法，如

$$\lambda = ct_0, \quad (29.5)$$

$$\omega = ck, \quad (29.6)$$

$$\lambda v = c, \quad (29.7)$$

$$\omega \lambda = 2\pi c. \quad (29.8)$$

为什么波长等于 c 乘周期？这很容易，因为如果我们停着等一个周期过去，以速度 c 传播的波将移动距离 ct_0 ，当然恰好移动了一个波长。

在除光以外的物理情况下， k 不一定与 ω 有这样简单的关系。若让距离沿 x 轴，那么对于以波数 k 和角频率 ω 沿 x 方向运动的余弦波，一般可将其公式写成 $\cos(\omega t - kx)$ 。

我们既已引进波长的概念，就可以再讲一些式(29.1)成立的条件。我们记得场是由几部分组成的，其中一部分与 r 成反比，另一部分与 r^2 成反比，其余的则衰减得更快。值得了解一下在什么情况下场的 $1/r$ 部分成为最重要的部分，而其余部分则相对地很小。当然，答案是“如果我们离得‘足够远’”，因为与距离平方成反比的项跟 $1/r$ 项比较起来最终变得完全可以忽略。多远才是“足够远”？答案是，定性讲，其他的项要比 $1/r$ 项小 λ/r 的量级。这样一来，只要我们超过几个波长，式(29.1)就是场的很好的近似了。有时把超过几个波长的区域称为“波区”。

§29-4 两个偶极辐射子

接下来我们来讨论两个振子的效应合成时的数学，以找出某一给定点的净场。在上一章所考虑的几种情况下，这是很容易的。我们将

首先对效应作定性描述，然后作较定量的描述。我们考虑简单的情况，振子的中心与探测器位于同一水平面上，而振动沿铅直方向。

图29-5（a）表示这样两个振子的俯视图，在此特例中它们位于南北方向，相距半个波长，并且同相位地一起振荡。我们称此相位为零相位。现在我们想知道在不同方向上的辐射强度。所谓强度，其意义就是每秒钟通过的场所携带的总能量，它与场的平方的时间平均值成正比。所以，当我们想要知道所看到的東西的光有多亮时，是指电场的平方，而不是电场本身（电场告诉我们静止电荷所感受的力的强度，但所通过的能量，以每平方米瓦特为单位，则与场的平方成正比。我们将在第31章中导出此比例常数）。如果我们从西边看此装置，两个振子贡献相等并且同相位，所以电场为单个振子所产生的两倍。因而强度为只有单个振子时的四倍（图29-5中的数字代表在该处的强度与只有单个单位强度的振子时该处强度的比）。而在沿振子连线的无论是南还是北的方向上，由于它们相隔半波长，一个振子的效应与另一个振子的效应恰好相差半周，因而其场加起来为零。在某一特定的中间角度（其实是 30° ）上强度是2，然后逐渐衰减，强度依次为4，2，0，等等。我们必须学习如何找出其他角度上的这些数。这是叠加两个具有不同相位的振动问题。

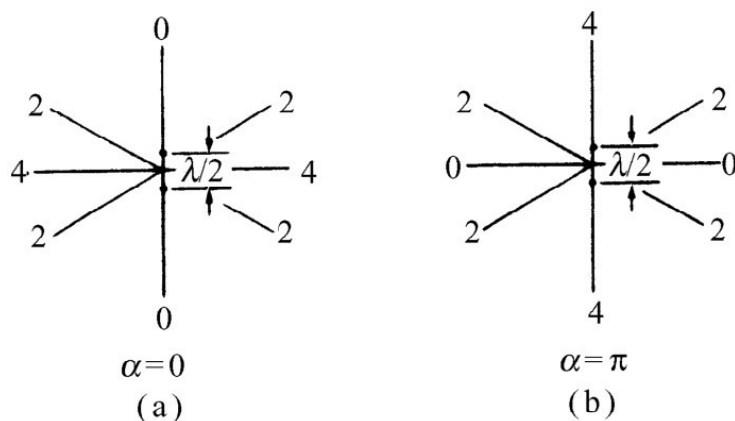


图29-5 来自相距半个波长的两个偶极振子的场在不同方向上的强度

(a) 同相 ($\alpha = 0$) ; (b) 相位差半个周相 ($\alpha = \pi$)

我们立即来看一下其他有趣的情况。假如两个振子仍相距半波长，但一个振子振动的相位 α 比另一个落后半个周相 [图29-5 (b)]。现在西边的强度是零，因为当一个振子正在“拉”时，另一个振子正在“推”。但在北边，来自较近一个振子的信号于某一时刻到达，来自另一振子的信号则在半个周期后到达。但后者在计时上原来就落后了半个周期，因而现在恰好与前者合拍（同时），所以在此方向上的强度为4个单位。在 30° 方向上的强度仍为2，正如我们以后可以证明的那样。

现在我们得到一个可能比较有趣的有趣情况。我们指出，振子间的相位关系之所以有趣，其理由之一来自束状无线电发射机。例如，我们建造一个天线系统，并且想要发送无线电信号，比如说到夏威夷。我们就如图29-5 (a) 那样装置天线，并用两根天线同相位地进行广播，因为夏威夷在我们的西面。而明天我们打算向加拿大阿尔伯塔 (Alberta) 广播。因为它在北面，不是西面，我们只要反转一根天线的相位，就能向北广播。因而我们可以建造具有各种排列方式的天线系统。我们所说的是最简单的方式之一；可以使它们更复杂，而且用改变各天线上的相位的办法就能把波束发送到各个方向，并把大部分功率发送到我们希望输送的方向上，而根本用不着移动天线！但在上述两种情况中，当我们朝阿尔伯塔广播时，我们在复活节岛 (Easter Island) 上浪费了许多功率，因而问是否可能只朝一个方向发送信号是有意义的。乍看起来我们会认为，用一对这样的天线其结果似乎总是对称的。所以，我们考虑一种能得出不对称结果的情况，以证明有变化的可能。

如果两根天线相距 $1/4$ 波长，而且北边一根的振动在时间上比南边的一根落后 $1/4$ 周期，那么将会发生什么情况（图29-6）？在西边我们得2，就如我们以后将看到的。在南面我们得零，因为若来自南边天线的信号于某一时刻到达，则来自北边天线的信号在时间上就晚 90° 到达，但它在相位上本来已落后 90° ，因而它到达时相位总的相差 180° ，故没有效应。另一方面，在北面，北边天线的信号比南边天线的信号在时间上早 90° 到达，因为它近了 $1/4$ 波长，但它的振动相位被调整得在时间上落后 90° ，那就刚好补偿了延迟差，于是两个信号一起以同相位出现，使场的强度为原来的两倍，能量为原来的四倍。

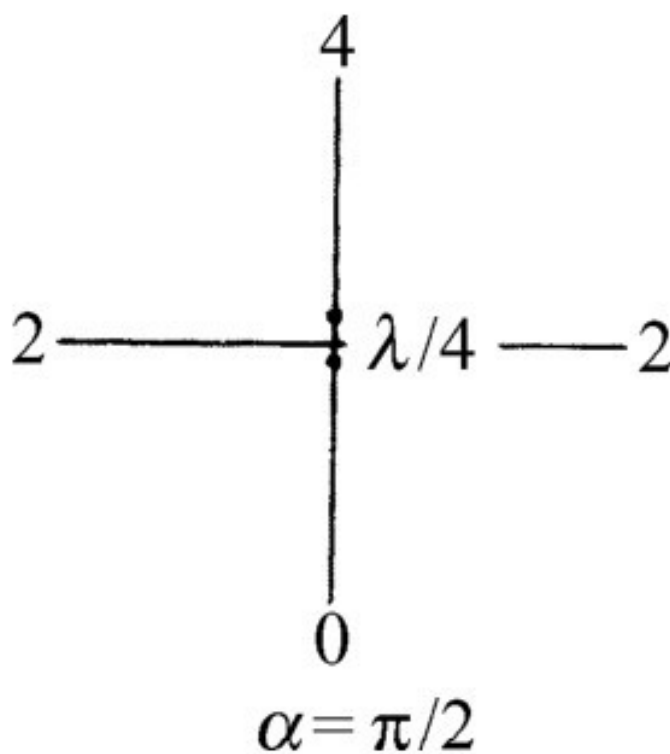


图29-6 向一个方向输送最大功率的一对偶极子天线

这样，在天线的排列与相位配置上作一些巧妙的安排，能够把功率全部发送到一个方向上。但它仍然分布在一个很大的角度上。能否

将它安排得使功率更尖锐地聚焦于某一特定方向上？我们再来考虑夏威夷的情形，在那里我们朝东和朝西发送波束，但它仍散播在很大的角度上，因为即使在 30° 方向上仍有一半的强度——我们在浪费功率。能不能做得更好一些？我们拿两根天线相距10个波长的情形来说（图29-7），它更接近于我们在上一章做过实验的相距几个波长而不是不到一个波长的情况。此时图像就大不相同了。

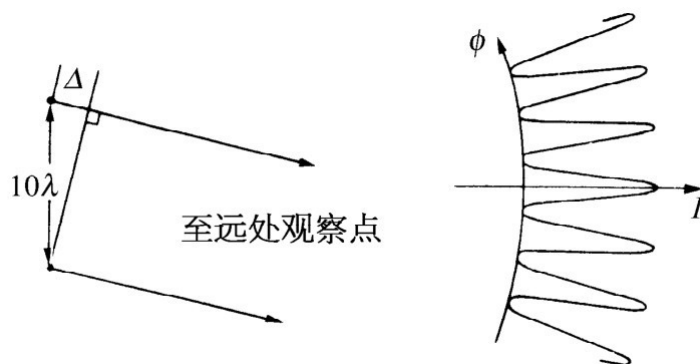


图29-7 两个相距 10λ 的偶极子的强度分布图

如果两个振子相距10个波长（我们取同相位的情况使之易于理解），可以看到在东西方向上它们同相，并得到很强的强度，为只有其中之一存在时的四倍。另一方面，在离开一个很小角度处，则到达时间相差 180° ，因而强度为零。精确地说，如果从每个振子画一直线到远处的一点，两距离之差 Δ 为 $\lambda/2$ ，即振动的半周，则它们将反相位。这时就出现第一个零点（图并没有按比例画出；它只是个草图）。这就意味着我们的确在所需要的方向上得到了一个尖锐的波束，因为只要方向稍稍移动一点儿，强度就没有了。但在实际应用时，比如我们正在设想建立一无线电广播装置，遗憾的是，如果在某一方向使程差 Δ 比原来的加倍，那么就得到一整周的相位差，这又恰好与同相位一样！于是就得到一系列的极大与极小，正像在第28章中用相距 2.5λ 的两个振子得到的情况一样^[1]。

那么，怎样才能把振子安排得可以摆脱这些额外的极大，或者所谓的“波瓣”呢？可以用相当有趣的办法摆脱这些不需要的波瓣。假如我们在已有的两根天线之间再放置另外一组天线（图29-8）。这就是说，最外边的两根天线仍相距 10λ ，但在它们之间，比如说每隔 2λ ，放置另一根天线，并都同相位地激励它们。现在有了六根天线，如果我们观察东西方向的强度，它们当然要比只有一根天线时强得多，场强将达六倍而强度将达三十六倍（场强的平方）。在这个方向上我们得到36个单位的强度。如果接着观察邻近的点，发现在大约以前强度是零的地方仍得到零，而再过去一些，在原来得到大“突起”的地方，现在得到一个很小的“突起”^[2]。让我们看一看为什么这样。

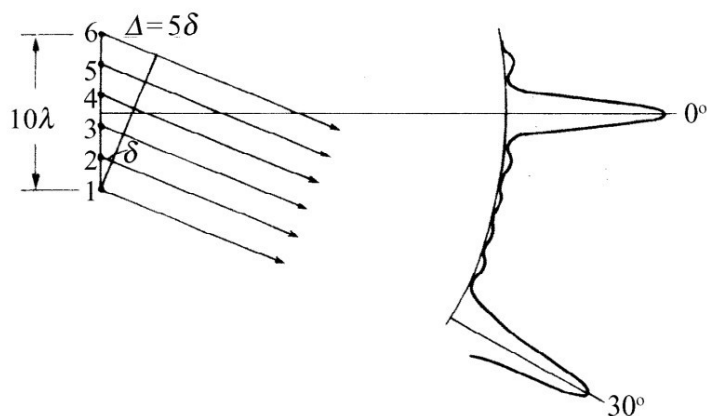


图29-8 六个偶极子天线装置和它的强度分布图的一部分

其理由是，虽然当距离 λ 恰好等于一个波长时我们可以预期得到一个大的突起，此时偶极子1和6的确同相位，并在该方向上正要一起加强，但3和4恰好与1和6在相位上差大约半个波长，因此虽然1和6一起推，3和4也一起推，但两者反相。于是在该方向上只有很小的强度——但仍有一点儿；它们并没有完全抵消。此类情况继续发生，我们就有了许多很小的突起，而在我们需要的方向上得到很强的波束。但在此特例中，会发生另外的情况，即：既然相邻偶极子之间的距离是

2λ ，那就可能找到一个角度，使得相邻偶极子之间的程差 δ 恰为一个波长，这样，来自所有偶极子的效应又同相了。每个偶极子比下一个延迟了 360° ，因而它们都同相地到达观察点，这样在该方向上就得到另一个很强的波束！在实际中很容易避免这一点，因为我们可以把偶极子靠得比一个波长更近。如果我们放进更多的天线，每根相隔得比一个波长更近，这种情况就不会发生。但当间隔比一个波长大，这种情况能够在某一角度上发生这一事实，在另外的应用中——不是在无线电广播中，而是在衍射光栅中——却是十分有趣而有用的现象。

§29-5 干涉的数学

至此，我们已完成对于偶极辐射子现象的定性分析，但我们还得学习如何定量地分析它。为了求出在最一般情况下，两个相互间本来就具有相位差 α ，强度 A_1 与 A_2 不相等的振子的振动源在某个特定角度的方向上的总效应，我们发现必须将两个具有相同频率、但不同相位的余弦加起来。很容易求出两者的相位差：它是由距离差引起的延迟和本来就具有的振动相位差两部分组成的。数学上，我们必须求出两个波的和 R

$$R = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

怎样求呢？

其实很容易，我们假定大家早已知道了怎样去求。不过，我们仍将稍微详细地概述一下步骤。首先，如果我们擅长数学并熟悉余弦和

正弦，就能方便地求得。最容易的是 A_1 与 A_2 相等的情况，假定它们都等于 A 。在这样的情况下，就有（这可以称为三角解法）

$$R = A [\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2)] . \quad (29.9)$$

在三角课程中，我们可能学到过下列公式

$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{1}{2}(A + B)\cos \frac{1}{2}(A - B). \quad (29.10)$$

若知道此式，就能立即把 R 写为

$$R = 2A\cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2\right). \quad (29.11)$$

可见我们得到了一个具有新的相位与新的振幅的波动。一般地说，其结果将是一个具有新的振幅（我们可以称之为合成振幅） A_R ，以同样频率振荡而产生相位（称为合成相位）为 ϕ_R 的波动。由此看来，我们的特例具有下列结果：合成振幅为

$$A_R = 2A\cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2), \quad (29.12)$$

而合成相位为两个相位的平均值，我们的问题就这样解决了。

现在假定我们记不起来两个余弦之和等于两角和之半的余弦乘以两角差之半的余弦的两倍。于是我们可以用另一个更带几何性质的分析方法。任一 ωt 的余弦函数可以看作一个旋转矢量的水平投影。假定有一长度为 A_1 的矢量 A_1 随时间旋转着，因而它与水平轴的夹角为 $\omega t + \phi_1$ （我们不立即考虑 ωt ，并看出这不会带来什么影响）。假定我们

在时刻 $t=0$ 拍摄快照，尽管图像实际上以角速率 ω 在旋转（图29-9）。 A_1 在水平轴上的投影正好是 $A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ 。现在，当 $t=0$ 时，第二个波可用另一个长为 A_2 ，与水平轴夹角为 ϕ_2 ，也在旋转着的矢量 A_2 来代表。它们都以相同的角速度 ω 旋转着，因而两者的相对位置是固定的。系统像一个刚体一样旋转着。 A_2 的水平投影为 $A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ 。但从矢量理论知道，如果我们用一般的平行四边形法则将两个矢量加起来，并画出合矢量 A_R ，则其 x 分量为其他两个矢量的 x 分量之和。这就解决了我们的问题。很容易验证这一方法为我们上面处理的 $A_1=A_2=A$ 这一特殊情况提供了正确的结果。在这一情况下，从图29-9可见 A_R 位于 A_1 与 A_2 的中间，并与它们都构成 $(\phi_2 - \phi_1)/2$ 的角。从而可见 $A_R = 2A \cos[(\phi_2 - \phi_1)/2]$ ，与前述一样。从三角形也可看出，当 A_1 与 A_2 的幅度相等时，旋转着的 A_R 的相位是 A_1 与 A_2 的相角的平均值。显然，我们也容易解出振幅不相等的情况。可以把此称为解决问题的几何方法。

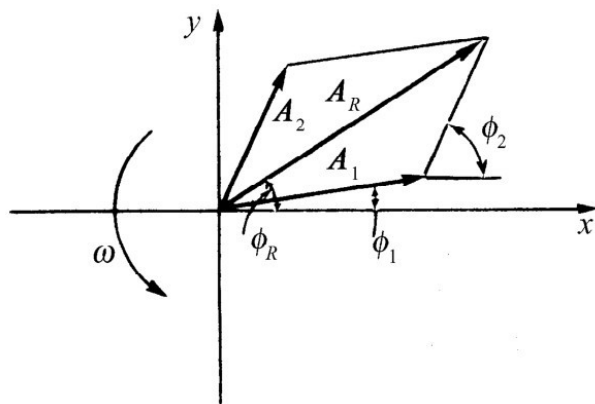


图29-9 合成两个余弦波的几何方法。想象整个图以角频率 ω 逆时针旋转着

还有另一种解此问题的方法，称为分析法。此方法是，写出一些能表达与图29-9同样意义的东西，而不是去真的作那样的图。即我们

不去画矢量，而是写出代表每个矢量的复数。复数的实部就是实际物理量。这样，在我们的特殊情况下，波动可用这种方式来写：

$A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}$ [其实部为 $A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$] 和 $A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}$ 。现在可将两者相加

$$R = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) e^{i\omega t} \quad (29.13)$$

或

$$\hat{R} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} = A_R e^{i\phi_R}. \quad (29.14)$$

这样就解决了我们要求解的问题，因为它代表叠加结果是模为 A_R 、相角为 ϕ_R 的复数。

为了明白这种方法是如何进行的，我们来求振幅 A_R ，它就是 $\hat{R}$ 的“长度”。为了得到一个复量的“长度”，我们常用它的复共轭去乘它，这样得到长度的平方。复共轭具有同样的表示式，只是 i 前面的符号相反。这样我们得到

$$A_R^2 = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})(A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}). \quad (29.15)$$

将此乘出，得 $A_1^2 + A_2^2$ （这里的 e 被消去了），而交叉项则为

$$A_1 A_2 [e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{i(\phi_2 - \phi_1)}],$$

因为

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta.$$

这就是说， $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ 。最终结果就成为

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (29.16)$$

可见，这与图29-9中用三角规则得到的 A_R 的长度一致。

这样，两效应的总和为只有一个源存在时所得的强度 A_1^2 ，加上只有另一个源存在时所得的强度 A_2^2 ，再加上一修正项。这个修正项称为干涉效应。它实际上就是把两个强度简单地加起来所得的结果与实际发生的情况两者之间的差别。不论它是正的还是负的，我们都称之为干涉（干涉[3]在一般语言中意味着对抗或妨害，但物理学上我们常不按语言原意来使用！）。如果干涉项是正的，我们就称之为相长干涉，尽管它在除物理学家以外的任何人听来是奇怪的[4]！相反的情况则为相消干涉。

现在来看如何把适用于两个振子情况的一般公式（29.16）应用到我们作过定性讨论的特殊情况中去。为了应用这个一般公式，只要找出存在于到达给定点的两信号之间的相位差 $\phi_1 - \phi_2$ 就行了（它当然只依赖于相位差，而不依赖于相位本身）。所以，我们来考虑两个具有相同振幅，相隔某一距离 d ，并有固有相对相位 α （当一个相位为零时，另一个相位为 α ）的振子的情况。我们问与东西线成 θ 方位角的方向上强度是多少[注意这不是出现在图（29.1）中的同一个 θ 。我们也曾为究竟是用一个像  那样不常用的符号还是用常用的符号 θ 而举棋不定（图29-10）]。相位关系可以这样来找到：注意到从 P 点到两个振子的程差是 $d \sin\theta$ ，因而由此提供的相位差是 $d \sin\theta$ 所含的波长数乘以 2π （内行人可能会用波数 k ，即相位随距离的变化率，乘以 $d \sin\theta$ ，其实一样）。这样，由程差引起的相位差就是 $\frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$ ，但由

于两振子振动时间上的差，尚有附加的相位差 α 。所以到达时的相位差将是

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha + 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}. \quad (29.17)$$

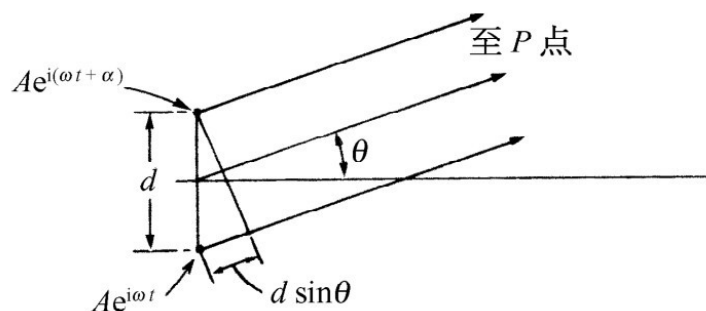


图29-10 两个振幅相等、相互间有 α 相位差的振子

此式适用于所有情况。接着只要将此表示式代入式(29.16)并使 $A_1 = A_2$ ，就能对两个强度相同的天线计算出所有不同的结果。

现在我们来查看在各种情况下会出现什么结果。例如，图29-5中在 30° 方向上的强度为2的理由如下：两振子相隔 $\lambda/2$ ，故在 30° 方向上， $d \sin \theta = \lambda/4$ ，因而

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi\lambda}{4\lambda} = \frac{\pi}{2},$$

于是干涉项为零（我们是将两个互成 90° 角的矢量相加）。合矢量是 45° 直角三角形的斜边，是单位振幅的 $\sqrt{2}$ 倍；将它平方，就得到一个振子强度的两倍。其他所有情况可以用同样方法得出。

[1] 第28章中并没有具体讲到两个振子相距 2.5λ 。——译者注

[2] 其实零点在靠近原来的一级极大处，以后各级次极大也不在原来的各级极大处，而在靠近原来强度为零的诸位置上。——译者注

[3] 这里指干涉的英语原文“interference”。——译者注

[4] “相长”原文为“constructive”，有“建设性的”之意，作者认为在一般人的心目中“干涉”是不含有“建设性的”，故说是“奇怪的”。——译者注

第30章 衍射

§30-1 n 个相同振子的合振幅

本章是上一章的继续，虽然名字由干涉变为衍射。至今没有人能令人满意地解释干涉与衍射之间的区别。这只是一个用法问题，它们之间在物理上并没有明确的重大区别。粗略地讲，我们能做的至多是说，当只有几个（比如说两个）源干涉时，其结果常称为干涉，而当源很多时，则衍射一词似乎更常用。因而，我们将不去管它是干涉还是衍射，而从上一章所述问题中断的地方继续下去。

我们现在要讨论这样的情形：有 n 个等间距的振子，振幅都相同，但彼此间相位不同，这或者是由于激励时不同相，或者是由于从某一个角度去观察它们从而延迟时间有所不同所致。不管怎么样，我们必须做这样的加法

$$R = A [\cos \omega t + \cos (\omega t + \phi) + \cos (\omega t + 2\phi) + \dots + \cos (\omega t + (n-1)\phi)] , \quad (30.1)$$

其中 ϕ 是在某一特定方向上观察时，一个振子与下一个振子的相位差。显然

$$\phi = \alpha + 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}.$$

现在必须把所有的项加起来。我们将用几何法来作。第一个矢量长为 A ，相位为零。下一个矢量长也是 A ，而相位等于 ϕ 。再下一个矢量长还是 A ，而相位等于 2ϕ ，等等。显然，我们正在围成一个 n 边的等角多边形（图30-1）。

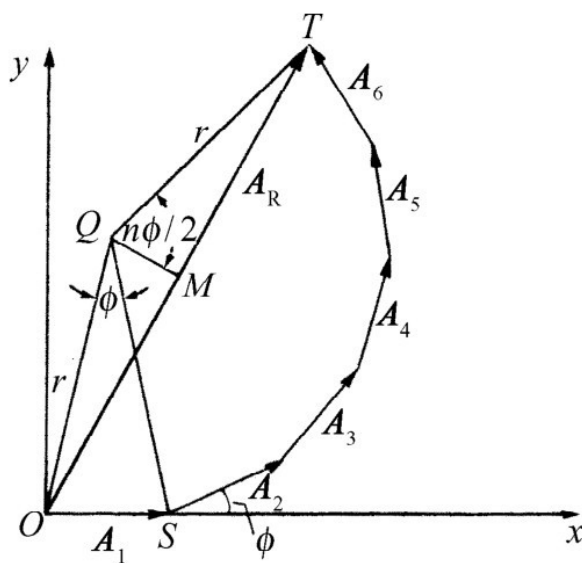


图30-1 $n=6$ 的等间距、相继净相位差为 ϕ 的源的合振幅

这些矢量的顶点当然都在圆周上，于是只要求出这个圆的半径，就很容易求得净振幅。假定 Q 是此圆的圆心，可以看出角 OQS 正好就是相角 ϕ （这是因为半径 QS 跟 A_2 与 QO 跟 A_1 构成相同的几何关系，所以它们之间构成的角也为 ϕ ）。这样一来，半径 r 必须满足 $A=2r \sin \phi/2$ ，于是 r 就确定下来了。但大角 OQT 等于 $n\phi$ ，因而可得 $A_R=2r \sin (n\phi/2)$ 。联立这两式以消去 r ，得到

$$A_R = A \frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)}, \quad (30.2)$$

合强度就是

$$I = I_0 \frac{\sin^2(n\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}. \quad (30.3)$$

现在我们来分析这一表示式，并研究它的一些结果。首先，我们可用 $n=1$ 来验证此式。结果是对的， $I=I_0$ 。接着用 $n=2$ 来验证它：将 $\sin\phi$ 写为 $\sin\phi=2\sin\phi/2\cos\phi/2$ ，可得 $A_R=2A\cos\phi/2$ ，与式（29.12）一致。

促使我们考虑 n 个源叠加的思想是，我们应该在某一方向得到比另一方向大得多的强度；即只有两个源存在时出现的一些邻近的极大，其强度将会变小。为了看出这一结果，作由式（30.3）得出的曲线，把 n 当作很大的数，并在 $\phi=0$ 附近作图。首先，如果 ϕ 确实为零，就得到 $0/0$ ，但如果 ϕ 是无穷小，两个正弦平方之比就是 n^2 ，因为此时正弦与角度近似相等。这样，曲线极大值的强度就等于 n^2 乘以一个振子的强度。这很容易明白，因为如果它们都同相位，则各小矢量间没有相对的角度，并且所有 n 个矢量都相加，因而总振幅大了 n 倍，强度大了 n^2 倍。

当相位 ϕ 增加时，两个正弦之比开始下降，而当 $n\phi/2=\pi$ 时，它第一次达到零，因为 $\sin\pi=0$ 。换句话说， $\phi=2\pi/n$ 对应于曲线中的第一个极小值（图30-2）。按照图30-1中的箭头所发生的情形来说，第一个极小值发生在最后的箭头回到起点时；这意味着在所有箭头中累积起来的总角度，即第一个振子与最后一个振子之间总的相位差，必须是 2π ，以完成一个圆周。

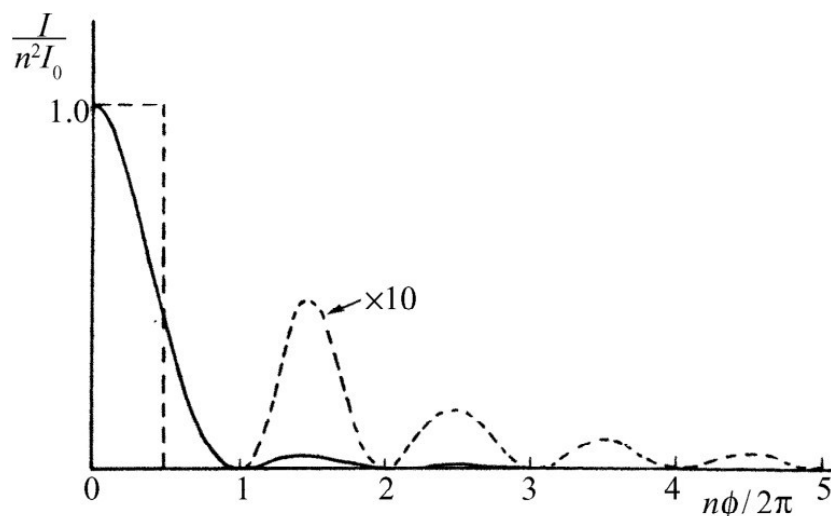


图30-2 大量等幅度振子的总强度与相角的函数关系

接下来看下一个极大值，我们曾希望它比第一个极大值小得多。我们不准备精确地求出极大的位置，因为式（30.3）的分子与分母是变化的，但当 n 很大时， $\sin \phi/2$ 变化得比 $\sin (n\phi/2)$ 慢得多，所以当 $\sin (n\phi/2)=1$ 时与极大值很接近。 $\sin^2 (n\phi/2)$ 的下一个极大值出现在 $n\phi/2=3\pi/2$ ，或 $\phi=3\pi/n$ 处。这对应于箭头已绕了一圈半。将 $\phi=3\pi/n$ 代入公式以求得极大值的大小，发现分子中 $\sin^2 (3\pi/2)=1$ （因为这正是我们为什么取这一角度的原因），而分母中则有 $\sin^2 (3\pi/2n)$ ，现在如果 n 足够大，则此角度很小，正弦就等于角度；因而对一切实际问题来说，可以令 $\sin (3\pi/2n)=3\pi/2n$ 。这样我们求得这一极大的强度为 $I=4n^2 I_0/9 \pi^2$ 。但 $n^2 I_0$ 是主极大强度，因而 I 为 $4/9 \pi^2$ 乘以主极大强度，它只有主极大强度的0.045倍左右，不到5%！当然在更远处还有一些越来越小的强度。所以我们有了一个两边伴有很弱的次极大的尖锐的中央极大。

可以证明整个曲线包围的面积，包括所有小的突起在内，等于 $2\pi n I_0$ ，即图30-2中虚线所表示的矩形面积的两倍。

现在我们来进一步考虑在不同情况下如何应用式（30.3），并试图理解所发生的情况。设所有的源都在一直线上，如图30-3所示。有 n 个源，都相距 d ，并假定相邻源之间的固有相位差是 α 。当我们在与法线成 θ 角的方向上观察时，如以前所讨论的，由于每两个相继源之间在时间上的延迟，就有一个附加的相位差 $2\pi d \sin\theta / \lambda$ 。因而

$$\phi = \alpha + 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \alpha + kd \sin \theta. \quad (30.4)$$

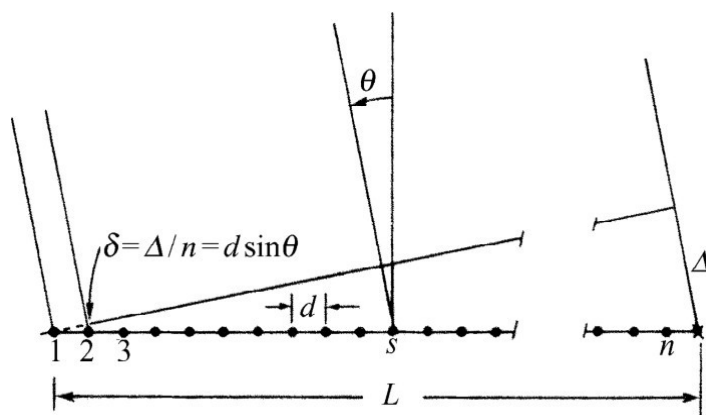


图30-3 以相角 $\alpha_s = s\alpha$ 方式激励的 n 个相同振子的直线状排列

首先来看 $\alpha = 0$ 的情形。这就是说，所有的振子同相位，而我们想知道强度与 θ 角的函数关系如何。为了找出它，只要将 $\phi = kd \sin\theta$ 代入公式（30.3），看看会发生什么情况就行。首先，当 $\phi = 0$ 时有一极大值。这意味着当所有的振子同相位时，在 $\theta = 0$ 的方向上有一很大的强度。另一方面，一个有趣的问题是，第一个极小值在哪里？它出现在 ϕ

$=2\pi/n$ 处。换句话说，当 $2\pi d \sin\theta / \lambda = 2\pi/n$ 时，我们得到曲线的第一个极小值。若去掉这些 2π 以使我们看得更清楚一些，则由它可得：

$$nd \sin\theta = \lambda . \quad (30.5)$$

现在我们来理解为什么在该处得一极小值的物理意义。 nd 是排列的总长度 L 。参照图30-3，可得 $nd \sin\theta = L \sin\theta = \Delta$ 。式（30.5）所说的就是当 Δ 等于一个波长 时，我们得到一个极小值。那么，为什么当 $\Delta = \lambda$ 时会得到极小值？因为这时不同振子的贡献在相位上被均匀地分布在从 0° 到 360° 之间。图30-1中的箭头绕了一个整圈——我们在把所有方向上的相同的矢量加起来，所以总和为零。因而当我们处于使 $\Delta = \lambda$ 的角度时，就得到一个极小值。这是第一个极小值。

式（30.3）还有一个重要的特性，就是如果 ϕ 角增加 2π 的任意倍，其值不变。所以我们将 $\phi = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ 等等处得到另一些主极大值。在这些主极大值附近又重复出现图30-2的图形。我们会自问，导致这另一些主极大值的几何条件是什么？条件是 $\phi = 2\pi m$ ，其中 m 是任意整数。那就是 $2\pi d \sin\theta / \lambda = 2\pi m$ 。除以 2π ，得到

$$d \sin\theta = m\lambda . \quad (30.6)$$

这看起来有点像另一个公式（30.5）。但并非如此，那个公式是 $nd \sin\theta = \lambda$ 。其区别是，在这里我们必须注视个别的源，当我们说 $d \sin\theta = m\lambda$ 时，就意味着我们处于使 $\delta = m\lambda$ 的角度 θ 。换句话说，此时每一个源都有一定贡献，而相邻源之间相位差为 360° 的整数倍，从而使贡献同相位，因为相位相差 360° 与同相位是一样的。所以它们的贡献都同相位，并产生上文讨论过的对应 $m=0$ 的同样的极大值。次级凸起，即图形的整个形状，恰好与 $\phi=0$ 附近的相同，两边也有同样的一些极小

值，等等。这样一来，这种排列就会向不同的方向发射光束，每一束都有一个很强的主极大值和若干个弱的“边瓣”。这些不同的强光束按照 m 的值分别称为零级光束，一级光束，等等。 m 称为光束的级。

注意，如果 d 小于 λ ，式（30.6）除 $m=0$ 外没有解，所以若间距太小的话，将只有一个可能的光束，即集中于 $\theta=0$ 处的零级光束（当然，在反方向也有光束）。为了得到次级主极大值，必须使排列的间距 d 大于一个波长。

§30-2 衍射光栅

在技术上可以将天线与导线安排得使所有小振子（或天线）的相位相同。问题是对光我们是否也能这样做，以及如何做。现时我们还不能真正地建立起一个光频无线电台，并将它们用无限小的导线连接起来，以给定的相位激励它们。但有一个与之等效的很方便的方法。

假如我们有许多平行导线，彼此间隔相同的间距 d ，并有一个很远（实际上是无限远）的无线电频源，它发射一个电场，此场以相同相位到达每一导线（源是那么远，以致对所有的导线来说时间的延迟都相同。有人会用曲线形排列来达到此点，但我们采用平面的情形）。于是外电场将驱使每一导线中的电子上、下运动。也就是说，从原来的源发射的场将激励电子上、下运动，这种运动电子就成了新的发射源。从某一个源发出的光波能激起一块金属中的电子运动，而这些运动又产生了它们自己的波，这一现象称为散射。因而我们只要架起许多导线，使之间隔相等，并以远处的无线电频源激励它们，就能得到所需的情况，无需许多特殊的布线。如果投射是法向的，相位就相同，我们将正好得到刚讨论过的情况。因此，若导线间隔大于波

长，就可在法向得到很强的散射强度，而在另外的某些方向也能得到由式（30.6）给出的很强的散射强度。

这个方法对光也适用！用一块平玻璃片代替导线，在其上刻以凹槽，使光在每个刻痕处的散射与玻璃的其余部分略有不同。如果我们将光照射在玻璃上，每个刻痕就成为一个源，假如使刻痕的间距很小，但不小于波长（要小于波长在技术上几乎是不可能的），那么我们会预期产生一个十分奇怪的现象：光不仅会笔直地通过去，而且按刻痕间隔的大小，在某一有限的角度上也会出现强光束！这类东西实际上已制造出来，并在普遍使用，——它们被称为衍射光栅。

有一种衍射光栅只是一片透明、无色的平板玻璃，其上刻有刻痕。每毫米常有几百条刻痕，它们被排列得非常仔细，使间距都相同。此光栅的效果可以用下述办法看出。用投影器将一竖直的光线（狭缝的像）投射到墙上。将光栅放进光束（使刻痕竖直），即可看到原来的光线仍在那里，但除此之外在两边还附加有另一个彩色的明亮光斑。这无疑是光缝在一宽广角度上散开的像，因为式（30.6）中的角度 θ 取决于 λ ，而我们知道，不同颜色的光是与不同的频率，亦即不同的波长对应的。最长的可见光波长是红色的。由于 $d \sin\theta = \lambda$ ，它应有一较大的角度。事实上，我们确实发现红色在离开中心像较大的角度上！在另一边应也有一束光，我们在屏幕上也的确看到了。再者，当 $m=2$ 时，式（30.6）还应有另一个解。我们的确看到那里有一个模模糊糊的很弱的光束，再过去甚至还有一些光束。

我们刚才论证过，所有这些光束应该是等强度的，但如今它们并非如此，而且事实上即使是左、右两边的第一级光束都不相等！原因是光栅被仔细地恰好做成这样。怎么做呢？如果光栅由宽度无限小、间隔均匀、非常细的刻痕组成，那么所有的强度的确会相等。但是，

事实上，虽然这只是最简单的情形，我们也可以考虑一个由一对对天线组成的阵列，并且一对天线中的每一根都有一定的强度和相对相位。假使这样的话，就可能对不同的级得出不同的强度。光栅常刻成小“锯齿”形，以代替对称的小凹槽。小心地安排“锯齿”，可以使投向光谱某一特定级的光比另外的级更多。在实际光栅中，我们总希望在某一级上的光尽可能多。这似乎是招徕麻烦的事情，但却是很聪明的做法，因为它使光栅更有用了。

至此，我们讨论了所有源的相位相等的情况。但我们也有一个相邻源的相位相差 α 时 ϕ 的公式。那需要将天线绕成彼此间有一小的相移。对光能这样做吗？可以，我们很容易做到这一点。假如在无限远处有一光源，它处在一定的倾角上使光以角 θ_{in} 入射，而我们想讨论以角 θ_{out} 出射的散射光（图30-4）。 θ_{out} 与上述的 θ 相同，但 θ_{in} 则只是借以使每个源的相位不同：来自远处激励源的光先投射到一个刻痕，接着投射到下一个刻痕，等等，一个与下一个之间有一相移，此相移即为 $\alpha = -2\pi d \sin\theta_{\text{in}}/\lambda$ 。因而，对于入射光与出射光都有倾角的光栅，就有公式

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta_{\text{out}}}{\lambda} - 2\pi \frac{d \sin \theta_{\text{in}}}{\lambda}. \quad (30.7)$$

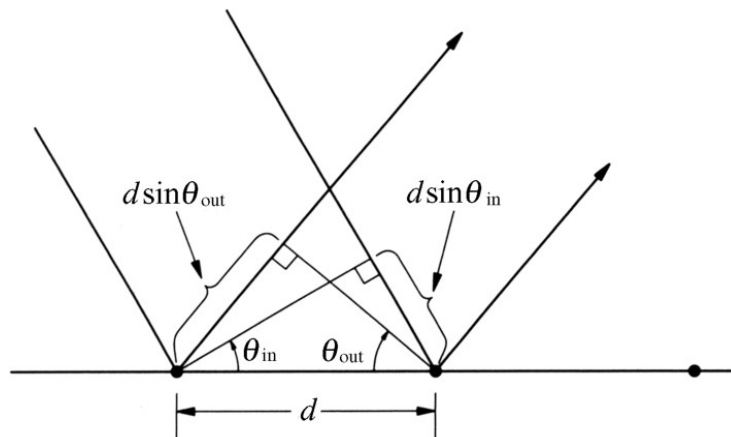


图30-4 从光栅上相邻划线散射的光线的程差是 $d \sin \theta_{\text{out}} - d \sin \theta_{\text{in}}$

我们来看看，在这些情况下，在哪里能得到极强。当然，极强的条件是 ϕ 应为 2π 的整数倍。有几个有趣之点值得注意。

一个颇有趣的是与 $m=0$ 对应的情况，其中 d 小于 λ ；实际上，这是唯一的解。在这种情况下，可得 $\theta_{\text{out}} = \theta_{\text{in}}$ ，这意味着光以与激励光栅的光同样的方向出射（图30-4）。我们会认为光“直接透过去”了。不，我们所讲的是另一束光。直接透过的光是来自原来的光源；我们所讲的则是由散射产生的新的光。它说明散射光正沿着原来光的方向行进，事实上它会与之干涉——这是我们以后要研究的情形。

对同一情况还有另一个解。对于给定的 θ_{in} ， θ_{out} 可以是 θ_{in} 的补角。因此我们不仅可在与入射光束相同的方向上得到一光束，而且还可以在另一方向上得到一光束，如果仔细想一下，此光束位于入射角等于散射角的方向上。这个光束称为反射光束。

这样我们开始理解反射的基本机理：入射光使反射体中的原子发生运动，从而反射体就产生一束新的波，散射方向的一个解——当散

射源的间距与波长相比很小时则为唯一的解——是使光出射的角度等于其入射的角度！

其次，我们来讨论当 $d \rightarrow 0$ 时的特殊情况。这就是说，比如我们刚好有一块固体，其长度是有限的。另外，我们要使从一个散射源到下一个散射源的相移趋近于零。换句话说，我们在两根天线间放进越来越多的天线，以至于每个相位差变得很小，但天线的数目却以这种方式增加，使一端至另一端之间总的相位差为常数。我们来看一看当保持一端至另一端的相位差 $n\phi$ 为常数（比如说 $n\phi = \Phi$ ），而让天线数目趋向无限多，从而每个相移 ϕ 趋近于零时，式（30.3）将怎么样。但现在 ϕ 很小，故 $\sin\phi = \phi$ ，若我们仍把 $n^2 I_0$ 当作光束中央的最大强度 I_m 的话，则

$$I = 4I_m \sin^2 \frac{1}{2} \Phi / \phi^2, \quad (30.8)$$

这一极限情况如图30-2中所示。

在这种情况下，我们看到了与有限间隔 $d > \lambda$ 同样类型的图；所有边瓣实际上与以前相同，只是没有较高级的极大值。如果散射源都同相，我们就在 $\theta_{\text{out}} = 0$ 的方向上得一极大值，而在距离 d 等于 λ 时得一极小值，同有限的 d 与 n 的情况正好一样。因而若用积分代替累加，我们甚至可以分析散射源或振子连续分布的情况。

作为一个例子，设有一长列振子，其电荷沿着排列方向振动（图30-5）。自这种排列发出的光的最大强度所在方向与直线垂直。在赤道平面的上、下有少量的强度，但很微弱。利用这一结果，我们就可以处理更复杂的情形了。假如我们有一系列这样的线，每一条线只在

与线垂直的平面上产生光束。寻求发自一系列长导线（而不是无限小导线）的光在不同方向上的强度，与寻求发自无限小导线的光是同一个问题，只要我们限于在与导线垂直的中心平面上观察；因为这时我们所累加的正相当于来自每根长导线的贡献。这就是为什么我们实际上虽然只分析了小天线，却也可用于具有狭长槽的光栅的缘故。每个长槽只在自己的方向^[1]产生效果，上、下则没有，但它们水平地相继排列，故在水平方向产生干涉。

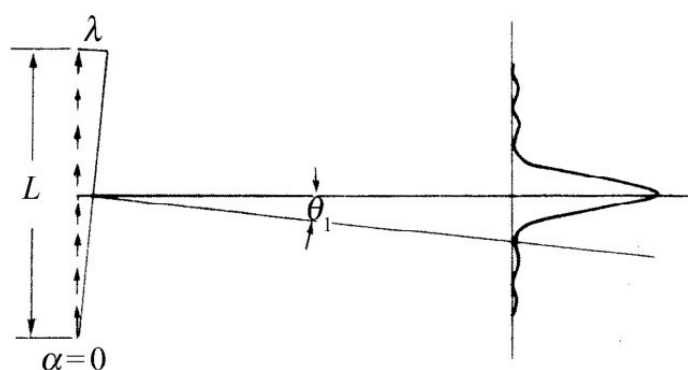


图 30-5 连续排列的振子的强度花样有一个单一的极大值和许多微弱的“边瓣”

这样，利用散射源在直线、平面和空间的不同分布，就能构成更多的复杂情形。我们首先所做的是考虑直线上的散射源，刚才我们已把分析推广到许多细长条；只需作必要的累加，将来自各散射源的贡献加起来，就能求出结果。其中的原理往往是同样的。

§30-3 光栅的分辨本领

现在我们能够理解许多有趣的现象了。例如，考虑利用光栅来分离波长的情况。我们已注意到光栅可以使整个光谱散布在屏幕上，因而光栅可用作将光分成不同波长的仪器。其中有一个有趣的问题是：

假如有两个频率略有不同或波长略有不同的源，问它们的波长要靠得多近才能使光栅不能分辨其中实际上有两个波长？红色与蓝色分得很清楚。但当一个波是红色的而另一个波略微更红一些，但非常接近，那么它们可以靠得多近？这叫做光栅的分辨本领，分析这个问题的一种方法如下。假定对某种颜色的光，我们恰巧在某个角度上得到其衍射光束的极大值。如果改变波长，相位 $2\pi d \sin\theta / \lambda$ 就不同，当然极大值就出现在不同的角度上。这就是红色与蓝色为什么被散开的原因。为了使我们能够看清楚它，角度必须差多少？如果两个极大值刚好彼此重合，我们当然不能看清楚它们。如果一个极大值与另一个极大值离得足够远，那么我们就能看到在光的分布中有一双峰或两个突起部分。为了能够恰好辨认出双峰，下述简单的判据（称为瑞利判据）是常用的，那就是：一个峰的第一极小值应位于另一个峰的极大值处。这样就很容易计算当一个极小值位于另一个极大值处时波长的差为多少。最好的计算方法是几何方法。

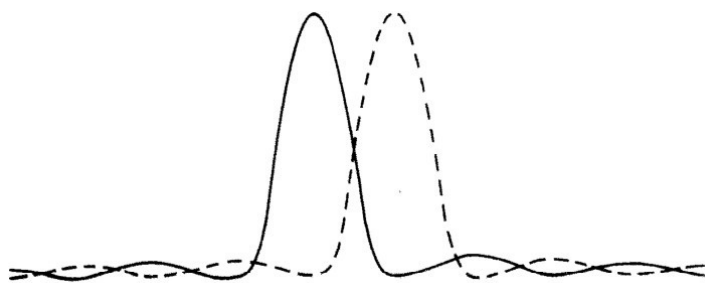


图30-6 瑞利判据的说明。一个花样的极大值落在另一个花样的第一极小值上

为了使波长 λ' 有一极大值，距离 Δ （图30-3）必须是 $n\lambda'$ ，若我们正观察第 m 级光束，则它为 $mn\lambda'$ 。换句话说， $2\pi d \sin\theta / \lambda' = 2\pi m$ ，故 $nd \sin\theta$ （即 Δ ）为 $m\lambda'$ 乘上 n ，即 $mn\lambda'$ 。对另一波长为 λ 的光束，我们希望在該角度上有一极小值。那就是说，我们希望 Δ 恰好为比 $mn\lambda$ 多一个波长 λ 。即 $\Delta = mn\lambda + \lambda = mn\lambda'$ 。于是，若 $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ ，则得

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}. \quad (30.9)$$

比值 $\lambda/\Delta\lambda$ 叫做光栅的分辨本领；我们看到它等于光栅的总线数乘以级数。不难证明这个公式与频率差等于相干光的两条极端路径间的时间差的倒数这一公式等效。[\[2\]](#)

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}.$$

事实上，最好记住此式，因为一般的公式不仅适用于光栅，也适用于任何其他仪器，而特殊公式（30.9）则只在用光栅时适用。

§30-4 抛物形天线

现在我们来考虑分辨本领中的另一个问题。这与用来测定天空中的无线电辐射源的位置也就是测定辐射源角度大小的射电望远镜的天线有关。显然，如果使用任何一种老式天线，并发现了信号，我们并不能知道它们来自什么方向。我们很想知道辐射源在这里还是在那里。我们所能找到的一种方法是在澳大利亚草原上铺设一整列等间隔的偶极子天线。然后将引自这些天线的导线馈入同一接收器，使所有馈线中的时间延迟相等。这样接收器就同相位地收到来自所有偶极子的信号。也就是说，它将把来自每个偶极子的所有波同相位地加起来。那时将发生什么呢？若源恰好在装置的上面，处于无穷远或近乎无穷远，那么它的无线电波将同相位地激励所有的天线，因而它们将一起馈入接收器。

现在假设无线电辐射源从竖直方位略为偏过 θ 角，则不同的天线收到的信号相位就略有不同。接收器将所有这些不同相位的信号加起来，若 θ 角过大，就得零信号。试问此角有多大？答案是：若角 $\Delta/L = \theta$ （图30-3）对应于 360° 的相移，即若 Δ 等于波长 λ ，就得零信号。这是因为所有的矢量贡献在一起形成了一个完整的正多边形，结果合矢量为零。故长为 L 的天线装置所能分辨的最小的角是 $\theta = \lambda/L$ 。注意，这种天线的接收花样恰好与把接收器转过来使之成为发射器时所得的强度分布相同。这是所谓倒易原理的一个例子。事实上，下面的说法证明对天线的任何排列、任何角度等等都是普遍正确的：如果我们先以发射器来代替接收器得出在不同方向上所应有的相对强度，那么具有同样的外部布线、同样的天线排列的接收器的相对定向灵敏度就与它是一个发射器时的相对发射强度相同。

有些无线电天线可用另一种方法制成。我们不是把全部偶极子排成一长条直线，并附带许多馈送导线，而是把它们不排成直线，而排成曲线，并把接收器放在能探察到散射波的某一位置上。此曲线被巧妙地设计成这样：当无线电波从上面来时，被天线散射而形成新波，这些天线被排列成使散射波都同时到达接收器（图26-12）。换句话说，此曲线为抛物线；当源恰好在其轴上时，我们就在焦点处得到一个很强的强度。在这种情况下，我们就很清楚地了解到这种仪器的分辨本领是少了。天线排成抛物线并非主要的，那仅仅是使所有信号能无相对延迟地到达同一点而不必用馈线的一种方便的方法而已。这种仪器所能分辨的角仍为 $\theta = \lambda/L$ ，其中 L 为第一根天线与最后一根天线的距离。它并不取决于天线的间距，天线可以靠得很近，其实成一整块金属也行。当然这时我们是在描述望远装置的反射镜。我们居然找到了望远镜的分辨本领（有时分辨本领写成 $\theta = 1.22\lambda/L$ ，其中 L 是望远镜的直径。它不是恰好为 λ/L 的理由是这样：当得出 $\theta = \lambda/L$ 时，

我们假定所有各排偶极子的强度是相等的，但当我们有一圆形的望远镜时——望远镜通常是这个形状——从外边缘来的信号就没有那么多，因为它不像一个方块，在方块中沿着每一边缘都得到同样的强度。这里在边上得到的稍少一些，因为我们只用了望远镜的一部分；于是可以估计到其有效直径比实际直径略小一些，而这就是1.22因子所告诉我们的。无论如何，把分辨本领公式搞得这么精确似乎有点学究式^[3]）。

§30-5 彩色薄膜、晶体

以上所述就是将各种波叠加起来得到的一些干涉效应。还有许多其他例子，尽管我们还不理解其基本机理，但总有一天，甚至就在现在，我们能够理解这些干涉是怎么发生的。例如，当一光波投射至折射率为 n 的材料表面时，比如说垂直入射，一部分光就被反射。反射的原因我们此刻还不能理解；我们将在以后讨论。但是假如我们知道当光进入和离开折射介质时都有一部分被反射，那么当我们注视一光源在薄膜上反射时，就看到两个波的叠加；如果厚度足够小，这两个波就会发生干涉，或为相长干涉或为相消干涉，取决于相位的符号。比如说可以是这样：对于红光得到增强的反射，对于蓝光（它有不同的波长），或许就得到相消干涉的反射，于是我们看到明亮的红色反射光。如果改变厚度，也就是说如果注视另一处膜较厚的地方，情况可以反过来，红光干涉掉，而蓝光没有干涉掉，故它呈明亮的蓝色，也可呈绿色、黄色或别的什么叫不出名称的颜色。因而当我们注视薄膜时会看到彩色，而且当我们从不同角度注视时颜色会改变，因为我们意识到在不同角度上的计时是不同的。这样我们就立即懂得了其他

五花八门的情形，包括在诸如油膜、肥皂泡等上面从不同角度上看到彩色等。它们的原理都一样：我们只是在叠加不同相位的波而已。

作为衍射的另一个重要的应用，可以提一下下列情形。假设我们使用一光栅，并在屏幕上看到衍射像。如果用的是单色光，像就应在某个特定位置上，其后还有各个较高级次的像。如果知道光的波长，由像的位置能够知道光栅上的刻线分得多开。由各个像的强度的差别，可得出光栅刻痕的形状，例如此光栅是用金属丝做成的，还是锯齿形凹口的，还是什么别的形状的，尽管我们不可能看见它们。这一原理常被用来显示晶体中原子的位置。唯一的复杂之点为晶体是三维的；它是原子的一种重复的三维排列。我们不能用普通的光，因为我们必须用波长小于原子间距的光，否则就得不到效应；所以必须用波长非常短的辐射，即X射线。因而，尽管我们绝不可能用肉眼看见原子，但借助于将X射线射入晶体并注意在不同级次反射有多强的办法，我们仍能决定内部原子的排列！正是用这种方法，我们知道了各种物质中的原子排列，这使我们可以在第1章中画出那些表示食盐等等的原子排列的图。我们以后将回到这一题目上来，并进行更详细的讨论，因此现在对这个最引人注意的概念就不再多说了。

§30-6 不透明屏的衍射

现在我们来查看一个非常有趣的情况。假设有一张开孔的不透明薄片，在它的一边有一束光。我们希望知道另一边光的强度如何。大多数人会说，光将穿过开孔，并在另一边产生一种效应。结果将证明是这样：如果有人假定光源以均匀的密度分布在开孔上，而这些源的相位与假定不透明屏不存在时一样，他就将得出很好的近似解答。当

然，在开孔处其实并没有源；事实上那是唯一无疑没有源的地方。虽然如此，但当我们把开孔看作唯一直源之处时，仍得到了正确的衍射花样；这是一个颇为奇怪的事实。以后我们将解释为什么这是正确的，但现在就让我们假定它是正确的。

在衍射理论中还有另一种衍射，我们要略加讨论。在基础课程中一般不这么早对它进行讨论，这仅仅是因为它所包含的累加小矢量的数学公式有点复杂。除此以外，它与我们一直所讨论的衍射完全相同。所有干涉现象都相同；其中并不包含什么高深的内容，只是情况比较复杂以及将矢量累加起来比较困难，如此而已。

假如有光从无穷远处射来，投射出一物体的影子。图30-7表示一个屏，其上投射有由光源所造成的物体 AB 的影子，光源离 AB 的距离比一个波长大得多。我们会预期在影子外面强度是完全明亮的，在影子里面，则是完全黑暗的。而事实上，若把影子边缘附近的强度作为位置的函数作图，光强就先上升，接着超过预期的强度，然后以一种非常特殊的状态在边缘附近作摆动和振动（图30-9）。我们现在来讨论之所以如此的原因。如果应用上述到目前为止我们还未证明过的理论，就可以用一系列均匀分布于物体以外的空间上的有效光源来取代实际情况。

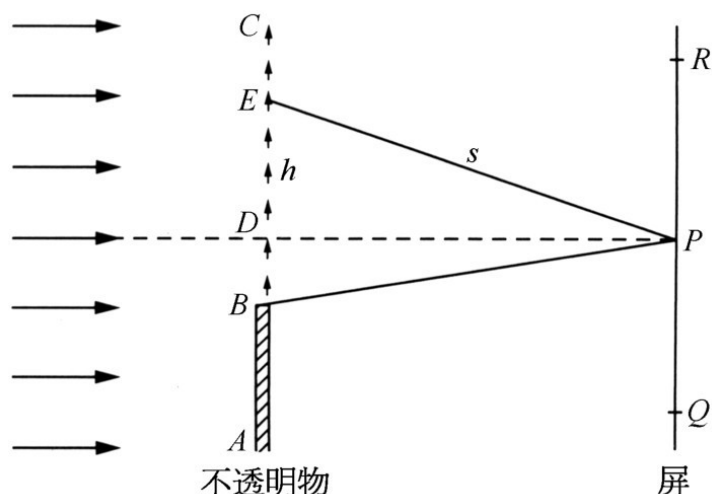


图30-7 远处光源将一不透明物的影子投射于屏上

想象有许许多多间距非常靠近的天线，我们要求某一点 P 的强度。这似乎很像我们所解过的问题。但不完全像，因为现在的屏不在无穷远处。我们不要求无穷远处的强度，而要求有限远处的强度。为了计算某一特定位置的强度，必须把所有天线的贡献加起来。首先，在恰好与 P 点相对的 D 点有一天线；若使角度稍增加一点，比如说高度增加 h ，那么时间延迟就有了增加（因为距离的改变，振幅也有变化，但若屏离得很远，此效应就很小，因而比相位的改变次要得多）。而今程差 $EP - DP$ 近似为 $h^2 / (2s)$ ，故相位差跟我们与 D 点距离的平方成正比，但在以前的计算中 s 为无穷大，故相位差就与 h 的一次方成正比。当相位与距离成线性比例时，每个矢量以不变的角度加于下一个矢量上。我们现在所需要的则是这样的曲线，它是由叠加许多无限小的矢量组成的，这些矢量所构成的角度将不是以曲线长度的一次方关系增加，而是以平方关系增加。作此曲线要涉及稍微深一些的数学，但我们常可用实际画出箭头并计算角度的办法来作出。不论怎么样，我们得到了如图30-8所示的奇形的曲线（称为考纽蜷线）。那么怎样使用这条曲线呢？

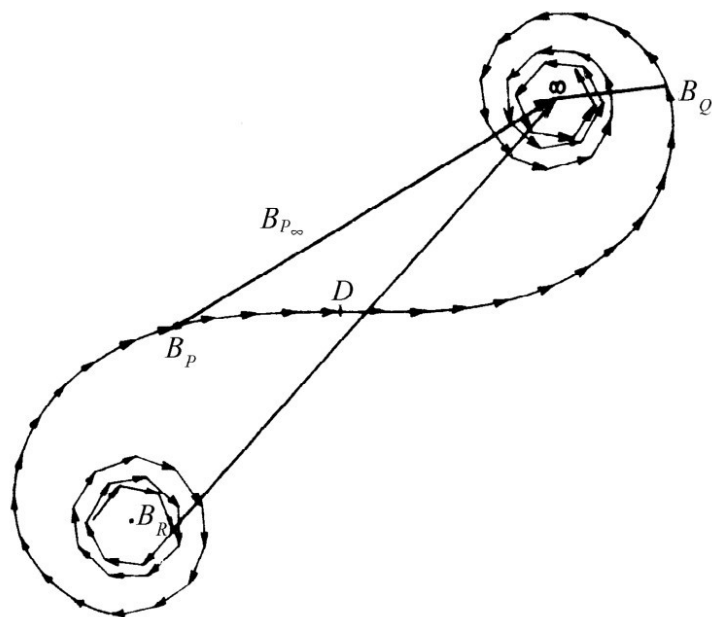


图30-8 相位延迟与离上图 D 点的距离平方成正比的许多同相振子振幅的叠加

比如说，如果要求出 P 点的强度，我们就把从 D 点向上至无穷远，向下仅至 B_P 点的不同相位的许多贡献累加起来。因而我们从图30-8中的 B_P 点开始画一系列角度不断增加的箭头^[4]。于是 B_P 点以上的所有贡献都沿着蜷线移动。如果我们打算在某处停止累加，那么总振幅就是从 B_P 点到该点的矢量；在现在的特殊问题中，我们要累加到无穷远，故总的答案是矢量 $\mathbf{B}_{P_{\infty}}$ 。在曲线上与物体上 B 点对应的位置取决于 P 点位于何处而定，因为拐点 D 总是与 P 点的位置相对应。这样，根据 P 点处在 B 点以上的位置，起始点将落在曲线左下部分的不同位置上，从而合矢量 $\mathbf{B}_{P_{\infty}}$ 就有许多极大值与极小值（图30-9）。

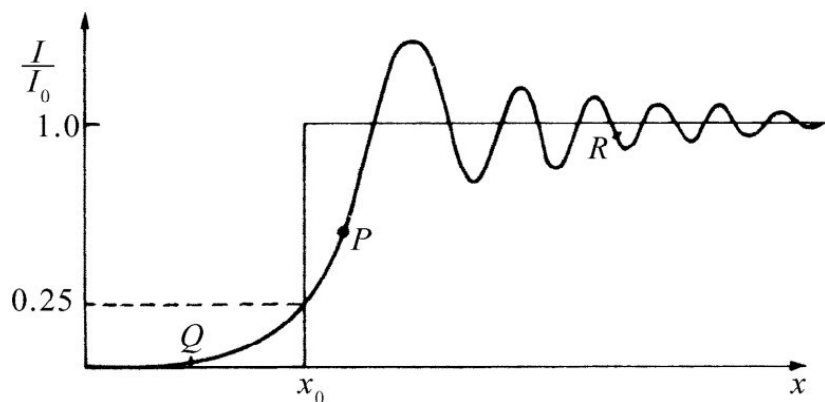


图30-9 影子边缘附近的光强、几何阴影边缘在 x_0

另一方面，如果观察点在 P 的另一边的 Q 点，则我们只需用蜷线的一端，而不需用另一端。换句话说，我们甚至不必从 D 点出发，而从 B_Q 点出发就行，故在这一边得到一个随 Q 点深入阴影区而连续降低的强度。

我们很容易立即进行计算，以证明我们真正懂得上述方法的，就是恰好与边缘相对应之点的强度。此处的强度为入射光的 $1/4$ 。理由是：在恰好为边缘处（故箭头的尾端 B 在图30-8中的 D 点），我们所得的曲线为深入明亮区时所得曲线的一半。如果点 R 深深进入光束，箭头就从曲线的一端到另一端，即一完整的单位矢量；但是如果处于影子的边缘，则仅得幅度的一半——强度的 $1/4$ 。

在这一章中，我们曾求得由光源的各种分布产生的在各个方向上的强度。作为最后一个例子，我们将推导一个为下一章折射率理论所需要的公式。直到目前为止，相对强度对于我们的目的来说已足够了，但此刻我们将求出在下述情况下的场的完整表示式。

§30-7 振荡电荷组成的平面所产生的场

假设有一充满源的平面，所有源都沿着平面方向一起振动，并有相同的振幅与相位。试问离平面有限远、但距离很大处的场如何（我们当然不能靠得很近，因为我们还没有获得对于靠近源的场的正确公式）？如果把电荷平面作为 xy 面，则我们要求的是 z 轴上很远点 P 的场（图30-10）。假定平面的单位面积上有 η 个电荷，每个电荷带有电量 q 。所有电荷作同方向、同振幅、同相位的简谐振动。假设每个电荷相对于各自的平衡位置的运动是 $x_0 \cos \omega t$ ，或者用复数符号，并记住其实部代表实际运动，则运动可写为 $x_0 e^{i\omega t}$ 。

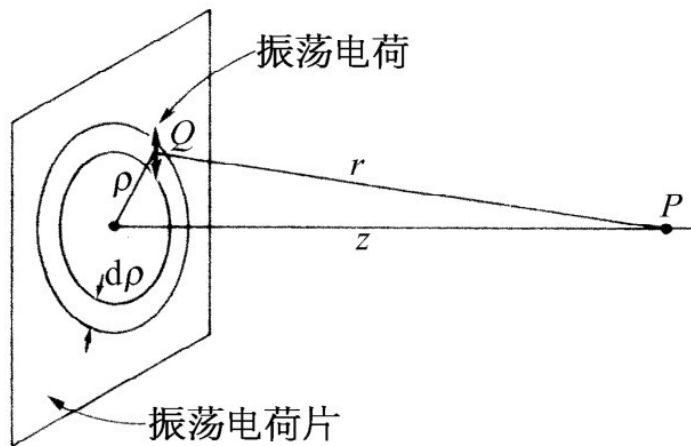


图30-10 振荡电荷面的辐射场

现在我们求出来自每个电荷 q 的场，并把所有电荷的贡献叠加起来，从而求出 P 点的场。我们知道辐射场正比于电荷的加速度，此加速度为 $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ （而且对每个电荷都相同）。点 Q 处的电荷在 P 点产生的电场正比于电荷 q 的加速度，但必须记住在时刻 t ， P 点的场是

由较早时刻 $t' = t - r/c$ 电荷的加速度给出的，其中 r/c 是波从 Q 传播到 P 的距离 r 所花的时间。因而 P 点的场就正比于

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega(t - r/c)}. \quad (30.10)$$

把这一量作为来自远处辐射电荷的电场表示式中从 P 点看到的加速度，我们得到

$$Q \text{ 处电荷在 } P \text{ 点产生的场} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t - r/c)}}{r} \quad (\text{近似}). \quad (30.11)$$

现在，这一表示式并不十分正确，因为我们本来应该用的不是 电荷的加速度，而是加速度垂直于直线 QP 的分量。不过我们假定对于所考虑的电荷来说， P 点离辐射源的距离比起 Q 点与轴线的距离（图 30-10 中的距离 ρ ）来很远，以致可以舍去余弦因子（不管怎样它总近似于 1）。

为了得到 P 点的总场，现在把平面上所有电荷的效应加起来。当然我们应求矢量 和。但既然对所有电荷来说，电场方向几乎都相同，那么，与我们已作的近似相应，可以只把场的大小加起来，按照我们的近似， P 点的场仅取决于距离 r ，故处于相同 r 处的所有电荷产生相同的场。所以我们首先把半径为 ρ ，宽为 $d\rho$ 的环中电荷的场加起来，然后对所有 ρ 积分，就可得到总场。

环中电荷的数目是环的表面积 $2\pi\rho d\rho$ 与单位面积电荷数 η 的乘积。这样，我们就有

$$P \text{ 点的总场} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t - r/c)}}{r} \cdot \eta \cdot 2\pi\rho d\rho. \quad (30.12)$$

我们要求此积分从 $\rho = 0$ 到 $\rho = \infty$ 的值。变量 t 在我们求积分时当然保持不变，故唯一的变量是 ρ 和 r 。暂时舍去所有常数因子，包括因子 $e^{i\omega t}$ ，要求的积分则成为

$$\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho. \quad (30.13)$$

为了求此积分需应用 r 与 ρ 之间的关系 (30.14)

$$r^2 = \rho^2 + z^2.$$

因为 z 不取决于 ρ ，故当求此等式的导数时，得到

$$2r dr = 2\rho d\rho.$$

幸而，因为在积分中可以用 $r dr$ 代替 $\rho d\rho$ ，从而 r 与分母中的 r 消去。于是我们所要求的积分成为较简单的形式

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c} dr. \quad (30.15)$$

对指数函数积分很容易。我们只要将它除以指数中 r 的系数，并求出指数函数在上、下限的值就行。但 r 的上、下限与 ρ 的上、下限不同。当 $\rho = 0$ 时，有 $r = z$ ，故 r 的积分限为从 z 到无穷大。我们得到积分值为

$$-\frac{c}{i\omega} [e^{-i\infty} - e^{-(i\omega/c)z}], \quad (30.16)$$

其中我们已将 $(\omega/c)_{\infty}$ 写为 ∞ ，因为它们都只不过表示一个很大的数而已！

现在 $e^{-i\infty}$ 是一个神秘的量。例如其实部为 $\cos(-\infty)$ ，它从数学上讲是完全不定的〔尽管我们可以想象它为介于+1与-1之间的某个值——或任何值(?)〕，但在物理的情况下，它可以包含十分合理的意义，并且常常可看作为零。为了在我们的情形中看出这一点，我们再反过来考虑原来的积分(30.15)。

可以把式(30.15)理解为许多小复数的和，每个复数的模为 Δr ，在复平面内具有角 $\theta = -\omega r/c$ 。我们可以试用图解方法来求其和。在图30-11中画了此和的最先五小段。曲线的每一段具有长度 Δr ，并与前一小段成角度 $\Delta\theta = -\omega \Delta r/c$ 。此最先五小段的和用自起点至第五小段终点的矢量来表示。当继续一小段、一小段累加时，我们将描绘出一多边形，直至回到出发点(近似地)，接着又重新开始兜圈子。当累加更多的小段时，我们只是在一圆周附近不断兜圈子，此圆的半径很易证明为 c/ω 。现在我们可以明白为什么积分不能给出确定解的道理了！

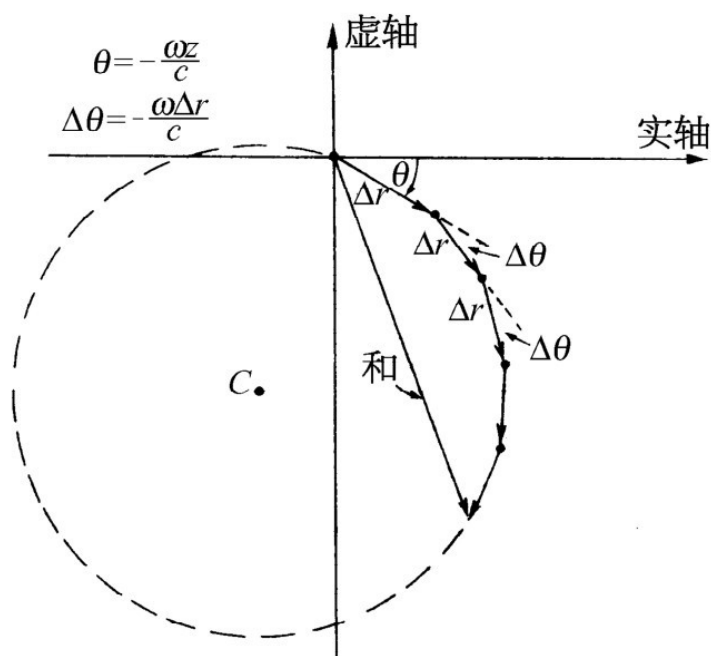


图 30-11 $\int_z^\infty e^{-i\omega r/\epsilon} dr$ 的图解

但是现在我们必须回到物理内容方面去。在任何实际情况中，电荷平面的范围不可能无限大，而必须在某处中断。如果它突然中断了，而其形状恰好为圆形，则积分将具有如图30-11所示的圆上的某一值。但是如果我们让平面上的电荷数目自远离中心某一较大距离开始逐渐减少（要不就使之突然中断，但沿着不规则的形状中断，使之对较大的 ρ ，宽为 $d\rho$ 的整个环不再都有贡献），这样，在实际积分中系数 η 将减少至零。因为我们现在累加的是越来越小的小段，但每段仍转过相同的角度，故积分图形变为一螺旋形曲线。此曲线显然中止于原先的圆的中心处，如图30-12所示。在物理上正确的积分就是在图中自起点至圆心的线段所表示的复数 A ，它刚好等于

$$\frac{c}{i\omega} e^{-i\omega z/\epsilon}, \quad (30.17)$$

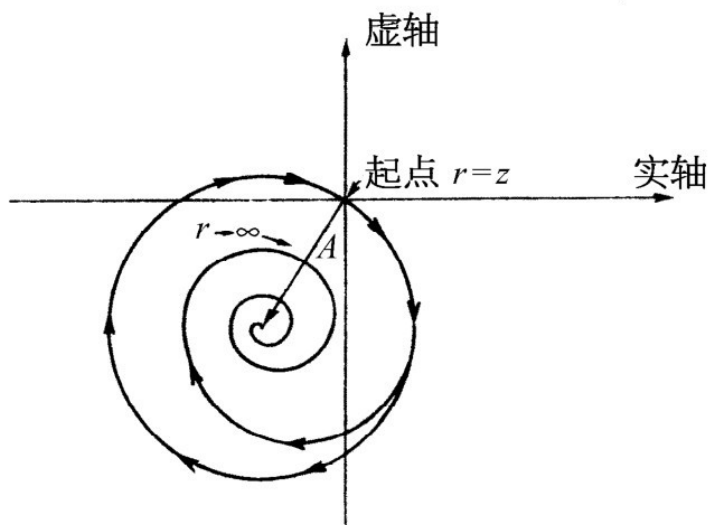


图 30-12 $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/\epsilon} dr$ 的图解

就同你自己能求得的那样。这正与设 $e^{-i\infty}=0$ 从式(30.16)得到的结果相同。

(为什么对于较大的 r 值对积分贡献逐渐变小,尚有另一个理由,那就是我们所忽略的加速度应投影于与直线 PQ 垂直的平面上这一因素)。

我们当然只对物理情况有兴趣,故取 $e^{-i\infty}$ 等于零。回到场的原始公式(30.12),并重新写上与积分在一起的所有系数,结果得

$$P \text{ 处的总场} = -\frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} i\omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (30.18)$$

(记住 $1/i=-i$)。

注意到 $(i\omega x_0 e^{i\omega t})$ 恰好等于电荷的速度这一点是有意义的,故我们也可把场的表示式写为

$$P \text{ 处的总场} = -\frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} [\text{电荷的速度}]_{t-z/c}. \quad (30.19)$$

这似乎有些奇怪,因为这里时间的延迟恰好由距离 z 引起,而 z 为 P 至电荷平面的最短距离。但得出的结果正是如此。幸好,此表示式颇为简单[附带说一句,虽然我们的推导仅对远离振荡电荷平面的地方有效,但结果证明公式(30.18)或(30.19)对任意距离 z 都正确,甚至对 $z < \lambda$ 也对]。

[1] 指与槽垂直的方向。——译者注

[2] 在我们的情况中, $T = \frac{\Delta}{c} = \frac{m\lambda}{c}$, 其中 c 是光速, 频率 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, 故 $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$ 。

[3] 这首先是因为瑞利判据是一个粗略的概念，它告诉你识别一个像到底是由一颗星造成还是由两颗星造成的这一点，从哪里开始变得十分困难。实际上，如果能够对衍射像斑的实际强度分布作足够仔细测量，那么即使当 θ 小于 λ/L 时也能判明像斑是由两个源造成的。

[4] 原文有误。实际上从 B_p 点到 D 点的箭头的角度是逐渐减小的。——译者注

第31章 折射率的起源

§31-1 折射率

我们在前面曾指出，光在水中比在空气中走得慢，而在空气中又略比在真空中走得慢。这一效应用折射率 n 来描写。现在我们想了解这一较慢速度是怎么得出来的。特别是想弄明白以前所作的下列几点物理假设或物理陈述之间有什么关系：

(a) 在任何物理条件下，总电场总是可以用来自空间所有电荷的场的总和来表示；

(b) 来自单个电荷的场总是由它的以速度 c 延迟而算得的加速度值给定（对辐射场来说）。

但对一片玻璃来说，你会想：“哦，不对，你对这些都应加修正。你应该说它以速度 c/n 延迟。”然而这是不对的，而且我们就是要了解这为什么不对。

光或任何电波通过折射率为 n 的物质时似乎以速度 c/n 传播这一点大致是正确的，但场仍然由所有电荷——包括在物质中运动着的电荷——的运动所产生，而场的这些基本贡献则以极限速度 c 传播。我们的问题是弄清楚这种表观上较慢的速度是怎么得出来的。

我们想从很简单的情况来理解这一效应。假设有一个我们称为“外源”的源置于远离一透明物质（例如玻璃）薄板之处。我们要问在板的另一边很远处的场如何。此情形可用图31-1来说明，图中S与P可想象为离板很远。根据以前所述原理，远离所有运动电荷的任何一点处的电场是外源（在S处）产生的场与玻璃板中每个电荷产生的场的（矢量）和，每个场都具有速度为 c 的适当延迟。记住每个电荷的贡献并不因其他电荷的存在而有所改变。这些是我们的基本原理。P处的场可以写成这样

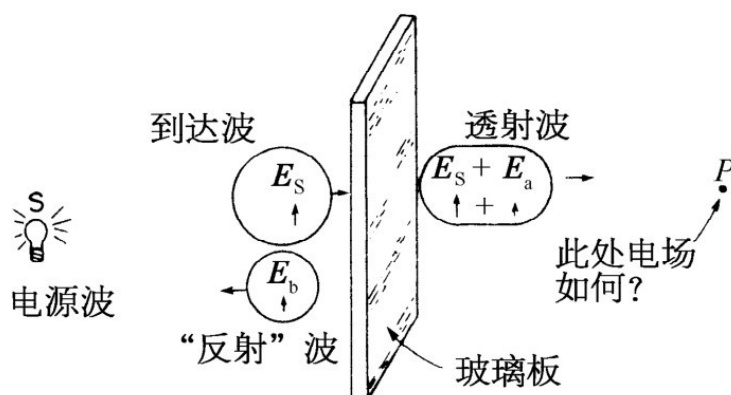


图31-1 通过一层透明物质的电波

$$\mathbf{E} = \sum_{\text{所有电荷}} \mathbf{E}_{\text{每个电荷}} \quad (31.1)$$

或

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\text{所有其他电荷}} \mathbf{E}_{\text{每个电荷}}, \quad (31.2)$$

其中 E_s 是由源单独产生的场，它正好是没有物质存在时 P 处的场。如果有任何其他运动电荷存在的话，我们期望 P 处的场与 E_s 不同。

为什么玻璃中会有电荷的运动？我们知道所有物质都由包含电子的原子组成。当源 的电场作用在这些原子上时，就驱动电子上、下运动，因为它对电子施加了作用力。而运动着的电子就产生场——它们成为新的辐射子。这些新的辐射子与源 S 有关，因为它们是由源的场驱动的。总的场并不只是源 S 的场，而是被来自其他运动电荷的附加贡献所修正过的场。这意味着此场并不是玻璃存在以前的那个场，而是经过修正的，并且结果是这样被修正的，即玻璃中的场似乎是以另一个速度运动。这就是我们想定性得出的概念。

严格地讲，这是相当复杂的，因为虽然我们说过所有其他运动电荷都由源场驱动，但这并不十分正确。如果我们考虑一特定电荷，它就不仅感受到源的影响，而且也像世界上其他东西一样，感受到所有运动电荷的影响。特别是，它感受到在玻璃中另外某处运动着的电荷的影响。所以作用在一特定电荷 上的总场是来自其他电荷的场的合成，而这些电荷的运动则又取决于这一特定电荷的行为！你可以看出要得到完全而正确的公式就需要一系列复杂的方程式。这太复杂了，我们把这一问题推迟到下一章去讲。

为了能够十分清楚地理解所有的物理原理，我们将处理一个很简单的情况。我们取这样的情形，来自其他原子的影响比来自源的影响小得多。换句话说，我们取这样的材料，其中的总场被其他电荷的运动修改得不很多。这相当于材料的折射率非常接近于1，例如原子密度很低时就会出现这种情形。我们的计算将对折射率不论因任何原因而

很接近于1的任何情况有效。这样我们就避免了最一般和最完整的解的复杂性。

顺便提一句，你应注意到板中电荷的运动还会引起另一种效应。这些电荷也会朝后向源S辐射波。这一向后行进的场即我们所见到的从透明物质表面反射的光。它并非只从表面来。此朝后的辐射来自物质内部每个地方，但结果总的效果与一来自表面的反射等效。这些反射效应现时超出了我们的近似范围，因为我们将限于对折射率很接近于1，只有很少的光被其反射的物质进行计算。

在我们继续研究折射率怎么来的之前，应该懂得，要理解折射就是要理解为什么在不同的材料中表观波速度不相同。光线发生弯曲正是因为波的有效速率在各种物质中不同所致。为了提醒你这种弯曲是怎样发生的，我们在图31-2中画出了从真空射向玻璃板表面的电波的几个相继的波峰。垂直于波峰的箭头表示波传播的方向。波中所有的振动必须具有相同的频率（我们知道受迫振动具有与振源相同的频率）。这也意味着，表面两边的波的波峰沿表面必须具有相同的间隔，因为它们必须一起传播，这样才能使位于界面上的电荷只感受到一个频率。然而波峰间的最短距离就是波长，它是速度除以频率。若 $v = c/n$ 为波的速度的话，在真空一边波长是 $\lambda_0 = 2\pi c / \omega$ ，在另一边则是 $\lambda = 2\pi v / \omega$ 或 $2\pi c / \omega n$ 。由图可见，要使波完全“符合”边界情况的唯一办法是使物质中的波沿着与表面成另一个角度的方向传播。由图中几何关系可见，为使波“符合”边界情况，必须有 $\lambda_0 / \sin\theta_0 = \lambda / \sin\theta$ ，即 $\sin\theta_0 / \sin\theta = n$ ，此即斯涅耳定律。因而，在以下的讨论中，我们将只考虑为什么光在折射率为 n 的物质中具有 c/n 的有效速率，而不再在本章中讨论光的前进方向弯曲的问题。

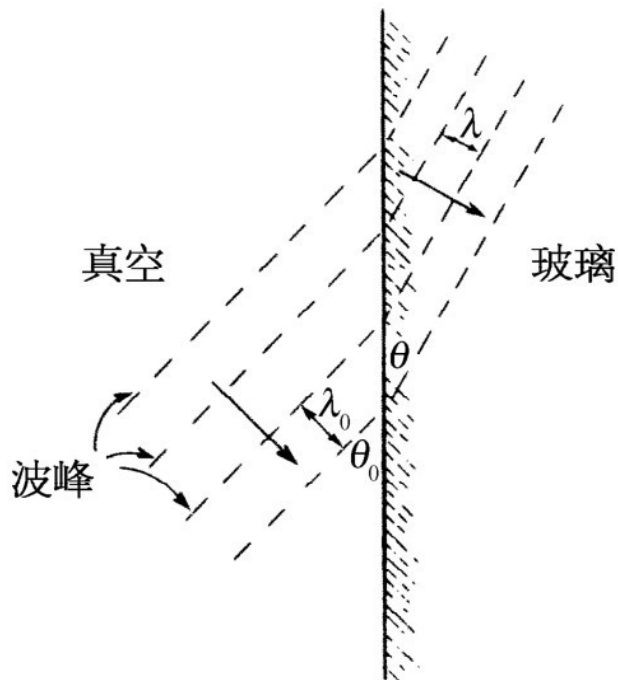


图31-2 折射与速度改变之间的关系

现在回到图31-1所示的情形。我们看到我们所要做的就是计算玻璃板中的所有振荡电荷在 P 点产生的场。我们将称场的这一部分为 E_a ，它就是等式(31.2)中的第二项那个和。当我们把它和由源激起的场 E_s 加在一起时，就得到 P 点的总场。

这可能是我们今年要做的最复杂的事情了，但它仅仅在有許多部分相加在一起时才比较复杂；然而每个部分却是很简单的。这与其他推导不同，在那些地方我们说，“不用管推导，只要看答案！”在这里，我们对答案的需要不比对推导来得多。换句话说，现在要了解的是折射率产生的物理机理。

为了弄清楚我们所讨论的问题，我们首先来找出“校正场” E_a 应是怎样的，假设 P 点的总场看起来好像是来自源的、在通过薄板时慢了

下来的辐射的话。如果板对它没有影响，一个向右（沿着 z 轴）传播的波的场将是

$$E_s = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad (31.3)$$

或用指数符号

$$E_s = E_0 e^{i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right)}. \quad (31.4)$$

若波在通过板时传播得比较慢，那么，将发生什么情况呢？我们设板的厚度为 Δz 。如果那里不存在板，波将在时间 $\Delta z / c$ 内通过距离 Δz 。但是如果波以速度 c / n 传播，那么就需要较长的时间 $n \Delta z / c$ ，或附加时间 $\Delta t = (n - 1) \Delta z / c$ 。在这以后它又继续以速度 c 传播。考虑到通过板的额外延迟，我们可以将等式（31.4）中的 t 以 $(t - \Delta t)$ 或 $[t - (n - 1) \Delta z / c]$ 来代替。故插入板后的波应写成

$$E_{\text{板后}} = E_0 e^{i\omega [t - (n - 1) \Delta z / c - z / c]}. \quad (31.5)$$

也可将此式写为

$$E_{\text{板后}} = e^{-i\omega (n - 1) \Delta z / c} E_0 e^{i\omega (t - z / c)}, \quad (31.6)$$

这说明板后的波可由不存在板时的波，即 E_s ，乘以因子 $e^{-i\omega (n - 1) \Delta z / c}$ 得到。但我们知道，以因子 $e^{i\theta}$ 去乘 $e^{i\omega t}$ 这样的振荡函数，就等于把振动相位改变一相角 θ ，这当然是通过厚度 Δz 时的额外延迟所造成的结果。它将相位推迟了量 $\omega (n - 1) \Delta z / c$ （因为指数前是负号故为推迟）。

我们在前面曾说过板的存在使得原来的场 $E_S = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$ 上附加一个场 E_a ，但现在我们发现板的效果并非这样，而是相当于对场乘上一个改变相位的因子。然而，我们原先的说法确实是对的，因为我们可以用加上一个适当的复数的办法来得到同样的结果。在 Δz 小的情况下，特别容易找到正确的所加之数，因为你记得，如果 x 是小数，则 e^x 近似等于 $(1+x)$ 。这样，可得

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1) \frac{\Delta z}{c}. \quad (31.7)$$

在式(31.6)中用此等式，有

$$E_{\text{板后}} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_S} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}. \quad (31.8)$$

第一项正好是来自源的场，第二项必定恰好等于 E_a ，即板中振荡电荷在板的右方产生的场——在这里以折射率 n 表达，而且当然是取决于来自源的波的强度。

如果看一下图31-3所示的复数矢量图，那么我们上面所讲的就很容易想象了。先画出量 E_S （我们取 z 和 t 为某定值，使得得出的 E_S 在水平方向上，但这不是必要的）。由于板中速度慢下来所造成的延迟将使此量的相位落后，也就是说，将使 E_S 转过一个负的角度。但这与在和 E_S 大致垂直的方向上加上一个小矢量 E_a 等效。而这正是式(31.8)第二项中因子 $-i$ 所表示的意义。它说明若 E_S 是实数，则 E_a 为负的虚数，或一般地说， E_S 与 E_a 成直角。

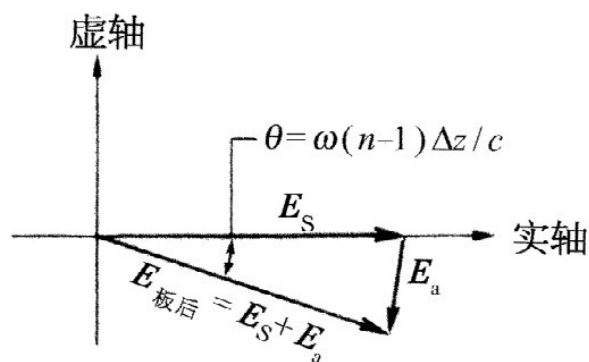


图31-3 在某一特定的 t 和 z 时的透射波复矢量图

§31-2 物质引起的场

现在我们要问：从式（31.8）第二项得到的场 E_a 是否就是我们预期从板中振荡电荷得到的那个场？如果我们能够证明它是的，那么我们就已算出折射率 n 应有的值了〔因为 n 是式（31.8）中唯一的非基本量〕！我们现在转而计算物质中的电荷将产生怎样的场 E_a （为了帮助你熟悉我们至今所用过的，以及在余下的计算中将要使用的许多符号，我们把它们一起列于表31-1）。

表31-1 计算中所用的符号

E_s = 来自源的场 E_a = 板中电荷产生的场 Δz = 板的厚度 z = 离板的垂直距离 n = 折射率 ω = 辐射的(角)频率	N = 板中单位体积的电荷数 η = 板上单位面积的电荷数 q_e = 电子电荷 m = 电子质量 ω_0 = 束缚于原子上的电子的共振频率
---	--

如果（图31-1中的）源 S 在左方很远处，则场 E_s 在板上任何一个地方将有相同的相位，所以我们在板的附近可将它写为

$$E_S = E_0 e^{i\omega(t - z/c)} . \quad (31.9)$$

刚好在板上时， $z=0$ ，就有

$$E_S = E_0 e^{i\omega t} \quad (\text{在板上}) . \quad (31.10)$$

板上原子中每个电子都将感受这个电场，并将在电场力 qE 的作用下作上、下运动（我们假定 E_0 的方向是垂直的）。为了求出我们预期的电子的运动是怎样的，我们假定原子是小振子，也就是说，电子被弹性地束缚在原子上，这意味着，如果有一个力施加于电子上，它离开正常位置的位移将与此力成正比。

如果你曾听说电子在轨道上旋转的话，你会认为这个原子模型是一个古怪的模型。但这只是一个过分简化的图像。由波动力学理论所提供的原子的正确图像指出，就有关光的问题而论，电子的行为就如同它们被弹簧拴着一样。所以我们将假定电子具有线性恢复力，此力与电子的质量 m 一起，使电子的行为像一个具有共振频率 ω_0 的小振子。我们已经学过这样的振子，并知道它们的运动方程是这样写的

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F, \quad (31.11)$$

式中 F 是驱动力。

对于我们的问题，驱动力来自源所发出的波的电场，所以应该用

$$F = q_e E_S = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (31.12)$$

其中 q_e 是电子的电荷，而对 E_s 我们利用由式（31.10）得到的表示式 $E_s = E_0 e^{i\omega t}$ ，于是电子的运动方程为

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (31.13)$$

我们以前已解过这一方程，并知道其解为

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (31.14)$$

代入式（31.13），得到

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.15)$$

所以

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (31.16)$$

于是就得出了需要知道的东西——板中电子的运动。而且每个电子除平均位置（运动的“零”点）当然不同以外，其他运动完全相同。

现在我们可以立即求出这些电荷在 P 点所产生的场 E_a ，因为我们（在第30章末）已经求出由一片一起运动的电荷所产生的场。参考式（30.19），我们看到 P 处的场 E_a 正好是一负的常数乘上电荷在时间上被延迟了量 z/c 的速度。对式（31.16）中 x 进行微商以得出速度，再计入延迟〔或把式（31.15）中的 x_0 代入式（30.18）〕，就得到

$$E_a = -\frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} \left[i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \right]. \quad (31.17)$$

正如我们所期望的，电子的受迫运动产生了一个额外的向右传播的波（这就是因子 $e^{i\omega(t-z/c)}$ 所表明的），而此波的振幅与板上单位面积的原子数（因子 η ）成正比，也与源场的强度（因子 E_0 ）成正比。此外，还有一些依赖于原子性质的因子（ q_e ， m 和 ω_0 ），如我们所应预期的。

然而最重要的是，这个 E_a 的表示式（31.17）很像我们在式（31.8）中得到的表明原波在通过折射率为 n 的物质时被推迟的 E_a 的表达式。事实上，若

$$(n-1)\Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.18)$$

则两个表示式将相同。注意等式两边都与 Δz 成正比，因为 η （它是单位面积的原子数）等于 $N\Delta z$ ，这里 N 是板中单位体积的原子数。以 $N\Delta z$ 代替 η 并消去 Δz ，得到我们的主要结果，即以物质原子性质以及光的频率表示的折射率表示式为

$$n = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.19)$$

这个等式给出了我们想得到的折射率的“解释”。

§31-3 色散

注意在上述过程中我们已经得到了某些很有意义的东西。因为我们不仅有了一个可由基本的原子的量算得的折射率值，而且还弄清楚

了折射率如何随光的频率 ω 而变化。这是我们不可能从“光在透明物质中传播较慢”这样简单的叙述中了解到的东西。当然，我们仍有必要知道每单位体积中有多少原子和它们的自然频率 ω_0 是什么的问题。我们眼下还不知道这一些，因为它们对每种不同物质是不同的，而且现在还不能得到关于它们的一般理论。只有用量子力学才能得到系统阐述各种物质性质——它们的自然频率，等等——的一般理论。由于不同物质具有不同的性质和折射率，所以我们怎么也不能期望得到一个可应用于所有物质的折射率的一般公式。

然而，我们将就各种可能情况对上面得到的公式进行讨论。首先，对大多数普通气体（例如空气、大多数无色气体、氢气、氦气，等等），其电子振荡的自然频率对应于紫外光。这些频率高于可见光的频率，即是说， ω_0 远大于可见光的 ω ，作为一级近似，与 ω_0^2 比较我们可忽略 ω^2 。这样我们发现折射率近似为常数。所以对气体，折射率近似为常数。这一点对大多数其他透明物质（像玻璃）也成立。但是如果稍稍仔细地看一下我们的表示式，就会注意到当 ω 增大时，从分母中要减掉得多一些，折射率也就增大。故折射率 n 缓慢地随频率而增大。对蓝光的折射率比对红光的大。这就是棱镜使蓝光弯折得比红光厉害的道理。

折射率取决于频率的现象称为色散现象，因为它是光被棱镜“分散”成光谱这一事实的基础。折射率表示为频率函数的公式称为色散方程。所以我们已得到了色散方程（最近几年发现“色散方程”在基本粒子理论中有新的用途）。

色散方程还提示了其他有趣的效应。如果我们有一个位于可见区的自然频率，或者如果我们在紫外区测量像玻璃那样的材料的折射率

（在此区 ω 接近 ω_0 ），我们看到在频率十分接近自然频率时，折射率会变得非常大，因为分母会趋向零。其次，假定 ω 比 ω_0 大。例如当我们取玻璃那样的材料，并在其上照以X射线时，就会发生这种情况。实际上，因为有许多对可见光不透明的材料，比如像石墨，对X射线是透明的，所以我们可以讲碳对X射线的折射率。碳原子的所有自然频率都将比我们在X射线中所用的频率低得多，因为X射线具有很高的频率。如果令 ω_0 等于零，则折射率就是色散方程给出的值（与 ω^2 比较我们忽略 ω_0^2 ）。

如果我们向自由电子气上发射无线电波（或光），也会发生类似的情形。在大气层的上部，来自太阳的紫外线将原子中的电子释放出来，使之成为自由电子。对自由电子来说， $\omega_0=0$ （没有弹性恢复力）。在我们的色散公式中，令 $\omega_0=0$ 就得出同温层中无线电波的折射率的正确公式，这时 N 代表同温层中自由电子密度（单位体积中的自由电子数）。但是我们再来看一看色散公式，如果我们向物体上发射X射线，或向自由电子上发射无线电波（或任何电波）， $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 项就变成负的，于是得到 n 小于1的结果。这意味着物质中波的有效速度比 c 还快！这会是正确的吗？

这是正确的。尽管人们说传送信号的速度不可能比光速还快，不过在特定频率下，物质的折射率可以大于1也可以小于1这一点是真的。这仅仅意味着散射光产生的相移 可以是正的也可以是负的。然而可以证明你能用来传送信号 的速率并不取决于一个频率上的折射率，而是取决于许多 频率上的折射率是多少。折射率告诉我们的是波的节（或峰）传播的速率。波的节 本身并不是一个信号。一个完善的波，没有任何种类的调制，也就是说，是一个稳定的振动，在这样的波

中，你不能确切说出它何时“开始”，所以你不能用它作计时信号。为了传送信号你必须多少改变一下这个波，或在其上造成一凹口，或使它稍阔些或稍狭些。这意味着你必须在波中有一个以上的频率，而信号传播的速率可以证明并不只是取决于折射率，而是取决于折射率随频率变化的情况。对这个问题的讨论我们也必须推迟（至第48章）。那时我们将给你们计算信号通过这样一片玻璃的实际速率，你们将看到此速率并不比光速快，尽管作为数学点的波节确实比光速传播得快。

稍微提示一下上述情况是如何发生的，你会注意到真正的困难与电荷的响应跟场相反，即符号反过来这一事实有关。这样，在我们的 x 表示式〔等式（31.16）〕中电荷的位移在与驱动场相反的方向上，因为 $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 对小的 ω_0 来说是负的。公式说明当电场沿一个方向拉时，电荷却沿相反方向运动。

电荷怎么会沿相反方向运动呢？当场刚加上时，它肯定不是沿相反方向起动的。当运动刚开始时有一暂态过程，过了一会儿此过程就稳定下来，只是在这以后电荷振动的相位才与策动场相反。而就在这这时透射场的相位才显得比源的波超前。当我们说“相速度”或节的速度比 c 大时，所指的就是这个相位超前。在图31-4中我们就波突然起动（以造成一个信号）时会是什么样子提供了一个大致概貌。你从图上将看到，对于相位最终超前的波，信号（即波的起始）并没有提前到达。

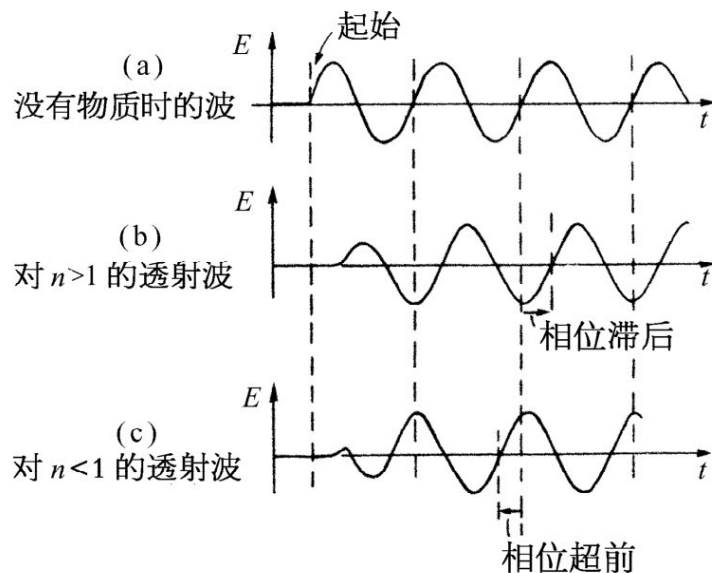


图 31-4 波“信号”

现在我们再来看一下色散方程。我们应注意到上面对折射率的分析所得出的结果比你在自然界实际发现的要简单一些。为了使它完全精确，必须稍加改进。首先，应预期到我们的原子振子模型应具有一定的阻尼力（否则一旦开始振动就会永远振动下去，而我们并不希望发生这种情形）。以前我们曾求出（式23.8）阻尼振子的运动，其结果是式（31.16）中〔因而式（31.19）中〕的分母由 $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 变为 $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$ ，其中 γ 是阻尼系数。

我们所需要的第二个修正是，要考虑到对一特定种类的原子有几个共振频率这一事实。只要想象有几种不同种类的振子，但每个振子独立地起作用，就很容易改写我们的色散方程，只要把所有振子的贡献简单地加起来就行了。假设单位体积中有 N_k 个自然频率是 ω_k 、阻尼系数是 γ_k 的电子。这样我们的色散方程就成为

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (31.20)$$

我们终于有了一个描写在许多物质中观察到的折射率的完整表达式^[1]。以此公式描写的折射率随频率的变化大致如图31-5中曲线所示。

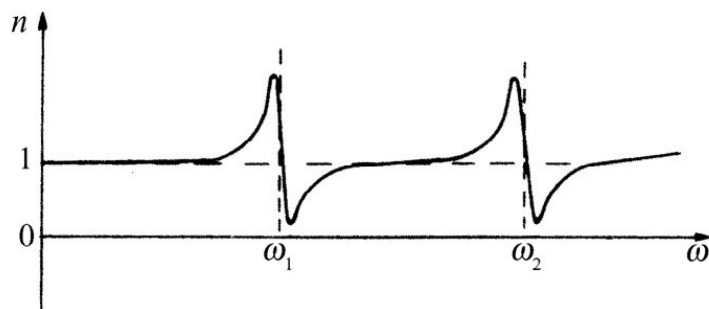


图31-5 折射率与频率的关系

你将注意到，只要 ω 不太接近于一种共振频率，曲线的斜率总是正的。这种正的斜率称为“正常”色散（因为它显然是最通常发生的情况）。但当十分接近共振频率时，有一小段的 ω 其斜率是负的。常把这种负的斜率称为“反常”（意即不正常）色散，因为它首次（远在人们连电子这样的东西也还不知道的时候以前）被观察到时，似乎是不平常的。从我们的观点看，两种斜率都十分“正常”！

§31-4 吸收

也许你已经注意到，在我们所得到的色散方程的最后形式〔式（31.20）〕中，出现一点奇怪的东西。由于考虑到阻尼而加进量 $i\gamma$ ，折射率现在变成了复数！这意味着什么？求出 n 的实部与虚部后，可把 n 写为

$$n = n' - in'', \quad (31.21)$$

其中 n' 和 n'' 是实数（我们在 in'' 前用负号，因为这样 n'' 结果将是正数，你可以自己证明一下）。

回到式（31.6）（它是通过一块折射率为 n 的材料后的波的方程），我们就能明白这样一个复数折射率所包含的意义。如果把我们的复折射率 n 代入此方程，并作一些整理，就得到

$$E_{\text{板后}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \Delta z / c}}_{\text{A}} \underbrace{e^{-i\omega(n'-1)\Delta z / c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{\text{B}}. \quad (31.22)$$

最后一个因子，在式（31.22）中记为B的，正是我们以前所得到的形式，它还是描写一个波，其相位在通过物质后推迟了角度 $\omega(n'-1)\Delta z / c$ 。第一项（A）是新的，并且是一个具有实指数的指数函数，因为有两个 i 消去了。加上指数是负的，故此因子为小于1的实数。它描写场的幅度的减少，而且，正如我们所预料的， Δz 越大减少得越多。当波通过物质时，被减弱了。物质“吸收”了一部分波。波从另一边出来时能量减少了。我们不应对此感到惊奇，因为我们为振子所加进的阻尼确实是一种摩擦力，它必定引起能量的损失。我们看到复折射率的虚部 n'' 代表波的吸收（或“衰减”）。实际上，有时把 n'' 称为“吸收率”。

还可指出，折射率 n 的虚部与图31-3中的箭头 E_a 朝原点弯折对应。于是透射场为什么会减弱的道理就清楚了。

通常，例如在玻璃中，光的吸收是很少的。这可从等式（31.20）预期到，因为分母的虚部 $i\gamma_k \omega$ 远小于 $(\omega_k^2 - \omega^2)$ 项。但若光频 ω 十分接近 ω_k ，则共振项 $(\omega_k^2 - \omega^2)$ 与 $i\gamma_k \omega$ 比较变得很小，折射率几乎完全变为虚部。光的吸收变为占优势的效应。正是这一效应产生了接收

到的太阳光谱中的暗线。来自太阳表面的光通过太阳的大气（如同地球的大气一样），而光就在太阳大气中原子的共振频率处被强烈吸收。

对太阳光中这种光谱线的观察，使我们了解到太阳大气原子的共振频率，从而能说出其化学成分。同类型的观察告诉我们关于星体中物质的成分。从这样的测量中我们知道，太阳和星体中的化学元素与我们在地球上所发现的相同。

§31-5 电波所携带的能量

我们已经看到折射率的虚部意味着吸收。我们现在利用这方面的知识去找出光波携带了多少能量。早先我们曾论证光携带的能量正比于 $\overline{E^2}$ ，即正比于波中电场平方的时间平均值。由于吸收引起的 E 的减小，应当意味着能量的损失，这些损失的能量会参与电子的某种摩擦，可以猜想，它们最终会变为物质中的热。

如果我们考虑到达图31-1的板上单位面积中（比如说一平方厘米）的光，则可写出下列能量方程（若假定能量守恒，这是可以的）

$$\text{每秒钟流入能量} = \text{每秒钟流出能量} + \text{每秒钟所做的功}. \quad (31.23)$$

第一项可写为 $\alpha \overline{E_s^2}$ ，其中 α 为现在尚不知道的比例常数，它将 E^2 的平均值与所携带能量联系起来。第二项必须包括来自物质中辐射原子的部分，故我们应当写为 $\alpha \overline{(E_s + E_a)^2}$ ，或（将平方展开） $\alpha(\overline{E_s^2} + 2 \overline{E_s E_a} + \overline{E_a^2})$ 。

我们所有的计算都是对折射率与1相差不大的薄层材料作出的，所以 E_a 总是比 E_s 小得多（仅为使计算容易一些）。为了与我们所作出的近似保持一致，我们应略去 $\overline{E_a^2}$ ，因为它比 $\overline{E_s E_a}$ 小得多。你会说：“那么你也应略去 $\overline{E_s E_a}$ 因为它比 $\overline{E_s^2}$ 小得多。”诚然， $\overline{E_s E_a}$ 比 $\overline{E_s^2}$ 小得多，但我们必须保留 $\overline{E_s E_a}$ ，否则我们的近似就成为适用于完全略去物质存在的一种近似了！核对我们的计算是否前后一致的一种方法是，注意我们总是保留正比于 $N \Delta z$ ，即物质中原子单位密度的项，而略去正比于 $(N \Delta z)^2$ 或 $N \Delta z$ 的任何更高次的项。我们的近似就是所谓的“低密度近似”。

按照同样的理由，我们不妨注意我们的能量方程已忽略了反射波中的能量。但这是可以的，因为既然反射波的幅度正比于 $N \Delta z$ ，此项能量也正比于 $(N \Delta z)^2$ 。

对于方程式（31.23）中的最后一项，我们要计算进入的波在电子上做功的速率。我们知道功是力乘距离，故做功的速率（亦称功率）是力乘速度。它实际上是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ，但当速度和力像这里一样沿同一方向时，我们不必为点乘问题操心（除了可能有一个负号外）。所以对每个原子，我们取 $\overline{q_e E_s v}$ 作为做功的平均速率。既然单位面积中有 $N \Delta z$ 个原子，方程式（31.23）中最后一项就应是 $N \Delta z q_e \overline{E_s v}$ 。我们的能量方程现在成为

$$\alpha \overline{E_s^2} = \alpha \overline{E_s^2} + 2\alpha \overline{E_s E_a} + N \Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.24)$$

消去 $\overline{E_s^2}$ 项后，有

$$2\alpha \overline{E_s E_a} = -N \Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.25)$$

现在我们回到式 (30.19)，它告诉我们对大的 z 有

$$E_a = -\frac{N\Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} v \left(\text{推迟 } \frac{z}{c} \right). \quad (31.26)$$

(注意 $\eta = N\Delta z$)。把式 (31.26) 代入式 (31.25) 左边，得到

$$-2\alpha \frac{N\Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} \overline{E_s(\text{在 } z \text{ 处}) \cdot v(\text{推迟 } z/c)}.$$

但 E_s (在 z 处) 就是 E_s (在原子处) 推迟 z/c 的值。既然平均值与时间无关，那么此式中推迟了 z/c 的值与 $\overline{E_s(\text{在原子处}) \cdot v}$ [即出现在式 (31.25) 右边的同一平均值] 就是同样的。于是只要

$$\frac{\alpha}{\epsilon_0 c} = 1 \quad \text{或} \quad \alpha = \epsilon_0 c, \quad (31.27)$$

两端就相等。我们已发现若能量守恒，则电波在单位面积和单位时间中所携带的能量（或我们所谓的强度）必然由 $\epsilon_0 c \overline{E^2}$ 给出。如果称强度为 $\bar{S}$ ，则有

$$\bar{S} = \left\{ \begin{array}{cc} \text{强} & \text{度} \\ \text{或} & \\ \text{能量 / 面积 / 时间} \end{array} \right\} = \epsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (31.28)$$

式中横线的意思是时间平均值。我们从折射率理论中得到了一个很好的额外结果！

§31-6 屏的衍射

现在是着手处理一件稍为有些不同的事情的好时机，它可以用本章所叙述的方法来进行。在上一章中我们说过，当你有一块不透光的屏，而光可以通过一些小孔时，强度分布——衍射花样——可以用想象这些小孔被均匀地分布于孔上的源（振子）所代替这一方法来得到。换句话说，衍射波如同孔是新的源一样。我们必须解释其原因，因为孔显然正是没有源，即没有加速电荷的地方。

我们先问：“何谓不透光屏？”设在源 S 和处于 P 点的观察者之间有一个完全不透光的屏，如图31-6（a）所示。如果屏是“不透光的”， P 处就没有场。为什么那里没有场？根据基本原理，我们应得 P 处的场等于推迟的源场 E_S ，加上来自周围所有其他电荷的场。但是，正如我们在上面看到的，屏上的电荷将被场 E_S 驱动，这些运动产生新的场，如果屏是不透光的，新的场在屏的后面必须恰好抵消场 E_S 。你说：“恰好抵消，真令人惊奇！假如不是恰好抵消呢！”如果它不是恰好抵消（记住此不透光屏具有一定厚度），向屏的后面部分进行的场就不会恰好是零。既然不是零，它就会使屏材料中的其他一些电荷开始运动，这就造成稍为大一些的场，试图把总场抵消掉。所以如果屏足够厚，就没有残留的场，因为有足够多的机会使场最终稳定下来。根据上面的公式，我们可以说屏具有大而虚的折射率，所以当波通过时被指数地吸收。你们无疑知道，一片足够薄的最不透光的物质，即使是金，也是透明的。

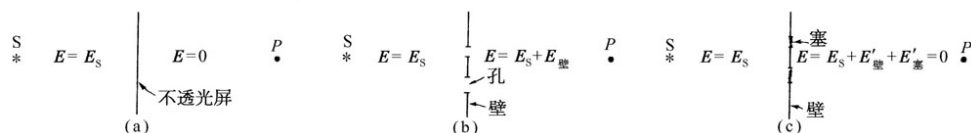


图31-6 屏的衍射

现在我们要看一看，对于上面具有小孔的不透光屏，如图31-6 (b) 那样，会发生什么情况。在 P 处我们将得到怎样的场？ P 处的场可以表示为两部分之和——由源 S 引起的场加上由壁（即壁上电荷的运动）引起的场。我们可能想象壁上电荷的运动很复杂，但我们可以用相当简单的方法找出它们产生的是什么场。

假定我们取一个同样的屏，但将孔塞住，如图中 (c) 部分所示。想象塞子由与壁完全相同的材料做成。注意，塞子就放在 (b) 中的孔所在处。现在我们来计算 P 处的场。在 (c) 中 P 处的场无疑是零，但它同样等于来自源的场，加上由壁和塞子中的所有原子运动引起的场。我们可以写出下列等式

情形 (b)

$$E_{P\text{处}} = E_S + E_{\text{壁}},$$

情形 (c)

$$E'_{P\text{处}} = 0 = E_S + E'_{\text{壁}} + E'_{\text{塞}},$$

其中撇代表有塞子时的情况，但在两种情形中 E_S 当然是同样的。若把两式相减，得

$$E_{P\text{处}} = (E_{\text{壁}} - E'_{\text{壁}}) - E'_{\text{塞}}.$$

现在假设孔不太小（比如说直径为好几个波长），我们不会预期塞子的存在会改变到达壁上的场，除了可能稍微改变孔边缘附近的场以外。略去这一微小影响，我们可以取 $E_{\text{壁}} = E'_{\text{壁}}$ ，从而得

$$E_{P\text{处}} = -E'_{\text{塞}}.$$

我们得到了这样的结果，即当屏上有孔时 [情形 (b)]， P 处的场与处于孔所在处的那一部分 完全不透光屏所产生的场相同（除符号外）（符号并不太重要，因为我们一般对强度感兴趣，而强度与场的平方成正比）！这似乎是一个令人惊异的颠三倒四的论证。但它不仅正确（对不太小的孔近似正确），而且有用，并且是对普通的衍射理论的证明。

任何特定情况下的场 $E'_{\text{塞}}$ 都可这样来计算，即要记住屏上任何一处 电荷的运动恰好抵消掉屏背后的场 E_{S} 。一旦知道了这些运动，只要把塞子上电荷在 P 处引起的辐射场加起来就行了。

我们再说一下，这个衍射理论只是近似的，而且只有当孔不太小时才有效。对于太小的孔， $E'_{\text{塞}}$ 项将变得很小，于是 $E'_{\text{壁}}$ 与 $E_{\text{壁}}$ 间的差（我们在上面把它看作零）会变得与小的 $E'_{\text{塞}}$ 项可以比拟或大于它，从而我们的近似将不再有效。

[1] 虽然在量子力学中式 (31.20) 仍然有效，但对它的解释有些不同。在量子力学中，即使是只有一个电子的原子，像氢，也具有几个共振频率。因而 N_k 并非真的是具有频率 ω_k 的电子数，而要代之以 Nf_k ，其中 N 是单位体积的原子数，而 f_k （称为振子强度）是表示原子呈现某一共振频率 ω_k 的强度的一个因子。

第32章 辐射阻尼、光的散射

§32-1 辐射电阻

在上一章中我们知道，当一个系统振荡时，能量就被带走，我们还导出了被振荡系统所辐射掉的能量表示式。如果知道了电场，那么电场平方的平均值乘以 $\epsilon_0 c$ 就是每秒钟通过垂直于辐射方向的平面每平方米的能量值

$$S = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle . \quad (32.1)$$

任何振荡电荷都辐射能量；例如，一受激天线就辐射能量。如果系统辐射能量，则为了说明能量守恒，我们必须认为沿着通往天线的导线有功率传输着。这就是说，对驱动电路来说，天线的作用像一个电阻或一个会“损失”能量的场所（能量并非真的损失掉，其实是辐射出去，但就电路来说，能量是损失了）。在一个普通电阻中，“损失”的能量转变成为热；在这里，所“损失”的能量跑到空间去了。但从电路理论的观点看，如果不去考虑能量跑到哪里去了，则在电路上的净效果是同样的——能量从该电路“损失”掉了。于是对振荡器来说，天线好像有一个电阻，尽管它也许是由十分良好的铜制成的。事实上，如果天线制造得很好，它将几乎像个纯电阻，很少有电感或电容，因为我们希望从天线辐射出尽可能多的能量。这种天线所显现的电阻称为辐射电阻。

如果流向天线的电流为 I ，则传输给天线的平均功率是电流平方的平均值乘以电阻。天线所辐射的功率当然是正比于天线中电流的平方的，因为所有的场都正比于电流，而被释放的能量正比于场的平方。辐射功率与 $\langle I^2 \rangle$ 之间的比例系数就是辐射电阻。

一个令人感兴趣的问题是，这个辐射电阻是由什么引起的？我们来举一个简单的例子：设天线中有电流被激励着上、下流动。我们发现，如果天线要辐射能量的话，必须输入功。如果取一带电体并使之上、下加速运动，它就辐射能量；如果它不带电，就不会辐射能量。从能量守恒算出能量损失是一回事，而回答反抗哪一个力做功的问题则是另一回事。那是一个有趣而又十分困难的问题，它对于电子来说从来没有得到过完全而满意的解答，虽然对天线来说，它已解决了。情况是这样的：在天线中，由一部分天线中的运动电荷产生的场对另一部分天线中的运动电荷有作用力。我们能够算出这些力，并求出它们做了多少功，从而得到关于辐射电阻的正确规则。当我们说“我们能够算出——”时并不完全对——我们不能，因为我们尚未学过近距离处电的规律；我们只知道远距离处的电场是什么。我们见过公式（28.3），但此刻它对我们来说是太复杂了，不能用来计算波带区内的场。当然，因为能量守恒是成立的，我们完全可以毋须知道近距离处的场而算出结果（事实上，利用这一论证反推，最后证明只要知道远距离处的场，运用能量守恒定律，可以求出近距离处力的公式，但我们这里不去讨论这个问题）。

在单个电子的情况下，问题是如果只有一个电荷，力究竟作用在哪里？在老的经典理论中曾假定电荷是一个小球，电荷的某一部分作用于另一部分。由于此作用穿过很小电子时的延迟效应，力并不恰好与运动同相位。这就是说，如果电子静止不动，我们得到“作用力等于

反作用力”。因而各个内力相等，没有净力。但是如果电子在加速运动，则由于穿过它的时间的延迟，从后面作用在前面的力就不恰好与从前面作用在后面的力相同，因为效应上有延迟的缘故。这个计时上的延迟造成了不平衡，因而，作为净效应，电子被它自己的鞋带拉住了！这个由加速度引起电阻（即运动电荷的辐射电阻）的模型遇到了很多困难，因为我们现在对电子的观点是，它不是一个“小球”；这个问题根本没有解决。虽然如此，我们仍能正确地算出净辐射阻力应是多少，也就是当我们加速一个电荷时会有多少损耗，尽管不直接知道力如何作用的机理。

§32-2 能量辐射率

现在我们来计算加速电荷所辐射的总能量。为了使讨论不失一般性，假设电荷按非相对论性的任何方式作加速运动。比如说，当电荷加速度为竖直时，我们知道它产生的电场是电荷乘以推迟加速度的投影除以距离。因而可以知道任何一点的电场，从而知道电场的平方以及每秒钟通过单位面积的能量 $\epsilon_0 c E^2$ 。

量 $\epsilon_0 c$ 经常出现在与无线电波传播有关的表示式中。它的倒数称为真空阻抗，这是一个很容易记的数：其值为 $1/\epsilon_0 c = 377 \Omega$ 。所以以瓦特为单位的每平方米的功率等于电场平方的平均值除以377。

应用电场表示式（29.1），我们发现

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \quad (32.2)$$

就是在 θ 方向每平方米所辐射的功率。我们注意到它与距离平方成反比，如前面所说的那样。现在假如要求出向所有方向辐射的总能量，则必须将式（32.2）对所有方向积分。首先乘以面积，以求出在小角 $d\theta$ 内流过的功率（图32-1）。为此要知道球面被 $d\theta$ 所截部分的面积。考虑的方法是这样的：若球半径为 r ，则环状球截形的宽度为 $r d\theta$ ，周长为 $2\pi r \sin\theta$ ，因为 $r \sin\theta$ 为该圆周的半径。故这一小片球面的面积为 $2\pi r \sin\theta$ 乘以 $r d\theta$

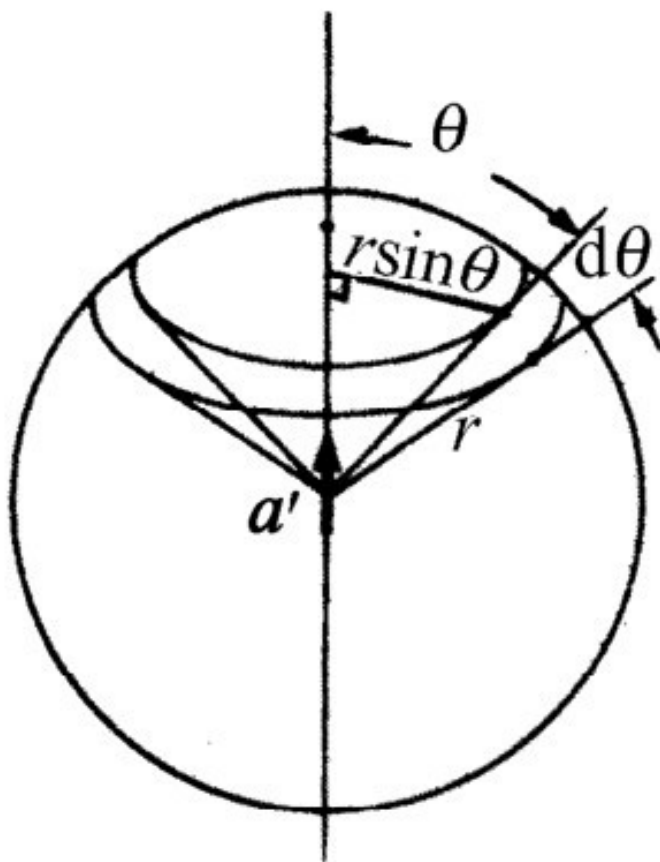


图32-1 球截形的侧面积为 $2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta$

$$dA = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta. \quad (32.3)$$

以包含在小角 $d\theta$ 内的面积（以平方米为单位）乘能流〔即式（32.2），每平方米的功率〕，即得到此方向上在 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间所释放的能量值；然后将它从 0° 到 180° 对 θ 的所有角度积分

$$P = \int S dA = \frac{q^2 a'^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (32.4)$$

把 $\sin^3 \theta$ 写为 $(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$ ，不难证明 $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ 。利用这一点，最后得到

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (32.5)$$

这个表示式有几点应加注意。首先，因为矢量 $\mathbf{a}'$ 有确定的方向，式（32.5）中的 a'^2 应为矢量 $\mathbf{a}'$ 的平方，即 $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'$ ——矢量长度的平方。其次，能流（32.2）是用推迟加速度计算的；也就是说，用较早时刻的加速度计算，该时刻所辐射的能量现正通过球面。我们也许会说此能量事实上是在该较早时刻释放的。但这不完全正确；这只是近似的概念。能量释放的确切时间不可能精确定义。我们所能真正精确计算的只是在像一个振动或诸如此类的那样一种完整运动中所释放的能量，在那种运动里加速度最后为零。于是我们所得到的，每周总能流为加速度平方在一个整周中的平均值。这正是在式（32.5）中所应表示出来的。或者说，如果运动的加速度在开始与末了时都为零，则流出的总能量为式（32.5）对时间的积分。

当我们有一个振动系统时，为了说明公式（32.5）的结果，我们来看一下如果电荷的位移 x 在作振动，因而使加速度 a 为 $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ 时，情况将怎么样。加速度平方在一周中的平均值（记住，当我们对

一个写为复数形式的量平方时，必须非常小心——它实在是余弦，而 $\cos^2 \omega t$ 的平均值是 $1/2$ ）从而为

$$\langle a'^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2,$$

这样

$$P = \frac{q_e^2 \omega^4 x_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.6)$$

我们现在所讨论的一些公式是比较高深的，或多或少是近代的，它们最初出现于20世纪初，而且是很有名的。由于它们的历史价值，能在老一些的书中读到它们对我们来说是很重要的。实际上，老一些的书中还使用一种与我们现在的mks制不同的单位制。但所有这些复杂性在最后与电子有关的公式中可用下述规则澄清：量 $q_e^2 / (4 \pi \epsilon_0)$ （其中 q_e 是电子电荷，以库仑为单位）在历史上被写为 e^2 。在mks制中很容易算出， e 在数值上等于 1.5188×10^{-14} ，因为我们知道 $q_e = 1.60206 \times 10^{-19}$ ， $1 / (4 \pi \epsilon_0) = 8.98748 \times 10^9$ 。因而我们将经常使用下列方便的缩写：

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4 \pi \epsilon_0}. \quad (32.7)$$

如果在老的公式中用上述数值代替 e ，并把这些公式看作是用mks单位写的，就能得到正确的数值结果。例如，式（32.5）中老的形式是 P

$=2e^2 a^2 / (3c^3)$ 。再如，电子与质子在距离为 r 时的势能是 $q_e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$ 或 e^2 / r ，其中 e 为mks制中的值，即 $e=1.5188 \times 10^{-14}$ 。

§32-3 辐射阻尼

振子损失一定能量的事实意味着，如果有一个电荷放在弹簧末端（或一个电子在原子中），其自然频率为 ω'_0 ，让它开始振动，然后放手，那么，即使它处在远离任何物体几百万里以外的真空中，它也不会永远振动下去。这里既没有通常意义上的油，也没有通常意义上的电阻；也就是没有“黏滞性”。但它仍不会像我们也许曾经说过的那样“永远”振动下去，因为当它带电时，它在辐射能量，因而振动将慢慢停止。那么慢到怎样程度？由电磁效应，即由所谓振子的辐射电阻或辐射阻尼所引起的这种振子的 Q 值是多少？任何振动系统的 Q 是任一时刻振子所包含的总能量除以每弧度的能量损失

$$Q = \frac{W}{dW/d\phi},$$

或者（另一种写法），因为 $\frac{dW}{d\phi} = \frac{dW/dt}{d\phi/dt} = \frac{dW/dt}{\omega}$ ，故

$$Q = \frac{\omega W}{dW/dt}. \quad (32.8)$$

对给定的 Q ，此式告诉我们振子的能量是怎样衰减的，因为 $dW/dt = -\omega W/Q$ ，若 W_0 为起始（ $t=0$ 时）能量，则此式的解为 $W = W_0 e^{-\omega t / Q}$ 。

为了找出辐射子的 Q ，我们回到式（32.8），并用式（32.6）作为 dW/dt 。

那么振子的能量 W 用什么？振子的动能是 $mv^2/2$ ，平均动能就是 $m\omega^2 x_0^2/4$ 。但我们记得振子的总能量中，平均讲一半是动能，一半是势能，故将上面的结果加倍，就得到振子的总能量

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2. \quad (32.9)$$

式中的频率用什么？就用自然频率 ω_0 ，因为实际上，它就是原子辐射的频率，而 m 就用电子质量 m_e 。这样，在作了必要的除法与消除后，公式变为

$$\frac{1}{Q} = \frac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}. \quad (32.10)$$

（为了更容易看清楚并迁就历史上的形式，我们用缩写 $q_e^2/4\pi\epsilon_0 = e^2$ 来写出此式，余下的因子 ω_0/c 已写为 $2\pi/\lambda$ ）。因为 Q 是无量纲的，组合量 $e^2/m_e c^2$ 必须仅仅是电子的电荷与质量的一种性质，即电子的固有特性，而且它必须是一个长度。我们给它取了一个名字，叫电子半径，因为被发明用来解释辐射电阻的，建立在电子的一部分对另一部分有力作用这一基础上的早期原子模型，都需要一个其线度一般为这一数量级的电子。但是，这一量现已不再表明我们相信电子确实具有这样一个半径。在数值上，此半径大小为

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (32.11)$$

现在我们来实际计算一个发光原子——比如说Na原子的 Q 。对Na原子，波长约为6 000 Å，在可见光的黄色部分，这是一个典型波长。于是

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5 \times 10^7, \quad (32.12)$$

故一个原子的 Q 为 10^8 数量级。这就是说，一个原子振子在其能量降为原来的 $1/e$ 以前，将振动 10^8 rad或约 10^7 次。与6 000 Å对应的光的振动频率（ $\nu = c/\lambda$ ）在 10^{15} Hz的数量级，因此寿命，即辐射原子的能量衰减为原来的 $1/e$ 所花的时间，约为 10^{-8} s。在一般情况下，自由发光原子辐射时通常就需要这么长时间。这只对不受任何干扰的真空中的原子有效。如果电子处在固体中，则它必定要撞击别的原子或电子，从而具有附加的电阻和不同的阻尼。

振子的阻力定律中的有效阻力项 γ 可以从关系 $1/Q = \gamma/\omega_0$ 中得到，我们记得 γ 的大小决定共振曲线的宽度（图23-2）。这样，我们刚才计算的就是自由辐射原子的光谱线宽度！因为 $\lambda = 2\pi c/\omega$ ，我们得到

$$\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega^2} = 2\pi c \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{Q} = \frac{4\pi r_0}{3} = 1.18 \times 10^{-14} \text{ m}. \quad (32.13)$$

§32-4 独立的辐射源

作为本章第二个题目——光的散射的准备，我们现在必须讨论一下在以前讨论中忽略的干涉现象的某种特征。这就是什么时候干涉不发生的问题。如果有两个源 S_1 和 S_2 ，振幅为 A_1 和 A_2 ，我们在某个方

向上观察，在该方向上两个信号到达时的相位是 ϕ_1 和 ϕ_2 （实际振动时间与延迟时间之和所产生的相位，依观察位置而定），则接收到的能量可由合成两个复矢量 A_1 和 A_2 得到，一个与坐标轴成 ϕ_1 角，另一个与坐标轴成 ϕ_2 角（如第29章中所做的那样）。我们得到合成能量正比于

$$A_K^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (32.14)$$

如果没有交叉项 $2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$ ，则在一给定方向上接收到的总能量将是分别由每个源所释放的能量的简单和 $A_1^2 + A_2^2$ ，此即通常所预期的结果。这就是说，两个源照射在某物体上，光的合强度是两个光强度之和。另一方面，如果安排得很好，有交叉项存在，它就不是这样的和，因为还有一些干涉。如果在某些情况中，此项并不重要，则我们就说干涉表观上看来消失了。当然，实质上干涉总是存在的，只是我们不可能探测它而已。

我们来考虑几个例子。首先，假定两个源相隔7 000 000 000个波长，这不是不可能的安排。于是在给定方向相位差具有非常确定的值，这是无疑的。但是，从另一方面，只要我们沿一个方向移动一根头发丝的距离，即移动几个波长（这根本谈不上什么距离；我们的眼睛上有一个孔，它已大到使我们在观察时已在比一个波长大得多的范围内取平均效应），我们就改变了相对的相位，余弦就变化很快。如果在一个很小的观察范围内取强度的平均值，则余弦（它在此范围内一会儿正，一会儿负）平均得零。

所以，如果在相位随位置迅速变化的范围内取平均时，我们将得不到干涉。

举另一个例子。假定两个源是两个独立的射电振子——不是由两条导线所馈的单个振子（这种振子将保证相位保持同步），而是两个独立的源——并且它们没被精确地调谐在相同频率（若非实际上将两个振子连接起来，要它们恰好处在同一频率是很困难的）。在这种情况下，我们有了两个所谓独立的源。显然，既然频率不恰好相等，即使它们起始时同相位，其中之一就开始稍稍超前于另一个，一会儿它们就反相位，然后超前更多，一会儿它们又同相位。因而两个源的相位差随时间逐渐移动，但是如果我们的观察很粗糙，以致不能分辨这一小段时间，而是在比它长得多的时间内取平均，那么尽管强度具有像声音中所谓的“拍”那样的涨落，但这些涨落太快，使仪器不能跟随，于是这一项又平均掉了。

换句话说，在任何相移平均掉的情况下，我们得不到干涉！

有许多书中说两个不同的光源决不会干涉。这不是物理学的表述，而仅是写书时实验技术灵敏度的表述。光源中所发生的情况是，一个原子先辐射，接着另一个原子辐射，等等，我们只看到原子辐射一列波的时间仅持续约 10^{-8} s； 10^{-8} s后，某个原子接下去辐射，接着另一个原子又辐射，等等。因而相位只能在约 10^{-8} s内保持不变。于是，如果我们在远比 10^{-8} s长的时间内取平均，就看不到来自两个不同源的干涉，因为比 10^{-8} s更长时，它们不能保持相位恒定。用光电池可以进行高速的探测，因而人们能够证明在 10^{-8} s内存在着随时间上、下变化的干涉。但大多数探测装置显然不能看到这样微小的时间间隔，因而看不到干涉。当然用具有十分之一秒平均时间的眼睛是无论如何也看不到两个不同的普通光源之间的干涉的。

最近已有可能制造一种光源，它使所有原子同时发光，从而克服了上述效应。具有这种作用的器件是一种很复杂的东西，必须用量子力学方法才能理解它。人们称它为激光，从激光可以产生一种光源，其相位保持恒定的时间远大于 10^{-8} s。它可以是 10^{-2} s，0.1 s甚至1 s的数量级，因而用普通光电池，人们就能够探测到两个不同的激光之间的拍频。人们很容易探测到两个激光源之间的拍的脉动。无疑不久将有人能演示这样的实验，把两个光源照射在墙上，它们的拍是这样慢，以致人们能够看见墙在明暗变化！

另一个干涉被平均掉的情况是，不是只有两个源，而是有许多个源。在这种情况下，要将 A_R^2 的表示式写成很多个复数振幅之和的平方，于是将得到每一项的平方的和，再加上每一对之间的交叉项，如果情况是使得后者平均掉，则将没有干涉效应。这种情况可以是这样，即各个源被置于杂乱无章的位置上，以致虽然 A_2 与 A_3 之间的相位差还是确定的，但它跟 A_1 与 A_2 等等之间的相位差很不同。因而我们将得到很多余弦项，有些为正，有些为负，加在一起平均掉了。

所以在许多情况下，我们看不到干涉效应，而只看到等于所有强度之和的合成的总强度。

§32-5 光的散射

上述讨论导致一种发生在空气中的效应，它是各原子的位置不规则所造成的结果。在讨论折射率时，我们曾看到入射光束使原子再辐射。入射光束的电场驱使电子上下运动，而电子由于有加速度而辐

射。这些散射辐射合起来形成一个与入射光束同方向的光束，但相位略有不同，而这正是折射率的起源。

但对于在其他方向上的再辐射光的大小，我们将说些什么呢？通常，如果原子整齐地排列成有规则的花样，容易证明在其他方向得不到光，因为我们所叠加的是相位不断在变化的许多矢量，结果得零。但是如果原子杂乱地排列，则任一方向上的总强度为每个原子所散射的强度之和，正如我们刚才讨论过的。而且，气体中的原子实际上在运动，所以即使此刻两个原子的相对相位有一确定的值，但不久其相位会变得很不同，从而每个余弦项将平均掉。因此，要找出在给定方向上气体散射光的强度，只要研究一个原子散射的效应，再将其辐射强度乘以原子数就行。

以前，我们曾说这种性质的光的散射现象是天空呈现蓝色的起因。太阳光穿过空气，当我们朝太阳的一边——比如说与光束成 90° 方向上——观察时将看见蓝光；现在要计算的是，我们看见多少光以及它为什么是蓝色的。

如果在原子所在处，入射光束的电场 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t}$ ，我们知道原子中的电子将由于此电场 $\mathbf{E}$ 而作上、下振动（图32-2）。由式（23.8），其响应将是

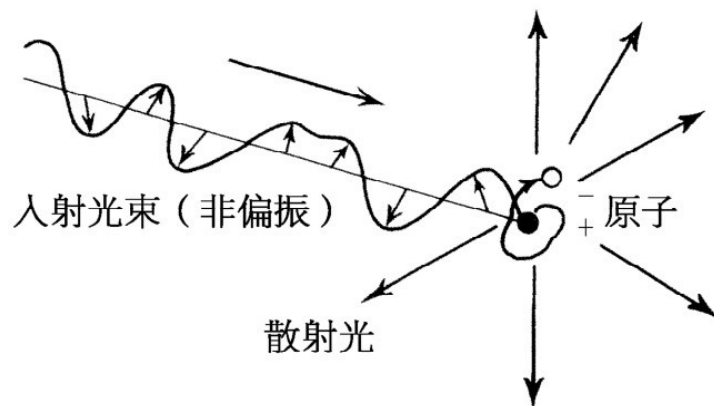


图32-2 一束光射在原子上引起原子中的电荷（电子）运动。此运动电子接着又在各个方向上辐射光

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{\mathbf{E}}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (32.15)$$

我们本来可以把阻尼以及原子表现为具有不同频率的几个振子的可能性也包括进去，并对各个频率求和，但为简单起见，我们只取一种振子，并忽略阻尼。于是对于外电场的响应（该式我们在计算折射率时已用过）就是

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{\mathbf{E}}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (32.16)$$

利用式（32.2）及与上述 $\hat{x}$ 相对应的加速度，我们现在可以很容易地计算出在各个方向上发射的光的强度。

然而为了节省时间，我们不这样做，而是径直计算在所有方向散射的光的总量。单个原子每秒在所有方向散射的光能量的总量显然由

式 (32.6) 给出。所以，把各部分写在一起并加以整理，得到在所有方向上辐射的总散射功率为

$$\begin{aligned}
 P &= \left[\left(\frac{q_e^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \right) \frac{q_e^2 E_0^2}{m_e^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \left(\frac{8\pi}{3} \right) \left(\frac{q_e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \right) \left[\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] \\
 &= \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \left(\frac{8\pi r_0^2}{3} \right) \left[\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]. \quad (32.17)
 \end{aligned}$$

我们将结果写成上列形式，因为这样容易记：首先，散射的总能量正比于入射场的平方。这意味着什么？显然，入射场的平方正比于每秒进入的能量。事实上，每平方米每秒入射的能量是 $\epsilon_0 c$ 乘以电场平方的平均值 $\langle E^2 \rangle$ ，而若 E_0 是 E 的最大值，则 $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$ ，换句话说，散射的总能量正比于每平方米进入的能量；照射在天空上的太阳光越亮，天空看起来也将越亮。

其次，入射光散射的比例是多少？试在光束中想象一个具有一定面积（比如说 σ ）的“靶”（并非实际的物质的靶，因为这会引起光的衍射等等；我们的意思是指在空间画出一块想象的面积）。在给定条件下，通过此表面 σ 的能量总量与入射强度和 σ 都成正比，总功率是

$$P = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \sigma. \quad (32.18)$$

现在我们来建立一种概念：设原子散射的总强度是落在某一几何面积上的全部强度，于是只要求出该面积，就给出了答案。这样，该答案与入射强度无关；它给出了散射能量与每平方米入射能量的比率。换句话说，比率

每秒散射的总能量 每平方米每秒的入射能量

是面积。此面积的意义是，如果射到该面积上的所有能量被射向所有方向，则它就被原子散射的能量的值。

这个面积称为散射截面；散射截面的概念是常用的，只要某一现象与光束的强度成正比。在这种情况下，人们常常这样来描述现象的强度，即说明为了收集那么多光束，有效面积必须是多少。这无论如何不是意味着此振子实际上具有这样一个面积。如果除了一个作上、下振动的自由电子外再也不存在别的什么，在物理上就不会有与之直接相联系的面积。它仅仅是表述某种类型问题的答案的一种方法；它告诉我们为了说明有这么一些能量散射掉，入射光束所碰到的面积必须是多少。这样，对我们的情形，有

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (32.19)$$

（下标s是指“散射”）。

我们来看一些例子。首先，讨论固有频率 ω_0 很低的情形，或讨论完全无束缚的电子，对它来说 $\omega_0=0$ ，则频率 ω 消去了，截面是一常数。此低频极限或自由电子截面，称为汤姆孙散射截面。它是每边线度约为 10^{-15} m上下的面积，即 10^{-30} m²，那是相当小的！

其次，我们讨论光在空气中的情况。我们记得空气振子的固有频率比我们所用的光的频率高得多。这意味着，作为一级近似，我们可以略去分母中的 ω^2 ，于是得到散射正比于频率的四次方。这就是

说，若光的频率提高两倍，其散射强度就大16倍，这个差别是十分大的。这意味着蓝光（它具有比光谱红端约高两倍的频率）散射得比红光多得多。因而当我们仰望天空时，它呈现出我们经常所见的那种蔚蓝色！

对于上述结果尚需说明几点。一个有趣的问题是，为什么我们看得见云？云是从哪里来的？人人都知道它是水蒸气凝聚而成的。但是，水蒸气显然在凝聚以前就已存在于大气中了，那么我们为什么看不见它呢？只在凝聚以后，它才成为完全可见的。它本来不在那里，现在却在那里了。因而云从哪里来的奥秘其实并不是像“水是从哪里来的，爸爸？”这样的孩子提问式的奥秘那样，而是须加解释的。

我们刚才指出每个原子都散射光，当然水蒸气也散射光，奥秘在于为什么当水凝聚成云时，它散射这么大量的光？

试考虑如果不是只有一个原子，而是有一个原子团，比如说有两个原子，彼此相对光的波长来说靠得很近，这时将发生什么。别忘了，原子直径只有 $1\text{\AA}$ 左右，而光的波长约 $5\,000\text{\AA}$ ，所以当它们形成块，即当几个原子在一起时，相对波长来说它们可以是靠得很近。那么当电场作用在上面时，两个原子将一起运动。从而散射的电场将是两个同相位的电场之和，即单个原子所具有的幅度的两倍，于是散射的能量是单个原子所散射的四倍，而不是两倍！所以原子团比它们成单个原子形状时散射或辐射更多的能量。我们关于相位彼此独立的论证是建立在任意两个原子间具有真正的、巨大的相位差的假设基础上的，这只有当它们相隔几个波长而且杂乱排列或在运动时才是对的。如果原子彼此紧靠着，它们必定同相位地散射光，因而它们具有相干的干涉效应，使散射增加。

如果在块团中有 N 个原子，它相当于一个微小水滴，则每个原子将按与上面大致相同的方式受电场驱动（一个原子对另一个原子的影响是不重要的，因为反正对于这个问题只要有一个概念就行了），而从每个原子上散射的幅度是相同的，所以散射的总场增大了 N 倍。于是散射光的强度增大了平方倍，即 N^2 倍。如果原子散开在空间，我们预期会得到 N 倍，而现在却得到了 N^2 倍！这就是说， N 个分子组成的水的块团中，每个分子的散射都比单个原子的散射强 N 倍。所以当水凝结时，散射增大了。那么，它会无限制地增大下去吗？不会！什么时候这种分析开始失效？我们最多可以聚集多少原子而仍可应用这个论证？答案是：当水滴大到从一端到另一端达一个波长左右时，原子辐射就不再都同相位了，因为这时原子相隔太远。所以当我们不断增大水滴的线度时，得到越来越大的散射，直到水滴的线度达到约一个波长，在这以后散射的增大就完全不像水滴增大那么快了。而且，蓝色消失了，因为对长波长来说，在达到这一极限以前的水滴可以比短波长的更大一些。虽然对每个原子来说，短波散射得比长波多，但当所有的水滴都比波长大时，光谱红端增长得比蓝端更多一些，所以颜色从蓝色向红色移动。

现在我们可以做一个实验来演示这一点。我们可以使粒子在开始时很小，然后线度逐渐增大。我们使用硫代硫酸钠（海波）的硫酸溶液，它能够沉淀很小的硫粒子。当硫沉淀时，开始粒子很小，散射光略带蓝色。当沉淀增多时，散射光增强，当粒子变大时遂成白色。此外，直接穿过溶液的光将缺少蓝色。这正是落日为什么呈红色的原因，当然，因为光穿过空气，到达眼睛时已有许多蓝光被散射掉，所以呈火红色。

最后，还有一个关于偏振的重要特性，它其实属于下一章的内容，但因很有趣，不妨现在就提出来。这就是散射光的电场趋向于沿一个特殊方向振动的性质。入射光的电场沿某一方向振动，因而受激振子沿着与此相同的方向振动，如果我们位于与入射光束垂直的位置上，就会看到偏振光，即其电场仅沿一个方向振动的光。一般地说，原子可以沿与入射光束垂直的任一方向振动，但是如果它们受到激发而朝着我们或背离我们振动，我们就看不见它们所发的光。所以如果入射光的电场沿任一方向振动或变化（这种光称为非偏振光），则与入射光束成 90° 方向出来的散射光仅沿一个方向振动！（见图32-3）

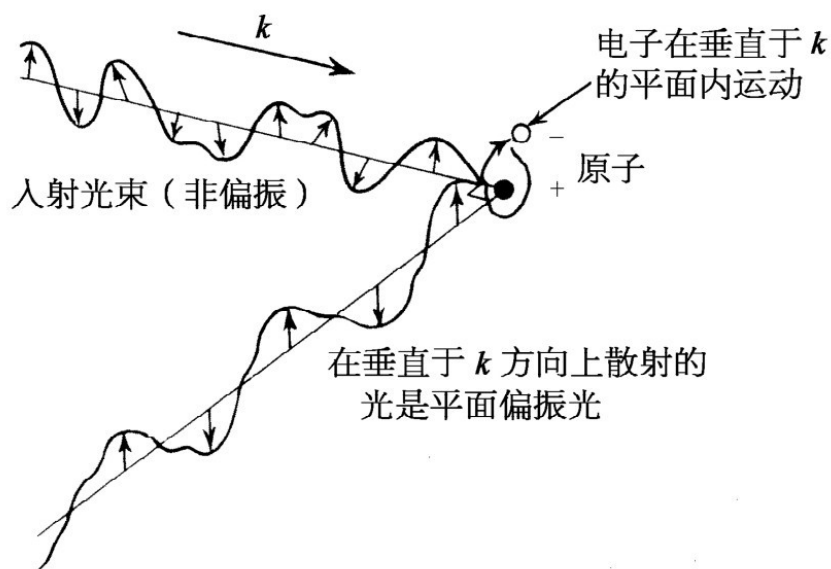


图32-3 说明垂直于入射光束方向上散射的光的偏振化起因的图

有一种称为偏振片的东西，它具有这样的性质：当光通过时，只有沿一特殊轴的电场成分可以通过。我们可以用它来检验偏振化，从而果真发现由海波溶液所散射的光是强烈偏振的。

第33章 偏振

§33-1 光的电矢量

本章将讨论这样一些现象，这些现象与描写光的电场是矢量这一事实有关。前几章中，我们除了注意到电矢量位于与传播方向垂直的平面内以外，并没有考虑到电场振动的方向。在那里，电矢量在该平面内的特定方向对我们关系不大。现在我们要讨论的则是以电场振动的特殊方向性为其主要特征的一些现象。

对理想的单色光，电场必须以确定的频率振动，但因 x 分量与 y 分量可按确定的频率相互独立地振动，所以应首先讨论两个相互成直角的独立振动的叠加产生的合成效应。以相同频率振动的 x 分量和 y 分量合成后会得到怎样的电场？如果在 x 振动上加上一定大小的同相位的 y 振动，结果就得到一个在 xy 平面内沿新方向的直线振动。图33-1表示不同振幅的 x 振动与 y 振动的叠加结果。但图33-1所示的合成结果并不包括各种可能情形；在图中所示的所有情况中，我们都假定 x 振动和 y 振动是同相的，但不一定要那样。 x 振动与 y 振动可以是不同相的。

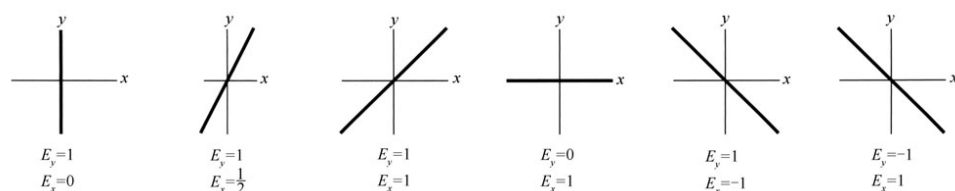


图33-1 同相位的 x 振动与 y 振动的合成

当 x 振动与 y 振动不同相时，电场矢量沿一椭圆运动；我们可以用一种大家熟悉的方法来说明这一点。如果我们从支点用一根长线悬挂一个球，使它可在水平面内自由摆动，它将作正弦振动。若设想有一水平的 xy 坐标，原点取在球的静止位置上，球就既可在 x 方向，也可在 y 方向以相同的单摆频率摆动。选取适当的初位移和初速度，我们可使球或沿 x 轴振动，或沿 y 轴振动，或沿 xy 平面内的任一直线振动。球的这些运动与图33-1中所示的电场振动是类似的。在图上各种情况中，因为 x 振动与 y 振动都同时达到最大值与最小值，所以 x 振动与 y 振动是同相位的。但是我们知道，球的最一般的运动是沿椭圆的运动，它对应于 x 方向与 y 方向不同相的振动。图33-2画出了 x 振动与 y 振动不同相时的叠加，其中各图形所对应的 x 振动和 y 振动间的相位差角是不同的。一般的结果是电矢量沿一椭圆运动，沿直线运动相当于相位差为零（或 π 的整数倍）的特殊情况；沿圆运动则相当于等振幅而有 90° 相位差（或 $\pi/2$ 的奇数倍）的情况。

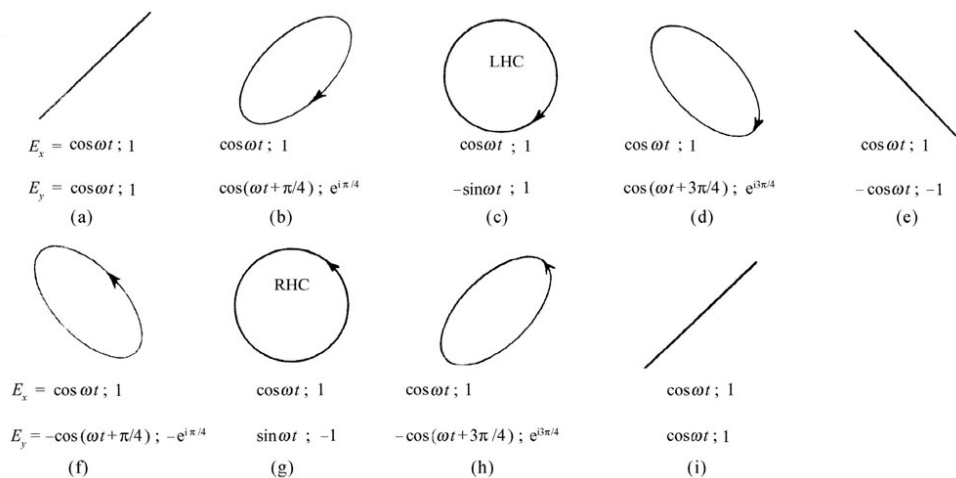


图33-2 等振幅而相对相位不同的 x 振动与 y 振动的叠加。 E_x 与 E_y 两个分量用实数与复数两种符号表示

在图33-2中，我们把 x 方向与 y 方向的电场矢量标为复数，用这种形式表示相位差很方便。不要把用这种符号表示的复数电矢量的实部与虚部和场的 x 坐标与 y 坐标混淆起来。图33-1与图33-2中的 x 坐标与 y 坐标是可以测量的实际电场，而复数电场矢量的实部与虚部则仅仅是一种方便的数学形式，并无物理意义。

现在讲一些术语。电场沿直线振动的光叫做线偏振光（有时称为平面偏振光）；图33-1即表示线偏振光。电场矢量的末端沿一椭圆移动的光叫做椭圆偏振光。当电场矢量末端沿一圆移动时，则为圆偏振光。当我们朝着迎面来的光观看时，若电矢量末端沿逆时针方向旋转，我们称它为右旋圆偏振光。图33-2（g）表示右旋圆偏振光，而图33-2（c）则表示左旋圆偏振光。在两种情况中光都从纸面向外。我们标记左旋圆偏振与右旋圆偏振的约定与今天对物理学中所有其他显示偏振性的粒子（例如电子）所用的约定是一致的。然而，在某些光学书中却用相反的约定，所以读者必须小心。

我们考虑了线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光，除这些光以外，剩下的只有非偏振光了。但是，既然光总得沿这些椭圆之一振动，它怎么可能是非偏振的呢？如果光不是绝对单色的，或者如果 x 相与 y 相不完全保持同步，那么电矢量先沿某个方向振动，然后沿另一个方向振动，偏振性经常在改变。记住一个原子的发射只持续 10^{-8} s时间，若一个原子发射某种偏振光，接着另一个原子发射另一种偏振光，则偏振性将每隔 10^{-8} s改变一次。如果偏振性改变得比我们所能探测的更快，则我们称光为非偏振的，因为所有的偏振效应都平均掉了。没有一个偏振光的干涉效应可以用非偏振光显示出来。但是，从定义来看，只有当我们无法断定光是否偏振的时候，才称它为非偏振光。

§33-2 散射光的偏振性

我们已讨论过的偏振效应的第一个例子是光的散射。设有一束光（例如来自太阳的光束）照射在空气上。电场将使空气中的电荷发生振动，而这些电荷的运动将辐射光，光的最大强度在与电荷振动方向垂直的平面内。从太阳来的光束是非偏振的，它的偏振方向不断改变，空气中电荷的振动方向也就不断改变。如果我们考察沿 90° 角散射的光，因为只有当带电粒子的振动垂直于观察者的视线时，它才向观察者辐射光，故光将是沿振动方向^[1]偏振的。所以散射是产生偏振的方法的一例。

§33-3 双折射

另一个有趣的偏振效应是有些物质对沿一个方向的线偏振光的折射率与对沿另一方向的线偏振光的折射率不同。假定有一种物质由长形的、长度比宽度大的非球形分子所组成，并且这些分子的长轴在物质中排列得相互平行。那么，当振动着的电场通过这种物质时将发生什么现象？假定由于分子的结构，物质中的电子对于平行于分子轴的振动的响应比垂直于分子轴的振动的响应容易。在这种情形下，我们预期一个方向上的偏振和与之垂直的方向上的偏振将具有不同的响应。我们把分子轴的方向叫做光轴。偏振方向沿着光轴时的折射率与偏振方向与光轴成直角时的折射率不同。这样的物质称为双折射的。它具有两种可折射性，即两种折射率，按在物质中偏振的方向而定。哪种物质是双折射的？在双折射物质中，由于种种原因，必须有一定量排列整齐的非对称的分子。具有立方对称性的立方晶体，当然不可

能是双折射的。但长针状晶体无疑包含不对称的分子，因而很容易在其中观察到这种效应。

现在我们来考察当偏振光透过一片双折射物质时可以预期什么效应。如果偏振方向与光轴平行，光就以一种速度透过；如果偏振方向与光轴垂直，则光就以另一种速度透过。而当光沿着与光轴成 45° 角的方向偏振时，就会发生一种有趣的情况。我们曾注意到， 45° 偏振可表示为同相位等幅度的 x 方向偏振与 y 方向偏振的叠加，如图33-2（a）所示。既然 x 方向偏振的光与 y 方向偏振的光以不同的速度传播，则当光通过物质时， x 方向与 y 方向的相位就以不同的速率改变。因而，虽然开始时 x 方向振动与 y 方向振动同相位，但在物质内部， x 方向与 y 方向振动之间的相位差则与光进入物质中的深度成正比。当光通过物质时，其偏振情况按图33-2中所示一系列形状改变。如果薄片厚度恰使 x 方向偏振与 y 方向偏振产生 90° 的相移，如图33-2（c）那样，则光以圆偏振出射。这种厚度的薄片叫做四分之一波片，因为它使 x 方向偏振与 y 方向偏振之间产生四分之一周的相差。如果线偏振光通过两块四分之一波片，它将又以平面偏振光出射，但与原来的方向成直角，从图33-2（e）即可看出这一点。

用一张玻璃纸很容易说明这一现象。玻璃纸系由长形纤维分子组成，各向不同性，因为纤维朝某一方向的排列占优势。为了演示双折射，需要一束线偏振光，这很方便，只要把非偏振光通过一偏振片就行。偏振片（下面将对它作详细讨论）有一个有用的性质，即偏振方向与其轴平行的线偏振光透过它时，很少被吸收，而对偏振方向与其轴垂直的线偏振光则强烈吸收。当非偏振光通过偏振片时，只有振动方向平行于偏振片轴的那部分光可以通过，因而透射光束是线偏振的。偏振片的这一性质也可用来探测线偏振光束的偏振方向或确定一

束光是否线偏振光，只要让光束通过偏振片，并在垂直于光束的平面内旋转偏振片。如果光束是线偏振光，则当偏振片的轴垂直于光束的偏振方向时，光束就透不过偏振片。当偏振片的轴转过 90° 时，透射光束只衰减很少。如果透射强度与偏振片的取向无关，光束就不是线偏振的。

为了演示玻璃纸的双折射性，我们用两块偏振片，如图33-3所示。第一块给出一束线偏振光，让它通过玻璃纸，然后通过第二块偏振片，此片用来探测玻璃纸对通过它的偏振光所产生的效应。如果先让两块偏振片的轴互相垂直，并移去玻璃纸，没有光通过第二块偏振片。如果此时在两块偏振片之间插入玻璃纸，并以光束为轴线旋转玻璃纸，即可看到，总的来说玻璃纸使一部分光能通过第二块偏振片。但玻璃纸有两个互相垂直的取向不允许光通过第二块偏振片。当线偏振光通过玻璃纸时，其偏振方向不受影响的这两个玻璃纸的取向必为平行于玻璃纸光轴的方向或垂直于玻璃纸光轴的方向。

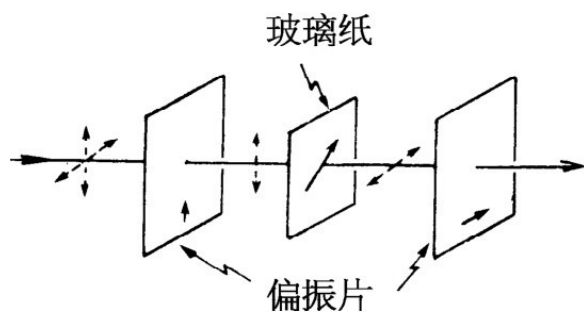


图33-3 玻璃纸双折射性的实验演示。光的电矢量用虚线表示。偏振片的通过轴与玻璃纸的光轴用箭头表示。入射光束是非偏振光

我们假定光在这两个取向上以两种不同的速度通过玻璃纸，但透过时偏振方向不变。当玻璃纸转到这两个取向的中间位置（如图33-3所示）时，我们看到透过第二块偏振片的光是亮的。

通常用于商业包装的玻璃纸对白光中的大多数色光来说，恰巧很接近于半波片厚度。如果入射偏振光束的偏振方向与光轴成 45° 角的话，这样的玻璃纸将使线偏振光的轴转过 90° ，因而自玻璃纸出射的光束正沿着可以通过第二块偏振片的方向振动。

如果在上述演示实验中用白光，则玻璃纸只对白光中的一个特定成分才正好是半波片厚度，故透射光束将具有此成分的颜色。透射光的颜色依赖于玻璃纸的厚度；我们可以用以下方法来改变玻璃纸的有效厚度，即倾斜一下玻璃纸，使光以一个倾角通过它，因此光在玻璃纸中通过一段较长路程。当玻璃纸倾斜时，透射光改变颜色。用不同厚度的玻璃纸，可以作成透过不同颜色的滤色片。这种滤色片具有这样一种有趣的性质，即当两块偏振片的轴互相垂直时，它们透过一种颜色，而当两块偏振片的轴互相平行时，则透过其互补色。

整齐排列的分子的另一个有趣的应用很实用。某些塑料由缠绕在一起的很长和很复杂的分子组成。当很小心地凝固这种塑料时，所有分子卷成一团，使沿一个方向排列的分子与沿另一个方向排列的分子一样多，故这样的塑料没有显著的双折射性。通常，当塑料凝固时，会引进一些应变和应力，因而不是完全均匀的。但是如果在这种塑料片上施加张力，就像拉一团乱麻那样，则沿张力方向排列的麻绳将比沿别的方向多。因而当给某种塑料施加应力时，塑料就变为双折射的，让偏振光通过塑料，就能看到双折射效应。如果通过偏振片观察透射光，将看到明暗的条纹（如用白光，则为彩色条纹）。当在样品上加应力时，条纹会移动，计数条纹数目，并注意哪里条纹最多，就可确定应力。工程师们把这一现象用作为求形状古怪、难以计算的物体上应力的一种方法。

另一种得到双折射的有趣方法是用液体。设想有一种由长形非对称分子组成的液体，让在近分子的两端带有正或负的平均电荷，使分子成为一偶极子。由于碰撞，液体中分子一般将混乱取向，朝某一方向的分子与朝另一方向的分子一样多。如果加上电场，分子就会趋向于整齐排列，而一旦分子排列整齐，液体就变成双折射的。用两块偏振片和一个装有这种极化液体的透明盒，就可构成一种装置，它具有有一种性质，只有加上电场时光才能通过。这样，我们就有了一个光的电开关，叫做克尔盒。这种对某些液体加上电场就会产生双折射的效应，叫做克尔效应。

§33-4 起偏振器

至此我们只讨论了在不同方向偏振的光其折射率不同的这类物质。很有实用价值的是那样一些晶体和材料，它们对不同方向偏振的光不仅折射率不同，而且吸收系数也不同。用证实双折射概念的同样论证，可以理解，在各向异性物质中吸收会随电荷受迫振动的方向而变化。电气石是这种物质的古老而有名的例子，偏振片则是另一个例子。偏振片系由碘硫酸奎宁小晶体（一种碘和奎宁的盐类）的薄片组成，所有晶体的轴排列成相互平行。当（光）振动沿一个方向时，这些晶体吸收光，当振动沿别的方向时，则吸收不明显。

假定让偏振方向与偏振片的通过方向成 θ 角的线偏振光射入偏振片，通过的光的强度将是多少？此入射光可以分解为两个分量：一个与通过方向垂直，它正比于 $\sin\theta$ ；另一个沿着通过方向，它正比于 $\cos\theta$ 。从偏振片出来的幅度仅为 $\cos\theta$ 部分； $\sin\theta$ 部分被吸收了。通过偏振片的振幅小于进来的振幅，两者相差一个因子 $\cos\theta$ 。透过偏振片

的能量，即光的强度，正比于 $\cos\theta$ 的平方，于是当入射光的偏振方向与通过方向成 θ 角时，透射光强度就是 $\cos^2\theta$ 。吸收强度当然是 $\sin^2\theta$ 。

在下述情况下会出现一个有趣的佯谬。我们知道，不可能使一束光通过两块轴互相正交的偏振片。但是如果在原先两块偏振片之间放上第三块偏振片，使其轴与正交轴成 45° 角，就有些光透过去了。我们知道偏振片只会吸收光，而不会创造什么东西。然而，加进成 45° 角的第三块偏振片却使较多的光得以通过。这一现象的分析留给学生作为练习。

最有趣的偏振例子之一并不发生在复杂的晶体或难以获得的材料中，倒是发生在最简单和最熟悉的情况之一——光从表面的反射之中。不管你是否相信，当光从玻璃表面反射时，它可以是偏振化的，而这一现象的物理解释很简单。布儒斯特从实验中发现，如果从表面反射的光束与进入物质中的折射光束成直角，则反射光为完全偏振光。图33-4说明这一情况。如果入射光束在入射面内偏振，就将完全没有反射光。只有当入射光束垂直于入射面偏振时，才会被反射。理由很容易懂。在反射材料中光是横向偏振的，而我们知道产生出射光束的是材料中电荷的运动，此出射光束我们叫做反射光。这种所谓反射光的来源并非简单地是入射光束的反射而已；对此现象的更深入的理解告诉我们，入射光束驱动材料中的电荷振动，接着产生反射光束。从图33-4可知，显然只有垂直于纸面的振动可以朝反射方向辐射光，因此反射光束将垂直于入射面偏振。如果入射光束在入射面内偏振，就根本没有反射光。

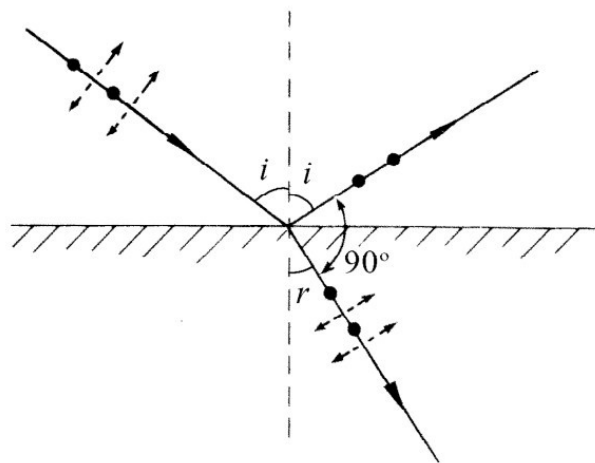


图 33-4 在布儒斯特角下线偏振光的反射。虚线箭头表示偏振方向；圆点表示偏振方向垂直纸面

让一束线偏振光在一块平玻璃板上反射，很容易演示上述现象。如果转动玻璃板，使偏振光束呈现不同的入射角，则当入射角通过布儒斯特角时，可观察到反射强度的急剧衰减。这种衰减只有当偏振面在入射面内时才能观察到。如果偏振面垂直于入射面，则在所有角度都观察到通常的反射强度。

§33-5 旋光性

另一个最值得注意的偏振效应是在由不具有反射对称性的分子所组成的材料中观察到的。这种分子的形状有些像螺丝，或者戴手套的手，或者别的其形状通过镜子看会反过来的东西，就像左手手套会在镜子中反射成为右手手套一样。假定物质中的所有分子都一样，即没有一个分子是另一个分子的镜像。这样一种物质会显示出一种叫做旋光性的有趣效应，当线偏振光通过该种物质时，偏振方向就绕光束的轴旋转。

为了理解旋光现象需要一些计算，但我们可以不必去实际进行计算而定性地看出此效应是怎样发生的。设想有一螺旋状非对称分子，如图33-5所示。为了显示旋光性，分子形状不需要真正像个螺丝。但我们将把这种简单形状作为无反射对称性形状的典型例子。当沿 y 方向偏振的线偏振光照射在此分子上时，电场将驱动电荷沿螺旋线上、下运动，于是产生在 y 方向上的电流，并辐射沿 y 方向偏振的电场 E_y 。但是，如果电子被约束在螺旋线上运动，则当它们被驱动作上、下运动的同时，也必作 x 方向的运动。当电流沿螺旋线向上流动时，电流也同时在 $z=z_1$ 点向纸面流入，在 $z=z_1+A$ 点从纸面流出，如果 A 是分子螺旋的直径的话。人们也许会设想 x 方向的电流不会产生净辐射。因为在螺旋的两边电流反方向。但是，如果考虑到达 $z=z_2$ 点的电场的 x 分量，我们看到，由 $z=z_1+A$ 点的电流所辐射的场与由 $z=z_1$ 点的电流所辐射的场，在到达 z_2 点时相差一段时间 A/c ，于是相位相差 $\pi+\omega A/c$ 。既然相位差不恰好是 π ，两个场就不恰好抵消，于是由分子中电子的运动产生的电场就剩下一个小的 x 分量，而驱动电场却只有 y 分量。此小的 x 分量加在大的 y 分量上，产生一个合电场，此合电场对于 y 轴（即原来的辐射方向）稍稍倾斜了一点。当光通过物质行进时，偏振方向绕光束的轴旋转。稍画几个图例，并考察由入射电场所引起的电流，人们就能确信旋光性的存在，而且旋转方向与分子的取向无关。

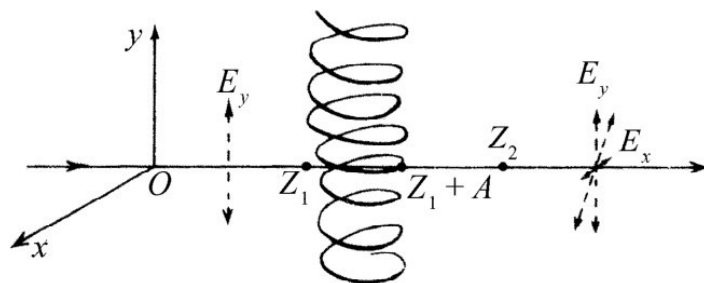


图33-5 一个不具有镜像对称性形状分子。一束沿 y 方向偏振的光照射在该分子上

玉米糖浆是一种常见的具有旋光性的物质。玉米糖浆的旋光现象很容易演示，只要用一块偏振片，以产生线偏振光束，一个盛有玉米糖浆的透明盒，以及另一块偏振片，以检测当光通过玉米糖浆时偏振方向的旋转。

§33-6 反射光的强度

现在我们来定量讨论反射系数与角度的关系。图33-6 (a) 表示一束光投射在玻璃表面上，一部分被反射，一部分折射入玻璃。假定入射光束（振幅为1）垂直于纸面偏振。我们将称反射波的振幅为 b ，折射波的振幅为 a 。折射波和反射波当然是线偏振的，而且入射波、反射波和折射波的电场矢量都相互平行。图33-6 (b) 表示同一种情况，但假定入射波（振幅为1）在纸面内偏振。此时反射波和折射波的振幅分别称为 B 和 A 。

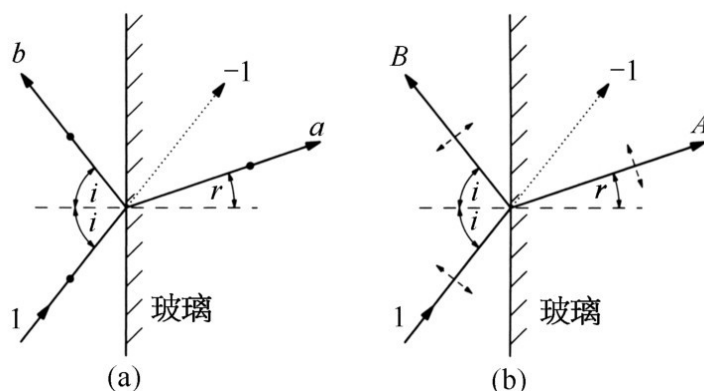


图33-6 振幅为1的入射波在玻璃表面的反射与折射。

(a) 入射波垂直于纸面偏振；(b) 入射波的线偏振方向用虚线电矢量表示

现在要计算在图33-6（a）和（b）所示的两种情况中反射有多强。我们已知道，当反射光束和折射光束之间的夹角为直角时，则图33-6（b）中将没有反射波，但我们来看一看，是否能得到一个定量的答案——即 B 和 b 作为入射角 i 的函数的正确表示式。

我们必须懂得下述原理：玻璃中引起的电流产生两个波。首先，它们产生反射波。再者，我们知道，如果没有玻璃中引起的电流，入射波就会继续不偏折地进入玻璃。须知凡源都产生净场。入射光束的源产生振幅为1的场，它将会沿图中虚线进入玻璃。但此场未观察到，因而在玻璃中引起的电流必须产生一个振幅为-1的场，它也沿虚线行进。我们将利用这一事实来计算折射波的振幅 a 与 A 。

在图33-6（a）中我们看到，幅度为 b 的场系玻璃内之电荷运动所辐射，而这些电荷的运动则是玻璃内的场 a 所引起，因而 b 正比于 a 。既然两个图除偏振方向外实际上相同，我们也许会假定，比值 B/A 将与比值 b/a 相同。但这并不十分正确，因为图33-6（b）中的偏振方向不像图33-6（a）中那样都互相平行。只有 A 中垂直于 B 光束的分量 $A \cos(i+r)$ 在产生 B 中才是有效的。于是正确的比例表示式为

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A \cos(i+r)}. \quad (33.1)$$

现在我们来利用一个诀窍。我们知道在图33-6（a）和（b）中，玻璃中的电场都必须产生这样的电荷振动，它产生振幅为-1，偏振方向与入射光束平行，而沿着虚线方向行进的场。但从图33-6（b）部分可见，只有 A 中垂直于虚线的分量才与产生此场的偏振方向一致，而在图33-6（a）中却是整个幅度 a 都有效，因为 a 波的偏振方向与振幅为-1的波的偏振方向平行。于是可得

$$\frac{A \cos(i-r)}{a} = \frac{-1}{-1}, \quad (33.2)$$

因为式（33.2）左端的两个幅度都产生振幅为-1的波。

用式（33.2）除式（33.1），得

$$\frac{B}{b} = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}, \quad (33.3)$$

此结果可用已知的情况来检验。若令 $i+r=90^\circ$ ，式（33.3）给出 $B=0$ ，与布儒斯特定律要求的一样，所以至此我们的结果至少无明显错误。

前面已假定入射波的振幅为1，所以 $|B|^2/1^2$ 即在入射面内偏振的波的反射系数，而 $|b|^2/1^2$ 为垂直于入射面偏振的波的反射系数。此两反射系数之比由式（33.3）决定。

现在我们来完成一个奇迹，即不只是计算此比值，而且要计算每个系数 $|B|^2$ 与 $|b|^2$ 本身！由能量守恒定律可知，折射波的能量必定等于入射波的能量减去反射波的能量，一为 $1-|B|^2$ ，一为 $1-|b|^2$ 。此外，图33-6（b）中进入玻璃的能量与图33-6（a）中进入玻璃的能量之比为折射波振幅平方之比，即 $|A|^2/|a|^2$ 。也许有人会问，我们是否真的知道如何计算玻璃中的能量，因为除电场能量之外，毕竟还得加上原子运动的能量。但是显然对总能量的所有各种贡献，都将与电场振幅的平方成正比。于是可得

$$\frac{1-|B|^2}{1-|b|^2} = \frac{|A|^2}{|a|^2}. \quad (33.4)$$

现在将式（33.2）代入上式，以消去 A/a ，并借助于式（33.3）用 b 表示 B

$$\frac{1 - |b|^2 \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}}{1 - |b|^2} = \frac{1}{\cos^2(i-r)}. \quad (33.5)$$

此式只包含一个未知振幅 b 。解出 $|b|^2$ ，得

$$|b|^2 = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \quad (33.6)$$

借助于式（33.3），并可得

$$|B|^2 = \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}. \quad (33.7)$$

因而我们已求得了垂直于入射面偏振的入射波的反射系数 $|b|^2$ ，也求得了在入射面内偏振的入射波的反射系数 $|B|^2$ ！

这种性质的论证还可继续进行下去，并推得 b 是实数。为此，必须考虑光从玻璃表面的两边同时射来的情况，这种情况在实验上并不容易安排，但在理论上分析起来却很有趣。如果分析这种一般情况，可以证明 b 必须是实数，因而，实际上 $b = \pm \sin(i-r)/\sin(i+r)$ 。若考虑很薄很薄的薄片情况（此时从前表面与后表面都有反射），并且计算出光反射了多少后，甚至可以决定 b 的符号。我们知道薄片应反射多少光，因为我们知道产生多少电流，甚至求出了这种薄层电流所产生的场。

由这些论点可以证明

$$b = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad B = -\frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}. \quad (33.8)$$

这些反射系数作为入射角与折射角函数的表示式，叫做菲涅耳（Fresnel）反射公式。

若考虑角 i 和 r 趋向于零的极限情况，发现在正入射情况下对两种偏振都有 $B^2 \approx b^2 \approx (i-r)^2 / (i+r)^2$ ，因为此时正弦差不多等于角度，正切亦然。但我们知道 $\sin i / \sin r = n$ ，而当角度很小时， $i/r \approx n$ ，因而很容易证明对正入射的反射系数为

$$B^2 = b^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

作为例子，求出在正入射情况下从水表面反射了多少光是有意思的。对水， n 是4/3，所以反射系数为 $(1/7)^2 \approx 2\%$ 。即在正入射情况下，从水表面只反射2%的入射光。

§33-7 反常折射

我们将要讨论的最后一个偏振效应其实是最早发现的效应：反常折射。水手们在游历冰岛后带回了一些冰洲石晶体（ CaCO_3 ）到欧洲，它有一个有趣的性质，通过晶体看起来，任何东西都成了两个，即呈现两个像。此现象引起了惠更斯的注意，并在偏振的发现中起了重要的作用。事情往往是这样，最早发现的现象最终最难解释。只有当我们透彻理解了物理概念以后，我们才能仔细地挑选出那些最简单、最清晰地说明此概念的现象。

反常折射是前面讨论的同一个双折射现象的特殊情况。反常折射系当光轴，即非对称分子的长轴不平行于晶体表面时所发生的现象。图33-7中画了两块双折射晶体，其光轴如图所示。在上图中，投射在晶体上的入射光束的线偏振方向垂直于晶体的光轴。当此光束投射到晶体表面时，表面上每一点都成为一个波源，这些波以速度 $v_{\perp}$ （即当偏振面垂直于光轴时光在晶体中的速度）在晶体中传播。其波前正好是所有这些小球面波的包络或轨迹，并且不偏折地通过晶体行进，从另一面出射。这正是我们所预期的正常行为，因而这种光线叫做寻常光线。

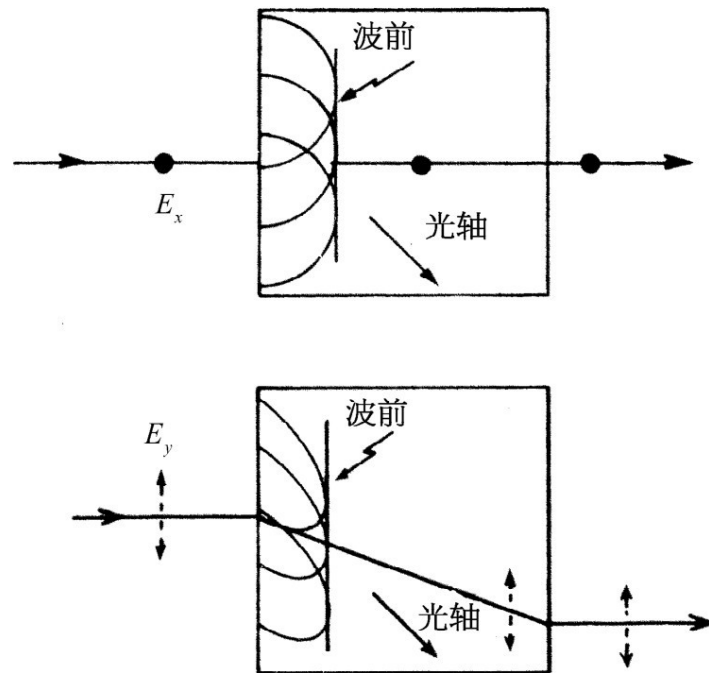


图33-7 上图表示通过双折射晶体的寻常光线路径。非常光线路径画于下图中。光轴位于纸面上

下图中投射在晶体上的线偏振光的偏振方向转了 90° ，因而光轴位于偏振平面内。当考虑晶体表面上任一点发出的小波时，我们看到它们并不以球面波形状扩展。沿着光轴方向传播的光以速度 $v_{\perp}$ 传播，因

为其偏振方向垂直于光轴，而垂直于光轴方向传播的光却以速度 $v_{\parallel}$ 传播，因为其偏振方向平行于光轴。在双折射物质中， $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$ ，在图中 $v_{\parallel} < v_{\perp}$ 。更全面的分析证明波以椭球面形状扩展，光轴为椭球的长轴。所有这些椭球面波的包络即为波前，它沿图中所示方向通过晶体行进。在后表面，光束的偏折情况恰与在前表面上相仿，因而光以平行于入射束方向出射，但相对于入射束平移了。显然，此光束不遵循斯涅耳定律，而沿反常方向行进。于是称它为非常光线。

当非偏振光投射在反常折射晶体上时，分裂为一束寻常光线（它以正常形式不偏折地通过晶体传播）和一束非常光线（当它通过晶体时平移了）。这两束出射光线以相互垂直的方向偏振。这一点的正确性很容易演示，只要用一块偏振片分析出射光线的偏振状态即可。把线偏振光射入晶体，我们还能演示对此现象的解释是正确的。只要适当选定入射光束的偏振方向，可以使这束光线不分裂、不偏折地通过晶体，也可使它不分裂地通过晶体，但有一位移。

我们已在图33-1和图33-2中把所有不同的偏振状态表示成两种特殊的偏振状态，即不同大小和不同相位的 x 振动与 y 振动的叠加。其他的偏振对也同样可用来表示各种偏振状态。沿着任意倾斜于 x, y 的相互垂直的轴 x', y' 的偏振状态同样可用来表示各种偏振状态〔例如，任一偏振状态可以由图33-2中的状态（a）和状态（e）叠加而成〕。但有趣的是，这一概念还可推广到其他状态。例如，任一线偏振状态可以由适当大小和适当相位的右旋圆偏振和左旋圆偏振状态〔图33-2的状态（c）和（g）〕叠加而成，因为两个反向旋转的相等矢量相加后得到一个沿直线振动的单一矢量（图33-8）。如果其中一个的相位相对另一个移动了，此直线即倾斜。于是图33-1中所有图形都可标成“相等大小的右旋圆偏振光与左旋圆偏振光在各种不同相对相位下的叠

加”。当左旋的相位落后于右旋时，线偏振状态的方向会改变。因而在一定意义上，旋光材料是双折射的。它们的性质可以描述成对右旋圆偏振光和左旋圆偏振光具有不同的折射率。不同强度的右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的叠加，则产生椭圆偏振光。

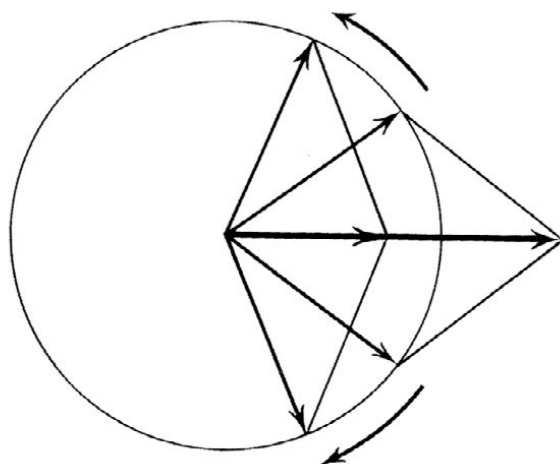


图33-8 两个反向旋转的等幅矢量相加产生一方向固定但幅度振荡的矢量

圆偏振光具有另一个有趣的性质——它带有角动量（对传播方向）。为了说明这一点，假定圆偏振光投射在一个可用简谐振子来代表的原子上，该振子能在 xy 平面内沿任意方向相同地位移。于是，作为对场的 E_x 分量的响应，电子将有 x 方向的位移，作为对大小相同的场的 E_y 分量的响应，有大小相同的 y 方向的位移，但相位落后 90° 。这样一来，作为对光的旋转电场的响应，电子以角速度 ω 沿一圆周运动（图33-9）。电子位移矢量 $\mathbf{a}$ 的方向和作用在电子上的力 $q_e \mathbf{E}$ 的方向不一定要相同，视振子响应的阻尼特性而定，但它们一起旋转。 $\mathbf{E}$ 可以有与 $\mathbf{a}$ 成直角的分量，所以对系统做功，并作用有力矩 τ 。每秒钟做的功为 $\tau\omega$ 。在一个周期 T 内，吸收的能量为 $\tau\omega T$ ，而 τT 即传递给吸收此能量的物质的角动量。因而我们看到，一束带有总能量 $\mathcal{E}$ 的右旋圆偏振光具有角动量 $\mathcal{E}/\omega$ （矢量指向传播方向）。因为当此束光被

吸收时，该角动量就传递给吸收物质。左旋圆偏振光带有符号相反的角动量- $\mathcal{E} / \omega$ 。

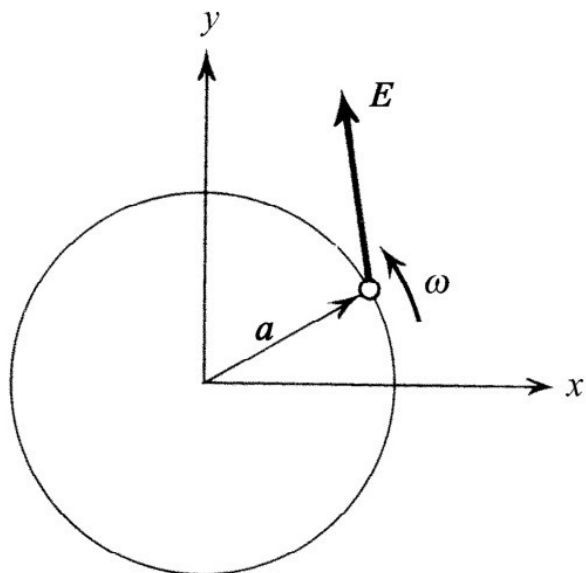


图33-9 作为对圆偏振光的响应，电荷沿圆周运动

[1] 指与入射方向和散射方向都垂直的方向。——译者注

第34章 辐射中的相对论性效应

§34-1 运动辐射源

本章将叙述与辐射有关的各种效应，从而结束关于光传播的经典理论的讨论。我们对光的分析已相当深入而详尽。唯一未加讨论的与电磁辐射有关的重要现象是，当无线电波被四周具有反射壁的盒子（盒子的线度与波长差不多）所包围时，或当它沿着一个长的管道传输时所发生的现象，即所谓谐振腔现象和波导现象。这些现象我们将在以后讨论；我们先用另一种物理现象——声——作为例子来进行讨论，然后再回到这个题目上来。除此以外，本章是我们最后一次考虑光的经典理论。

我们可以把现在要讨论的效应概括为与运动辐射源有关的效应。因此，我们不再假设辐射源局限在某固定点附近以比较低的速率运动。

我们记得，电动力学的基本定律表明，在远离运动电荷的地方，电场由下式给出

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{R'}}{dt^2}. \quad (34.1)$$

单位矢量 $\mathbf{e}_{R'}$ 的方向指向电荷的表观方向，它的二阶微商是电场的决定因素，当从电荷到观察者的信号仅以有限速率 c 传播时，此单位矢

量当然并不指向电荷现在的位置，而指向电荷看起来所在的位置。

与电场相联系的还有磁场，方向始终与电场垂直，也与源的表观方向垂直，而由下式给出

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_{R'} \times \mathbf{E} / c. \quad (34.2)$$

至此我们只考虑了运动速率为非相对论性的情况，结果在源所在的方向上没有明显的运动要去考虑。现在我们要更一般地研究以任意速度而运动的情况，看一看在这种情况下会有什么其他效应发生。虽然我们假设运动速率是任意的，但是当然仍将假定探测器离源很远。

由第28章的讨论已经知道，在 $d^2 \mathbf{e}_{R'} / dt^2$ 中唯一要算的是 $\mathbf{e}_{R'}$ 的方向的变化。设电荷的坐标是 (x, y, z) ， z 沿着观察方向（图34-1）。在给定时刻，比如时刻 τ ，位置的三个分量是 $x(\tau)$ ， $y(\tau)$ 和 $z(\tau)$ 。距离 R 很接近等于 $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$ 。这样，矢量 $\mathbf{e}_{R'}$ 的方向主要取决于 x 和 y ，而几乎根本与 z 无关，因为单位矢量的横向分量是 x/R 与 y/R ，当对这些分量求微商时，在分母上得到 R^2 之类的量

$$\frac{d(x/R)}{dt} = \frac{dx/dt}{R} - \frac{dz}{dt} \frac{x}{R^2}.$$

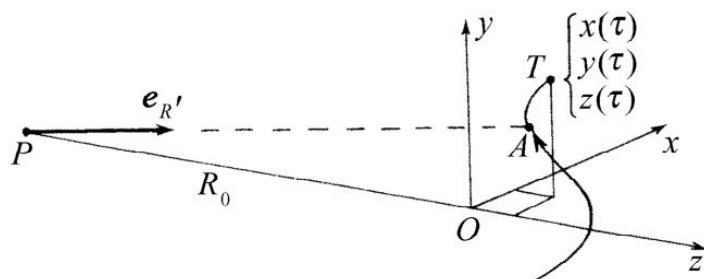


图34-1 运动电荷的路径。在时刻 τ 电荷的真正位置在 T ，但其推迟位置在 A

所以，当离源足够远时，需要考虑的项只有 x 和 y 的变化。将因子 R_0 提出微商号外，于是得到

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt^2}, \\ E_y &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt^2}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

式中 R_0 大体上是到电荷 q 的距离；不妨取 R_0 为观察者到坐标系 (x, y, z) 原点的距离 OP 。于是电场就是一个常量乘以一个很简单的量，即 x 坐标与 y 坐标的二阶微商（本来可以更数学化一些，把 x 与 y 叫做电荷的位置矢量 $\mathbf{r}$ 的横向分量，但这样并不会使问题更清楚多少）。

当然，我们认识到坐标必须在推迟时刻度量。这里我们发现 $z(\tau)$ 要影响推迟。推迟时间是多少？若观察时刻叫做 t （即 P 处的时刻），则与之对应的在 A 处的时刻 τ 并不是 t ，而是要延迟一段时间，这段时间即光必需走过的总距离除以光的速率。在一级近似下，此延迟为 R_0/c ，为一常量（此项我们不感兴趣），但在二级近似下，必须包括电荷于时刻 τ 在 z 方向所在位置所产生的效应，因为如果 q 稍微移后一些，推迟就得稍微多一些。这是我们以前所忽略的效应，也正是为了使结果对所有运动速率都成立唯一需要考虑的效应。

现在我们要做的是选定某一 t 值，由它计算 τ 的值，从而求出该时刻 τ 的 x 值与 y 值。这些就是推迟的 x 和 y ，我们称之为 x' 和 y' ，它们的二次微商决定了场。这样， τ 由下列公式决定

$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c}$$

和

$$x'(t) = x(\tau), \quad y'(t) = y(\tau). \quad (34.4)$$

这些方程很复杂，但很容易用几何图形来描述它们的解。这样的图使我们对事情是如何进行的过程有一个很好的定性的感性认识，但对一个复杂的问题要导出精确的结果，则仍需要应用详细的数学方法。

§34-2 求“表观”运动

上述方程有一种有趣的简化形式。若我们忽略不感兴趣的延迟常量 R_0/c （这仅仅意味着时间 t 的原点改变一个常量），上述方程即可化为

$$ct = c\tau + z(\tau), \quad x' = x(\tau), \quad y' = y(\tau). \quad (34.5)$$

现在我们要求出 x' 和 y' 作为 t 的函数，而不是作为 τ 的函数，我们可以用下述方法来求：方程式（34.5）表明，我们应取实际的运动再加上一个常数（光速）与 τ 的乘积，这句话所表达的意思如图34-2所示。画出电荷的实际运动（如图中左边所示），并想象在电荷运动的同时它

又以速率 c 从 P 点被拉走（这只是数学上加 $c\tau$ 的一种表述，并不存在相对论性收缩之类的问题）。用这个方法得到一种新的运动，其中沿视线的坐标是 ct ，如图右边所示（图中表示对平面内相当复杂的运动所得的结果，但运动当然可以不在一个平面内——它可以比平面运动更复杂）。主要之点是现在水平方向（即视线方向）的距离不再是原来的 z ，而是 $z + c\tau$ ，因而就是 ct 。这样，我们就得到了 x' （和 y' ）与 t 关系的曲线图！为了求电场，只要看一下这条曲线的加速度，也就是只要对它微分二次就行了。所以最后的回答是：为了求运动电荷的电场，先画电荷的运动，然后将该运动以速率 c 逐点向后平移，以便“将它展开”；这样画出来的曲线，就是位置 x' 和 y' 作为 t 的函数的曲线。此曲线的加速度给出作为时间 t 的函数的电场。如果我们愿意，也可这样来想象，即整个“刚性”曲线以速率 c 通过视平面向前运动，从而曲线与视平面的交点坐标就是 x' 和 y' 。由该点的加速度得出电场。这个解正与起初的公式一样确切——它只是一种几何表述方法。

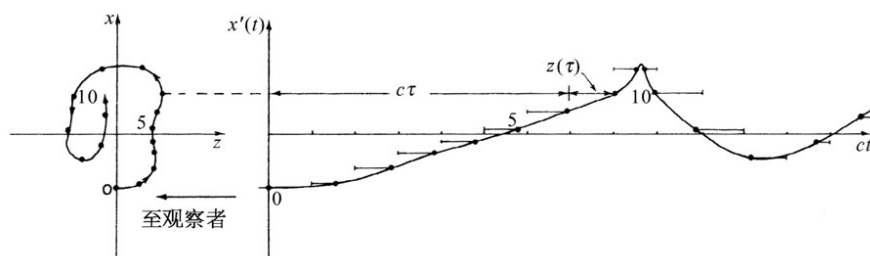


图34-2 由方程式(34.5)求 $x'(t)$ 的几何解法

如果运动比较慢，例如是一个正在作上、下缓慢运动的振子，那么，当将该运动以光速展开时，显然会得到一条简单的余弦曲线，这样就给出了我们一直看到的公式，它给出振荡电荷所产生的场。但更有意思的例子是电子快速（很接近于光速）沿圆周运动。如果在圆平面内观察，则推迟的 $x'(t)$ 如图34-3所示。这是一条什么曲线？设想有一条从圆心到电荷的矢径，将它穿过电荷稍微延长一些，如果电荷

运动得很快，只要稍微延长一点，使延长线到达以光速旋转的圆周上就行。于是，当我们将电荷运动以光速向后逐点平移时，整个过程就相当于一个带有电荷的轮子以光速无滑动地向后滚动；这样电荷在空间就画出一条曲线，它很接近于摆线——称为短幅摆线。如果电荷以很接近于光速的速率运动，曲线的“尖点”的确很尖；如果电荷恰好以光速运动，它们将成为无限尖的真正尖点。“无限尖”很有意思；它意味着在尖点附近二阶微商非常大。电荷每走一圈就得到一个电场的尖脉冲。这是从非相对论性运动根本得不到的结果，在电荷作非相对论性运动时，每走一圈得到一次振动，此振动在所有时刻的“强度”大致相同。而现在，电场每隔 T_0 时间出现一个尖脉冲，这里 T_0 是电荷转动的周期。这些强电场在沿着电荷运动方向的一个狭窄锥角内发射。当电荷离开 P 点运动时，曲线的曲率很小，这时沿 P 的方向只有很小的辐射电场。

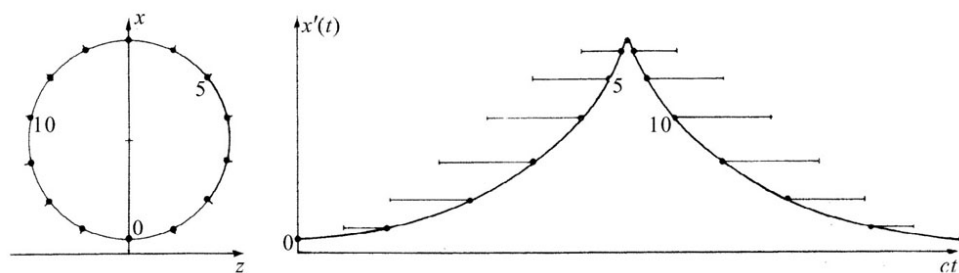


图34-3 以恒定速率 $v=0.94c$ 沿圆周运动的质点的 $x'(t)$ 曲线

§34-3 同步辐射

在同步加速器中有沿着圆形轨道运动的高速电子；它们以很接近于光速的速率运动，因此有可能以实际的光的形式观察到上述辐射。我们来更详细地讨论这一问题。

在同步加速器中，电子在均匀磁场中沿圆形轨道运动。首先我们来看一下电子为什么沿圆周运动。根据式（28.2），在磁场中运动的粒子所受的力由下式给出

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (34.6)$$

此力与场和速度都垂直。像通常一样，力等于动量对时间的变化率。如果场的方向由纸面向上，则粒子的动量和作用在粒子上的力如图34-4所示。既然力与速度垂直，则粒子的动能，进而其速率，保持不变。磁场的作用只是改变运动的方向。在一个短时间 Δt 内，动量矢量的改变量 $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$ 在其垂直方向上，因而 $\mathbf{P}$ 转过一个角度 $\Delta \theta = \Delta p / p = qvB \Delta t / p$ ，因为 $|\mathbf{F}| = qvB$ 。但在同一时间内，粒子走过距离 $\Delta s = v \Delta t$ 。显然，直线 AB 和 CD 将在某一点 O 相交，而使 $OA = OC = R$ ，其中 R 满足 $\Delta s = R \Delta \theta$ 。将此关系与前一个表示式相结合，可得 $R \Delta \theta / \Delta t = R\omega = v = qvBR / p$ ，由此可得

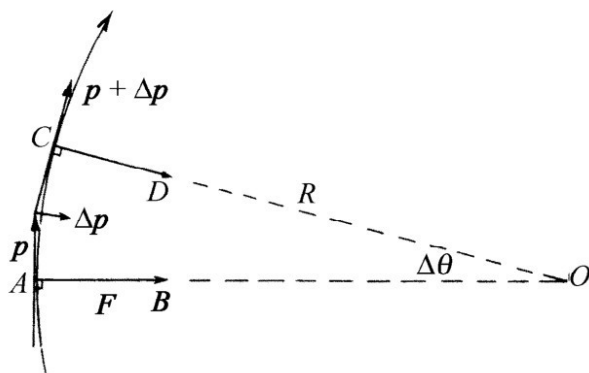


图34-4 带电粒子在均匀磁场中沿圆周（或螺旋线）运动

$$p = qBR \quad (34.7)$$

和

$$\omega = \frac{qvB}{p}. \quad (34.8)$$

因为同样的论证也适用于下一瞬时，再下一瞬时，等等，故可得出结论，粒子必然作沿半径为 R 的圆周运动，角速度为 ω 。

粒子的动量等于电荷乘以半径再乘以磁场这一结果十分重要，并且用得很多。此关系在实用上很重要，因为当存在一些带相同电荷的基本粒子时，可在磁场中对它们进行观察，测得它们的轨道的曲率半径，在已知磁场的情况下，就可决定粒子的动量。若在式（34.7）两边同乘以 c ，并将 q 用电子电荷表示，就可以用电子伏为单位来量度粒子的动量值。使用这些单位，该式变为

$$pc \text{ (eV)} = 3 \times 10^8 (q/q_e) BR, \quad (34.9)$$

式中 B ， R 及光速皆用mks制表示，在mks制中，光速的数值为 3×10^8 。

磁场的mks制单位叫做韦伯每平方米（ $\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ ）。磁场还有一个较老的但仍常用的单位，叫做高斯（Gs）。 $1 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ 等于 10^4 Gs。为了给读者一个磁场大小的概念，我们指出通常在铁中能达到的最强的磁场约为 1.5×10^4 Gs；超过此值，使用铁的优越性就没有了。目前，绕有超导体导线的电磁体可以产生 10^5 Gs以上强度的稳定磁场，此强度在mks单位制中即为10 mks单位。赤道处的地磁场约为十分之几高斯。

回到式（34.9），我们可以设想同步加速器中的粒子以吉电子伏量级的能量运行，对1 GeV， pc 为 10^9 （我们将很快回过来讲能量）。那么，若 B 相当于10 000 Gs，即1 mks单位（这是很强的磁场），则 R 应为3.3m。加利福尼亚理工学院的同步加速器的实际半径是3.7 m，磁

场也稍强一些，能量是1.5 GeV，但属于同一数量级。这样，我们对于同步加速器为什么具有这种尺寸就有体会了。

我们已计算了粒子的动量，但我们知道粒子的总能量，包括静能在内，由

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

给出，对于电子，与 mc^2 相应的静能为 0.511×10^6 eV，当 pc 为 10^9 eV时，可略去 mc^2 ，故对所有实用目的来说，当粒子速率达到相对论性速率时， $W=pc$ 。说电子能量为1 GeV与说电子动量乘以 c 为1 GeV实际上相同。若 $W=10^9$ eV，很容易证明粒子的速率与光速之差只有八百万分之一！

现在我们再回到这样的粒子所发出的辐射上来。粒子在半径为3.3 m，即周长为20 m的圆周上运动，绕行一周的时间约等于光走20 m所需的时间。故这样的粒子所应辐射的波长将为20 m——处在无线电短波范围。但由于刚才讨论过的堆积效应（图34-3），以及使矢径端点达到光速 c 所需的延长量只有半径的八百万分之一，因而内摆线的尖点与相邻两尖点之间的距离比较起来，显得非常尖。故加速度（它包含对时间的二次微商）两次得到“压缩因子” 8×10^6 ，因为在尖点附近时间标度两次缩短 8×10^6 倍。于是可以预期有效波长要短得多，即短到20 m的 $(1/64) \times 10^{-12}$ 的程度，相当于X射线区域。（实际上，尖点本身并不是全部决定因素；必须把尖点附近的一定区域包括进去。这使因子变为3/2次方，而不是平方，但波长仍在比可见光区短的区域。）因此，尽管缓慢运动的电子会辐射波长为20 m的无线电波，而

相对论性效应却使波长缩短到使我们能看见它！显然，光应是偏振的，其电场方向垂直于均匀磁场。

为了进一步领会所观察到的现象，假设将这种光（由于这些脉冲的时间间隔很大，为了简单起见，我们将只取一个脉冲）投射在衍射光栅上，这种光栅就是许多条散射线。当这个脉冲自光栅射出后，我们将看到什么（如果我们果真看见光，就应看见红光、蓝光，等等）？脉冲迎面打在光栅上，光栅上的所有振子都强烈地向上运动，然后再向下运动，而且只是上、下运动一次。于是这些振子就在各个方向上产生效应，如图34-5所示。但 P 点离光栅的一端比离另一端近一些，所以来自 A 线的电场先到达 P 点，其次是来自 B 线的到达，等等；最后到达的是来自最后一条线的脉冲。简言之，来自所有相继的光栅线的反射的总和如图34-6（a）所示；这是一个由一系列脉冲所组成的电场，它很像一个波长等于脉冲间距的正弦波，正像单色光打在光栅上所发生的现象一样！因而，我们确实得到了彩色的光。但是，应用同样的论证，我们会从任何一种“脉冲”得不到光吗？会的。若曲线很平坦，则我们将把所有彼此相隔很短时间间隔的散射波相加在一起〔图34-6（b）〕。从而可见，场根本不振动，而是一条很平坦的曲线，因为在两个脉冲之间的时间间隔内，每个脉冲的变化不大。

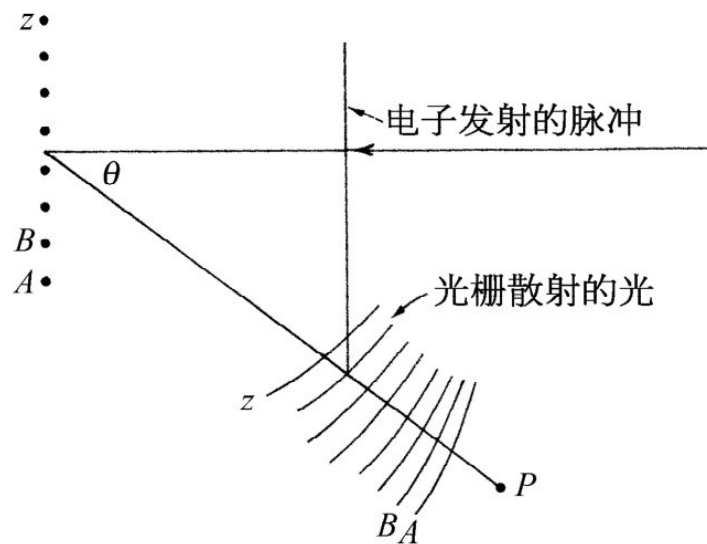


图34-5 单个尖脉冲光打在光栅上，沿各不同方向散射为不同颜色的光



图34-6 由一系列 (a) 尖脉冲和 (b) 平坦脉冲所造成的总电场

由在磁场中循环运行的相对论性带电粒子所发出的电磁辐射叫做同步辐射。它之所以这样命名，理由很明显，但这种辐射并不只限于同步加速器，甚至也不限于地球上的实验室。令人兴奋而有趣的是，它也发生在自然界中！

§34-4 宇宙中的同步辐射

在公元1054年，中国和日本的文明在世界上处于领先地位；他们知道地球以外的宇宙万物，并在那一年十分卓越地记录了一颗发生爆炸的亮星（奇怪的是那些写下了中世纪全部著作的欧洲僧侣们，竟然

没有一个费心记下天空中一颗星的爆炸)。今天我们可以拍摄那颗星的照片,其形状如图34-7所示。星的外缘是一大片红色纤维状丝,这是稀薄气体原子按其固有频率“鸣叫”所产生的;它造成不同频率的明亮线光谱。这里出现的红色是氮造成的。另一方面,星的中心部分则是一块神秘而模糊的光斑,其频率是连续分布的,这就是说,不存在与特定原子相联系的特殊频率。但这并不是被邻近的星体所“照亮”的尘埃(这是得到连续光谱的一种可能途径)。我们透过它可以看见别的星体,所以它是透明的,但它却发射光。



图34-7 蟹状星云的全色照片(不用滤色片)

在图34-8中我们看到的是同一个星体,所用的是不含明亮光谱线的光谱区中的光,所以我们只看到中心区。但这时望远镜前仍放有偏振片,两幅照片对应的偏振方向相差 90° 。我们看到两幅图像是不同的!这就是说,光是偏振的。其原因大概是有一个局部的磁场,以及有许多高能电子在该磁场中旋转着。

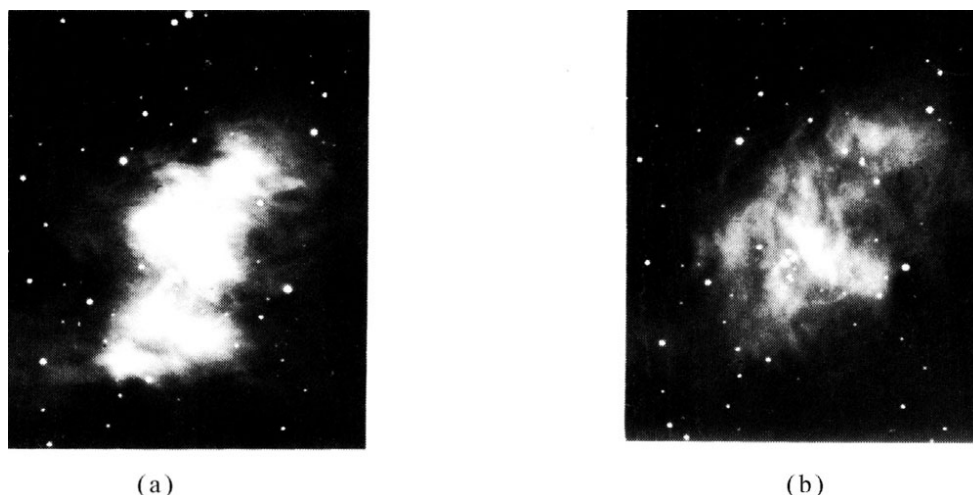


图34-8 通过蓝滤色片和偏振片所拍摄的蟹状星云照片

(a) 电场方向竖直；(b) 电场方向水平

我们刚才已经说明电子在磁场中怎么会沿圆周运动的。当然我们还可以在磁场方向上加上任何匀速运动，因为力 $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 没有沿该方向的分量，而且我们已讲过，同步辐射显然是偏振的，其方向垂直于磁场在视平面内的投影。

把这两个事实结合在一起，可知在一幅照片上明亮而在另一幅照片上黑暗的那些区域，其光的电场方向必定沿一个方向完全偏振。这就意味着存在着一个与该方向相垂直的磁场；而在另一幅照片上有强烈辐射的那些区域，其磁场方向必定有另一种取向。如果仔细观察图34-8，会注意到图上大致有一组“线”，在一幅照片上沿一种走向，在另一幅照片上则沿着与之垂直的走向。照片显示出一种纤维状结构。推测起来，大概磁场力线想尽量沿本身的方向扩展伸长，于是就有了长长的磁场区域，在这种区域内所有电子以一种方式作螺旋运动，而在另一个区域，磁场沿另一个方向，电子也以另一种方式作螺旋运动。

是什么东西使电子在这么长时间内维持这么高的能量？要知道，自从这颗星爆炸以来已经过了900年——它们怎么能始终运动得这么快？电子是怎么保持其能量的，以及整个过程是怎样进行的，至今仍未有彻底弄明白。

§34-5 韧致辐射

接着我们来简短地叙述一下辐射能量的高速运动粒子的另一个有趣的效应。这个概念与刚才所讨论的现象十分相似。假定在一块物体中有带电粒子，并设有一高速电子通过物质（图34-9）。于是，由于原子核周围的电场对电子有拉力作用，电子被加速，使电子的运动曲线有一个小的扭折或弯曲。若电子以十分接近于光速的速率运动，则沿 C 方向将产生怎样的电场？请记住我们的规则：将实际运动以速率 c 向后平移，从而得到一条曲线，此曲线的曲率量度电场。电子正以速率 v 朝着我们运动，所以我们得到一个朝后的运动，但整个图形的横向尺寸按 $c - v$ 与 c 的比例缩小。所以，若 $(1 - v/c) \ll 1$ ，在 B' 点就有一个变化很快和很尖的曲率，当取二次微商时就在运动方向上得到一个很强的电场。所以，当高能电子通过物质时，它们沿前进方向发出辐射。这种现象叫做韧致辐射。实际上，同步加速器用作产生高能电子，没有用作产生高能光子—— γ 射线——的多（如果我们真的能够较方便地从加速器中取出电子的话，我们就不这么说了），只要让高能电子通过固体钨“靶”，即可由上述韧致辐射效应辐射光子。

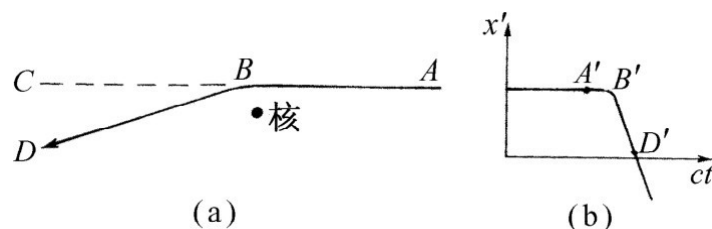


图 34-9 高速电子在核附近通过时，沿其运动方向辐射能量

§34-6 多普勒效应

接着我们继续讨论有关运动源的效应的另外一些例子。假设源是一个静止原子，它正以某一固有频率 ω_0 振荡。于是我们知道观察到的光的频率就是 ω_0 。现在举另一个例子，有一个类似的振子正以频率 ω_1 振荡，同时整个原子即整个振子以速度 v 沿着趋向观察者的方向运动。显然，实际上在空间的运动状况如图34-10(a)所示。现在我们来故伎重施，即加上 $c\tau$ ；这就是说，将整个曲线向后平移，于是发现它的振动如图34-10(b)所示。在给定的时间间隔 τ 内，振子将走过距离 $v\tau$ ，而在 x' 对 ct 的图内它走了距离 $(c-v)\tau$ 。因而原来在时间间隔 $\Delta\tau$ 内发生的频率为 ω_1 的所有振荡，现在出现在时间间隔 $\Delta t = (1-v/c)\Delta\tau$ 内；即它们被压缩在一起，而当此曲线以速率 c 通过我们身旁时，我们将看到较高频率的光，恰好高了一个压缩因子 $(1-v/c)$ 的倒数。于是得到

$$\omega = \frac{\omega_1}{1 - v/c}. \quad (34.10)$$

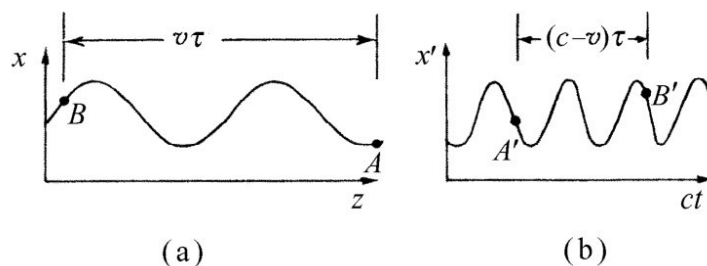


图 34-10 运动振子的 x - z 与 x' - t 曲线

当然，我们还可以用其他各种方法来分析此现象。假定原子不是发射正弦波，而是以一定频率 ω_1 发射脉冲，嘟，嘟，嘟，嘟，……。我们收到的将是什么频率？第一个脉冲到达观察者有一定延迟，但下一个脉冲延迟得要少一些，因为其时原子离观察者更近了一些。于是，“嘟”与“嘟”之间的时间因原子运动而减少了。如果我们分析这种情况的几何图形，可以得到脉冲频率增加了因子 $1/(1-v/c)$ 。

那么，当我们取一个固有频率为 ω_0 的正常原子，并让它以速率 v 趋近观察者运动时，其频率是否为 $\omega = \omega_0/(1-v/c)$ ？不，我们知识得很清楚，由于时间流率的相对论性膨胀，运动原子的固有频率 ω_1 与原子静止时量得的不同。这样一来，如果真正的固有频率为 ω_0 ，则修正后的固有频率 ω_1 将是

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (34.11)$$

于是观察到的频率 ω 为

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (34.12)$$

上述情况下观察到的频率移动现象叫做多普勒效应；如果物体朝我们运动，它所发射的光就显得偏紫一些，如果它离开我们运动，则显得偏红一些。

现在我们对刚才提到的这个有趣而重要的结果再提供两种推导方法。假设源固定不动，发射频率为 ω_0 的波，而观察者却以速率 v 朝源运动。经过一定时间 t 后，观察者将运动到一个新的位置，离 $t=0$ 时他所在位置的距离为 vt 。那么他将看见通过了多少弧度的相位？应为通过任一固定点的弧度值 $\omega_0 t$ ，加上观察者由于自身运动而扫过的弧度值，即 $vt k_0$ （每米弧度数乘以距离）。所以在时间 t 内通过的总弧度值，或者说观察到的频率，应为 $\omega_1 = \omega_0 + k_0 v$ 。我们系从一个静止着的人的观点分析了这一情形；我们想知道从运动着的人看起来情况会怎么样。这里又要考虑到两个观察者的时钟快慢上的差异，这一次这种差异意味着必须把结果除以 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。因而，若 k_0 为波数，即沿运动方向上每米的弧度数， ω_0 为原来的频率，则运动着的人观察到的频率为

$$\omega = \frac{\omega_0 + k_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.13)$$

对于光， $k_0 = \omega_0/c$ 。因而，对此特例，上式变为

$$\omega = \frac{\omega_0(1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.14)$$

此式看起来与式（34.12）完全不同！当我们朝源运动时所观察到的频率，与当源朝我们运动时所观察到的频率，两者会不同吗？当然不会！相对论告诉我们这两者必须完全相同。如果我们对数学相当熟

练，就可能会认识到这两个数学表示式的确完全相同！其实，这两个表示式必定相同这一点正是有人喜欢用来证明相对论需要时间膨胀的一种方法，因为如果式中没有那些平方根因子，两者就不再相同。

既然我们懂得相对论，让我们再用第三种方法来分析这一现象，这种方法看来似乎更一般一些（其实是一回事，因为这与我们如何处理问题没有关系）。根据相对论，一个观察者看到的位置与时间跟另一个相对他运动的观察者看到的位置与时间之间有一个关系。我们很早以前（第16章）就写出了这些关系式。这就是洛伦兹变换及其逆变换^[1]

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & x &= \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\t' &= \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & t &= \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\quad (34.15)$$

如果我们站在地面上不动，波的形式就是 $\cos(\omega t - kx)$ ；所有的波节、极大和极小将按此方式变化。但在对同一物理波进行观察的正在运动的观察者看来，情况会怎么样？场为零的所有波节的位置不变（当场为零时，任何人测得的场均为零）；这是相对论不变性。所以波的形式对另一个观察者也相同，只是要把它变换到他的参照系中

$$\cos(\omega t - kx) = \cos\left[\omega \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - k \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right].$$

只要对括号内的项重新整理，即可得

$$\begin{aligned}\cos(\omega t - kx) &= \cos\left[\underbrace{\frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\omega'} t' - \underbrace{\frac{k + v\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{k'} x'\right] \\&= \cos[\omega' t' - k' x'].\end{aligned}\quad (34.16)$$

这仍是一个波，一个余弦波，它有确定的频率 ω' ，即乘在 t' 上的常数，以及某一个另外的常数，即乘在 x' 上的 k' 。我们把 k' 叫做对另一个观察者的波数，即每 2π 米所含的波的数目。因此另一个观察者将看见由下式给出的新频率与新波数

$$\omega' = \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.17)$$

$$k' = \frac{k + \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.18)$$

看一下式（34.17），可知它与我们用更具有物理意义的论证得到的式（34.13）相同。

§34-7 ω , k 四元矢量

式（34.17）和（34.18）所表示的关系很有意义，因为它们指出新频率 ω' 是老频率 ω 和老波数 k 的组合，新波数是老波数和老频率的组合。波数是相位对距离的变化率，频率是相位对时间的变化率，在这些表示式中可以看出与位置和时间的洛伦兹变换有十分相似的地方：

如果把 ω 设想为 t' ，把 k 设想为 x' 除以 c^2 ，则新的 ω' 与 t' 相仿，而新的 k' 与 x'/c^2 相仿。这就是说，在洛伦兹变换下， ω 和 k 的变换关系与 t 和 x 的变换关系相同。它们都构成所谓四元矢量；当一个量有四个分量，其变换关系与时间和空间一样时，它就是一个四元矢量。至此似乎一切都很圆满，然而还有一个小问题：我们说四元矢量必须有四个分量；那么另外两个分量在哪里？我们看到， ω 和 k 在一个空间方向上与时间和空间相仿，而不是在所有方向上，所以下一步必须研究光

在三维空间的传播问题，而不是只在一维空间，因为我们至今只讨论了光在一维空间的传播。

设有一个坐标系 x, y, z ，一个波在其中传播，其波前如图34-11所示。波的波长为 λ ，但波的运动方向不是正好沿着某一轴的方向。这样一个波的表示式是什么？回答无疑是 $\cos(\omega t - ks)$ ，其中 $k = 2\pi/\lambda$ ，而 s 是沿着波的运动方向的距离——即空间位置沿运动方向的分量。我们这样来处理：设空间一点的位置矢量是 $\mathbf{r}$ ，则 s 就是 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$ ，这里 $\mathbf{e}_k$ 是运动方向上的单位矢量。这就是说， s 正好是 $r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k)$ ，即在运动方向上的距离分量。因此上述波的表示式就是 $\cos(\omega t - k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r})$ 。

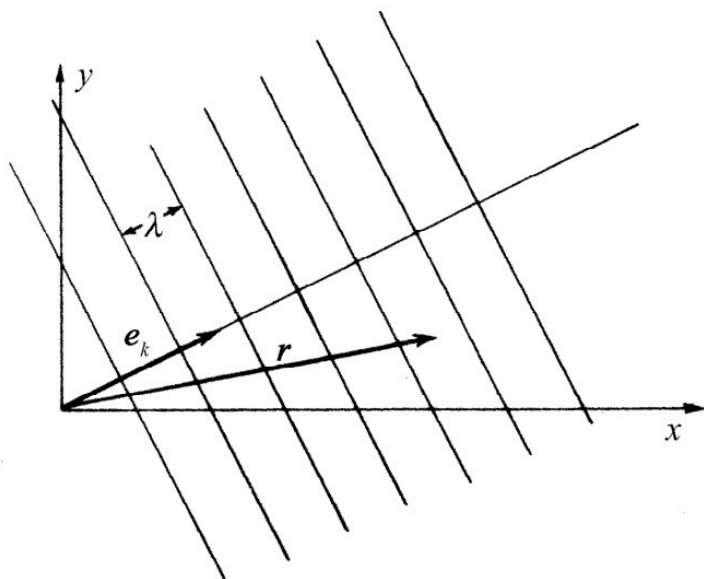


图34-11 沿倾斜方向传播的平面波

结果表明定义一个矢量 $\mathbf{k}$ 是很方便的，叫做波矢，它的大小等于波数 $2\pi/\lambda$ ，并且指向波的传播方向

$$\mathbf{k} = 2\pi \mathbf{e}_k / \lambda = k \mathbf{e}_k. \quad (34.19)$$

利用这一矢量，上述波可以写成 $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ，或写成 $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ 。 $\mathbf{k}$ 的一个分量，比如说 k_x ，它的意义是什么？显然， k_x 是相位对 x 的变化率。参照图34-11可知，当改变 x 时，相位跟着改变，正像有一个波沿 x 方向传播一样，但其波长较长。“在 x 方向的波长”比自然的真实波长长了角 α 的正割这一因子， α 是波的实际传播方向与 x 轴的夹角

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \alpha}. \quad (34.20)$$

因此相位对距离的变化率（它正比于 λ_x 的倒数）小了因子 $\cos \alpha$ ；这正是 k_x 变化的大小——它等于 k 的大小乘上 k 与 x 轴夹角的余弦！

这就是我们用来表示三维空间波的波矢的性质。四个量 ω ， k_x ， k_y ， k_z 在相对论中像四元矢量一样变换，其中 ω 对应于时间， k_x ， k_y ， k_z 则对应于四元矢量中的 x ， y ， z 分量。

在以前对于狭义相对论的讨论（第17章）中，我们曾知道有一些与四元矢量构成相对论点积的方法。若把位置矢量记为 x_μ ，其中 μ 用来表示四个分量（时间和三个空间分量），并把波矢叫做 k_μ ，其中 μ 也有四个值，时间和三个空间分量，则 x_μ 与 k_μ 的点积可写成 $\sum k_\mu x_\mu$ （见第17章）。此点积是与坐标系无关的不变量；它等于什么？由这种四维点积的定义，它是

$$\sum k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \quad (34.21)$$

由对矢量的讨论可知， $\sum k_{\mu} x_{\mu}$ 在洛伦兹变换下是一个不变量，因为 k_{μ} 是一个四元矢量。但此量正好是出现在平面波的余弦符号内的宗量，在洛伦兹变换下它理应 不变。我们不可能有一个使余弦符号内的量改变的公式，因为我们知道当坐标系改变时，波的相位不可能改变。

§34-8 光行差

在推导式 (34.17) 和 (34.18) 时，我们曾取 $\mathbf{k}$ 刚巧沿运动方向这一简单例子，但无疑也可以把它推广到其他情况。例如，假设有一个光源，从静止的观察者看来，它沿某一方向发出光，但我们跟着地球一起在运动（图34-12）。在我们看来，光来自什么方向？为了求出此方向，我们必须写下 k_{μ} 的四个分量，并应用洛伦兹变换。但答案可以用下列论证求得：为了看见来自光源的光，我们必须把望远镜偏过一定角度来对准它。为什么？因为光以速率 c 下来，而我们以速率 v 向侧向运动，所以望远镜必须朝前倾斜，以便当光下来时可“笔直地”朝下通过镜筒。很容易看出，当竖直距离为 ct 时，水平距离为 vt ，于是，若设倾角为 θ' ，则 $\tan\theta' = v/c$ 。这个结果多好！的确很好——但还有一点小问题： θ' 不 是望远镜相对地球 所应取的角，因为我们是从“固定”观察者的观点进行分析的，当我们说水平距离是 vt 时，在地球上的观察者将得出另一个距离，因为他是用“缩短了的”尺来度量的。由于收缩效应，结果证明

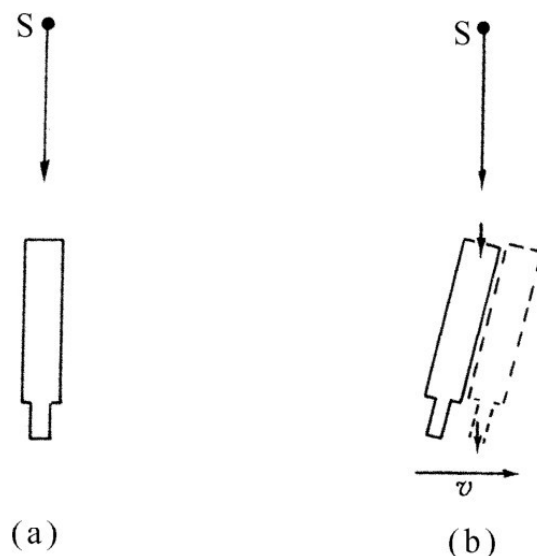


图34-12 用 (a) 固定不动的望远镜和 (b) 横向运动的望远镜观察远处的光源S

$$\tan \theta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.22)$$

此式相当于

$$\sin \theta = v/c. \quad (34.23)$$

读者试用洛伦兹变换导出这一结果，这对你们将是有益的。

这一望远镜必须倾斜的效应，叫做光行差，它已被观察到。我们怎么能观察到呢？谁能说出某一颗星应该在哪里？假定我们的确沿着一个错误的方向去看才能看见某颗星；但我们怎么知道这是一个错误的方向呢？原来因为地球绕太阳旋转，今天我们要把望远镜向某一方方向倾斜；六个月以后，我们又必须把望远镜向相反的方向倾斜。这就是我们能够说有这种效应的原因。

§34-9 光的动量

现在我们转向另一个题目。在前几章的讨论中，从未提及过与光相联系的磁场的任何效应。一般地说，磁场的效应是很小的，但有一个有趣而重要的效应是磁场造成的。设光自源发出，作用在电荷上，驱使电荷上、下运动。再设电场沿 x 方向运动，故电荷也沿 x 方向运动；电荷的位置为 x ，速度为 v ，如图34-13所示。磁场与电场垂直。当电场作用在电荷上使之上、下运动时，磁场起了什么作用？磁场只在电荷（比如说电子）运动时才对电荷有作用；但电子是在运动，它由电场所驱动，所以两个场一起起作用：当电子上、下运动时具有速度，于是在它上面有磁力作用，磁力大小等于 B 乘以 v 再乘以 q ；但此力沿什么方向？此力沿着光的传播方向。因此，当光照射在电荷上引起电荷振荡时，在光束的方向上有一个策动力。这叫做辐射压力或光压。

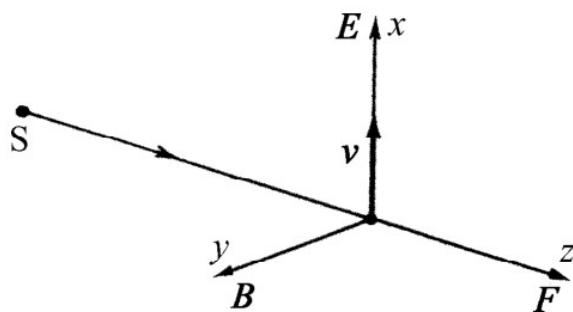


图34-13 作用在受电场驱动的电荷载上的磁力沿着光束方向

现来决定辐射压力的大小。显然它是 $F=qvB$ ，或者，因为各量都在振荡，它是该量的时间平均值 $\langle F \rangle$ 。由式(34.2)，磁场的强度与电场强度除以 c 相同，故只要求出电场的平均值，乘以速度和电荷，再乘以 $1/c$ ，即得 $\langle F \rangle$ ： $\langle F \rangle = q \langle vE \rangle / c$ 。但电荷 q 乘电场 E

是作用在电荷上的电力，而作用在电荷上的电力乘以速度是对电荷所做的功 dW/dt ！于是力，即光在每秒钟所传递的“推进动量”，等于 $1/c$ 乘以每秒钟从光所吸收的能量！这是一个一般规则，因为我们没有说明振子有多强，也没有说明是否有些电荷彼此抵消。在任何情况下，凡在光被吸收的地方，就有光压。光所传递的动量总是等于所吸收的能量除以 c

$$\langle F \rangle = \frac{dW/dt}{c}. \quad (34.24)$$

光携带有能量，这一点我们早已知道。现在我们知道它还带有动量，而且还知道所带的动量总是等于 $1/c$ 乘以能量。

当光自源发出时，就有反冲效应；这是同一件事的反面。若一原子沿某一方向发射能量 W ，就有反冲动量 $p = W/c$ 。若光从镜面正反射，则得到两倍的此力。

我们用光的经典理论所要讲的就到此为止。当然我们还知道有量子论，并且知道光在许多方面的行为像粒子。光粒子的能量为一常量乘以频率

$$W = h\nu = \hbar\omega. \quad (34.25)$$

现在我们知道了光还带有动量，它等于能量除以 c ，所以这些实际的粒子，即光子，确实也带有动量

$$p = W/c = \hbar\omega/c = \hbar k. \quad (34.26)$$

动量的方向当然沿着光的传播方向。故写成矢量式，有

$$\mathbf{W} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (34.27)$$

我们无疑还知道，粒子的能量与动量应构成四元矢量。刚才我们发现 ω 与 k 构成四元矢量。因此式 (34.27) 对两种情况具有同一常数是一件好事；它意味着量子论与相对论是相互协调的。

式 (34.27) 可以更优美地写成 $p_\mu = \hbar k_\mu$ ，这是一个与波相联系的粒子的相对论性等式。尽管我们仅就光子讨论了这一等式（对光子， k 的大小 k 等于 ω/c ，即 $p=W/c$ ），但此关系式要更加一般得多。在量子力学中不仅光子，而且所有 粒子都显示波动性，并且波的频率和波数跟粒子的能量和动量用式 (34.27)（称为德布罗意关系）联系起来，即使当 p 不等于 W/c 时也是如此。

在上一章中我们看到，一束右旋或左旋圆偏振光还带有角动量，其大小正比于波的能量 $\mathcal{E}$ 。在量子模型中，一束圆偏振光被看成光子流，每个光子带有沿着传播方向的角动量 $\pm \hbar$ 。这就是从粒子观点来看的偏振的意义——光子带有角动量，就像自转着的步枪子弹一样。但这个“子弹”模型其实也像“波”模型一样是不完全的，我们将在后面关于光的量子行为的一章中更详细地讨论这些概念。

[1] 注意：与式 (16.2) 不同，式 (34.15) 不带撇系 (x, t) 相对于带撇系 (x', t') 向右运动。——译者注

第35章 色视觉

§35-1 人眼

颜色的现象部分地依赖于物理世界。我们讨论肥皂膜等等的颜色时，认为它们是由于干涉所产生。但颜色当然也取决于眼睛，以及在眼睛后面大脑中所发生的过程。物理学描述进入眼睛的光的特性，但在进入以后，我们的感觉是光化学神经过程和心理反应的结果。

有许多有趣的现象往往和视觉联系在一起，这些现象是物理现象与生理过程的一种混合，而要完全理解各种自然现象，像我们所看到的那样，则必定超出了通常意义下的物理学范围。我们不需要为离开正题去讨论其他领域的内容提出辩解，因为各个领域的划分，正如我们已经强调的，仅仅是由于人们的方便，而且也是一种很不自然的事。自然界对我们的这种划分并不感兴趣，而许多有趣的现象就在各个领域之间的沟壑上架起了一座座桥梁。

在第3章中我们已经一般地讨论过物理学和其他科学的关系，但现在我们将稍微详细地研究一下一个特殊的领域，在这个领域里物理学和其他科学是非常紧密地互相联系着的。这个领域就是视觉。我们特别要讨论色视觉。在这一章中将讨论视觉的生理方面，包括人和其他动物的。

一切都是从眼睛开始；所以，为了要理解我们所看到的是一些什么现象，就需要某些有关眼睛的知识。在下一章中，我们将比较详细

地讨论眼睛的各个部分是怎样工作的，以及它们和神经系统怎样相互连结。但在目前，我们只想简单地描述一下眼睛是怎样起作用的（图35-1）。

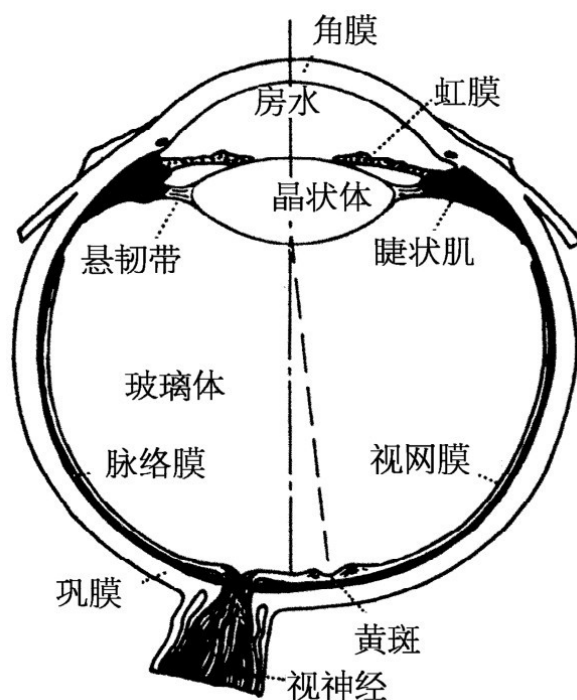


图35-1 眼睛

光通过角膜进入眼睛。我们已经讨论过它如何被弯曲而成像在眼睛背后叫做视网膜的薄膜上，从而视网膜的不同部分接收到从外界视场不同部分射来的光。视网膜不是绝对均匀的：在我们的视场中心有一个地方，即一个斑点，当我们试图非常仔细地观察物体时就使用这个斑点，在这里我们有最大的视觉敏锐度，这个斑点叫做中央凹或黄斑。眼睛的旁边部分，正像我们注视物体时所获得的经验立刻促使我们意识到的那样，对于看清楚物体上的细节不像眼睛中央部分来得有效。视网膜上还有另一个斑点，输送各种信息的神经就是从这里延伸出去的，那是盲点。这里没有视网膜的敏感部分，并且可以这样来证明：如果我们闭上比如说左眼，用右眼对直观察某一物体，然后把一

个手指或者一个小的物体慢慢地从视场中央向外移开，那么在某个地方它会突然消失不见。关于这个事实，我们所知道的唯一的实际用处就是，某个生理学家因为向法国国王指出了这一点而成了宫廷中的宠臣，在国王和他的大臣们举行的令人厌倦的例行朝会上，国王可以用“砍掉他们的头”，即盯着一个头而看着另一个头消失来自我消遣。

图35-2以比较简单的形式显示视网膜内部的放大图像。视网膜的不同部分具有不同的结构。密集在视网膜外周的那些感光细胞叫做视杆细胞，而靠近中央凹处，除了这些视杆细胞外，我们还看到视锥细胞。关于这些细胞的结构，我们将放到以后去讲。越接近中央凹处视锥细胞的数目越多，而在中央凹处，事实上别无他物，只有视锥细胞，它们靠拢得非常紧密，以致这些视锥细胞比任何其他地方都细小得多。所以我们必须意识到，我们是使用位于视场正中的视锥细胞来观看的，但是在外围地方，则有另一种细胞，即视杆细胞。现在有趣的是，视网膜中每一个对于光敏感的细胞不是通过一根纤维直接与视神经相联结，而是与许多细胞交错联结联系在一起的。此外，还有好多种细胞：有向视神经输送信息的细胞，也有主要是“水平地”相互联结在一起的其他细胞。实质上有四种细胞，但是我们现在不预备深入讨论这些细节。我们要强调的主要一点就是光信号已被“考虑”过了。这就是说，来自各种细胞的信息不是一点一点地直接通往大脑，而是在视网膜中，把来自几个视觉接收器的信息组合起来，将一定数量的信息整理汇编。这里重要的是应理解到，有些大脑功能现象是在眼睛本身中发生的。

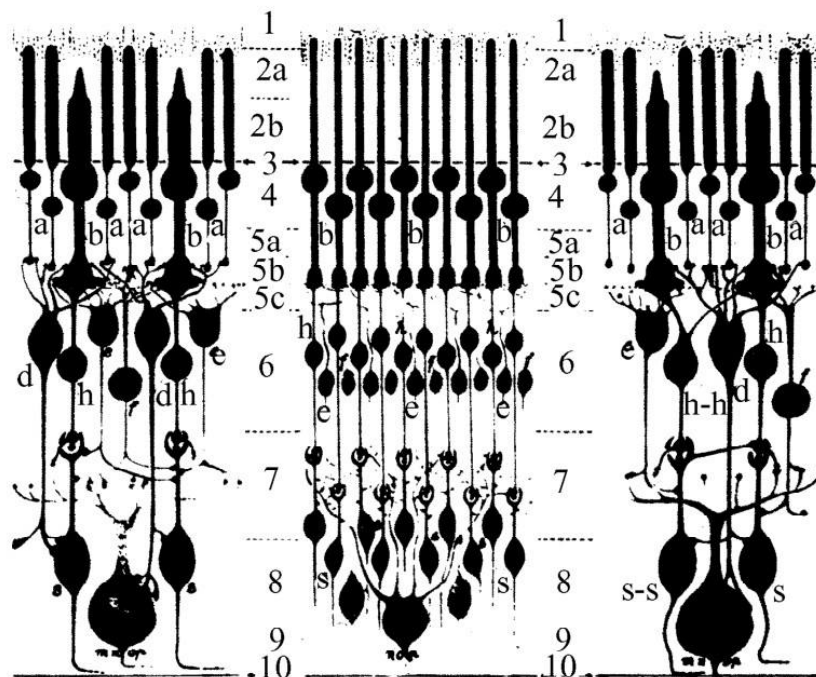


图35-2 视网膜的结构（光从下面进入）

§35-2 颜色依赖于光的强度

最令人惊奇的视觉现象之一是眼睛对黑暗的适应性。假如我们从明亮的房间走进黑暗中去，开始有一段时间什么也看不清楚，但是渐渐地物体变得越来越清晰，终于在我们以前看不到东西的地方能够看到一些东西。如果光的强度非常弱，我们看到的东西是没有颜色的。我们知道，这种适应黑暗的视觉几乎应完全归功于视杆细胞，而适应亮光的视觉则应归功于视锥细胞。作为这方面的一个结果，有好些现象我们可以很容易把它们解释为由于功能的这种转换，即视锥细胞和视杆细胞的共同作用转换为只有视杆细胞作用所引起。

在许多情形中，如果光的强度比较强，我们就能看到颜色，而且还会发现这些东西极其美丽。一个例子是，通过望远镜观察微弱的星

云时，我们几乎总是看到它的“黑白”像，但是威尔逊山天文台帕洛玛天文台的米勒先生却耐心地给某些星云拍摄了彩色图像。从来没有人曾经真正用肉眼看到过这些颜色，然而这些颜色并不是人为的颜色，只是光的强度还不足以使我们眼睛中的视锥细胞能够看到它们。这些星云中比较壮丽的有环状星云和巨蟹座星云。前者呈现美丽的蓝色内核，并带有亮红色的外晕，后者呈现蓝色的云雾，并带有明亮橘红色的细丝渗入其中。

在亮光中，视杆细胞的灵敏度显然非常低，但在黑暗中，随着时间的流逝，它们逐渐获得了能够看到光的本领。人们所能适应的光的强度变化超过了一百万比一的范围。大自然并不是只用一种细胞来完成所有这一切，而是把她的职能从看到亮光的细胞，即看到颜色的细胞，也就是视锥细胞转移到看到低光强的细胞，即适应黑暗的细胞，也就是视杆细胞。在这一转移所产生的有趣的结果之中，首先是没有颜色，其次是颜色不同的物体其相对亮度也不同。这是因为视杆细胞对蓝色的感光比视锥细胞要好，而视锥细胞能看到的光的颜色如深红色，视杆细胞却绝对不可能看到。所以对视杆细胞来说，红光是黑色的。因此，两张颜色纸，比如说一蓝一红的，在明亮的光线下，红色甚至可能比蓝色更亮一些，可是在黑暗中却看上去完全相反。这是一个非常惊人的效应。如果我们在黑暗中找到一本杂志或者有颜色的某种东西，在我们能确切知道它们是什么颜色之前，先判断一下哪些是较亮，哪些是较暗的区域，然后把杂志带到亮光中去，那么，我们就会看到这种在最亮和不是最亮的颜色之间发生明显的转移。这种现象叫做普尔基涅效应。

在图35-3中，虚线表示眼睛在黑暗中的灵敏度，也就是它用的是视杆细胞；实线表示在亮光中的灵敏度。我们看到，视杆细胞的峰值

灵敏度在绿色区域，而视锥细胞的峰值灵敏度更多的在黄色区域。如果有一页红纸（红光波长大约为650 nm），在明亮的光照下，我们能够看到它，但在黑暗中就几乎看不见它。

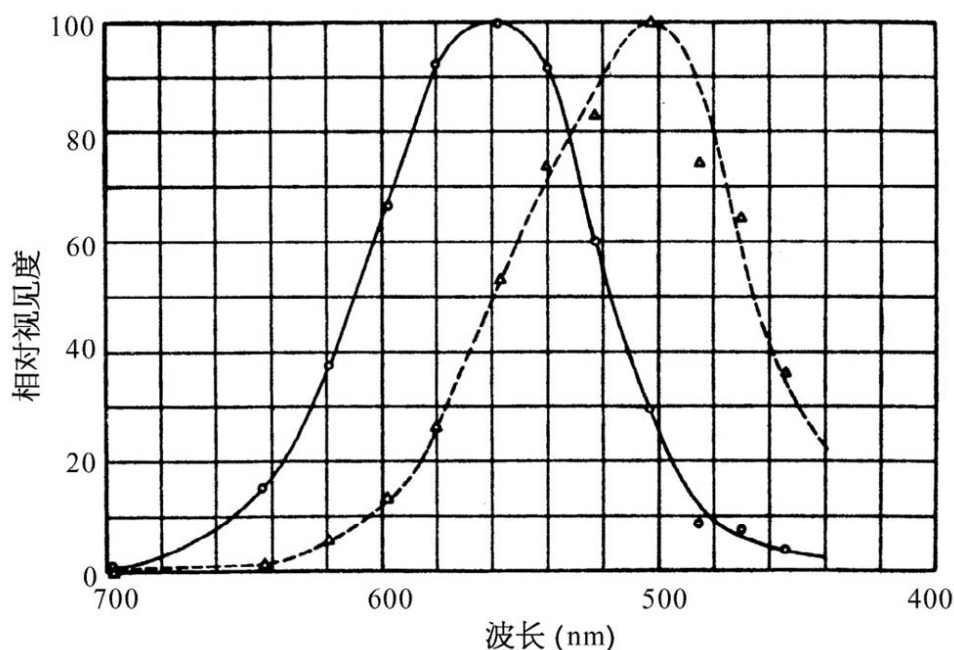


图 35-3 眼睛的光谱灵敏度。虚线——视杆细胞；实线——视锥细胞

在黑暗中由视杆细胞来承担任务以及在中央凹处没有视杆细胞这一事实的另一效应是，当我们在黑暗中直接观察某一物体时，我们的视觉不如向一边看时来得敏锐。对弱的星或星云，当我们稍微偏向一边注视时，有时会比直接对着它注视更为清楚，因为在中央凹处的中心没有灵敏的视杆细胞。

越往视场旁边视锥细胞的数目越是减少这个事实的另一有趣的效应是，当物体往一边移去时，即使在明亮的亮光中颜色也会消失。试验它的方法是朝着某一特定不变的方向看去，请一位朋友拿着一些有颜色的卡片从一边走进来，在这些卡片到你面前之前先试试看判定它们是什么颜色。人们发现，在他能够看见这些卡片在哪里之后很久，

才能确定它们的颜色。在做这项试验时，建议最好从与盲点相反的一边走进来，因为不然的话，就会被搞糊涂，一会儿几乎看见了颜色，一会儿（当经过盲点时）什么也看不见，然后又重新看到了颜色。

另一个有趣的现象是视网膜的外围对于运动非常敏感。虽然从我们的眼角去看时不可能看得很清楚，但是如果有一个小虫在爬动，而且我们原来未料想到那里有某一种东西在移动，我们就会立即对它很敏感。我们都会“紧张起来”去寻找正在爬到视场边上的那个东西。

§35-3 色感觉的测量

现在我们转到视锥细胞视觉，即亮光中的视觉上来，所涉及的问题是视锥细胞视觉最主要的特征是什么，那就是颜色。我们知道，白光可以用棱镜分解成具有各种波长的整个光谱，而光谱的不同波长在我们就看到不同的颜色；当然这就是我们能看到的各种颜色。任何光源都可用光栅或棱镜加以分析，并且可以确定它的光谱分布，也就是每一波长的“份量”。某一种光可以包含有大量的颜色，相当数量的红色，以及一点点黄色，等等。这在物理的意义上是非常精确的。但问题是它看起来是什么颜色？很明显，各种不同的颜色在一定程度上依赖于光的光谱分布，但是问题在于要找出产生各种不同感觉的是光谱分布的哪些特征。例如，我们必须怎样去做才能获得绿色？大家知道，我们可以简单地从光谱中取绿色的那部分。但这是否是得到绿色，橙色或任何其他一种颜色的唯一方法呢？

能够产生同样表观视觉效应的光谱分布是否不止一种呢？答案是完全肯定的。视觉效应的数目非常有限，而且事实上正如我们下面就要看到的那样，它们正好是一个三维流形。但是对于不同光源发出的

光，我们所能画出的不同曲线数目是无限的。现在我们要讨论的问题是，在什么情况下光谱的不同分布对于眼睛会显示出完全相同的颜色？

在判断颜色方面，一个最有力的心理-物理技术是把眼睛用作衡消仪器。这就是说，我们并不试图去定义究竟是什么造成绿色的感觉，或者去测量在什么情况下我们得到绿色的感觉，因为很清楚要这样去做是非常复杂的。我们代之以研究在什么条件下两个刺激是不可区分的。这样，我们就无需判定在不同情况下两个人是不是会得到同样的感觉，而只去判定如果两种感觉对于一个人是相同的话，对于另一个人是否也相同。我们并不需要去判定，当一个人看到某个绿色的物体时，在他内心深处引起的感觉和另外某个人在他看到某个绿色的物体时是否也相同，关于这一点我们什么也不知道。

为了说明这种可能性，我们可以用一组四盏各带有滤色片的投影灯，它们的亮度可以在一个较宽的范围内连续调节：一盏灯带有红色滤色片，在屏幕上映出一个红色光斑。另一盏灯带有绿色滤色片，在屏幕上映出一个绿色光斑。第三盏灯带有蓝色滤色片。第四盏灯在屏幕上映出一个白色圆环形光圈，它的中央有一个黑斑。现在如果我们开亮红光，并且靠近它加上一些绿光，我们看到，在两种光重叠的区域里所产生的并不是我们所说的那种绿色带红的感觉，而是一种新的颜色，在我们这个特例中是黄色。改变红光和绿光的比例，我们可以得出各种深浅不同的橙色，等等。如果我们已把它配成某一种黄色，那么我们不通过这两种颜色的混合而是把另外的一些颜色混合起来也能得到同样的黄色，也许用黄色滤色片和白光，或者诸如此类的东西混合起来，可以得到同样的感觉。换句话说，可以用不止一种方法把通过各种滤色片的光混合起来以形成各种颜色。

我们刚才发现的这种情况可以用解析方法表述如下。例如，一种特定的黄色可以用某一符号 Y 表示，它是某一数量的红色滤色光（ R ）和绿色滤色光（ G ）的“和”。在用两个数字比如 r 和 g 描写（ R ）和（ G ）有多亮，我们可以写下这种黄色的一个公式

$$Y=rR+gG. \quad (35.1)$$

现在的问题在于，是否通过把两种或三种固定的不同颜色相加在一起，就能做成所有各种不同的颜色？我们来看一看，在这方面可以得到什么结论。只把红色和绿色混合起来，肯定是不能得到所有各种不同的颜色的，因为比如说在这样的混合物中决不会出现蓝色。然而在加进一点点蓝色后，可以使所有三个斑点重叠的中央区域看来像是一种十分美妙的白色。把这三种不同的颜色混合起来，并且观察这个中央区域，我们会发现，通过改变颜色的比例，可以在这个区域中得到范围相当宽广的不同颜色，所以所有的颜色可以用这三种色光的混合来做成并非不可能。我们要讨论一下这在多大程度上是真实的。事实上这一点基本上是正确的，不久我们将看到怎样把这个命题定义得更加完善一些。

为了说明我们的观点，在屏幕上移动各个光斑，使它们彼此都落在其他光斑的上面，然后试着去配制出一种特殊的颜色使它落在第四只灯映出的圆环中央并使内外颜色相同。从第四盏灯射出的以前我们曾经认为它是“白色”的光现在却呈现出淡黄色。我们可以借助于尝试法尽可能适当地调节红色、绿色和蓝色以配制那种颜色，并且发现，我们能够相当接近于这种特殊浓淡的“奶油”色。所以不难相信，我们能够配制出所有的颜色。我们不久就要试制黄色，但是在这以前，必须指出：有一种颜色可能很难制成。教颜色这门课程的人都只制成所有“鲜明的”颜色，但从来没有制成过棕色，而且人们很难回忆起曾经

看见过棕色的光。事实上，为了增加任何舞台效果，这种光从来没有被使用过，人们也从来没有看到使用棕色光的聚光灯。所以我们想，或许不可能制成棕色光。为了弄清楚是否可以制成棕色光，我们指出，棕色光仅仅是这样一种光，如果没有背景的衬托，我们就不习惯于看它。事实上，我们能够把一些红光和黄光混合起来而制成棕色光。为了证明我们看到的是棕色光，只要增加圆环背景的亮度，相对于这个背景，我们看到的正是这种光，它就是我们所说的棕色！棕色在靠近比较明亮的背景时，总是一种深暗的颜色。棕色的特征很容易改变。比方说，如果我们从中取出一些绿色，就得到略带红的棕色，这显然是一种巧克力似的红棕色。如果加进更多的绿色，那么我们就相应得到那种令人讨厌的所有的军队制服都由它染成的颜色。但是来自这种颜色的光本身并不那样令人讨厌，它是略带黄的绿色，但是在明亮的背景的衬托下就显得非常可憎了。

现在我们在第四盏灯的前面放置一片黄色滤色片，并试图配制出这种颜色（光的强度当然必须限于各灯的范围之内，我们不可能去配制太亮的光色，因为我们的灯没有足够的功率）。然而我们能够配制出黄色，为此只要把绿色和红色混合起来，甚至加上一点点蓝色，使它更加完美。或许我们已经相信，在恰当的条件下，能够完美地配制出任何给定的颜色。

现在我们来讨论颜色混合的定律。第一，我们曾发现不同光谱分布的光能够产生同样的颜色；其次，我们曾看到“任何”颜色可以通过把三种特殊的颜色：红、蓝和绿加在一起而配制出来。混合的颜色最有趣的特点是：设有某一种光，我们把它叫做 X ，又设从眼睛看来它和 Y 没有什么区别（它可以是一种与 Y 不同的光谱分布，但它看起来

与 Y 是不可区别的），那么我们称这些颜色是“相等”的，这是从这个意义上来说，即眼睛看到它们是相等的，并且可以写成

$$X=Y. \quad (35.2)$$

颜色的主要定律之一是：如果两个光谱分布是不可区别的，我们给每一个加上某一种光，比如说 Z （如果我们写成 $X+Z$ ，就意味着把这两种光照射在同一个斑点），然后再取 Y 并加上同样数量的另一种光 Z ，那么这些新的混合物也是不可区别的

$$X+Z=Y+Z. \quad (35.3)$$

我们刚才已经配制出黄色，如果现在把粉红色的光照射到全部物体上，它们仍然能够匹配。所以对已经匹配的光，加上任何其他的光，留下的仍然是相匹配的光。换句话说，我们可以把所有这些颜色现象总结起来：两种色光在相同情况下彼此靠近观察时，如果一经匹配，那么这种匹配将继续保持下去，而且在任何其他的颜色混合情形中，一种光可以用另一种光来代替。事实上，这证明了一个非常重要和有趣的情况，即色光的这种匹配不依赖于眼睛在观察那个时刻的特性：我们知道，如果我们长时间地注视一个明亮的红色表面或者明亮的红光，然后去看一张白纸，那么它看上去略带绿色，而且其他颜色也会因我们长时间地注视着明亮的红色而走样。如果我们现在把两种颜色，例如黄色相匹配，我们注视它们，然后长时间地去注视一个明亮的红色表面，然后再回过头来看黄色，这时它看上去不是黄色的了。我不知道它看上去是什么颜色，但看来不会是黄色。虽然如此，这些黄色看上去仍然是匹配的，因此，由于眼睛能适应光的不同强度，颜色的匹配仍然发生作用，除非一个明显的例外，那就是当我们进入一个领域，在那里光的强度如此之弱，以致我们必须从视锥细胞转移到视

杆细胞的时候，这时原来相匹配的颜色不是相匹配的了，因为我们运用了不同的系统。

颜色混合的第二个原理是：任何一种颜色都可以用三种颜色组成，在我们的情况中，就是红、绿和蓝三种色光。适当地把这三种颜色混合在一起，我们就能够配制出任何一种颜色，正像我们在前面两个例子中所表明的那样。此外，这些定律在数学上也非常有趣。对于那些对于事物的数学感兴趣的人来说，情况是这样：假设我们取红、绿和蓝三种颜色，用 A 、 B 和 C 来标记，并且把它们叫作原色。于是任何一种颜色都可以由这三种颜色的一定数量配成：比如由颜色 A 的数量 a ，颜色 B 的数量 b 和颜色 C 的数量 c 配成 X

$$X = aA + bB + cC. \quad (35.4)$$

现在假设另一种颜色 Y 由同样这三种颜色配制成

$$Y = a'A + b'B + c'C. \quad (35.5)$$

于是我们发现这两种光的混合物（这是我们在前面已经提到过的那些定律的结论之一）可以通过取 X 和 Y 的分量之和来求得

$$Z = X + Y = (a + a')A + (b + b')B + (c + c')C. \quad (35.6)$$

这正好像数学中的矢量加法，其中 (a, b, c) 是一个矢量的分量，而 (a', b', c') 是另一矢量的分量，这时新的光 Z 就是这些矢量的“和”。这个问题一直在引起物理学家和数学家们的注意。事实上，薛定谔曾经写过一篇有关色视觉的精彩论文，他在这篇论文中发展了这个可用于颜色混合的矢量分析理论。

现在的问题是，哪些可正确地用作原色？就光的混合来说，是没有正确的原色这类东西的。对于实用的目的，可能有三种颜色在得到比较多的混合色方面比其他颜色更为有用，但是我们现在不讨论这个问题。无论哪三种不同的颜色^[1]，总能用正确的比例混合起来以产生无论哪种颜色。我们是不是能够证明这一奇妙的事实呢？若我们在投影灯中改用红色、蓝色和黄色来代替红色、绿色和蓝色。我们是否能用红色、蓝色和黄色配制成比如说绿色呢？

以各种比例把这三种颜色混合起来，我们得到范围相当大的一系列不同颜色，它们几乎遍及整个光谱。但是事实上，经过大量的尝试和失败，我们发现没有什么东西曾经看上去有点像绿色。问题在于我们是否能配制出绿色？回答是肯定的。那么如何配制呢？把一些红色光投射到所要配制的绿色上，我们就能用黄色和蓝色的某一混合色来与之相匹配！就这样，我们确实把它们匹配了，只是除去一点，那就是我们不得不欺骗自己一下，把红色放到另一边去。但是既然我们掌握了某种数学技巧，那就能理解到我们实际上所证明的并不是说 X 总能从比如红色、蓝色和黄色配制，而是在把红色放在另一边之后，我们发现红色加上 X 可以从蓝色和黄色中配制出来。把它放在等式的另一边，这可以解释为它是一个负的数量，所以如果我们允许像式（35.4）那样的等式中的系数既可以是正的也可以是负的，以及把负的数量解释为把它加到另一边，那么任何颜色都可以用任何三种颜色来配制，因而并没有像“这种”基本的原色这样的东西。

我们可以问，是不是有三种颜色，它们对于所有混合只有正的数量。回答是否定的。每一组三原色都对某些颜色要求负的数量，因而也就没有用以定义一种原色的唯一方法。在初等教材中，它们被说成

是红色、绿色和蓝色，但那只是因为用这些原色对有些组合无需用负号即可得到较宽的颜色范围而已。

§35-4 色品图

我们现在从数学的层面上作为一个几何学的命题来讨论颜色的组合。假如任何一种颜色能用等式(35.4)来表示，那么我们可以把它当作一个空间矢量来作图，沿着三根坐标轴画出 a 、 b 和 c 的数值，于是一种颜色就是一个点。如果另一种颜色是 a' 、 b' 、 c' ，那么这种颜色就处在图中别的什么地方。我们知道，这两者之和就是把它们作为矢量相加而得到的颜色。我们可以把这个图解简化一下，并且通过如下的观察把所有东西表示在一个平面上：如果我们有某种颜色的光，而且仅仅把 a 、 b 和 c 都加倍，也就是说，使它们都以同样的比例增强，那么它还是同一种颜色，只是更亮了一些。所以如果我们约定把所有东西都化为同样的光强，那么我们就把所有东西都投影到一个平面上，这在图35-4中就已这样做了。由此可知，由给定的两种颜色以某一比例混合而成的任何颜色，将处在联结这两点的直线上某一地方。例如，50比50的混合色将处在它们之间的中点，一种色的1/4和另一种色的3/4将出现在从一点到另一点的1/4处，依此类推。如果我们以蓝色、绿色和红色作为原色，那么我们看到所有能用正的系数配制而成的颜色都处在虚线三角形之内，这几乎包含了所有我们能够看到的颜色，因为这些颜色都包围在以曲线为边界的钟形面积之中。这个面积是从哪里来的呢？有人曾经把所有我们能够看到的颜色与三种特殊颜色非常仔细地比较过。但是我们不必核对所能看见的所有颜色，而只要核对纯光谱色，即光谱线。任何一种光都可以认为是各种纯光谱色的各种正的数量之和——所谓纯是从物理观点来说的。一个给定

的光包含有一定数量的红、黄、蓝等等这些光谱色。所以如果我们知道了要获得每一种纯成分需要用多少所选定的每一种三原色，那么就能算出要配制我们所给定的颜色每一种需要多少。所以，如果对任意给定的三原色，我们找出了所有光谱色的色系数，那么我们就能够制订出整个的颜色混合表。

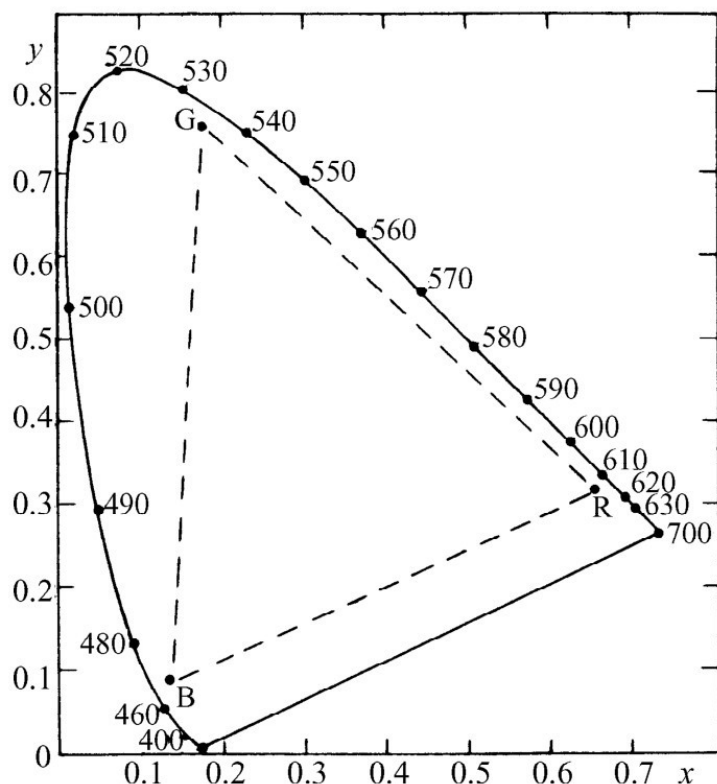


图 35-4 标准色品图

把三种光混合起来这类实验的结果的一个例子如图35-5所示。这个图表明，要用红、绿、蓝三种不同的特殊原色配制出每一种光谱色时每一种的数量需要多少。红色在光谱的左端，黄色次之，依此类推，一直到蓝色。但应注意到，有些地方必须用负的符号。只是从这样一些数据才可能在一张其 x 和 y 坐标和所用各原色的数量有关的图上确定所有颜色的位置。这是找出两条弯曲边界线的方法。它是纯光谱色的轨迹。任何其他颜色当然都可通过光谱线的相加得到，因而我们

发现，把曲线的一个部分和另一部分联结起来所能产生的任何颜色都是自然界中可以得到的一种颜色。图中的直线把光谱中紫色的最外一端和红色的最外一端联系起来。这是紫红色的轨迹。在边界之内是那些可以用各种光配制的颜色，而在它之外是不能用光配制的颜色，这些颜色从来没有人看到过（除非在余像中可能看到）。

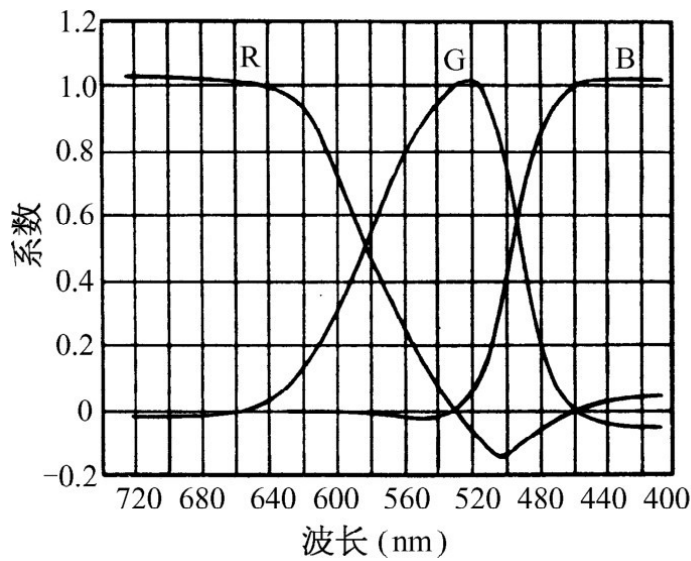


图 35-5 以某组标准原色表示的纯光谱色的色系数

§35-5 色视觉的机制

谈到现在，下一步就提出这样的问题：为什么颜色的行为竟是如此？由杨和亥姆霍兹提出的最简单的理论，假设眼睛中有三种不同的感光的色素，它们有不同的吸收光谱，因此一种色素比如说在红色区吸收很强，另一种色素在蓝色区吸收很强，再一种色素在绿色区吸收很强。当我们把光照射到它们上面时，就会在三个区域内得到不同数量的吸收，而这三部分信息在大脑中、眼睛中、或某个地方以某种方式调节，以确定这是什么颜色。很容易证明，所有颜色的混合法则都

符合这一假说的结果。关于这个问题曾经有过相当多的争论，因为接下来的问题当然就是要找出这种色素各自的吸收特性曲线。遗憾的是，我们发现，由于我们能以任何愿意的方式变换颜色坐标，所以用混合颜色的实验只能找到吸收曲线的各种线性组合，而不是个别色素的吸收曲线。人们曾用各种方法试图获得一条特殊的曲线，用它确实能够描述眼睛的某种特殊的物理性质。这种曲线之一是图35-3所示的亮度曲线。在这张图上有两条曲线：一条是对于处在黑暗中的眼睛，另一条是对于处在亮光中的眼睛；后者是视锥细胞的亮度曲线。它是这样测得的，即一种色光，其最小数量应是多少才能使眼睛恰好看到它。这条曲线表明眼睛在不同光谱区内的灵敏度有多高。另外，还有一个非常有趣的方法可以测量这条曲线。假如我们取两种颜色，并使它们显示在同一区域内，再把它们一个变到另一个交换闪变，那么如果闪变频率过低，我们就能看到颜色交替地闪现。然而，随着频率的增加，这种闪变终于会在某一频率消失，这个频率依赖于光的亮度，例如说：每秒来回16次。现在，如果我们相对于这一种颜色调节另一种颜色的亮度或强度，那么到达某一强度时16 Hz频率闪变就会消失。在这样调节出来的亮度下再得到闪变，就必须回到低得多的频率，才能够看到颜色的闪变。所以我们得到频率较高时的所谓亮度闪变以及频率较低时的颜色闪变。利用这种闪变技术可以使两种颜色在“亮度相等”上相匹配。所得结果几乎与测量眼睛时使用视锥细胞观察微弱光线的灵敏度阈值所得的一样，但不是完全相同。大多数研究工作者在这方面都用闪变系统作为亮度曲线的定义。

现在，如果眼睛中有三种对颜色灵敏的色素，那么问题就是要确定每一种色素的吸收光谱的轮廓。怎样做呢？我们知道，有些人——男性人口中的百分之八，女性人口中的百分之零点五——是色盲。大多数色盲或色视觉不正常的人对颜色的变化与其他正常人相比具有不

同程度的灵敏度，但他们仍需要用三种颜色来进行匹配。然而，有一些人被称为二色性色盲者（**dichromats**），对于这种人任何颜色只要用两种原色就可以匹配。于是一个明显的设想是他们缺少三种色素中的一种。如果我们能够找到三种具有不同颜色混合法则的二色性色盲者，那么一种应是缺少红色，另一种应是缺少绿色，再一种应是缺少蓝色的色素沉积。因而通过对所有这些色盲类型的测量，我们就能确定三条曲线！结果发现果然有三种类型的二色性色盲，两种是一般的类型，第三种是极稀少的类型，从这三种类型就可以推断出色素的吸收光谱。

图35-6表示一种特殊类型的称为患绿色盲者的颜色混合。对他来说，相同颜色的轨迹不是一个一个点，而是一条一条直线，沿着每一条直线，颜色是相同的。如果像这种理论所说的，他缺少三部分信息中之一是正确的话，那么所有这些直线应该相交于一点。如果我们在这张图上仔细地进行测量，那么它们确实完全相交。因此，很明显，这是数学家设想出来的，并不表示真实的数据！事实上，如果我们看一下具有真实数据的最新文献，就会发现，图35-6中所有直线的焦点并不准确地位于恰当的位置上。利用上图中的直线不可能找出合理的光谱；在不同区域内，我们需要用负的和正的吸收。但是如果用余斯托伐（Yustova）的新的数据，那么就会发现每一条吸收曲线到处都是正的。

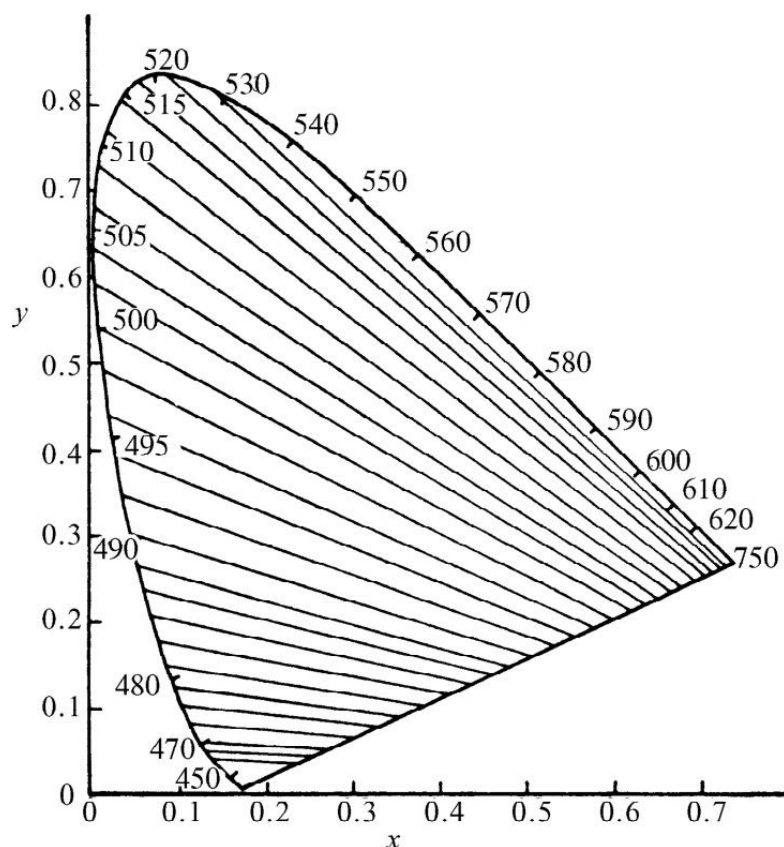


图35-6 被患绿色盲的人搞混乱的颜色轨迹

图35-7表示另一种色盲，即患红色盲的人的情况，它在靠近边界曲线的红端有一个焦点。在这种情况下，余斯托伐近似地得到了同一个位置。利用三种不同的色盲，三种色素的响应曲线最后被确定了下来，如图35-8所示。这是最终的结果吗？或许是，但对下列各点还是有一些问题，那就是三种色素的想法是否正确、色盲是否由于缺少一种色素所引起的结果，甚至关于色盲的颜色混合数据是否正确。不同的研究工作者得出不同的结果。这个领域仍在不断发展中。

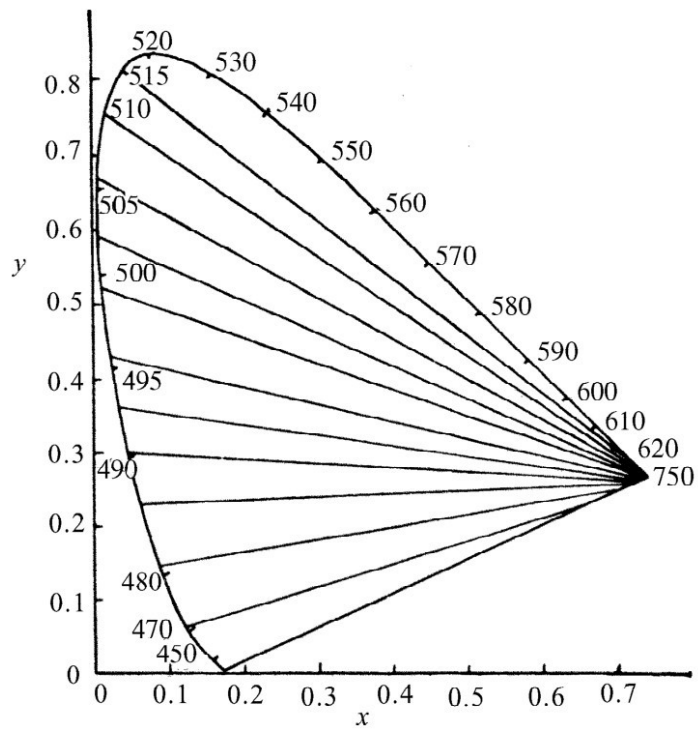


图35-7 被患红色盲的人搞混乱的颜色轨迹

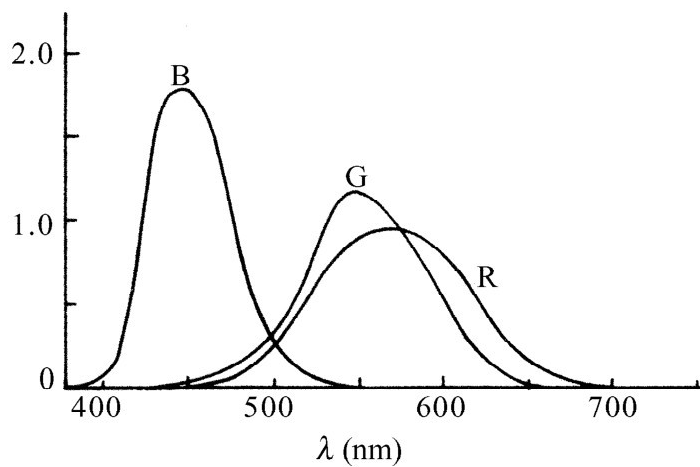


图35-8 正常三色者的接收器的光谱灵敏度曲线

§35-6 色视觉的生理化学

现在，怎样根据眼睛中的真实色素来核对一下这些曲线？从视网膜获得的色素主要是由一种叫做视紫质的色素组成的。它最突出的特性是：第一，它几乎存在于每一种脊椎动物的眼睛中；第二，它的响应曲线和眼睛的灵敏度完美地相适合，像从图35-9中可以看到的那样符合得非常好。图中我们用同样的比例画出了视紫质的吸收曲线和适应黑暗的眼睛的灵敏度。这种色素显然是我们在黑暗中用来观察的色素：视紫质是视杆细胞所用的色素，它和色视觉毫无关系。这一事实是1877年发现的。即使在今天，还是可以说视锥细胞的色素从来没有在试管中获得过。1958年人们还是可以说，色素从来没有被看到过。但是从那时候起，拉什顿（Rushton）曾经用非常简单而又巧妙的技术探测到两种这样的色素。

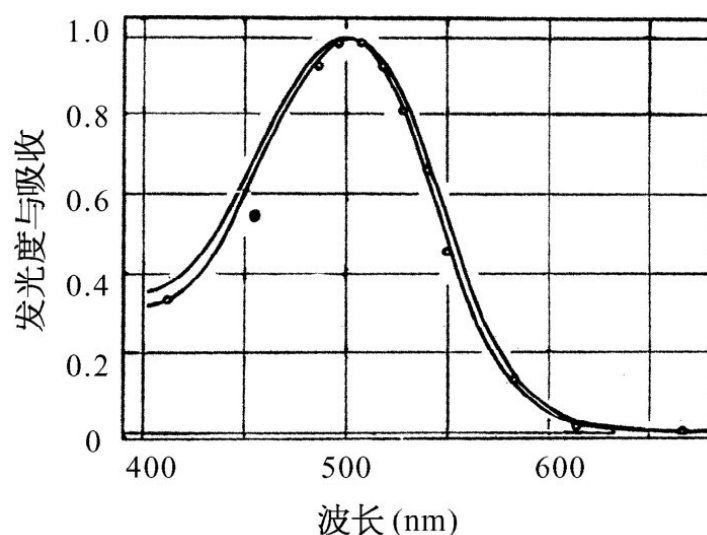


图35-9 暗适应眼睛的灵敏度曲线和视紫质的吸收曲线的比较

由于眼睛对明亮的光比之对强度弱的光非常不灵敏，所以困难大概在于需要用很多视紫质来观察弱光，但不必用许多色素来观察颜色。拉什顿的想法是：让色素留在眼睛内，并用不论何种方法来测量它。他是这样做的。有一种仪器叫检眼镜，它把光通过眼球的晶状体

送进眼睛，然后把反射回来的光聚焦在一起。使用这种仪器人们可以测量出有多少光被反射回来。这样，我们对两次通过色素的光（被眼球的背层所反射，并且再次通过视锥细胞的色素出来的）测量了它的反射系数。自然界并不总是设计得这样美妙的。但视锥细胞有趣地被设计成这样，使得进入视锥细胞的光被来回反射，最后向下钻进顶端处的微小的灵敏点中。光一直往下进入灵敏点，在其底部被反射，而在穿过相当数量的色视觉色素后重新反射回来；而且，通过观察中央凹，那里没有视杆细胞，这样人们就不会被视紫质所搞混。但是视网膜的颜色很早以前就已被人们观察到：它是一种带橙色的粉红色。然后又看到了所有的血管和背后物质的颜色，等等。我们怎么知道看到的的就是这种色素呢？回答：首先，我们找一个患有色盲的人，他的色素较少，因此很容易对他进行分析。其次，各种色素像视紫质一样，当被光漂白后强度就有所改变。当我们把光照射它们时，它们就改变浓度。所以，在观察眼睛的吸收光谱时，拉什顿用另一一束光照射整个眼睛，使它改变色素的浓度，同时，他测量了光谱的变化，这个差别当然与血液的数量或者反射层的颜色等等无关，而只与色素有关。拉什顿用这种方式获得了患红色盲的人的眼睛的色素曲线，如图35-10所示。

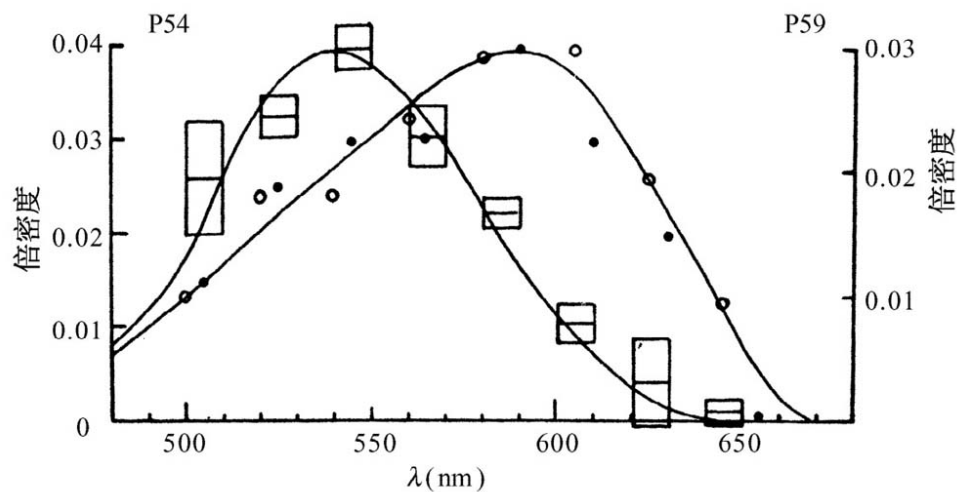


图35-10 患红色盲的人的眼睛（方块）和正常眼睛（点）的色素吸收光谱

图35-10中的第二条曲线是用正常眼睛得到的曲线。并且是在已经确定这种色素是什么色素，而把另一种用对第一种不灵敏的红色漂白之后得到的。红光对患红色盲的人的眼睛没有影响，但对正常眼睛却有影响。这样人们就能对所缺少的色素得到一条曲线。一条曲线的形状和余斯托伐的绿色曲线符合得很好，但红色曲线有少许位移。或许我们抓住了正确的线索，或许没有——最近对患绿色盲的人所进行的工作并没有显示出缺少什么确定的色素。

颜色不是光本身的物理学问题。颜色是感觉，不同颜色的感觉在不同情况中是不同的。举例来说，假如我们有一种由白光和红光叠加而成的粉红色光（用白色和红色所能配制的显然总是粉红色），我们就可以证明白光可以显示为蓝色。如果我们把一个物体放在光束中，它投射两个影子——一个单独为白光所照亮，而另一个为红光所照亮。对大多数人来说，物体的“白色”影子看上去是蓝色，但是如果我们不断扩大这个影子，直到它遮盖住整个屏幕，那么我们将看到它突然显示为白色，而不是蓝色！将红光、黄光和白光混合时，我们能够得到性质与此相同的其他效应。红光、黄光和白光只能产生橙黄色，等等。所以如果我们把这些光大致等量地混合在一起，我们只能得到橙色光。然而，当在这束光中投射出不同种类的影子时，那么由于颜色的各种叠加，人们得到一连串美丽的颜色，这些颜色并不存在于光本身之中（它只是橙色），而只存在于我们的感觉之中。我们清楚地看到许多颜色完全与光束中的“物理”颜色不同。重要的是要意识到视网膜已经在“思考”光，它正在把一个区域中所能看到的东西同另一个区域中所看到的东西进行比较，虽然是不自觉的。至于它是怎样进行的，我们在这方面所知道的一切将在下一章中进行讨论。

参考文献

Committee on Colorimetry, Optical Society of America, *The Science of Color*, Thomas Y.Crowell Company, New York, 1953.

Hecht, S., S.Sklaer, and M.H.Pirenne, “Energy, Quanta and Vision”, *Journal of General Physiology*, 1942,25,819-840.

Morgan, Clifford and Eliot Stellar, *Physiological Psychology*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1950.

Nuberg, N.D.and E.N.Yustova, “Researches on Dichromatic Vision and the Spectral Sensitivity of the Receptors of Trichromats, ”presented at Symposium No.8 *Visual Problems of Colour*, Vol.II, National Physical Laboratory, Teddington, England, September, 1957.Published by Her Majesty's Stationery Office, London, 1958.

Rushton, W.A., “The Cone Pigments of the Human Fovea in Colour Blind and Normal”, presented at Symposium No.8, *Visual Problems of Colour*, Vol.I, National Physical Laboratory, Teddington England, September 1957.Published by Her Majesty's Stationery Office, London, 1958.

Woodworth, Robert S, *Experimental Psychology*, Henry Holt and Company, New York,1938.Revised edition, 1954, by Robert S.Woodworth and H.Schlosberg.

[1] 当然，除了这种情况，如果三者之一可以用混合其他两种颜色配制出来的话。

第36章 视觉的机制

§36-1 颜色的感觉

在讨论视觉时，我们必须理解（在近代艺术陈列室以外的地方！）人们所看到的不是杂乱的色斑或光斑。当我们注视某一对象时，我们看到一个人或者一个物体；换句话说，大脑解释了我们所看到的是什么。这是怎样做到的，谁也不知道，但无疑这是在很高的水平上做到的。虽然很明显，在有了许多经验之后，我们确实学会了认识人是什么样子的，但是有许多更基本的视觉特征也涉及从我们所看到的東西的不同部分来的信息的组合。为了帮助我们理解怎样解释整个图像，在这里值得研究一下将不同的视网膜细胞来的信息的组合起来的最初阶段。在这一章中我们将主要集中在视觉方面，虽然在讨论过程中也将提到一些枝节问题。

同一时刻将眼睛几个部分来的信息在十分初等的水平上积累起来，这个过程不是我们能随意控制的也不是能够通过学习得到的本领。这个事实的一个例子是当白光和红光一起照射在同一屏幕上时，白光产生的蓝色阴影。这个效应至少涉及眼睛对屏幕的背景是粉红色的知识，即使如此，当我们注视着蓝色阴影时，只有“白”光到达眼睛中的某一特殊点上；所以各种信息一定在某个地方已经集中在一起。周围环境愈是完备和熟悉，眼睛对独特的东西进行校正就愈多。事实上，兰德（Land）已经证明，如果用两块能吸收光的透明照相底片以不同比例放在红色和白色前面，并以各种比例来混合表观蓝色和红

色，那么就能使之相当好地显示出与真实物体一致的真实景象。在这种情况下，我们也会得到许多表观的中间颜色，这和我们把红色和蓝色、绿色混合时所得到的相似，它们看上去几乎是完整的一套连续分布的颜色。但是如果我们仔细盯住它们看时，则又不是那么完美。即使如此，只用红色和白色就可以得到这么多的颜色还是令人惊讶的。景象看上去愈是像真实的情况一样，人的眼睛对所有的光实际上不过是粉红色的这一事实，就愈能得到补偿。

另一个例子是在黑白转盘中“颜色”的出现，这种转盘的黑色和白色面积如图36-1所示。当盘转动时，在盘的任一半径上亮和暗的变化完全相同，所不同的只是两种类型的“带”的背景。但是两个“环”中的一个看上去好像涂一种颜色，另一个涂上另一种颜色^[1]。直到现在还没有人知道呈现这些颜色的原因，但是很清楚，最可能的情况是信息在眼睛本身中就已在十分初等的水平上被组合在一起了。

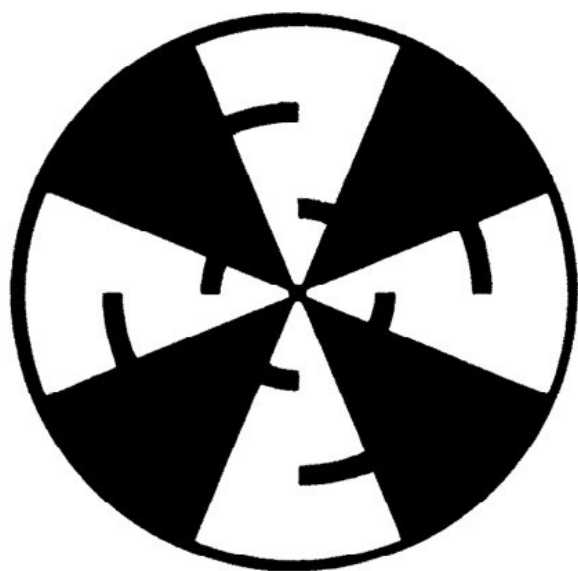


图36-1 像上面这样的盘子转动时，两个较黑的“环”中只有一个呈现颜色。如果转动方向反过来，则在另一个环上呈现颜色

几乎所有现代的色视觉理论都一致认为，颜色混合的数据表明，眼睛的视锥细胞中只有三种色素，而色感觉的产生，基本上是由于这三种色素对光谱的吸收作用。但是当这三种色素共同作用时，与其吸收特性有关的总的感觉不一定是各单独感觉的总和。我们都同意黄色看上去绝不是带红的绿色。事实上对于大多数人来说，发现光实际上是许多颜色的一种混合，可能觉得极其惊讶，因为光的感觉大概是由于其他某种混合过程，它不同于音乐中的和弦那样的一种简单混合。在和弦中同时发出三个音符，如果我们仔细倾听，就能分别听出它们。但是我们不能通过仔细注视而看出红色和绿色。

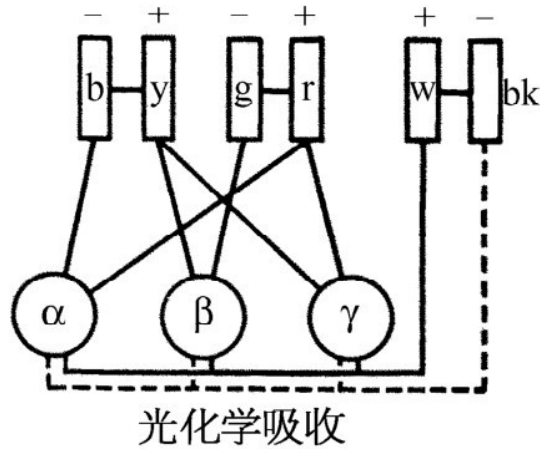
最早的视觉理论表明：有三种色素和三种类型的视锥细胞，每一种视锥细胞包含一种色素。从每一个细胞有一条神经通往大脑，所以有三部分信息被送到大脑，然后各种事情在大脑中都能发生。当然，这是一个不完全的想法：发现信息是怎样沿着视神经送到大脑并没有说明什么，因为我们甚至还没有开始来解决这个问题。我们必须提出一些更为基本的问题，如信息在不同地方组合起来是否会产生任何不同结果？重要的是，它是在视神经中直接送到大脑，或者还是视网膜可能首先对它进行了某种分析？我们已经看到视网膜的简图，它是一种极端复杂的东西，有着许许多多的相互连接的结（图35-2），因此或许可以对它进行某种分析。

事实上，研究解剖学和眼睛进化的人已经证明，视网膜实际上就是大脑：在胚胎的发育过程中，一部分大脑向前伸出，长的纤维向后生长，将眼睛和大脑连接起来。视网膜正是按照大脑的组织方式组织起来的，就像某个人曾美妙地说过的那样：“大脑发展了一个向外观察世界的方法。”眼睛好比是大脑的在外面接触光的一个部分。所以在视网膜中已经进行了颜色的某种分析并不是完全不可能的。

这个猜想为我们提供了一个非常有趣的机会，因为可以说此外没有其他一种感官在把信号送进可以对之进行测量的神经之前，已经包含有这样大量的分析。所有其他感觉的分析通常是在大脑本身中进行的。在大脑中很难在一些特定的部位进行测量，因为这里有如此多的相互连接。但在视觉的情况中就不同，这里我们有的是光以及对之进行分析的三层细胞，分析结果可以通过视神经传递出去。所以我们或许得到了第一次机会从生理上来观察大脑的第一层在第一步是怎样工作的。因此，这就引起了双重的兴趣，不只是对视觉的兴趣，并且是对整个生理学问题的兴趣。

存在三种色素这个事实并不意味着一定要有三种不同的感觉。另外有一种色视觉理论认为：存在着实际上有各种对抗的颜色系统（图36-2）。这就是说，如果看到了黄色，就有一条神经纤维传送大量的脉冲，而对蓝色它就传送得比通常的少。其中一条神经纤维以同样的方式传送绿色和红色信息，另一条神经纤维传送白色和黑色。换句话说，在这一理论中，有些人已经就神经的连接系统也就是分析的方法开始进行猜测。

神经中枢的反应



$$\begin{aligned}
 y - b &= k_1(\beta + \gamma - 2\alpha) \\
 r - g &= k_2(\alpha + \gamma - 2\beta) \\
 w - bk &= k_3(\alpha + \gamma + \beta) - k_4(\alpha + \beta + \gamma)
 \end{aligned}$$

图 36-2 根据色视觉“拮抗”理论的神经连接

我们想通过这些初步的分析猜测试图解决的问题是那些关于在粉红色背景上所看到的表观颜色的问题，眼睛在适应了不同的颜色以后出现的问题，以及所谓的心理现象。心理现象具有这样的性质，比如说白色并不使人“觉得”像红色、黄色和蓝色一样，而且这个理论已经过时，因为心理学家说有四种表观纯色：“有四种刺激，它们具有心理上分别引起简单蓝色、黄色、绿色和红色感觉的显著能力。和赭色、洋红、紫色或大多数可辨别的颜色不一样，这些简单的颜色一点也不含有其他颜色的性质，从这个意义上说它们不是混合而成的，例如，蓝色不带黄色，不带红色，也不带绿色，等等，这些是心理上的原色。”这是一个所谓的心理学事实。要找出所以会得出这个心理学事实的论据，我们确实必须非常认真地查阅所有文献。我们找到的所有有关这个论题的近代文献，都重复同样的说法，也就是一个德国心理学家的说法，他把里奥纳多·达·芬奇（Leonardo da Vinci）作为他所引

的权威之一。当然，我们都知道达·芬奇是一个伟大的艺术家。这位心理学家说：“里奥纳多认为有五种颜色。”于是我们进一步查找，终于在一本更古老的书中找到了这个论题的根据。在这本书中讲了这样的一些话：“紫色是带红的蓝色，橙色是带红的黄色，但是红色是否可以看出是带紫的橙色呢？红色和黄色不是比紫色或橙色更加单一吗？要一般的人回答什么颜色是单一的，他就会说出红色、黄色和蓝色三种颜色，而有些观察者再加上第四种——绿色。心理学家习惯于接受四种为显色。”所以这个问题在心理学的分析中是这样的情形：如果人人都说有三种，而某些人说有四种，只要他们要的是四种，那么就是四种颜色。这表明了心理学研究的困难。当然很清楚，我们有这样的感觉，但是要从这些心理学研究中得到许多资料是很困难的。

所以可以进行的另一个方向是生理学的方向，在这里是用实验来弄清楚大脑、眼睛、视网膜或别的地方实际上发生的是什麼，而且或许会发现来自不同细胞的脉冲的某些组合沿着某些神经纤维运动。附带说一下，基本色素并不必须分别存在于不同的细胞中，其中可能具有包含各种色素混合物的细胞，含红色素和绿色素的细胞，以及所有三种色素（所有三种都有的信息就是白色信息）的细胞，等等。有许多能把系统连接起来的方法，而我们要找出的是自然界所用的那一种方法。最后，我们期望，在了解生理学上的连接之后，我们就会获得心理学方面的某些知识，所以我们将从这个方向来进行研究。

§36-2 眼睛的生理学

我们现在不仅讨论色视觉，而且要讨论一般的视觉，为的是使我们回忆一下图35-2中所示的视网膜中的相互连接。视网膜确实像大脑

的表面。虽然通过显微镜看到的实际图像，比之这张多少简化了的图画要稍微复杂一些，但是经过仔细分析之后，人们还是可以看到所有这些相互连接。毫无疑问，视网膜表面的每一部分是和其他部分相连接的，而从产生视神经长的轴突传出的信息，是来自许多细胞的信息的组合。在一系列功能中有三层细胞：视网膜细胞，它直接受光的刺激作用；中间细胞，它从一个或少数几个视网膜细胞取得信息，再交给第三细胞层中的几个细胞，然后输送到大脑。各层中的细胞之间还有着各种各样的交叉连接。

我们现在转到眼睛的结构和性能的某些方面（见图35-1）。光线的聚焦作用主要由角膜来完成，这是由于它有使光线“弯曲”的曲面这一事实。这是我们在水中所以不能看得很清楚的原因，因为这时角膜的折射率1.37与水的折射率1.33之间相差不是足够大。在角膜后面实际上是折射率为1.33的水，而在水后面是一个具有非常有趣结构的水晶体。水晶体具有像洋葱那样的一层一层结构，所不同的只是它完全是透明的，中间部分的折射率是1.40，外面部分的折射率是1.38（如果我们能够制造折射率可以调节的眼镜片，那该多好。因为这时我们就可以不必像只有单一折射率的眼镜片那样把它弯曲那么多了）。再则，角膜的形状并不是球形的。一个球面透镜具有一定数量的球面像差。角膜的边缘部分比球面要“扁平一些”，正是由于这种方式，使得角膜的球面像差比之我们在那里放一个球面透镜时要小一些！光线被角膜-水晶体系统聚焦到视网膜上。当我们注视着较近或较远的物体时，水晶体张紧或放松来改变焦距以适应不同的距离。调节光线总量的是虹膜。虹膜的颜色就是我们所谓的眼睛的颜色，有棕色或蓝色，随人而定。当光量增加和减少时，虹膜就分别向里或向外移动。

我们现在如图36-3所简略地显示的那样，来看一看控制水晶体的调节，眼睛的运动，使眼球在眼窝里转动的肌肉以及虹膜的运动的神经机构。从视神经A输送出来的所有信息，绝大部分被分配到两束神经中的一束（以后我们还要谈到它），然后再从这里送到大脑。但是我们现在感兴趣的只有少数几根神经纤维，它们并不直接通到大脑视觉皮层（这里是我们“看到”图像的地方），而是通到中脑H。这些就是用以测量平均光强和调节虹膜的神经纤维，或者，如果像看上去模糊，它们就会设法调节水晶体，或者，如果出现双重像，它们就会设法调节眼睛，使之适合双眼视觉。无论在何种情况下，它们都通过中脑并反馈回到眼睛。K是调节水晶体的肌肉，L是另一块伸入到虹膜内的肌肉。虹膜有两个肌肉系统。一个是圆形肌肉L，当它受到刺激时就会向里拉，使虹膜关闭。它的动作非常快，神经从大脑通过短的轴突直接连接到虹膜。与圆形肌肉相对的肌肉是径向肌肉，这样当物体变暗时，圆形肌肉放松，这些径向肌肉就向外拉，使虹膜张开。这里像身体中许多其他地方一样，有一对功能相反的肌肉，而且几乎在每一个这类情况中，控制这两种肌肉的神经系统是调节得非常精巧的，所以当信号传出以收紧一种肌肉时，放松另一种肌肉的信号也就自动地传了出来。但虹膜是一个独特的例外；使虹膜收缩的神经是我们已经描述的那些神经，但是使虹膜扩展的神经却无人确切知道从何而来，它们向下进入胸部后面的脊髓，再离开脊髓进入胸部，然后又向上通过颈神经节，这样绕了整个一圈再向上回到头部，以便控制虹膜的另一端。事实上，这个信号是经过一个完全不同的神经系统运行的，它根本不是一个中枢神经系统，而是一个交感神经系统，所以这是使事物运行的一个非常奇特的方式。

是视场右边的所有信息，而大脑的右边则看到视场的左边部分。以这种方式把分别来自两只眼睛中的各只的信息合并在一起是为了告诉我们物体有多远。这是双目视觉系统。

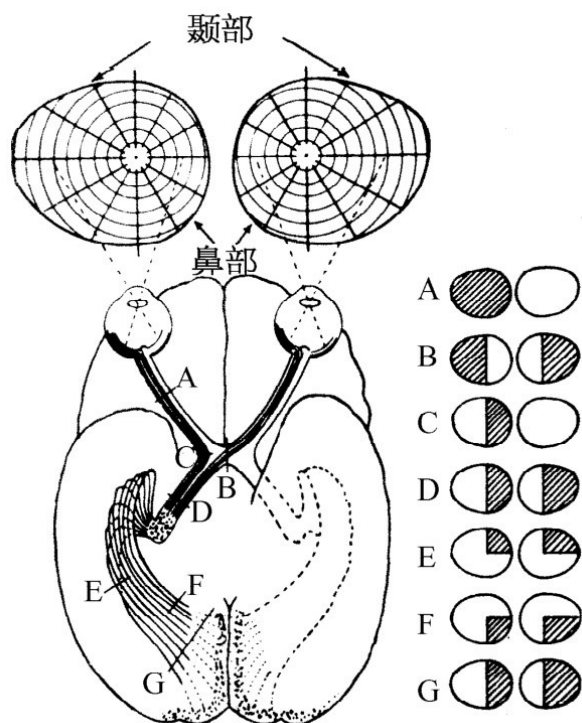


图36-4 眼睛到视皮层的神经连接

视网膜和视皮层之间的连接是非常有趣的。如果视网膜上一点被切除或以任何方式被破坏，那么整个纤维就会失去作用，从而我们就能找出它与何处相连接。我们发现这种连接本质上是一对一的——视网膜上每一点在视皮层上就有一点与之对应——视网膜上非常靠近的点在视皮层上也非常靠近。所以视皮层仍然代表视杆细胞和视锥细胞的空间排列，当然有很大的变形。在视场中心占据视网膜非常小一部分的物体在视皮层中扩展到许许多多的细胞。显然，原来靠得很近的物体仍旧靠得很近，这是很有用的。不过，事物最显著的特点在于：通常认为物体相互靠近的最重要的地方应当在视场中央。但不管你相

信与否，当我们注视着某一物体时，在视场中央画一条上下直线具有这样的性质：来自直线右边所有的点的信息传送到大脑的左边，来自左边所有的点的信息传送到大脑的右边，这个区域是这样划分的，从中间一直向下切开时，视场中央靠得非常近的物体在大脑中却分开得很远！信息必定以某种方式通过某些其他渠道从大脑的一边传送到另一边，这是十分奇怪的。

这个网状结构究竟是如何“连接”的，是一个非常有趣的问题。有多少是本来已被连接的，有多少是通过学习而连接的，这是一个老生常谈的问题。很久以前人们总是这样想，或许它根本用不到仔细地连接起来，只要粗糙地连接一下就可以。幼儿通过经验学会，当物体“在那里”时，它在大脑中就产生了某种感觉（医生常常告诉我们幼儿“感觉到”什么，但他们怎么能够知道幼儿在一岁时感觉到的是什么呢）。假定说一个一岁的幼儿看见一个物体“在那里”，得到某种感觉，并学会了走到那里，因为当他到达“那里”时却什么也得不到。这个想法或许是不正确的，因为我们已经知道在许多情况下本来就存在着这些特别精细的相互连接。更有启发性的是用蝾螈做的一些最值得注意的实验（附带说一下，蝾螈有一直接的交叉连接，而没有视神经交叉。因为蝾螈的眼睛在头部的两边，既没有共同的视场，也没有双眼视觉）。实验是这样做的：我们可以把蝾螈的视神经割断，但视神经又会重新从眼睛中生长出来，成千上万的细胞纤维就这样自己重新建立起来。现在，在视神经中，纤维不再相互靠得很紧——它好像粗大而扎得很松的电话电缆，所有纤维都扭绞和缠绕着，但当视神经到达大脑后，它们又重新被加以整理。当我们割断蝾螈的视神经时，一个有趣的问题是，它是否总会恢复原状？答案是肯定的，这是非常值得注意的。假如我们割断蝾螈的视神经，它就会长回来，并且重新获得了良好的视觉敏锐性。然而，假如我们割断蝾螈的视神经，并把它

的眼睛上下倒转，再让它重新长回来，这时它有良好的视觉敏锐性是毫无问题的，但却犯了一个严重的错误，即当它看见一只苍蝇在“这边”时，却扑到“那边”去了，并且永远学不会去改正。因此，一定有一种神秘的方法，使千千万万的神经纤维能够找到它们在大脑中的正确位置。

有多少神经纤维原来就是连接的，有多少是不连接的，这个问题是生物发展理论中的重要问题。答案还不知道，但是在深入细致的研究之中。

对金鱼所做的同样的实验表明，在我们切断视神经的地方，会长出一个可怕的瘤，像一个大疤或伤痕，但即使如此，神经纤维还是长回到它们在大脑中的正确位置。

为了做到这一点，在神经纤维长入原来视神经的通道时，它们必须多次作出判断应当向哪个方向生长。它们是怎样做到这点的呢？看来似乎有某种化学诱导物质使不同的纤维对它们有不同的反应。试想一下正在生长的纤维的数目是如此之大，其中每一条都是一个个体，多少与其旁邻有所不同。无论它与哪种化学诱导物质起反应，总能以唯一的方式找到它在大脑中的恰当位置以完成最终的连接！这是一件有趣而又奇妙的事情，也是近年来生物学的重大发现之一，而且毫无疑问，是与许多古老而尚未解决的问题如生长、组织、有机体特别是胚胎的发育有关的。

另一个有趣的现象是关于眼睛的运动。为了在各种情况中都能使两个像符合一致，眼睛必须运动。这里有几种不同的运动：一种是使眼睛追随物体而运动，这要求两只眼睛必须在同一方向运动，即一起向右或向左运动。另一种是使它们指向不同距离上的同一位置，这要

求它们作反方向的运动。进入眼睛肌肉的神经都是为了这些目的原先已连接好的。有一组神经能够牵动一只眼睛里面一边的肌肉和另一只眼睛外面一边的肌肉，而同时使各自相反的肌肉放松，这样两只眼睛就能一起运动。另外，还有一个神经中心，当它受到刺激时会使眼睛从平行位置彼此相向运动。每一只眼睛都能向外转向眼角，只要另一只眼睛向着鼻子运动，但是不论自觉或不自觉都不可能使两只眼睛同时转向外面，这不是因为没有肌肉，而是因为没有一个方法能发送一个使两只眼睛都转向外面的信号，除非发生了一种偶然情况或者诸如此类的事，比如说一根神经被切断了。虽然一只眼睛的肌肉确实能够操纵这只眼睛的运动，但即使是一个瑜伽修行者（Yogi）也不可能在主观意志的控制下自由地使两只眼睛同时向外运动，因为看来没有任何方法可以这样做。我们的视神经原先在一定程度上已经连接起来了。这是重要的一点，因为大多数早期的解剖学和心理学等方面的书籍不重视或者不强调我们的视神经原先已经完全连接在一起这个事实——他们说每样东西都是通过学习才知道的。

§36-3 视杆细胞

现在我们来更详细地研究在视杆细胞中发生的事情。图36-5表示视杆细胞中间一段的电子显微镜图像（整个视杆细胞还要超出图示区域向上伸展）。图像中有一层一层的平面结构，右边是它的放大图。这种结构中含有视紫质，它使视杆细胞产生视觉效应。视紫红质是一种色素，它是巨大的蛋白质分子，其中含有称做视黄醛的一组特殊物质，这种物质可以从蛋白质中分离出来，而且毫无疑问是吸收光的主要因素。我们不了解形成这些平面的理由何在，但是很可能有某种原因要把所有视紫红质分子保持平行。这些现象的化学方面已经研究得

相当深入，但其中或许还要加上一些物理方面的东西。可能是这样：所有分子所以排成某种横列是为了当一个分子受到激发时所产生的电子或者诸如此类的东西能够一直向下跑到终端的某个地方，并把信号发送出去。这是一个非常重要的问题，而且现在还没有研究出来。在这个领域中最终总要用到生物化学和固体物理或与之类似的一些学科。

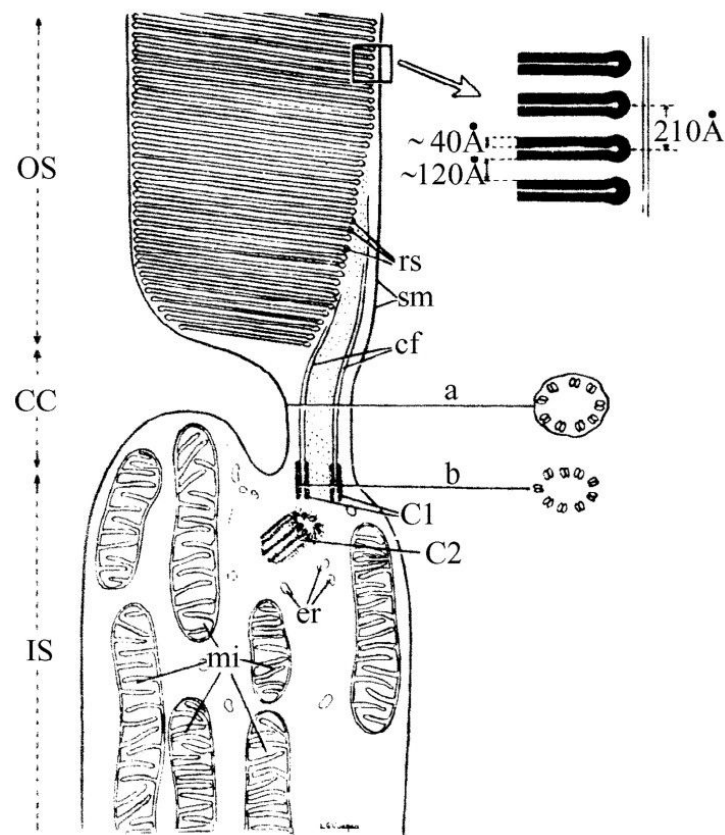


图36-5 视杆细胞的电子显微镜图像

这种层状结构在光起重要作用的其他情况中也出现，例如在植物的叶绿体中，光在这里产生光合作用。假如我们把叶绿体放大，就会发现与上面一样有几乎同样类型的层状结构，当然这里所含的是叶绿素，而不是视黄醛。视黄醛的化学结构式如图36-6所示。沿着边链它

有一连串交替出现的双键，这几乎是所有吸收作用强的有机物质像叶绿素、血液等等的特征。人类不可能在自己的细胞中制造这种物质——我们必须从食物中摄取它，因此要吃一种特殊形式的物质。这种物质除了有一个氢原子联接在右端以外，和视黄醛完全相同，它叫做维生素A，如果我们不摄取足够的维生素A，就得不到视黄醛的供应，眼睛就要变成通常所说的夜盲，因为在这种情况下晚上用视杆细胞看东西时，视紫红质中就没有足够的色素。

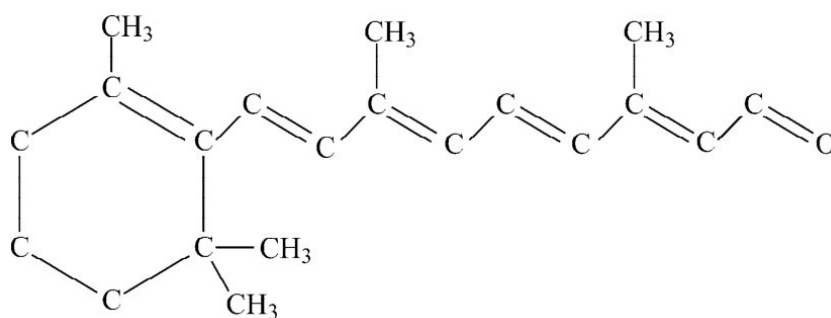


图36-6 视黄醛的结构

这样的一连串双键为什么能够非常强烈地吸收光呢，其原因现在也已经知道了。我们可以在这里作一提示：这一连串交替的双键叫做共轭双键，一个双键意味着它有一个额外的电子，而这个额外的电子很容易向左或向右移动。当光线击中这个分子时，每个双键的电子都向同一方向移过一步。整个键中所有电子的移动，好像一连串骨牌倒下来一样。虽然每一个电子只移动很小一段距离（我们应该预料到在单个原子中只能使电子运动一小段距离），但是其总的效应就好像一个电子从一端走到另一端一样！这好像和一个电子通过整个距离作来回运动一样，也就是这样，在电场的影响下，我们所得到的吸收作用比之使电子只移动和一个原子相联系的距离所得到的要强得多。由于很容易使电子来回运动，视黄醛就非常强烈地吸收光，这就是视黄醛的物理-化学的最终机理。

§36-4 （昆虫的）复眼

我们现在回到生物学上来。人眼并不是仅有的一种眼睛。在脊椎动物中，几乎所有眼睛本质上都和人的眼睛相似。然而，在低等动物中有许多其他种类的眼睛，如眼点、各种眼杯，以及其他灵敏度不高的东西，我们没有时间来一一讨论它们。但是在非脊椎动物中有另一种高度发展的眼睛，这就是昆虫的复眼（大多数具有巨大复眼的昆虫也还有各种附加的单眼）。蜜蜂是一种昆虫，它的视觉有人已经非常详细地研究过了。研究蜜蜂视觉的性质比较容易，是因为它们受到蜜的吸引。我们可以做这样的实验：把同样的蜜放在蓝纸或红纸上，看一看它们会飞到哪一种纸上去。用这个方法曾经揭露了有关蜜蜂视觉的一些非常有趣的事情。

在测试蜜蜂能够看出两张“白”纸之间的颜色差别有多敏锐这个问题上，有些研究者发现它的辨色本领不十分好，而另一些人则发现它出奇地好。甚至在这两张白纸几乎完全一样的情况下，蜜蜂仍然能够辨别出它们的差别。实验者在一张纸上涂锌白，在另一张纸上涂铅白，虽然在我们看来这两张纸完全相同，但是蜜蜂却能够容易地区别它们，因为它们在紫外区域反射不同数量的光线。用这个方法发现了蜜蜂眼睛灵敏的光谱范围比我们自己的要宽。我们的眼睛能看到7 000～4 000 Å的光，也就是从红光到紫光，但是蜜蜂的眼睛能一直往下看到3 000 Å的光，即进入了紫外区！这就产生了许多有趣的效应。首先，蜜蜂能够区别在我们看来相似的许多花朵。当然，我们必须理解到，花的颜色并不是由于我们的眼睛而设计的，而是为了蜜蜂，这些颜色是把蜜蜂吸引到某一特定花朵的信号。我们都知道有许多“白”花。但是非常明显，蜜蜂对于白色并不很感兴趣，因为结果证明，所

有白花反射紫外线的本领各不相同。它们并不像真正的白色那样能够百分之百地反射紫外线。既然并不是所有的光都被反射回去，那么当缺少紫外线时，白就成了一种颜色，正像对于我们来说，如果缺少了蓝色，白就显示为黄色。因此，所有的花对于蜜蜂都是有颜色的。然而，我们也知道蜜蜂看不见红色。所以，我们也许认为所有的红色在蜜蜂看来应该是黑色。但事实并非如此！对红花所作的仔细研究表明，甚至用我们自己的眼睛也可以看出绝大多数红花带有蓝的色彩，因为它们主要反射一些额外的蓝色，这就是蜜蜂所看到的那部分。此外，实验还表明，花瓣的不同部分对紫外线的反射也是不同的，等等。所以如果我们能像蜜蜂看到花朵那样看到它们，它们甚至将更加美丽并有更多的差异。

不过，已经证明，有少数红花既不反射蓝色，也不反射紫外线，因此对于蜜蜂来说将呈现黑色！对于关心这件事的人们，这已引起他们的某种忧虑，因为他们担心这种事情：黑色看来不像是一种使蜜蜂感兴趣的颜色，因为很难把它与脏的和旧的阴影区别开来。实际上蜜蜂确实不~~来~~拜访这些红花，这些是蜂鸟常来拜访的花，因为蜂鸟能够看见红色！

蜜蜂视觉的另一个有趣的方面是，蜜蜂通过观察一小片蓝天，而不用看到太阳本身，就能明确知道太阳的方向。我们不容易做到这一点。如果我们通过窗户看天空时，看到它是蓝色的，能够知道太阳在哪个方向吗？蜜蜂能够知道，因为蜜蜂对偏振光相当敏感，而天空中的散射光是偏振的^[2]。至于这种敏感性是怎样起作用的，这个问题仍在争论之中。是否因为在不同的情况下光的反射不同，或者是因为蜜蜂的眼睛有直接的感觉力，到现在为止都还不清楚^[3]。

也有人说，蜜蜂能够看到快至每秒振动200次的闪光，而我们只能看到每秒20次。蜜蜂在蜂巢中的运动是非常敏捷的，它们的脚在不停地移动，翅膀在不停地振动，但是用我们的眼睛很难看到这些运动。然而，如果我们能够看得更快一点，那么我们就看到这种运动。眼睛有这样快的反应，对于蜜蜂可能是非常重要的。

现在我们来讨论预计的蜜蜂的视敏度。蜜蜂的眼睛是复眼，它由大量叫做小眼的特殊细胞所构成，这些小眼呈圆锥形地排列在蜜蜂头部外边的球面上（大体而言）。图36-7表示这样一个小眼的图像。在顶端有一个透明的区域，类似于一种“水晶体”，但实际上它更像一个滤光镜或导光管，使光沿着细长的纤维射入，这种纤维可能就是发生吸收的地方。从另一端引出的是神经纤维。中心纤维被旁边六个细胞所包围，实际上它们把中心纤维掩藏了起来。就我们的目的来说，这些叙述已经足够了，重要的一点是：这种小眼是圆锥状的东西，而且许多小眼一个挨一个地安放在蜜蜂眼睛的整个表面上。



图36-7 小眼的构造（复眼中的一个单细胞）

我们现在来讨论蜜蜂眼睛的分辨率。假如我们画一条直线（图36-8）表示表面上的小眼，并且假定这个表面是一个半径为 r 的球面。那么运用我们的大脑，并且假设进化像我们一样聪明，就能准确算出每个小眼该有多宽！如果小眼非常之大，就不会有很大的分辨率。这就是说，一个细胞从一个方向得到一部分信息，而其相邻的细胞从另一个方向得到一部分信息，等等，但蜜蜂不可能清楚地看见这两个方向之间的东西。所以眼睛视敏度的不确定性肯定和一个角度有关，这个角度就是小眼的端面相对于眼睛的曲率中心所张之角（眼睛细胞当然只存在于球面上；球面的里边是蜜蜂的头部）。从一个小眼到下一个小眼之间的角度就是小眼的直径除以眼睛表面的半径

$$\Delta\theta_g = \delta / r. \quad (36.1)$$

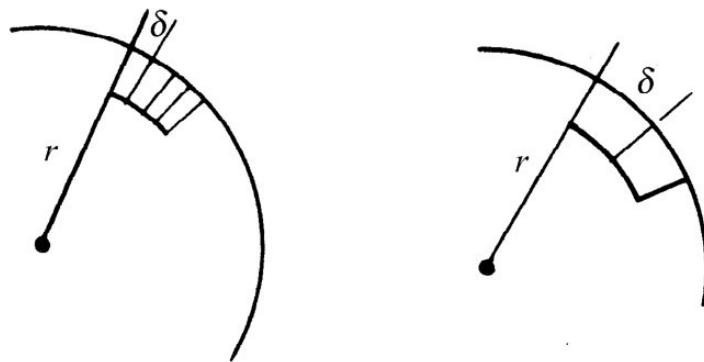


图36-8 蜜蜂眼睛内小眼排列略图

所以我们可以说：“ δ 愈小，视敏度就愈高。那么为什么蜜蜂不用非常非常小的小眼呢？”回答是：我们懂得足够多的物理学，所以能够理解到，假如我们试图让光线进入一条很细的狭缝，那么由于衍射效应

我们就不能在一个给定的方向上看得很清楚。从几个方向来的光都能进入小眼，而且由于衍射，从角度 $\Delta\theta_d$ 射来的光线也能被它接收到

$$\Delta\theta_d = \lambda / \delta. \quad (36.2)$$

现在我们可以看出，如果 δ 太小，那么每个小眼就会由于衍射而不只看到来自一个方向的光，如果 δ 太大，那么每一小眼只能看到来自一定方向的光，但是没有足够多的小眼以获得清晰的全景。所以我们调节距离 δ ，以使这两者的总效应变为最小值。如果我们把两者相加，并找出其总和为最小的那个位置（图36-9），我们发现

$$\frac{d(\Delta\theta_g + \Delta\theta_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}, \quad (36.3)$$

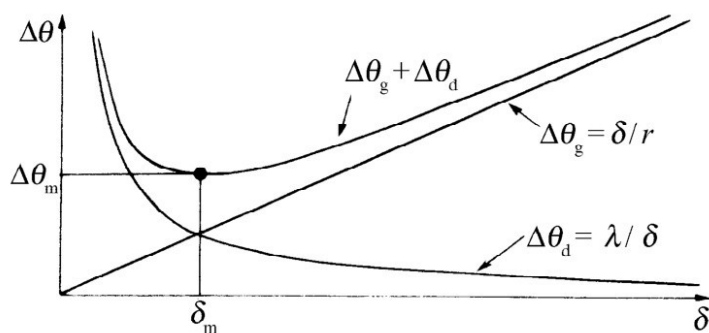


图36-9 小眼的最佳大小为 δ_m

从这个式子得出距离

$$\delta = \sqrt{\lambda r}. \quad (36.4)$$

如果我们估计 r 大约是3mm，取4000Å作为蜜蜂能够看见的光，把两者相乘并取平方根后，求出

$$\delta = (3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-7})^{1/2} \text{ m} = 3.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 35 \mu \text{ m}. \quad (36.5)$$

书本上说直径是 $30 \mu \text{m}$ ，可见符合得相当好！所以很明显，上面提出的理论确实成立，而且使我们懂得了是什么因素决定蜜蜂眼睛的大小！很容易把上面的数字代回到前面式子中去，以求出蜜蜂眼睛的角分辨率实际有多大；与我们的相比它真是太可怜了。我们可以看清楚物体，其表观大小比蜜蜂所能看清楚的要小30倍；与我们所看到的相比，蜜蜂只是看到一个不在焦点上的模糊像。虽然如此，这还是不错的，因为这是它们所可能做到的最好的了。我们也许会问，为什么蜜蜂不发展一只像我们那样好的眼睛，例如具有水晶体等等。这里有几个有趣的理由。首先是蜜蜂太小了；如果它有像我们那样的眼睛，那么若与它的整个身体相比，其开口的大小大约是 $30 \mu \text{m}$ ，这时衍射将变得如此重要，以致它无论如何什么都不能看得很清楚。所以如果眼睛太小，它就不好。其次，如果它像蜜蜂的头一样大，那么眼睛将占据蜜蜂的整个头部。复眼的妙处就在于它不占空间，而只是蜜蜂头部很薄的一层表面。所以当我们争辩说它们应当按照我们的方式去做时，我们必须牢记，它们有自己的问题！

§36-5 其他的眼睛

除了蜜蜂之外，许多其他的动物也能看见颜色。鱼、蝴蝶、鸟和爬虫都能看见颜色，但是一般认为大多数哺乳动物却不能。灵长类能够看见颜色。鸟无疑能够看见颜色，这说明了鸟的不同颜色。如果雌鸟不能看见颜色，那么带有这样光彩夺目的颜色的雄鸟就没有意思！这就是说，鸟在性别方面的“无论哪种”进化都是因为雌鸟能够看见颜色的结果。所以以后我们看到雄孔雀，并且想到它显示出一种多么灿

烂和华丽的彩色，所有颜色又是多么优美，欣赏所有这些会使我们得到多么美妙的审美感觉时，我们不应当赞美雄孔雀，而应当赞美雌孔雀的视觉敏锐性和审美感觉，因为这才是产生这种美丽景象的起因。

所有无脊椎动物只有进化很差的眼睛或复眼，但是所有脊椎动物都有与我们非常相似的眼睛，除去一个例外。当我们考虑动物中的最高级形式时，我们通常会说：“这就是我们！”但是如果我们采取偏见少一点的观点，并且限于讨论无脊椎动物，而不把我们自己包括在内，这时再问什么是最高级的无脊椎动物，那么大多数动物学家会一致同意章鱼是最高级的动物！非常有趣的是，除了它具有一个对于无脊椎动物来说发展得相当好的大脑及其反应等等以外，还独立地发展了一种与众不同的眼睛。它不是复眼或眼点——它有角膜，眼睑，虹膜和水晶体，以及两个含水状液的区域，并且在后面还有视网膜。它与脊椎动物的眼睛基本上相同！这是在进化中殊途同归的一个明显的例子，在这里大自然对同一个问题两次发现了同样的解答，只是作了少许改进。令人惊异的是，在章鱼中也发现它的视网膜是大脑的一部分，并且是以和脊椎动物同样的方式在胚胎发育过程中分离出来的，但是有趣的一个不同之点是，对于光灵敏的细胞是长在里边，而进行思考的细胞则长在它们的背后，不像我们的眼睛那样是“里外倒置”的。所以我们至少可以看到，把里面放在外面是没有特别理由的。在大自然作另一次试验的时候就把它改正过来了（参见图36-10）！世界上最大的眼睛是大乌贼的眼睛；曾经发现过它的直径可达15 in。

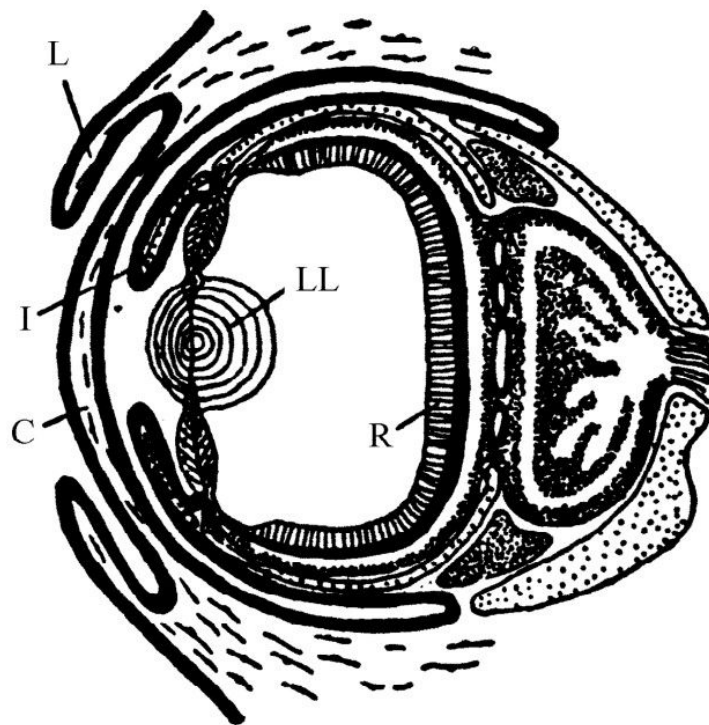
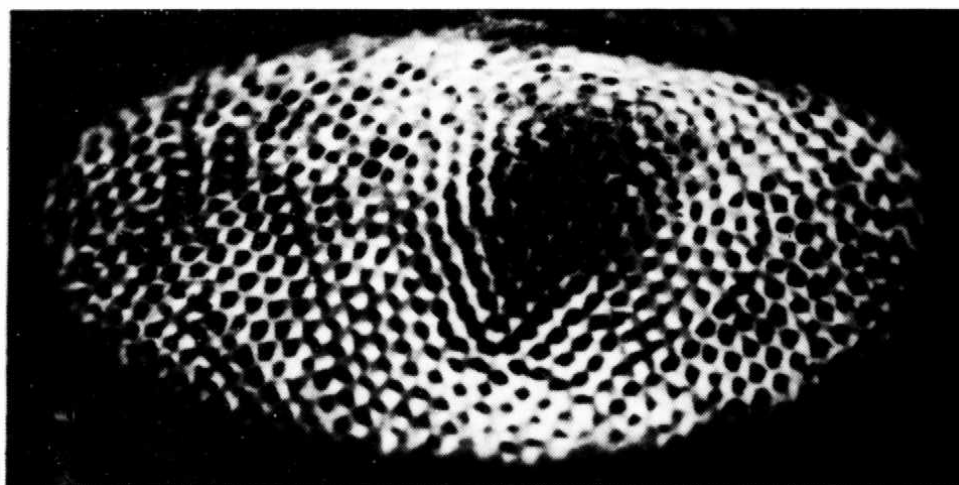


图36-10 章鱼的眼睛

§36-6 视觉的神经学

我们论题的要点之一是信息从眼睛的一部分到另一部分的相互连接。我们来讨论蟹的复眼，对于它已经做过不少的实验。第一，我们必须鉴别哪一种信息可以沿着神经传送。神经携带一种扰动，它具有电的效应且易于探测。这是一种类似于波的扰动，它顺着神经传递而在其另一端产生一个效应：神经细胞上细长的一段叫做轴突的能传送信息，如果它的一端受到刺激，则有一种叫做“峰”的电脉冲沿着它传送过去。当一个峰在神经中传送时，另一个就不可能立刻跟着而来。所有的峰大小相等，所以当物体受到较强的刺激时，我们不是得到较高的峰，而是每秒钟内得到较多的峰。峰的大小取决于神经纤维的种类。弄清楚这一点对于要知道其后将发生什么是很重要的。

图36-11 (a) 表示鲨的复眼；它只有大约一千个小眼，对于一只复眼来说，这并不算是很多的。图36-11 (b) 是这个系统的横截面。人们可以看到许多小眼，神经纤维从它们出来而进入大脑。但要注意到，即使在鲨中还是有少量的相互连接，只是与人眼相比，它们远远没有那样精致复杂，但却为我们提供了研究一个比较简单的例子的机会。



(a)



(b)

图36-11 鲨的复眼

(a) 正视图；(b) 横截面

现在我们来看看实验。这些实验是这样做的：把细的电极插进蟹的视神经中，并把光只照射到其中一个小眼上，这用一组透镜很容易做到。如果在某一时刻 t_0 把灯光开亮，并测量神经放出的电脉冲，那么我们发现在经过一个短暂的延迟后才产生一系列快速的放电，这种放电逐渐缓慢下来终于到达一个均匀的速率，如图36-12（a）所示。当灯光熄灭时，放电也就停止。非常有趣的是，当我们把放大器联接到这同一条神经纤维上，而把光照射在另一个小眼上时，结果什么也没有发生，也没有出现什么信号。

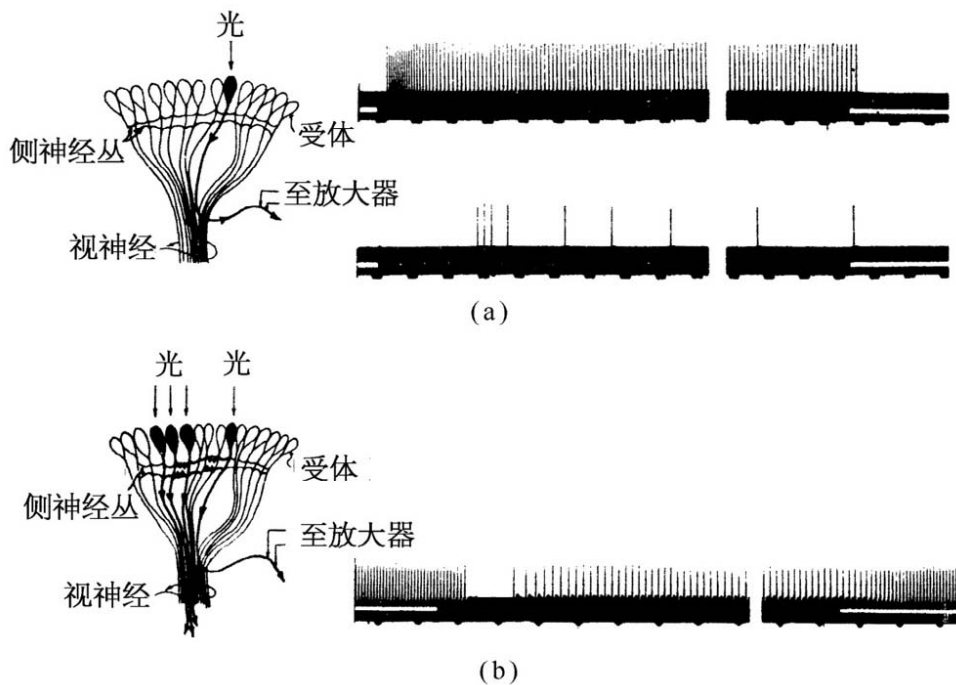


图36-12 蟹的眼睛的神经纤维对于光线的反应

我们现在来做另一个实验：把光照射在原来的那个小眼上，并得到与前同样的反应，但是如果我们现在把光同时也照射到其邻近的一个小眼上，脉冲就会中断一个短暂的时间，然后以缓慢得多的速率放出〔图36-12（b）〕。这表明一条神经内的脉冲的速率将被从另一条神经内放出的脉冲所抑制！换句话说，每一条神经纤维都携带着与其

相连的一个小眼传出的信息，但是它所携带的信息量将为来自其他小眼的信号所抑制。所以，举例来说，如果整个眼睛或多或少被均匀照射，那么来自每一个小眼的信息都将变得比较微弱，因为它受到了这么多的抑制作用。事实上这种抑制作用是叠加性的——如果我们把光照射到几个相邻的小眼上，抑制作用就非常之强。小眼靠得愈近，抑制作用也愈强，如果小眼相互之间离得足够远，则抑制作用实际上等于零。所以它是相加的，并与距离有关；这就是来自眼睛不同部分的信息在眼睛本身中组合起来的第一个例子。稍加思索，或许我们可以看出这是为了加强物体边界的反差所作的一种设计。因为假如景色的一部分是亮的，另一部分是暗的，那么在明亮区域中的小眼所放出的脉冲被邻近的所有其他的光所抑制，因而它比较弱。另一方面，在亮暗边界上的一个发生“有亮光”脉冲的小眼也受到邻近其他小眼的抑制，但是没有那么多，因为有一边没有受到光的照射；因而总的信号就比较强。其结果将是像图36-13所示的那样一条曲线。鲎将看到一个边缘加强了了的轮廓。

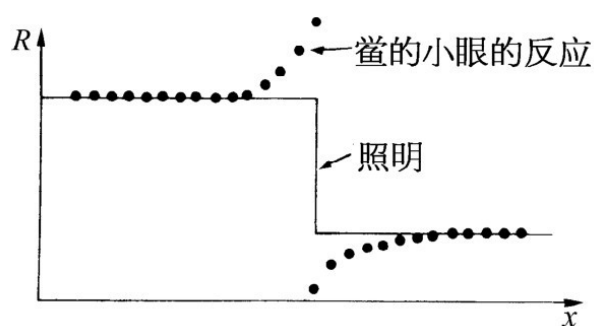


图36-13 鲎的小眼在突然改变照明的边界附近的净反应

轮廓被加强这个事实，很早就为人们所知道：事实上，这是曾被心理学家们所多次讨论过的一件值得注意的事情。要描绘一个物体，我们只要画出它的轮廓即可。我们是多么习惯于看到只有轮廓的图画啊！什么是轮廓？轮廓只是明与暗或是一种颜色与另一种颜色之间差

异的边界而已。它并不是什么确定的东西。无论你相信与否，并不是每个物体都有一条线围绕着它！实际上是没有这样一条线的。它只是我们自己心理上虚构出来像是有一条线存在。现在我们开始懂得了为什么这一条“线”是为了获得整个物体而提供的足够的线索这个道理。我们自己的眼睛大概也是以同样的方式工作的——只是复杂得多，但是十分相似。

最后，我们将简略地描述一下对青蛙所做的一项更精细、美妙和高级的研究工作。在把一根非常精细的、做得很巧妙的探针插进青蛙的视神经，对青蛙做相应的实验时，人们可以得到沿着一根特定的轴突引出的信号，而且像在鲨的情况中一样，我们发现这种信息并不仅仅与眼睛中的一个点有关，而是几个点的信息的总和。

青蛙眼睛的作用的最新描述如下：人们能够找到四种不同的视神经纤维，也就是说有四种不同的反应。这些实验不是用照亮或关掉光脉冲来做的，因为这不是青蛙所能看得见的东西。青蛙只是蹲在那里，它的眼睛一动也不动，除非旁边的睡莲的叶子前后摇摆，在这种情况下，它的眼睛就会跟着晃动，以使叶子在它眼中的像正好保持不动。青蛙并不转动它的眼睛。如果在它的视场中有什么东西，如一只小虫在移动（它必须看得见在固定背景上移动的微小物体），那么就会发现四种不同类型的能放电的神经纤维，它们的性质列在表36-1中。所谓不能消除的持续边界探测，意思是说如果我们把有边界的物体放进青蛙的视场中，那么当物体移动时，在这种特定的神经纤维中就放出大量的脉冲，但是它们会逐渐减弱下来变为持续不变的脉冲，而且只要边界存在，即使物体保持静止不动，这种脉冲仍能继续下去。如果我们把灯熄灭，脉冲就停止。如果我们再把灯开亮，那么只要边界仍在视场中，脉冲就会重新开始。所以说它们是不能消除的。

另一种纤维与此非常相似，只是如果边界是直线，它就不起作用。对它来说，必须是凸出的边界，暗的背景！为了要知道凸面移近，青蛙眼睛的视网膜中的内部联接系统需要多么复杂啊！此外，虽然这种神经纤维能使脉冲持续一段时间，但它不像前一种那样能持续那么久，而且如果把灯熄灭然后再开亮，脉冲就不会重新建立起来。这取决于凸面是否移入。青蛙的眼睛看到有凸面进来，并且记住了它在那里，但是如果我们只把灯光熄灭片刻，青蛙就把它完全忘了，并且再也看不见它。

表36-1 青蛙视神经纤维中反应的类型

类型	速率	视场角度
1. 持续的边界探测（不能消除的）	$0.2 \sim 0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	1°
2. 凸出边界的探测（能消除的）	$0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$2^\circ \sim 3^\circ$
3. 反差变化的探测	$1 \sim 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$7^\circ \sim 10^\circ$
4. 变暗探测	高到 $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	大到 15°
5. 黑暗探测	?	非常大

另一个例子是反差变化的探测。如果有一个边界正在移入或移出，就会在这种神经纤维里产生脉冲，但是如果物体静止不动，则就什么脉冲都没有。

此外，还有一种变暗探测器。如果光的强度下降，它就产生脉冲，但是如果光的强度一直保持较低或者较高，脉冲就停止；它只在光线变暗时起作用。

最后，还有一些神经纤维，它们是暗探测器——这是一件最令人惊异的事——并且任何时刻都在激发！如果我们使光增强，它们激发得慢一些，但仍然随时都在激发。如果我们使光减弱，它们激发得较快，并且同样也随时都在激发。在黑暗中，它们则激发得像发狂一样，好像永远在说“好暗呀！”“好暗呀！”“好暗呀！”

现在看来要把这些反应加以分类似乎比较复杂，以致我们也许觉得这些惊奇的实验是否会被解释错了。但非常有趣的是，在青蛙的解剖学中同样的这些分类也是区别得非常清楚的！在这些反应被分类之后，通过其他的测量（这在以后对于这种分类是重要的）发现在不同纤维上信号的传送速率是不同的，所以这是另一种可以核实我们找到的是哪一种纤维的独立的方法。

另一个有趣的问题是：一条特定的纤维其作用所涉及的区域有多大？答案是对不同类型的纤维是不同的。

图36-14表示所谓青蛙的大脑覆盖层的表面，这里是神经纤维从视神经始进入大脑的地方。从视神经来的所有神经纤维在大脑覆盖层的不同层中连接在一起。这种层状结构和视网膜很相似；这是我们所以知道大脑和视网膜非常相似的部分原因。现在我们用一个电极依次向下插到各层中去，从而可以找出哪一种视神经终止在哪个地方。我们所得到的一个美妙而惊人的结果是，不同种类的纤维终止在不同的层中！第一种纤维终止于第1层，第二种纤维终止于第2层，第三种和第五种纤维终止于同一层，第四种纤维终止于最深的层（这符合得多好啊！它们几乎是按正确的次序编号的！不，这就是为什么人们要按这个次序编号的原因，第一篇论文却不是按这个次序编号的）。



图36-14 青蛙的大脑覆盖层

我们可以简略地把刚才所学到的东西总结如下：人的眼睛里大概有三种色素。可能有许多不同种类的感受细胞，其中各以不同比例含有这三种色素；但是有许多交叉联接可以通过神经系统中的增强和叠加来进行相加或相减。所以在我们真正懂得色视觉之前，必须先懂得什么是最后的感觉。目前这还是一个尚未解决问题，但是用微电极等等方法进行的那些研究，或许最终能为我们提供更多有关如何看见颜色的知识。

参考文献

Committee on Colorimetry, Optical Society of America. *The Science of Color*. Thomas Y. Crowell Company, New York, 1953.

“Mechanisms of Vision”, 2nd Supplement to *Journal of General Physiology*, Vol. 43, No. 6, Part 2, July 1960, Rockefeller Institute Press.

Specific Articles:

DeRobertis, E., “Some Observations on the Ultrastructure and Morphogenesis of Photoreceptors”, pp. 1-15.

Hurvich, L.M. and D. Jameson, “Perceived Color, Induction Effects and Opponent-Response Mechanisms”, pp. 63-80.

Rosenblith, W.A., ed., *Sensory Communication*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Mass., 1961.

“Sight, Sense of”, *Encyclopedia Britannica*, Vol. 20, 1957, pp. 628-635.

[1] 这些颜色与旋转的速率和照明的亮度有关，同时也多少取决于谁在看它们以及他们对它们的注视的程度。

[2] 人眼对于光的偏振也有一点点敏感性，而且也能学会辨别太阳的方向！这里所涉及的一个现象叫做海丁格刷（Haidinger's brush）：当一个人用偏振镜注视着宽广的无特征的苍穹时，在视场的中央可以看到一个微弱略带黄色的沙漏状图案。如果不用偏振镜，而把他的头绕着视轴前后转动，这时在蓝色的天空中也能看到这一现象。

[3] 在做完这一讲演以后所获得的证据表明，这是眼睛直接感觉到的。

第37章 量子行为

§37-1 原子力学

在前面几章中，我们讨论了一些基本概念，这些概念对理解光——或一般说电磁辐射——的大多数重要现象是必须的（我们将少数几个特殊的论题，明确地说即光密介质折射率的理论和全反射的理论，留到下一年去讲）。我们所讨论的这些内容称作电磁波的“经典理论”。这个理论非常恰当地描述了自然界的许多现象。当时我们还不必去为光的能量总是以颗粒即“光子”的形式出现这一事实而操心。

我们打算研究的下一个论题是包含着大量物质的物体的性质，比方说，它们的力学与热学性质问题。在讨论这些性质时，我们将发现，“经典”（或者旧的）理论几乎立即失效，因为物质实际上是由原子大小的微粒所构成的。然而，我们要处理的仍然只是其中的经典部分，因为这是我们能够应用所学过的经典力学来理解的仅有部分。但是我们不会获得很大的成功。我们将发现，与讨论光不同，讨论物质时很快就会遇到困难。当然，我们也可以一直回避原子效应。不过在这里我们却要插进一段关于物质量子性质的基本观念，即原子物理的量子观念的简短叙述，以便对所略去的是一些什么有一个概念。因为我们必须略去一些不可避免地要接触到的重要题材。

所以，我们现在就来简单介绍一下量子力学，但真正深入的讨论只能留待以后再进行。

“量子力学”详细描述物质的行为，特别是发生在原子尺度范围内的事件。在极小尺度下的事物的行为与我们有着直接经验的任何事物都不相同。它们既不像波动，又不像粒子，也不像云雾，或弹子球，或悬挂在弹簧上的重物，总之不像我们曾经见过的任何东西。

牛顿曾认为，光是由微粒构成的，但是，正如我们已经知道的那样，当时发现光的行为像一种波动。然而，后来（在20世纪初叶）人们发现，光的行为有时确实又像粒子。又比如，在历史上，电子起先被认为像粒子，后来发现它在许多方面的性质像波。所以实际上它表现得两者都不像。现在我们已放弃了这些说法，我们干脆说：“它两者都不像。”

然而，有一点是幸运的：电子的行为恰好与光相似。原子客体（电子、质子、中子、光子等等）的量子行为都是相同的，它们都是“粒子波”或者随便什么你愿意称呼的名称。所以，我们所学的关于电子（我们将用它作为例子）的性质也可应用到所有的“粒子”，包括光子。

在20世纪的前25年中，人们逐渐积累了有关原子与其他小尺度粒子行为的知识，得以知道极小物体是如何活动的一些线索，由此也引起了更多的混乱，到1926~1927年间，薛定谔、海森伯与波恩终于解决了这些问题，他们最后对小尺度物质的行为作出了协调一致的描述。在这一章中我们将开始研究这种描述的主要特点。

因为原子的行为与我们的日常经验不同，所以很难令人习惯，而且对每个人——不管是新手，还是有经验的物理学家——来说都显得奇特而神秘。甚至专家们也不能以他们所希望的方式去理解原子的行为，而且这是完全有道理的，因为一切人类的直接经验和所有的人类

的直觉都只适用于大的物体，我们知道大物体的行为将是如何，但是在小尺度下事物的行为却并非如此。所以我们必须用一种抽象的或想象的方式来学习它，而不是把它与我们的直接经验联系起来。

在本章中，我们将直接讨论以最奇特的方式出现的神秘行为的基本特征。我们选择用来考察的一种现象不可能以任何经典方式来解释——绝对不可能——但它却包含了量子力学的要点。事实上，它包含的只是奥秘，从“解释”它是如何起作用的这个意义上来说，我们还不能解释这个奥秘。我们将告诉你们，它是怎样起作用的。在告诉你它是怎样起作用的同时，我们将把所有量子力学的基本特性都告诉你。

§37-2 子弹实验

为了试图理解电子的量子行为，我们将在一个特制的实验装置中，把它们的行为和我们较为熟悉的子弹那样的粒子的行为以及如水波那样的波的行为作一比较和对照。首先考虑子弹在图37-1所示的实验装置中表现的行为。我们有一挺机枪射出一连串子弹，但它不是一挺很好的机枪，因为它发射的子弹（无规则地）沿着相当大的角度散开，如图所示。在机枪的前方有一堵用铁甲制成的板墙，墙上开有两个孔，其大小正好能让一颗子弹穿过，墙的后面是一道后障（比如说一道厚木墙），它能“吸收”打上去的子弹。在后障前面，有一个称为子弹“检测器”的物体，它可以是一个装着沙子的箱子，任何进入检测器的子弹就被留在那里聚集起来。需要时可以出空箱子，清点射到箱子里面的子弹数。检测器可以（沿我们称为 x 的方向）上下移动。利用这个装置，我们可以通过实验找出下列问题的答案：“一颗子弹通过墙上的孔后到达后障上离中心的距离为 x 处的概率是多少？”首先，你

们应当认识到我们所谈的应该是概率，因为不可能明确地说出任何一颗子弹会打到什么地方。一颗碰巧打到孔上的子弹可能从孔的边缘弹开，最终打到不知什么地方。所谓概率，我们指的是子弹到达检测器的机会，这可以用以下方式来量度，数一下在一定时间内到达检测器的子弹数，然后算出这个数与这段时间内打到后障上的子弹总数的比值。或者，如果在测量时机枪在单位时间内始终发射同样数量的子弹，那么我们所要知道的概率就正比于在某个标准时间间隔内到达检测器的子弹数。

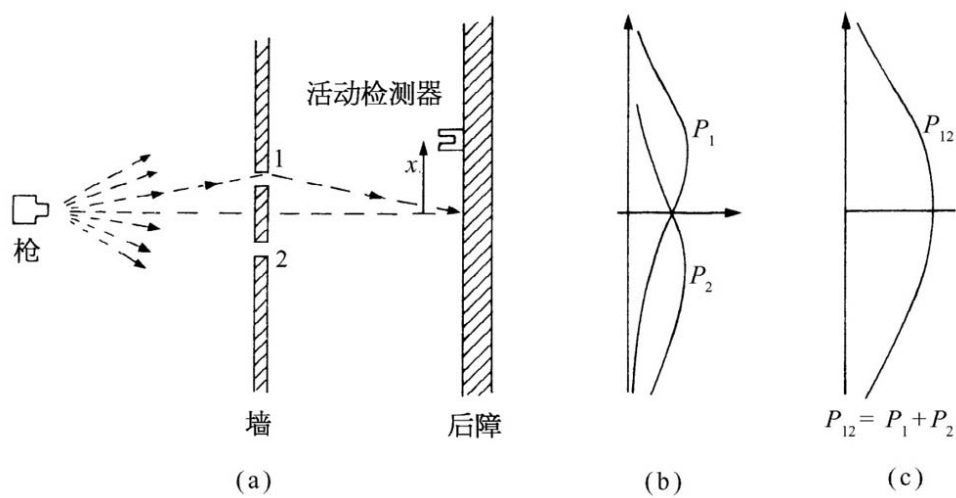


图 37-1 子弹的干涉实验

眼下，我们愿意设想一个多少有点理想化的实验，其中子弹不是真正的子弹，而是不会裂开的子弹，即它们不会分裂成两半。在实验中，我们发现子弹总是整颗整颗地到达，我们在检测器中找到的总是一颗一颗完整的子弹。如果机枪射击的射率十分低，那么我们发现在任何给定时刻，要么没有任何东西到达，要么有一颗，并且只有一颗——不折不扣的一颗——子弹打到后障上，而且，整颗的大小也必定与机枪射击的射率无关。我们可以说：“子弹总是以完全相同的颗粒状到达。”在检测器中测得的就是整颗子弹到达的概率。我们测量的是概

率作为 x 的函数。用这样的仪器测得的结果画在图37-1(c)上(我们还不曾做过这种实验,所以这个结果实际上是想象的而已),在图上,向右的水平轴表示概率的大小,垂直轴表示 x ,这样 x 的坐标就对应于检测器的位置。我们称图示的概率为 P_{12} ,因为子弹可能通过孔1,也可能通过孔2。你们不会感到奇怪, P_{12} 的值在接近图中心时较大,而在 x 很大时则变小。然而,你们可能感到惊奇的是:为什么 $x=0$ 的地方 P_{12} 具有极大值。假如我们先遮住孔2作一次实验,再遮住孔1作一次实验的话,就可以理解这一点。当孔2被遮住时,子弹只能通过孔1,我们就得到(b)图上标有 P_1 的曲线。正如你们会预料的那样, P_1 的极大值出现在与枪口和孔1在一条直线上的 x 处。当孔1关闭时,我们得到图中所画出的对称的曲线 P_2 。 P_2 是通过孔2的子弹的概率分布。比较图37-1的(b)与(c),我们发现一个重要的结果

$$P_{12} = P_1 + P_2. \quad (37.1)$$

概率正好相加。两个孔都开放时的效果是每个孔单独开放时的效果之和。我们称这个结果为“无干涉”的观测,其理由不久就会明白。关于子弹我们就讲这些,它们整颗地出现,其到达的概率不显示干涉现象。

§37-3 波的实验

现在我们要来考虑一个水波实验。实验的仪器如图37-2所示。这里有一个浅水槽,一个标明为“波源”的小物体由马达带动作上下振动,产生圆形的波。

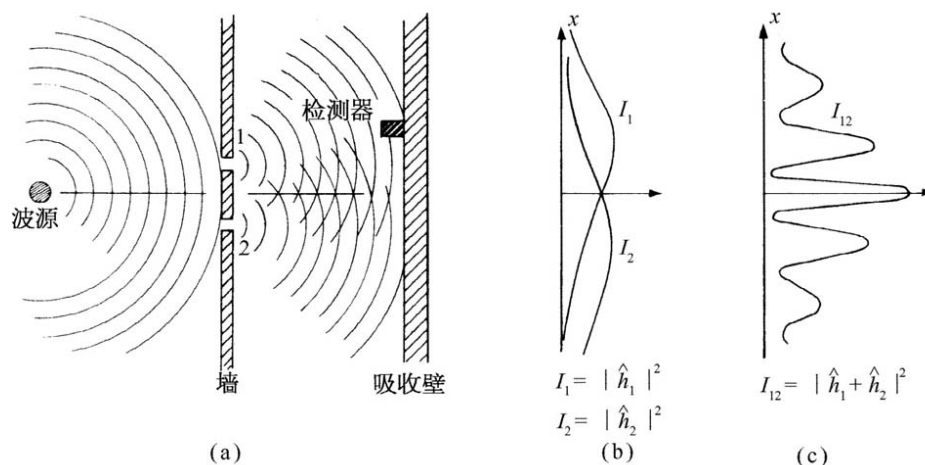


图 37-2 水波的干涉实验

在波源的后面也有一堵带两个孔的墙，墙以外又是一堵墙。为了简单起见，设这堵墙是一个“吸收器”，因而波到达这里后不会反射。吸收器可以用逐渐倾斜的“沙滩”做成，在沙滩前，放置一个可以沿 x 方向上下移动的检测器，和先前一样。不过现在这个检测器是一个测量波动的“强度”的装置。你们可以设想一种能测量波动高度的小玩意儿，但其刻度则定标成与实际高度的平方成比例，这样读数正比于波的强度。于是，我们的检测器的读数正比于波携带的能量，或者更确切地说，正比于能量被带至检测器的速率。

在我们这个波动实验中，第一件值得注意的事是强度的大小可以是任意值，如果波源正好振动得很弱，那么在检测器处就只有一点点波动。当波源的振动较强时，在检测器处的强度就较大。波的强度可以为任意值。我们不会说在波的强度上能显示出任何“颗粒性”。

现在，我们来测量不同 x 处的波的强度（保持波源一直以同样的方式振动）。我们得到图37-2（c）上标有 I_{12} 的有趣的曲线。

在我们研究电磁波的干涉时，已经知道怎么会产生这种图样。在现在情况下，我们将观察到原始波在小孔处发生衍射，新的圆形波从每一个小孔向外扩展。如果我们一次遮住一个小孔，并且测量吸收器处的强度分布，则得到如图37-2（b）所示的相当简单的强度曲线。 I_1 是来自孔1的波的强度（在孔2被遮住时测得）， I_2 是来自孔2的波的强度（在孔1被遮住时测得）。

当两个小孔都开放时所观察到的强度 I_{12} 显然不是 I_1 与 I_2 之和。我们说，两个波有“干涉”。在某些位置上（在那里曲线 I_{12} 有极大值）两列波“同相”，其波峰相加就得到一个大的幅度，因而得到大的强度。我们说，在这些地方，两列波之间产生“相长干涉”。凡是从检测器到一个小孔之间的距离与到另一个小孔的距离之差为波长整数倍的那些地方，都会产生这种相长干涉。

在两列波抵达检测器时相位差为 π （称为“反相”）的那些地方，合成波的幅度是两列波的波幅之差。这两列波发生“相消干涉”，因而得到的波的强度较低。我们预料这种低的强度值出现在检测器到小孔1的距离与到小孔2的距离之差为半波长的奇数倍的那些地方。图37-2中 I_{12} 的低值对应于两列波相消干涉的那些位置。

你们一定会记得 I_1 ， I_2 与 I_{12} 之间的定量关系可以用以下方式来表示：来自孔1的水波在检测器处的高度瞬时值可以写成 $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$ （的实部），这里“振幅” $\hat{h}_1$ 一般来说是复数。波动强度则正比于方均高度，或者利用复数写出时，则正比于 $|\hat{h}_1|^2$ 。类似地，对来自孔2的波，高度为 $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$ ，强度正比于 $|\hat{h}_2|^2$ 。当两个孔都开放时，由两列

波的高度相加得到总高度 $(\hat{h}_1 + \hat{h}_2)e^{i\omega t}$ 以及强度 $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ 。就我们目前的要求来说，可略去比例常数，于是对干涉波适用的关系就是

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2, I_2 = |\hat{h}_2|^2, I_{12} = |\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2. \quad (37.2)$$

你们将会注意到，这个结果与在子弹的情况下所得到的结果（式 37.1）完全不同。如果将 $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ 展开，就可以看到

$$|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2 = |\hat{h}_1|^2 + |\hat{h}_2|^2 + 2|\hat{h}_1||\hat{h}_2|\cos\delta. \quad (37.3)$$

这里 δ 是 $\hat{h}_1$ 与 $\hat{h}_2$ 之间的相位差。用强度来表示时，我们可以写成

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta. \quad (37.4)$$

式（37.4）中最后一项是“干涉项”。关于水波就讲这一些。波的强度可以取任意值，而且显示出干涉现象。

§37-4 电子的实验

现在我们想象一个电子的类似实验，如图37-3所示。我们制造了一把电子枪，它包括一根用电流加热的钨丝，外面套有一个开有孔的金属盒，如果钨丝相对金属盒处于负电位，由钨丝发射出的电子将被加速飞往盒壁，其中有一些会穿过盒上的小孔。所有从电子枪出来的电子都带有（差不多）相同的能量。在枪的前方也有一堵墙（就是一块薄金属板），墙上也有两个孔。这道墙的后面有另一块作为“后障”的板。在后障的前面我们放置一个可移动的检测器，它可以是盖革计数器，或者更好一些，是一台与扩音器相连的电子倍增器。

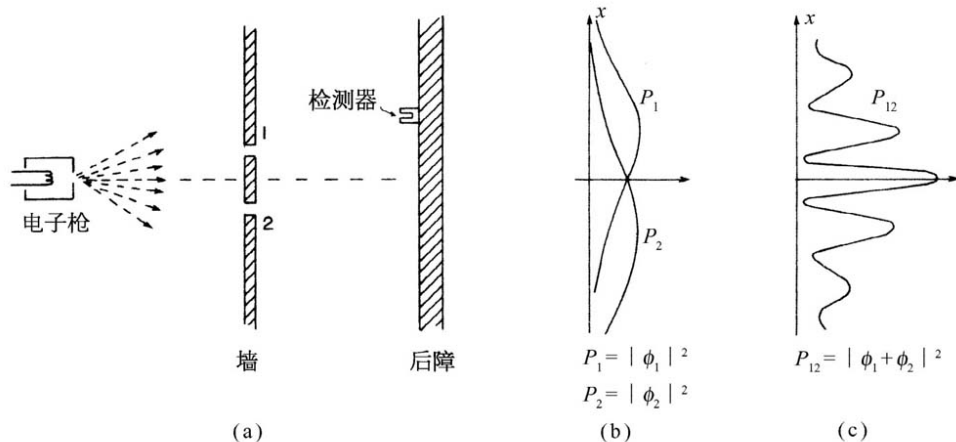


图 37-3 电子的干涉实验

我们应当立即告诉你最好不要试着去做这样一个实验（虽然你可能已做过我们所描述的前面两个实验）。这个实验从未以这种方式做过。问题在于，为了显示我们所感兴趣的效应，仪器的尺寸必须小到制造不出来的程度。我们要做的是个“理想实验”，之所以要选它，是因为它易于想象。我们知道这个实验将会得到怎样的结果，因为有许多其他实验已经做过，在那些实验中，已选用了适当的尺度与比例来显示我们将要描写的效应。

在这个电子的实验中，我们注意到的第一件事是听到检测器（即扩音器）发生明显的“咔嗒”声。所有的“咔嗒”声全都相同，绝没有一半的“咔嗒”声。

我们还会注意到“咔嗒”声的出现很不规则。比如像：咔嗒……咔嗒-咔嗒……咔嗒……咔嗒……咔嗒-咔嗒……咔嗒，等等，无疑，这就像人们听到盖革计数器工作时的声音一样。假如我们在足够长的时间内计数，比如说在许多分钟内听到的咔嗒声的数目，然后再在另一个相等的时间间隔内也进行一次计数，我们发现两个结果非常接近。

所以，我们可以谈论“咔嗒”声出现的平均速率（平均每分钟多少、多少次“咔嗒”声）。

在我们上下移动检测器时，声响出现的速率有快有慢，但是每次“咔嗒”声的大小响度总是相同的。假如我们降低枪内钨丝的温度，“咔嗒”声的速率就会减慢，但是每一声“咔嗒”仍然是相同的。我们还会注意到，如果在后障上分别放置两个检测器，那么这一个或那一个将会“咔嗒”发声，但是决不会两者同时发声（除非有时两次“咔嗒”声在时间上非常靠近，以致我们的耳朵可能辨别不出它们是分开的响声）。因此，我们得出结论，任何到达后障的东西总是呈“颗粒”的形式，所有的“颗粒”都是同样大小：只有“整颗”到达，并且每一次只有一颗到达后障。我们将说：“电子总是以完全相同的颗粒到达。”

与子弹的实验一样，现在我们可以从实验上找出下列问题的答案：“一个电子‘颗粒’到达后障上离中心的距离为不同的 x 处的相对概率是多少？”像前面一样，在保持电子枪稳定工作的情况下，我们可以从观察“咔嗒”声出现的速率来得出相对概率。颗粒到达某个 x 位置的概率正比于该处的咔嗒声的平均速率。

我们这个实验的结果就是图37-3（c）所画出的标有 P_{12} 的一条有趣的曲线。不错！电子的行为就是这样。

§37-5 电子波的干涉

现在，我们来分析一下图37-3的曲线，看看是否能够理解电子的行为。我们要说的第一件事是，由于它们以整颗的形式出现，每一颗

粒（亦可称为一个电子）或者通过孔1，或者通过孔2。我们以“命题”的形式写下这一点：

命题A： 每一个电子不是 通过孔1就是 通过孔2。

假设命题A后，所有到达后障的电子就可分为两类：（1）通过孔1的电子；（2）通过孔2的电子。这样，我们所观察到的曲线必定是通过孔1的电子所产生的效应与通过孔2的电子所产生的效应之和。我们用实验来检验这个想法。首先，我们将对通过孔1的电子作一次测量。把孔2遮住，数出检测器的“咔嗒”声，由响声出现的速率，我们得到 P_1 。测量的结果如图37-3（b）中标有 P_1 的曲线所示。这个结果看来是完全合乎情理的。以类似的方式，可以测量通过孔2的电子概率分布 P_2 。这个测量的结果也画在图上。

显然，当两个孔都打开时测得的结果 P_{12} 并不是每个孔单独开放时的概率 P_1 与 P_2 之和。与水波实验类似，我们可以说：“这里存在着干涉”。

对于电子

$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (37.5)$$

怎么会发生这样的干涉呢？或许我们应当说：“嗯，这大概意味着：电子颗粒要么经过小孔1，要么经过小孔2这一命题是不正确的，不然的话，概率就应当相加。或许它们以一种更复杂的方式运动，它们分裂为两半，然后……”但是，不对！不可能如此。它们总是整颗地到达……，“那么，或许其中有一些电子经过孔1后又转回到孔2，然后又转过几圈，或者按某个其他的复杂路径……于是，遮住孔2后，我们

就改变了从孔1开始出来的电子最后落到后障上某处的机会.....”但是，请注意！在某些点上，当两个孔都开放时，只有很少电子到达，但是如果关闭一个孔时，则该处接收到许多电子，所以关闭一个孔增加了通过另一个孔的数目。然而，必须注意在图形的中心， P_{12} 要比 $P_1 + P_2$ 还大两倍以上。这又像是关闭一个孔会减少通过另一个孔的电子数。看来用电子以复杂方式运动这一假设是很难解释上述两种效应的。

所有这些都是极其神秘的。你考虑得越多，就越会感到神秘。人们曾经提出许多设想，试图用单个电子以复杂方式绕行通过小孔来解释 P_{12} 曲线，但是没有一个人得到成功，没有一个人能由 P_1 与 P_2 来得到 P_{12} 的正确曲线。

然而，足以令人惊奇的是，将 P_1 和 P_2 与 P_{12} 联系起来的数学是极其简单的。因为 P_{12} 正好像图37-2的曲线 I_{12} ，而那条曲线的得来是简单的。在后障上发生的情况可以用两个称为 $\hat{\phi}_1$ 和 $\hat{\phi}_2$ 的复数（当然它们是 x 的函数）来描述。 $\hat{\phi}_1$ 的绝对值平方给出了孔1单独开放时的效应。也就是说， $P_1 = |\hat{\phi}_1|^2$ 。同样孔2单独开放时的效应由 $\hat{\phi}_2$ 给出，即 $P_2 = |\hat{\phi}_2|^2$ 。两个孔的联合效应正是 $P_{12} = |\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2|^2$ 。这里的数学与水波的情形是一样的（很难看出从电子沿着某些奇特的轨道来回穿过洞孔这种复杂的运动中能得出如此简单的结果）！

我们的结论是：电子以颗粒的形式到达，像粒子一样，这些颗粒到达的概率分布则像波的强度的分布。正是从这个意义上来说，电子的行为“有时像粒子，有时像波”。

顺便指出，在处理经典波动时，我们定义强度为波幅平方对时间的平均值，并且使用复数作为简化分析的数学技巧。但是在量子力学中结果发现振幅必须用复数表示，仅有实部是不行的。目前，这是一个技术上的问题，因为公式看上去完全一样。

既然电子穿过两个孔到达后障的概率分布如此简单〔虽然它并不等于 $(P_1 + P_2)$ 〕，要说的一切实际上就都在这里了。但是在自然界以这种方式活动的事实中，却包括了大量的微妙之处。我们现在打算向你们说明其中的一些微妙所在。首先，到达某个特定点的电子数目并不等于通过孔1的数目加上通过孔2的数目，与从命题A本应得出的推论相反。所以，毋庸置疑，我们应该作出结论说，命题A是不正确的。电子不是通过孔1就是通过孔2，这一点并不正确。但是这个结论可以用其他实验来检验。

§37-6 追踪电子

我们现在来考虑如下的一个实验。在前述的电子仪器中我们加上一个很强的光源，光源放置在墙的后面并在两个小孔之间，如图37-4所示。我们知道，电荷能散射光，这样，当电子在到达检测器的途中通过光时，不论它是怎样通过的，都会将一些光散射到我们的眼睛中，因而我们可以看见电子在哪里飞过。比方说，假如电子采取经过孔2的路径，如图37-4所示，我们应当看到来自图中标有A的位置附近的闪光。如果电子经过孔1，我们可以预料在上面的小孔附近将看到闪光。要是发生这样的情形，因为电子分为两半，我们同时在两个位置上见到闪光多好……让我们做一下实验吧！

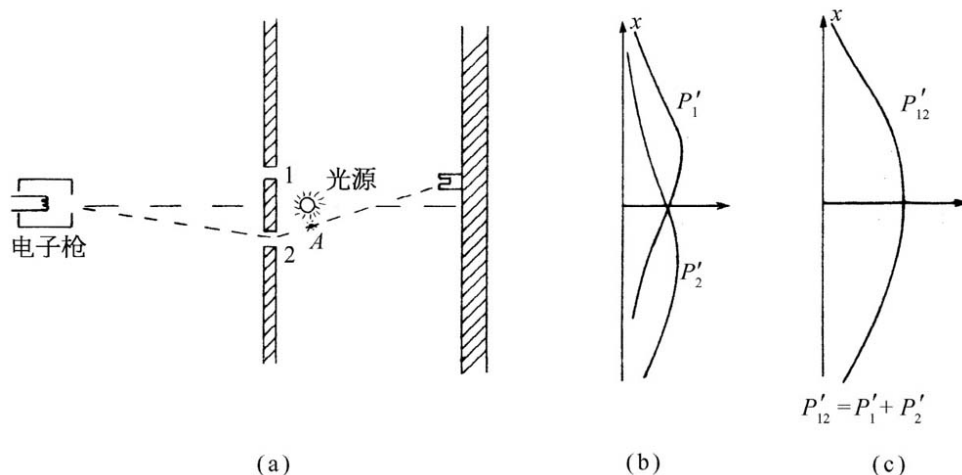


图 37-4 另一个电子的实验

我们所看到的情况是：每当 我们由电子检测器（后障处的）听到一声“咔嗒”时，我们也见到 闪光——不是 在靠近孔1处就是 在靠近孔2处的闪光。但是从未 同时在两处见到！无论将检测器放到哪里，我们都观察到同样的结果。由这样的观察可以断言，在查看电子时，我们发现电子不是通过这个孔，就是通过另一个孔。在实验上，命题A必然是正确的。

那么，在我们否定 命题A的论证中，有什么不对呢？为什么 P_{12} 不 正好等于 $(P_1 + P_2)$ ？我们还是回到实验上去！让我们盯住电子，看看它们究竟做些什么。对于检测器的每一个位置（ x 坐标），我们都数出到达的电子数，同时也 通过对闪光的观察记录下它们经过的是哪一个孔。我们可以这样来记录：每当我们听到一声“咔嗒”时，如果在孔1附近见到闪光，那么就在第一栏中作一个记录，如果在孔2附近见到闪光，那么就在第二栏中作一个记录。所有抵达的电子都可记录在这两类之一中，即经过孔1的一类和经过孔2的一类。由第一栏的记录我们可以得到电子经由孔1到达检测器的概率 P'_1 ；而由第二栏的记录则可得到电子经由孔2到达检测器的概率 P'_2 。如果现在对许多

x 的值重复这样的测量，我们就得到图37-4 (b) 所画的 P'_1 与 P'_2 的曲线。

你们看，这里没有什么过分令人惊奇的事。所得到的 P'_1 与我们先前遮住孔2而得到的 P_1 完全相似； P'_2 则与遮住孔1所得到的 P_2 相似。所以，像通过两个小孔这样的复杂情况是不存在的。当我们跟踪电子时，电子就像我们所预料的那样通过小孔。无论孔2是否关闭，我们所看到的通过孔1的电子分布都相同。

但是别忙！现在，总概率，即电子以任何途径到达检测器的概率又是多少呢？有关的资料早就有了。我们现在假想从未看到过闪光，而把先前分成两栏的检测器的“咔嗒”声次数归并在一起。我们只需把这些数加起来。对于电子经过任何一个孔到达后障的总概率，我们确实得出 $P'_{12} = P'_1 + P'_2$ 。这就是说，虽然我们成功地观察到电子所经过的是哪个孔，但我们不再得到原来的干涉曲线 P_{12} ，而是新的、不显示干涉现象的 P'_{12} 曲线！如果我们将灯熄灭的话， P_{12} 又出现了。

我们必须推断说：当我们观察电子时，它们在屏上的分布与我们不观察电子时的分布不同。也许这是由于打开光源而把事情搞乱了？想必是由于电子本身非常微妙，因而光波受到电子散射时给电子一个反冲，因而改变了它们的运动。我们知道，光的电场作用在电荷上时会对电荷施加一个作用力。所以也许我们应当预期运动要发生改变。不管怎样，光对电子有很大的影响。在试图“跟踪”电子时，我们改变了它的运动。也就是说，当电子散射光子时所受到的反冲足以改变其运动，以致原来它可能跑到 P_{12} 为极大值的那些位置上，现在却反而

跑到 P_{12} 为极小值的那些位置上；这就是为什么我们不再看到波状干涉效应的原因。

你们或许会想：“别用这么强的光源！使亮度降低一些！光波变弱了，对电子的扰动就不会那么大。无疑，若使光越来越暗淡的话，最后光波一定会弱得使它的影响可以忽略”。好，让我们来试一下。我们观察到的第一件事是电子经过时所散射的闪光并没有变弱。它总是同样大小的闪光。使灯光暗淡后唯一发生的事情是，有时，我们听到检测器发生一下“咔嗒”声，但根本看不到闪光，电子在没有“被看到”的情况下跑了过去。我们所观察到的是：光的行为也像电子，我们已知它是波状的，但是现在发现它也是“颗粒状”的。它总是以整颗的形式（我们称为“光子”）到达或者被散射。当我们降低光源的强度时，我们并没有改变光子的大小，而只是改变了发射它们的速率。这就解释了为什么在灯光暗淡时有些电子没有被“看到”就跑了过去；当电子经过时，周围正好没有光子。

假如真的是每当我们“见到”电子，我们就看到同样大小的闪光，那么所看到的总是受到扰动的电子，这件事使人多少有点泄气。不管怎样，我们用暗的灯光来做一下实验。现在，只要听到检测器中一声“咔嗒”，我们就在三栏中的某一栏记下一次：栏（1）记的是在孔1旁看到的电子；栏（2）记的是孔2旁看到的电子，根本没有看到电子时，则记在栏（3）中。当我们把数据整理出来（计算概率）后可以发现这些结果：“在孔1旁看到”的电子具有类似于 P'_1 的分布；“在孔2旁看到”的电子具有类似于 P'_2 的分布（所以“在孔1或者孔2旁看到”的电子具有类似于 P'_{12} 的分布）；而那些“根本没有看到”的电子则具有类似于图37-3的 P_{12} 那样的“波状”分布！假如电子没有被看到，我们就会发现干涉现象！

这个情形是可以理解的，当我们没有看到电子时，就没有光子扰动它，而当我们看到它时，它已经受到了光子的扰动。由于光子产生的都是同样大小的效应，所以扰动的程度也总是相同的，而且光子被散射所引起的效应足以抹掉任何干涉现象。

难道没有某种可以不扰动电子而又使我们能看到它们的方法吗？在前面的一章中，我们已经知道，“光子”携带的动量反比于它的波长（ $p = h / \lambda$ ）。无疑当光子被散射到我们的眼中时，它给予电子的反冲取决于光子所携带的动量。对！如果我们只想略微扰动一下电子的话，那么应当降低的不是光的强度，而是它的频率（这与增加波长一样）。我们使用比较红的光，甚至用红外光或无线电波（如雷达），并且借助于某种能“看到”这些较长波长的仪器来“观察”电子的行径。如果我们使用“较柔和”的光，那么或许可以避免对电子扰动太大。

现在我们用波长较长的波来做实验。我们将利用波长越来越长的光重复进行实验。起先，看不到任何变化，结果是一样的。接着，可怕的事情发生了，你们会记得，当我们讨论显微镜时曾指出过，由于光的波动性质，对两个小点彼此可以靠得多近而仍可视为两个分离的点存在着一个极限距离。这个极限距离的大小与光波波长的数量级相同。所以如果我们使波长大于两个小孔之间的距离，我们看到在光被电子散射时产生一个很大的模糊不清的闪光。这样就不再能说出电子通过的是哪一个孔了！我们只知道它跑到某处去！正是对这种波长的光，我们发现电子所受到的反冲已小到使 P'_{12} 看来开始像 P_{12} ——即开始出现某种干涉的效应。只有在波长远大于两个小孔之间的距离时（这时我们完全不可能说出电子跑向何处），光所引起的扰动才充分地减小，因而我们又得到图37-3所示的曲线 P_{12} 。

在我们的实验中，我们发现不可能这样安排光源，使人们既可以说出电子穿过哪个小孔，同时又不扰动分布图样。海森伯提出，只有认为我们的实验能力有某种前所未知的基本局限性，那么当时发现的新的自然规律才能一致。他提出了作为普遍原则的不确定性原理，在我们的实验中，它可以这样表述：“要设计出一种仪器来确定电子经过哪一个小孔，同时又不使电子受到足以破坏其干涉图样的扰动是不可能的”。如果一架仪器能够确定电子穿过哪一个小孔的话，它就不可能精致得使图样不受到实质性的扰动。没有一个人曾找出（或者甚至想出）一条绕过不确定性原理的途径。所以我们必须假设它描述的是自然界的一个基本特征。

我们现在用来描写原子（事实上描写所有物质）的量子力学的全部理论都取决于不确定性原理的正确性。由于量子力学是这样一种成功的理论，我们对于不确定性原理的信任也就加深了。但是如果一旦发现了一种能够“推翻”不确定性原理的方法，量子力学就会得出自相矛盾的结果，因此也就不再是自然界的有效的理论，而应予以抛弃。

“很好”，你们会说：“那么命题A呢？电子要么通过小孔1，要么通过小孔2这一点是正确的，还是不正确的呢？”唯一可能作出的回答是，我们从实验上发现，为了使自己不致陷于自相矛盾，我们必须按一种特殊方式思考问题。我们所必须说的（为了避免作出错误的预测）是：如果人们观察小孔，或者更确切地说，如果人们有一架仪器能够确定电子究竟通过孔1还是孔2的话，那么他们就能够说出电子或者穿过孔1，或者穿过孔2。但是，当人们不试图说出电子的行径，当实验中对电子不作任何扰动时，那么他们可以不说电子或者通过孔1，或者通过孔2。如果某个人这么说了，并且开始由此作出任何推论

的话，他就会在分析中造成错误。这是一条逻辑钢丝，假如我们希望成功地描写自然的话，我们就必须走这一条钢丝。

如果所有物质（以及电子）的运动都必须用波来描写，那么我们第一个实验中的子弹怎样呢？为什么在那里我们看不到干涉图样？结果表明：对于子弹来说，其波长是如此之短，因而干涉图样变得非常精细。事实上，图样精细到人们用任何有限尺寸的检测器都无法区别出它的分立的极大值与极小值。我们所看到的只是一种平均，那就是经典曲线。在图37-5中，我们试图示意地表明对大尺度物体所发生的情况。其中（a）图表示应用量子力学对子弹所预期的概率分布。快速摆动的条纹本应表示对于波长极短的波所得到的干涉图案。然而，任何物理检测器都跨越了概率曲线的几个摆动，所以通过测量给出的是图（b）中的光滑曲线。

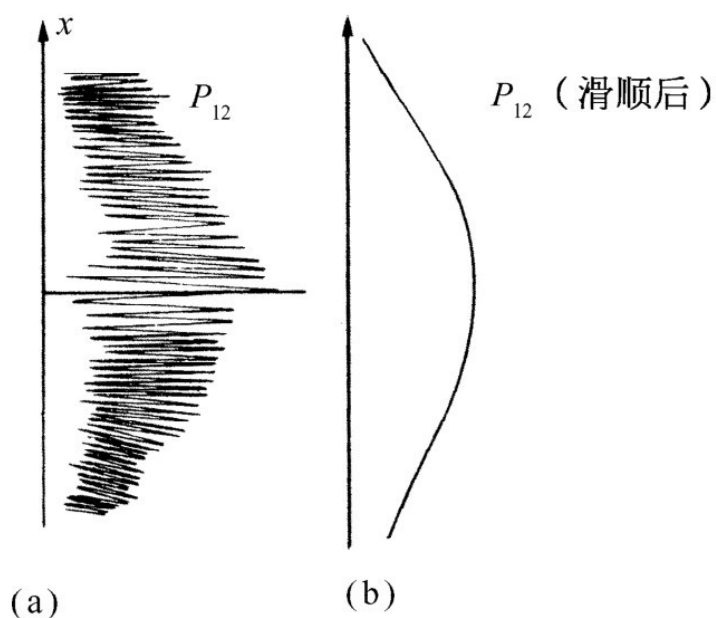


图37-5 子弹的干涉实验

（a）真实的图样（概图）；（b）观测到的图样

§37-7 量子力学的基本原理

我们现在来概括地小结一下前面实验中的主要结论。不过，我们将把结果表示成对于这一类的实验普遍适用的形式。假如先定义一个“理想实验”，那么这个小结就可以简单一些。所谓“理想实验”指的是：其中没有我们无法计及的任何不确定的外来影响，即无跳动或其他什么事情。更确切的说法是：“所谓理想实验就是所有的初始条件和最终条件都完全确定的实验。”我们将要说到的“事件”，一般说来就是一组特定的初始与最终条件（例如：“电子飞出枪口，到达检测器，此外没有任何其他事情发生”）。下面就是我们的总结。

小结

(1) 在理想实验中，一个事件的概率由一个复数 ϕ 的绝对值平方给出， ϕ 称为概率幅

$$\begin{aligned} P &= \text{概率}, \\ \phi &= \text{概率幅}, \\ P &= |\phi|^2. \end{aligned} \tag{37.6}$$

(2) 当一个事件按几种交替的方式出现时，该事件的概率幅等于各种方式分别考虑时的概率幅之和，此时存在干涉现象

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + \phi_2, \\ P = |\phi_1 + \phi_2|^2. \end{cases} \tag{37.7}$$

(3) 如果完成一个实验，此实验能够确定实际上发生的是哪一种方式的话，则该事件的概率等于发生各个方式的概率之和，此时干涉消失

$$P=P_1+P_2. \quad (37.8)$$

人们也许还想问：“这是怎样起作用的？在这样的规律背后有什么机制？”还没有人找到过定律背后的任何机制，也没有人能够“解释”得比我们刚才的“解释”更多一些，更没有人会给你们对这种情况作更深入的描写。我们根本想象不出更基本的能够推导出这些结果的机制。

我们希望强调经典理论和量子力学之间的一个非常重要的差别。我们一直谈到在给定的情况下，电子到达的概率。我们曾暗示：在我们的实验安排中（即使是能作出的最好的一种安排）不可能精确预言将发生什么事。我们只能预言可能性！如果这是正确的，那就意味着，物理学已放弃了去精确预言在确定的环境下会发生的事情。是的！物理学已放弃了这一点。我们不知道怎样去预言在确定的环境下会发生的事件，而且我们现在相信，这是不可能的，唯一可以预言的是种种事件的概率。必须承认，对我们早先了解自然界的理想来说，这是一种节约，它或许是后退的一步，但是还没有能看出避免这种后退的出路。

现在，我们来评论一下人们有时提出的试图避免上述描写的一种见解。这种见解认为：“或许电子有某种我们目前还不知道的内部机构——某些内在变量。或许这种机构正是我们无法预言将会发生什么事情的原因。如果我们能够更仔细地观察电子，就能说出它将到达哪里。”就我们所知，这是不可能的。我们仍会遇到困难。假设在电子内部有某种机构能够确定电子的去向，那么这种机构也必定能够确定电

子在途中将要通过哪一个孔。但是我们不要忘记，在电子内部的东西应当不依赖于我们 的动作，特别是不依赖于我们开或关哪一个孔。所以，如果电子在开始运动前已打定主意：（a）它要穿过哪一个孔，（b）它将到达哪里，我们对选择孔1的那些电子就会得出 P_1 ，对选择孔2的那些电子就会得出 P_2 ，并且对通过这两个孔的电子得出的概率必定是 P_1 和 P_2 之和（ $P_1 + P_2$ ）。看来没有别的解决方法了。但是我们从实验上已经证实情况并非如此。而现在还没有人能够解决这个难题。所以，在目前我们只准备计算概率。我们说“在目前”，但是我们强烈地感觉到很可能永远如此——很可能永远无法解决这个难题——因为自然界实际上就是 如此。

§37-8 不确定性原理

海森伯原来对不确定性原理的叙述就是这样的：假如对任何客体进行测量，并且测定其动量的 x 分量时，不确定量为 Δp ，那么关于其位置 x ，就不可能同时知道得比 $\Delta x \geq h / \Delta p$ 更准确。在任何时刻，位置的不确定量和动量的不确定量的乘积必定大于约化普朗克常数的一半。这是前面所表述的较为一般的不确定性原理的特殊情况。比较普遍的表述是，人们不可能用任何方式设计出这样一个仪器，它能确定在两种可供选择的方式中采取的是哪一种方式，而同时又不扰动干涉图案。

现在我们举一种特殊情况来说明，为了不致陷于困境，海森伯给出的这种关系必须成立。我们对图37-3中的实验设想一种修正方案，其中带有小孔的墙是用一块安置上滚子的板构成的，这样它可以在 x 方向上自由地上下滑动，如图37-6所示。仔细观察板的运动，我们可

以试图说出电子通过的是哪个小孔。想象一下当检测器放在 $x=0$ 处时会出现什么情况。我们可以预期对经过小孔1的电子，板必定使它往下偏转，以到达检测器。由于电子动量的垂直分量被改变了，板必定会以相等的动量向相反的方向反冲。它将往上跳动。如果电子通过下面一个小孔，板就会感到一个向下反冲的力。很清楚，对于检测器的每一个位置，电子经由孔1与经由孔2时板所接受的动量是不同的。这样，根本不必去扰动电子，只要通过观察板的运动，我们就可以说出电子所采取的是哪一条路径。

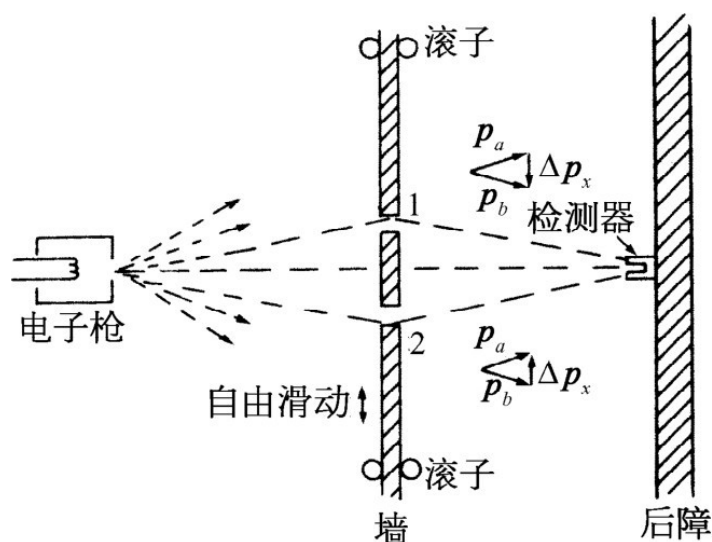


图37-6 测出墙的反冲的实验

现在，为了做到这一点，必须知道电子通过前板的动量。这样测出电子经过后板的动量时，就能算出板的动量改变了多少。但是要记住，根据不确定性原理，我们不能同时以任意高的准确度知道板的位置。而如果我们不知道板的确切位置，就不能精确地说出两个孔在哪里。对于每个经过小孔的电子来说，小孔都将在不同的位置上。这意味着对于每个电子来说，干涉图样的中心都在不同的位置上。于是干涉图样中的条纹将被抹去。下一章我们将定量地说明，假如我们足够

准确地测定板的动量从而由反冲的动量的测量来确定电子经过的是哪一个孔，那么按不确定性原理，该板 x 位置的不确定量将使在检测器处观察到的图样沿 x 方向上下移过一个相当于从极大值到最近的极小值之间的距离。这样一种无规则的移动正好将干涉图样抹去，因而观察不到干涉现象。

不确定性原理“保护”着量子力学。海森伯认识到，如果有可能以更高的准确度同时测出动量与位置的话，那么量子力学大厦就将倒塌。所以，他提出这一定是不可能的。于是人们试图找出一个能同时准确测量的方法，但是没有一个人找到一种方法能够以任何更高的准确度同时测出任何东西——屏障、电子、台球弹子，等等——的位置与动量。量子力学以其冒险但准确的方式继续存在着。

第38章 波动观点与粒子观点的关系

§38-1 概率波幅

本章我们将讨论波动观点与粒子观点之间的关系。由上一章我们已经知道，波动观点和粒子观点都不正确。通常，我们总是力图准确地描述事物，至少也要做到足够准确，以使我们的学习深入时无须改变这种描述——它可以扩充，但却不会改变！然而，当我们打算谈及波动图像或粒子图像时，两者都是近似的，并且都将发生变化。所以，从某种意义上来说，我们在这一章中所学习的东西并不是准确的；这里的论证是半直观的，我们将在以后使之更为准确，但是，当我们用量子力学作出正确解释时，有一些事情将会有一点改变。我们之所以要这样来处理，其原因当然在于我们不想立刻就深入到量子力学中去，而是希望对于我们将会碰到的几种效应至少能有某种概念。而且，我们所有的经验都与波动以及粒子有关，因此，在我们掌握对量子力学振幅的完整数学描述之前，先应用波动和粒子的概念来理解一定场合下所发生的事情是颇为方便的。我们在这样做时将力图阐明那些最薄弱的环节，但是其中大多数还是相当正确的——因为只是解释的问题。

首先，我们知道量子力学中描述世界的新方法——新的框架——是对每个可能发生的事件给予一个振幅，而且如果此事件涉及接收一

个粒子，那么就给出在不同位置与不同时间找到该粒子的振幅。于是，找到该粒子的概率就正比于振幅绝对值的平方。一般地讲，在不同场所与不同时刻找到粒子的振幅是随着位置和时间而变化的。

在一种特殊情况下，振幅在空间与时间上像 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ 那样呈正弦的变化（别忘了这些振幅是复数，而不是实数），它有一个确定的频率 ω 和波数 $\mathbf{k}$ 。结果表明这对应于一种经典的极限情况，也就是说，我们可以认为在此情况中有一个粒子，它的能量 E 为已知，并且 E 与频率之间的关系是

$$E = \hbar \omega, \quad (38.1)$$

而且粒子的动量 $\mathbf{p}$ 亦是已知的，它与波数 $\mathbf{k}$ 之间的关系是

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (38.2)$$

这一情况说明粒子的概念受到了限制。我们这么经常使用的粒子的概念——它的位置、动量等等在某些方面已不再令人满意了。比如，假设在不同的位置上找到一个粒子的振幅是 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ ，则其绝对值的平方是常数，而这就意味着在所有的点上找到粒子的概率都相等。这就是说，我们不知道粒子究竟在何处——它可以在任何地方——粒子的位置是非常不准确的。

另一方面，如果一个粒子的位置知道得比较清楚，而且我们可以相当准确地预测它的话，那么在不同位置找到它的概率必定限制在一定的区域内，我们称其长度为 Δx 。在此区域之外概率则为零。由于这个概率是某个振幅的绝对值的平方，如果绝对值的平方为零，则振幅

亦为零，结果我们就有一个长度为 Δx 的波列（图38-1），此波列的波长（波列中波节之间的距离）就对应于该粒子的动量。

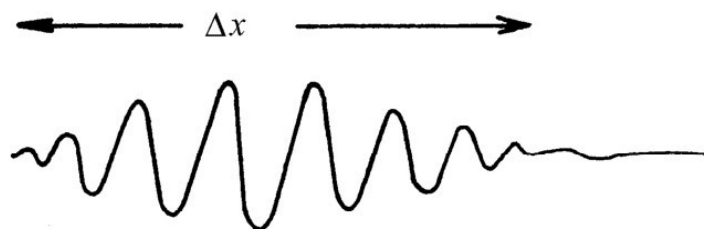


图38-1 长度为 Δx 的波包

这里我们遇到了有关波动的一件奇妙的事情——一件很简单的，与量子力学毫无关系的事情。任何人，即使完全不懂量子力学，只要他研究过波的话就会知道：对一个短的波列，我们不可能规定一个唯一的波长。这样的波列没有一个确定的波长；由于波列的长度是有限的，因此相应地在波数上存在着不确定性，于是在动量上也就存在着不确定性。

§38-2 位置与动量的测量

现在我们来考虑这种概念的两个例子——即看一下如果量子力学是正确的话，为什么在位置与（或）动量上会存在着不确定性的理由。在前面我们已经看到，如果事情不是这样——即如果有可能同时（精确）测定任何东西的位置与动量——我们会遇到一个佯谬；幸而这样一种佯谬并不存在，由波动图像中可以自然地得出不确定性这一事实表明，一切都很协调。

这里有一个很容易理解的例子，表明位置与动量之间的关系。假设我们有一个单缝，一些具有一定能量的粒子从很远的地方飞来，也

就是说它们全都大致水平地飞来（图38-2）。我们将集中注意动量的垂直分量。从经典的意义上说，所有这些粒子都具有一定的水平动量，比如说 p_0 。所以，从经典意义上说，粒子穿过狭缝前的垂直动量 p_y 是确定知道的。图中粒子既不朝上，也不朝下运动，因为它来自很远的地方，当然这一来它的垂直动量就是零了。现在我们假设某个粒子通过宽度为 B 的狭缝。当它从 B 缝穿出后，我们就以一定的精确度，即 $\pm B$ ，得知它的垂直位置 y 值。这就是说，在位置上的不确定量 Δy 约为 B 。现在我们也许想说，由于我们已知动量是绝对水平的，因而 Δp_y 是零；但这是错的。我们曾一度知道动量是水平方向的，但除此之外就不知道什么了。在粒子穿过狭缝前，我们不知道它们的垂直位置。现在使粒子穿过狭缝，我们就发现它的垂直位置，但却失去了有关该粒子垂直动量的信息！为什么？按照波动理论，当波通过狭缝后，就像光那样会散开或衍射。因此，粒子跑出狭缝后，就有可能不笔直地飞行。由于衍射效应，粒子出射的图样散开，其张角（我们可将它定义为第一极小值的角度）就是对粒子出射的最后角度的不确定性的一种度量。

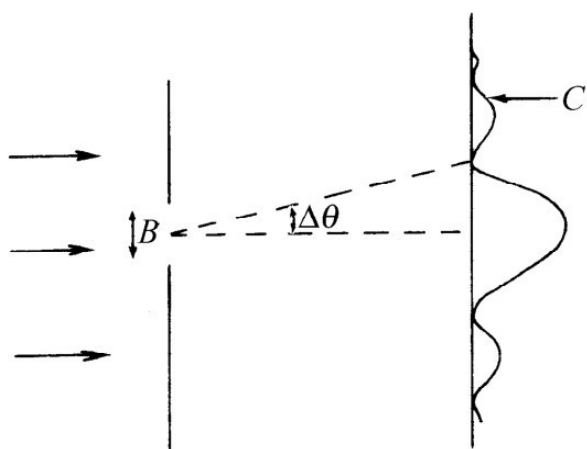


图38-2 粒子穿过狭缝的衍射

整个图样是怎样散开的呢？所谓散开就是说粒子有一定的往上或往下运动的可能性，也就是说，其动量具有向上或向下的分量。我们说可能性与粒子是因为可以用一个粒子计数器检测出这个衍射图样，而且当计数器（比如说在图38-2的C处）接收到一个粒子时，接收的是整个粒子，这样，从经典意义上来说，粒子要从狭缝射出往上偏至C处，就得具有垂直的动量。

为了对动量的散布有一个大致的概念，我们设垂直动量 p_y 的散布等于 $p_0 \Delta\theta$ ，这里 p_0 是水平动量。那么在散开的图样中 $\Delta\theta$ 有多大？我们知道第一极小值出现在 $\Delta\theta$ 角上，这时，从狭缝的一边传出的波必须比从另一边传出的波多走过一个波长（在第30章中已得出过这个结论）。因此 $\Delta\theta$ 为 λ/B ，这样，此实验中的 Δp_y 就是 $p_0 \lambda/B$ 。注意：如果使 B 变小，亦即对粒子的位置进行比较准确的测量，那么衍射图样就变宽。我们记得，在用微波做狭缝实验时，当我们将狭缝关小时，狭缝两侧强度的分布就变宽。所以，狭缝越窄，图样就越宽，而我们发现粒子具有侧向动量的可能性就越大。这样垂直动量的不确定量就与 y 的不确定量成反比。事实上，我们看到两者的乘积为 $p_0 \lambda$ 。但是 λ 是波长， p_0 是动量，按照量子力学，波长乘动量就是普朗克常数 h 。因此我们得到下列规则：垂直动量的不确定量与垂直位置上的不确定量的乘积约为 h

$$\Delta y \Delta p_y \geq h/2. \quad (38.3)$$

我们不可能设计这样一个系统，在其中既知道粒子的垂直位置，又能以比式（38.3）所表示的更大确定性来预言它的垂直运动。这就是说

垂直动量的不确定量必须超过 $h/2\Delta y$ ，这里 Δy 是我们的位置上的不确定量。

有时，人们说量子力学是完全错误的。当粒子从左边飞来时，它的垂直动量是零，现在它穿过了狭缝，它的位置也知道了。位置与动量两者似乎都能以任意高的准确度知道。不错，我们可以接收一个粒子，在接收时确定了它的位置如何，以及为了到达那里应具有多少动量。这些都完全正确，但这并不是不确定性关系式（38.3）所涉及的事，式（38.3）所说的是对一种状况的可预知性，而不是对于过去的陈述。“我知道粒子穿过狭缝前的动量是多少，现在又知道它的位置”这种说法没有什么意思，因为我们现在已失去了关于动量的知识。粒子通过了狭缝这一事实已使我们不再能预言垂直动量。我们所谈的是一种预言性的理论，而不只是一种事后的测量。所以我们必须谈论能够预言的事。

现在我们从另一个角度来看一下。我们稍微定量地考虑同样现象的另一个例子。在前一个例子中，我们曾以经典方法测量了动量。那就是说：我们考虑了方向、速度和角度，等等，所以是用经典分析得出动量。然而，由于动量与波数有关，所以自然界中还有另一种测量粒子（光子或其他粒子）动量的方法，它没有经典的类比，因为它利用的是式（38.2）。那就是测量波的波长。我们试用这种方式来测量动量。

假设有一个刻有许多线条的光栅（图38-3），并且有一束粒子射向此光栅。我们已屡次讨论过这样一个问题：如果粒子具有确定的动量，那么，由于干涉效应，我们会在某个方向上得到一个十分尖锐的图样。我们也谈过在测量这个动量时可以精确到什么程度，也就是说，这样的光栅分辨率有多大。我们不拟再作一次推导，而只是参考

第30章的结果，在那里已经得出用一个给定的光栅能够测出的波长的相对不确定量为 $1/(Nm)$ ，其中 N 是光栅线条数， m 是衍射图样的级数，亦即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (38.4)$$

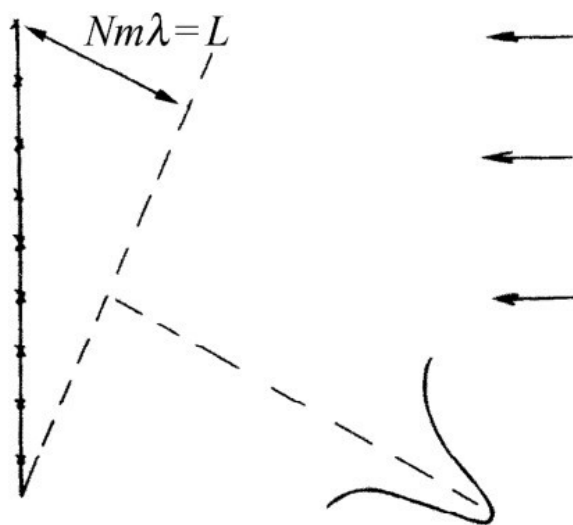


图38-3 利用衍射光栅确定动量

现在式(38.4)可以重新写为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (38.5)$$

这里 L 是图38-3中所示的距离。这段距离是粒子或者波或者其他某种东西从光栅底端反射后必须跑过的总路程与它们从光栅顶端反射后必须跑过的总路程之差。这就是说，形成衍射图样的波为来自光栅不同部分的波。首先到达的波来自光栅的底端和波列的始端，而其余到达的波则来自波列的后面各部分和光栅的另外部分，最后一个波最末到达，它包括了波列中与最前端相距为 L 的一点。所以为了使在我们的

光谱中能有一条与一定的动量对应的锐线〔其不确定量由式（38.4）给出〕，我们必须有一列长度至少为 L 的波列。如果波列太短，我们就没有用到整个光栅。形成光谱的波只是从光栅中很短的部分反射的波，光栅的作用没有很好发挥——我们将得到一个很大的角展度。为了得到较窄的角展度，我们必须利用整个光栅，这样至少在某些时刻整个波列应同时从光栅的各部分散射出来。因此为了使波长的不确定量小于式（38.5）所给出的值，波列的长度必须为 L 。顺便说一下

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta k}{2\pi}. \quad (38.6)$$

因此

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}. \quad (38.7)$$

这里 L 是波列的长度。

这意味着，如果有一长度小于 L 的波列，那么在波数上的不确定量必然超过 $2\pi/L$ 。或者说波数的不确定量乘以波列的长度——暂时我们称之为 Δx ——将大于 2π 。我们之所以称波列长度为 Δx 是因为这是粒子在位置上的不确定量。如果波列只存在于有限长度之中，那么，这就是我们能找到粒子的区域在不确定量 Δx 范围以内。波的这种性质，即波列的长度乘以相应波数的不确定量至少为 2π 这一点，是每个研究波的人都知道的，这与量子力学毫无关系。这只是说，如果我们有一长度有限的波列的话，没有办法很精确地数出波的数目。我们试从另一途径来看看其中的理由。

假定我们有一长为 L 的有限波列；那么，由于它在两端必定减少（如图38-1所示），所以在长度 L 中波的数目是不确定的，其不确定

量约为 ± 1 。但在长度 L 中的波数是 $kL / (2\pi)$ 。可见 k 是不确定的，我们又重新得出式(38.7)的结果，它只是波的一种特性。无论波是在空间传播， k 是每厘米的弧度数， L 是波列的长度，还是波在时间上展开， ω 是每秒的振动数， T 是波列持续的时间“长度”，都会出现同样的情况。这就是说：如果只是持续一定的有限时间 T 的波列，那么频率的不确定量就由下式确定

$$\Delta\omega = 2\pi/T. \quad (38.8)$$

我们已经着重指出，这些都只是波的性质，例如，在声学理论中就已为人们所熟知了。

要点在于，在量子力学中，我们将波数解释为对粒子动量的一种量度，即 $p = \hbar k$ ，这样，式(38.7)就告诉我们 $\Delta p \approx \hbar / \Delta x$ 。因此，这就表明了经典动量概念的适用界限（显然，如果我们想用波来表示粒子的话，动量的概念必定受到某种限制）。我们发现了一条规则，使我们对于经典概念在何时失效具有一些认识，这的确很好。

§38-3 晶体衍射

下面，我们考虑粒子波在晶体上的反射。晶体是一块厚厚的东西，它全部由排列得很好的相同原子组成（我们将在后面包括一些较复杂的情况）。问题是对于一束给定的光（X射线）、电子、中子等等，怎样布置原子的排列才能在某个给定方向上得到强的反射极大值。为了得到强的反射，来自所有原子的散射都必须是同相位的。同相波的数量和反相波的数量不能相等，不然波会相互抵消掉。正如我

们已经说明过的那样，解决问题的方法是找出等相位的区域；它们就是一些对入射方向和反射方向成相等角度的平面（图38-4）。

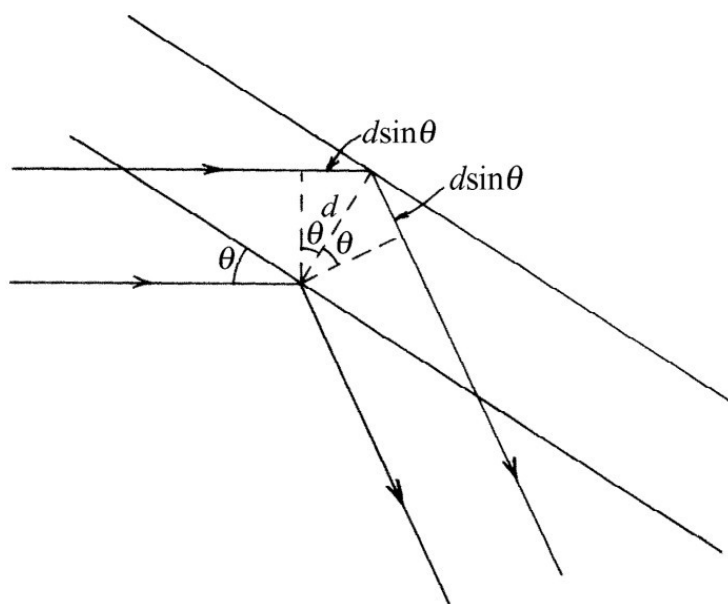


图38-4 晶面对波的散射

考虑图38-4中两个平行平面，从这两个平面散射的波，假若其波前所经过的距离的差为波长的整数倍，则散射波的相位相同。可以看出，距离差为 $2d \sin\theta$ ，这里 d 是两平面间的垂直距离。于是相干反射的条件是

$$2d \sin\theta = n\lambda \quad (n=1, 2, \dots) . \quad (38.9)$$

比方说，如果晶体中原子刚巧分布在遵从式（38.9）（其中 $n=1$ ）的平面上，那么就会出现强反射。然而，如果有性质相同（密度相同）的其他原子位于原来各对平面的中间，那么这些中间平面的散射也同样强烈，并将与其他的散射相干，致使总效果为零。所以式（38.9）中的 d 必须指相邻平面的距离；我们不能取两个相距五层的平面再应用这个公式！

有趣的是，实际的晶体通常并不那么简单，即好像只是以一定方式重复排列的同一类原子。换句话说，假如我们作一个二维类比的话，它们很像印满了某种重复图案的糊墙纸。对原子来说，所谓“图案”就是指可能包含有相当大量原子的某种排列，例如， CaCO_3 的图案包含有一个Ca原子、一个C原子和三个O原子等等。但不管是什么，这些图案都按一定的形式重复。这种基本图案就称为晶胞。

重复的基本形式决定了我们所称的点阵类型；只要观察反射波和找出它们的对称性，就能立即确定点阵类型。换句话说，只要最终发现有任何反射，就可确定点阵类型，但是为了确定晶格的每个组元的组成，就必须考虑各个方向上的散射强度。向哪个方向散射取决于点阵的类型，但各个散射的强度则由每个晶胞内有些什么来决定。晶体的结构就是用这种方式得出的。

图38-5和图38-6是两幅X射线衍射图样的照片；它们分别表明岩盐与肌红蛋白的散射。

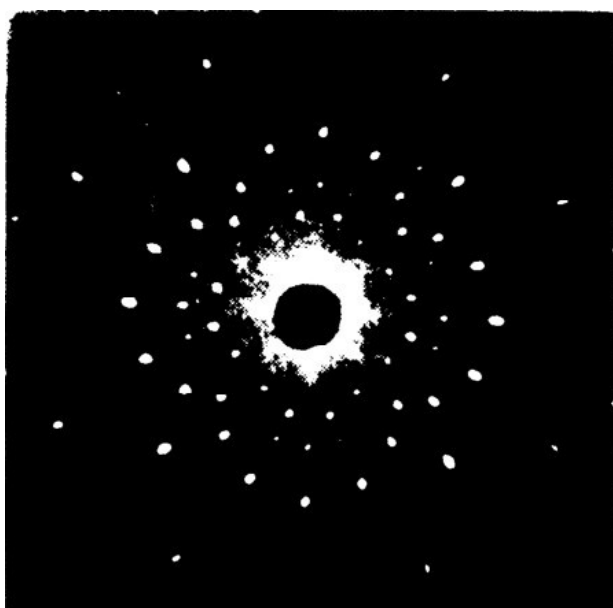


图 38-5

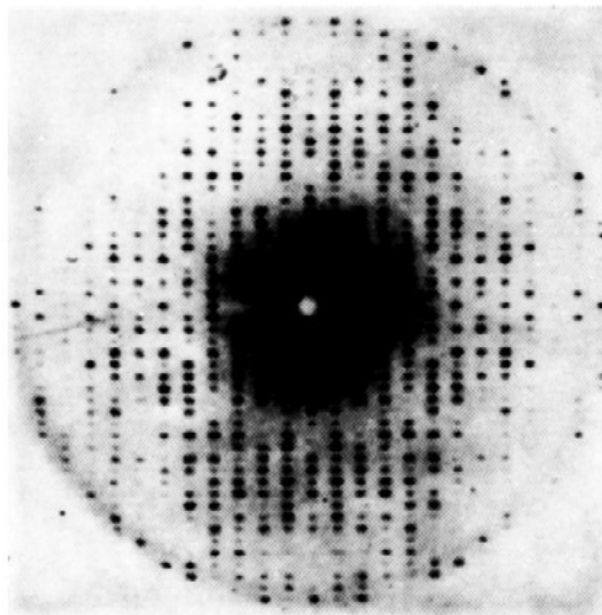


图 38-6

附带提一下，如果最靠近的两个平面间的距离小于 $\lambda/2$ ，就会发生一件有趣的事。在这种情况下，式（38.9）对 n 就没有解。因此，如果 λ 大于相邻平面之间距离的两倍，就没有两侧衍射图样，光——或者别的什么——将直接穿过材料，而不反射也无损耗。所以，在可见光的情况下， λ 远大于间隔，当然光就直接通过，而不会出现从晶面反射的图样。

这个事实在产生中子的核反应堆情况下也引起了有趣的结果（中子显然是粒子，谁都会这么说）。假如我们引出这些中子使它们进入一根长石墨棒，它们就会扩散，并且缓慢地穿过石墨棒（图38-7）。它们之所以扩散是因为被原子弹开，但严格地说，按照波动理论，它们之所以被原子弹开是由于晶面的衍射。结果表明，假如我们取一根长石墨棒的话，从远端跑出的中子都具有长的波长！事实上，假如我们把中子强度作为波长的函数作图的话，只有在波长大于某个极小值时才出现曲线（图38-8）。换句话说，我们可以用这种方法得到极慢

的中子，只有最慢的中子才会通过；它们没有被石墨棒的晶面所衍射或散射，而是像光线通过玻璃一样径直穿过石墨棒，没有向两边散射出去。还有许多其他证据也说明中子波和别的粒子波是真实的。

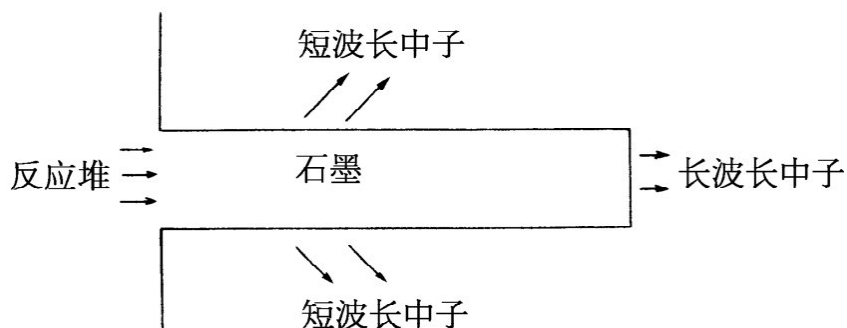


图38-7 反应堆中子通过石墨块的扩散

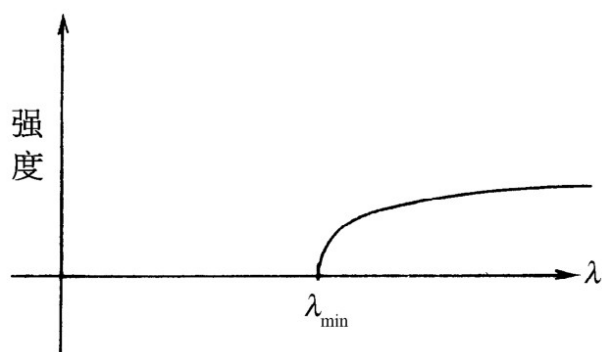


图38-8 从石墨棒出来的中子强度与波长的关系

§38-4 原子的大小

现在我们来来看一下由式（38.3）所表示的不确定性关系的另一个应用。在这里不用过分认真；概念是正确的，但所作的分析并不很精确。这个概念涉及确定原子的大小，以及按经典说法，电子将不断辐射出光，因而一直作螺旋运动，直至最后落到原子核上这一事实。但

是这种说法不符合量子力学的观点，因为那样一来我们就同时知道每一个电子的所在以及它运动得有多快。

假定我们有一个氢原子，现在要测量电子的位置；我们肯定不能精确地预言电子的位置，不然动量的扩展将会达到无限大。每当我们观察电子时，它是在某处，但是它在各个不同地方都有一定的振幅，因而在那些地方都可能找到它。这些位置不可能全都在原子核处，我们将假定位置有一定的扩展，其大小约为 a 。这就是说，电子离原子核的距离通常约为 a 。我们将由原子的总能量取极小值这个条件来确定 a 的数值。

由于不确定性关系，动量的扩展约为 $\hbar/a$ ，这样，如果我们打算用某种方式去测量电子的动量，比如使它散射X射线，然后寻找运动散射体的多普勒效应，那么可以预期并不会每次都得到零——电子并不是静止不动的——但它的动量一定约为 $p \approx \hbar/a$ ，于是动能约为 $mv^2/2 = p^2/(2m) = \hbar^2/(2ma^2)$ （在某种意义上，这是一种量纲分析，用以找出动能是以何种方式取决于约化普朗克常数，质量 m ，以及原子的大小 a 。我们无需顾虑答案中2、 π 等这类因子上的出入，事实上，我们甚至还没有很精确地定义过 a ）。现在，势能为 $-e^2$ 除以离原子中心的距离，即 $-e^2/a$ ，这里的 e^2 大家记得就是电子电荷的平方除以 $4\pi\epsilon_0$ 。要点就在于，如果 a 变小，势能就变小，但 a 越小，由于不确定性关系，所需的动量也就越大，因而动能也越大。总能量是

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (38.10)$$

我们不知道 a 究竟为多大，但我们却知道原子本身会进行安排，以取得某种折衷办法使能量尽可能地小。为使 E 保持极小，我们求 E 对 a 的微商，令此微商等于零后再解出 a 。 E 的微商是

$$\frac{dE}{da} = \frac{-\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}, \quad (38.11)$$

令 $\frac{dE}{da} = 0$ ，求得 a 值为

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.528 \text{ \AA} = 0.528 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (38.12)$$

这一个特殊的距离称为波尔半径。我们因此得知原子的大小约为埃的数量级，这个结论是正确的：这是一件挺不错的事——实际上，这是一件令人惊奇的事，因为在这以前，我们还没有推断原子大小的根据！从经典的观点来看，由于电子会螺旋式地落到原子核上，原子完全不可能存在。

现在，如果将（38.12）的 a_0 值代入（38.10）去求能量，结果得出

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}. \quad (38.13)$$

能量为负意味着什么？这意味着，当电子在原子中时的能量比自由状态下的能量小。这就是说，它是受束缚的。也就是说，要把电子“踢出去”需要能量；要电离一个氢原子大约需要13.6 eV的能量。我们没有理由认为所需的能量不是这个值的2倍、3倍或1/2倍、1/ π 倍，因为我们这里所用的是十分粗略的论证。然而，我们在这里悄悄地这样来使

用所有的常数，使得正好得出正确的数字！13.6 eV这个数字称为一个里德伯（Rydberg）能量；它是氢原子的电离能。

所以，我们现在懂得了为什么不会掉到地板下面去。当我们行走时，鞋子中的大量原子排斥着地板中的大量原子。为了把原子挤得更靠近一些，电子必须被限制在一个较小的空间，由不确定性关系，平均而言它们的动量将变得大些，这就意味着能量变大；抵抗原子压缩的是一种量子力学效应，而不是经典效应。按照经典的观点，如果使所有电子与质子更为靠近，我们应预期能量会进一步降低，因此，在经典物理学中，正电荷与负电荷的最佳排列就是互相紧靠在一起。这些在经典物理学中是很清楚的，但是由于原子的存在又令人困惑。当然，早先的科学家发明过一些办法来摆脱这个困境——不过别去管它，我们现在找到了一种正确的方法（也许如此）。

顺便提一下（虽然眼下我们还不具备理解它的基础），在有许多电子的场合中，这些电子总是试图彼此离开。如果某个电子正占据着某一空间，那么另一个电子就不会占据同一空间。说得更精确一些，由于存在着两种自旋的情况，因此两个电子有可能紧靠在一起，一个电子沿一个方向自旋，而另一个电子则沿反方向自旋。但此后我们在该处再也不能放进更多的电子。我们必须把其他电子放到别的位置上，这就是物质具有强度的真正原因。假如我们有可能将所有电子放在同一个地方，那么它们将会比现在更为凝聚。正是由于电子不可能全都紧靠在一起这个事实，才使得桌子和其他种种东西变得坚固。

十分明显，为了理解物质的性质，我们必须用量子力学，经典力学在这方面是不会令人满意的。

§38-5 能级

我们已讲过处在可能具有的最低能量状态下的原子，但是结果表明电子可以具有别种状态，它能以更有力的方式旋转与振动，因此原子可以有多种不同的运动。按照量子力学，在稳定状态下，原子只可能有确定的能量。我们作了一个图（图38-9），其中垂直方向标绘能量，每一个允许的能量值画一条水平线。当电子是自由电子，即它的能量为正时，它可以具有任何值，并能以任何速率运动。但是束缚能不能取任意值。原子必须取如图38-9所示的一组允许值中的某一个能量。

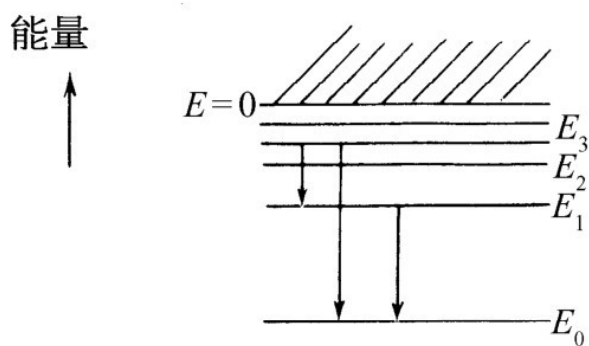


图38-9 原子的能级图（画出几种可能的跃迁）

现在我们称这些能量的允许值为 E_0 ， E_1 ， E_2 ， E_3 。如果原子本来处于 E_1 ， E_2 等“激发态”之一时，它不会永远保持这种状态。迟早它会掉到较低的状态中去，并以光的形式辐射出能量。发射出的光的频率可由能量守恒关系加上量子力学的一个关系式〔即光的频率与光的能量之间的关系式（38.1）〕来确定。因此，比如说从能量 E_3 到能量 E_1 的跃迁所释放的光的频率即为

$$\omega_{31} = (E_3 - E_1) / \hbar. \quad (38.14)$$

于是，这就是原子的一个特征频率，它确定了一条发射谱线。另一种可能跃迁是从 E_3 至 E_0 ，这时就有一个不同的频率

$$\omega_{30} = (E_3 - E_0) / \hbar. \quad (38.15)$$

另一个可能性是，如果原子已被激发到 E_1 态，它可能掉回到基态 E_0 ，而发射出的光子的频率是

$$\omega_{10} = (E_1 - E_0) / \hbar. \quad (38.16)$$

我们举出三种跃迁的情况是为了指出一个有趣的关系。由式（38.14），（38.15）和（38.16）很容易看出

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (38.17)$$

一般来说，如果我们找到了两条谱线，可以预期在频率之和（或之差）处将找到另一条谱线，而且通过找到这样一系列能级，使每条谱线对应于其中的某一对能级的能量差，那么所有的谱线就能得到理解。在量子力学出现以前人们就已注意到这种在谱线频率上出乎意外的巧合，它称为里兹（Ritz）组合原则。从经典的观点来看，这又是不可思议的。不过，我们别再唠叨经典力学在原子领域中的失败；看来我们已讲得够多的了。

前面已经谈到量子力学可以用振幅来阐述，振幅的行为很像波，它们具有一定的频率和波数。让我们看一下，从振幅的观点怎样会得出原子具有确定的能量状态。从我们至今所说过的那些事情出发是无法理解这一点的，但是我们都知被限制的波具有确定的频率，例

如，若声音限制在一个风琴管或任何类似的东西中时，声波振动的方式就不止一种，但对每种方式都有一个确定的频率。这样，将波限制在其中的物体有某些确定的谐振频率。所以这是被限制在一定空间中的波的一个性质——这个课题我们将在以后详细地用公式来讨论——这些波只能具有一些确定的频率。由于振幅的频率与能量间存在着一一般关系，我们发现束缚在原子内的电子具有确定的能量就不足为奇了。

§38-6 哲学含义

我们简单地谈谈量子力学的某些哲学含义。通常问题总是有两个方面：一个是对于物理学的哲学含义，另一个是把哲学上的问题外推到其他领域。在把跟科学相联系的哲学观念引申到别的领域中去时，它们往往完全被歪曲了。因此我们将尽可能把自己的评论局限于物理学本身。

首先，最有趣的是不确定性原理的概念；进行观察会影响现象。人们向来都知道进行观察要影响现象，但是要点在于，这种影响不可能依靠重新调整仪器而被忽略、减到最小或任意减小。当我们观察一定的现象时，不可避免地会以某一最低限度的方式来扰动它，这种扰动是物理观点的一致性所必需的。在量子力学以前的物理学中，观察者有时也是重要的，但这只是从无关紧要的意义上来说。曾经有人提出过这样的一个问题：如果有一棵树在森林中倒了下来，而旁边没有人听到，那它会发出响声吗？在一片真实的森林中倒下的一棵真实的树当然会发出声音，即使没有任何人在那里。但即使没有人在那里听到，它也会留下其他的迹象。响声会震动一些树叶，如果我们相当仔

细的话，可以发现在某个地方有一些荆棘将树叶擦伤，在树叶上留下微小的划痕，除非我们假定树叶曾经发生振动，否则对此划痕就无法解释。所以，在某种意义上我们必须承认这棵树确实发出过声音。我们也许会问：是否有过对声音的感觉呢？不像有过，感觉大约总与意识有关。蚂蚁是否有意识以及森林中是否有蚂蚁，或者树木是否有意识，这一切我们都不知道。对这个问题我们就谈到这里吧！

量子力学出现以来人们所强调的另一件事情是这样一个观念：我们不当谈论那些我们不能够测量的事情（实际上相对论也这么说过）。除非一件事情能通过测量来定义，否则它在理论上就没有地位。由于一个定域粒子的动量的精确值不能通过测量来确定，因此它在量子理论上就没有地位。但是，认为经典理论的问题就出在这里是错误的。这是一种对情况所作的粗枝大叶的分析。因为我们不能精确地测量位置和动量并不先验地意味着我们不能谈论它们，而只是意味着我们不必谈论它们。在科学中情况是这样的：一个无法测量或无法直接与实验相联系的概念或观念可以是有用的，也可以是无用的。它们不必存在于理论之中。换句话说，假如我们比较物理世界的经典理论与量子理论，并假设实验上确实只能粗略地测出位置与动量，那么问题就是一个粒子的精确位置与它的精确动量的概念是否仍然有效。经典理论承认这些概念；量子理论则不承认。这件事本身并不意味着经典物理是错误的。当新的量子力学刚建立时，经典物理学家——除去海森伯、薛定谔和玻恩以外所有的人——说：“看吧，你们的理论一点也不好，因为你们不能回答这样一些问题：粒子的精确位置是什么？它穿过的是哪一个孔？以及一些别的问题”。海森伯的答复是：“我不用回答这样的问题，因为你们不能从实验上提出这个问题。”这就是说，我们不必回答这种问题。考虑下述两种理论（a）与（b）；（a）包括一个不能直接检验但在分析中要用到的概念，而

(b) 则不包括这个概念。如果它们的预测不一致，我们不能声称：由于 (b) 不能解释 (a) 中的那个概念，因而它就是错的，因为这个概念是一个无法直接检验的东西。知道哪些观念不能直接检验总是好的，但是没有必要将它们完全去掉。认为我们只利用那些直接受到实验制约的概念就能完全从事科学工作的这种看法是不正确的。

量子力学本身就存在着波函数振幅、势，以及其他许多不能直接测量的概念。一门科学的基础是它的预测能力。预测就是说出在一个从未做过的实验中会发生什么。怎么能做到这一点呢？所用的方法是假定那里会发生什么事情，而不依赖于实验。我们必须把各种实验结果外推到它们尚未做过的那个领域，同时必须引用我们的概念，并把它们引申到还未得到检验的那些地方。如果我们不这样做，就谈不上预测。所以，对于经典物理学家来说，欣然赞同，并且认为位置——它对棒球来说有着明显含义——对于电子也具有某种含义，将是非常明智的。这并不是什么笨拙，而是合情合理的步骤。今天我们说相对论应该对所有的能量都是正确的，但是或许有一天，有人会跑来说我们是多么笨呀！直到“惹出祸来”，我们实在是不知道笨在哪里的，所以整个思想就是惹点祸出来。唯一能发现我们错误的方法是找出我们的预测是什么。这对于建立起一种概念是绝对必要的。

我们已对量子力学的不确定性作过一些评论。那就是我们现在还不能预测在给定的、尽可能仔细安排的物理条件下会发生什么物理事件。假如有一个原子处于受激态，即将发射光子，那么我们无法说出它将在什么时候发射光子。它在任何时刻都有发射光子的一定振幅，我们可以预测的只是发射的概率；我们不能精确地预测未来。这件事引起了种种胡扯和关于诸如意志自由的含义的问题，还引起了世界是不确定的种种想法。

当然，我们必须强调，在某种意义上经典物理也是不确定的。人们通常认为这种不确定性——我们不能预言未来——是一种重要的量子力学的特色，而且据说这可用来解释心理的行为，自由意志的感觉等等。但是如果世界真是经典世界——如果力学定律是经典的——心理上也不见得会多少有些不同的感受。确实，就经典观念而言，如果我们知道了世界上（或者在一个气体容器中）的每个原子的位置与速度，那么就应当能精确地预言会发生什么。因此经典的世界是决定论的。然而，假定我们的精确度有限，而且的确不知道一个原子的确切位置，比如说只精确到十亿分之一，那么这个原子运动时会撞在别的原子上，由于我们所知道的位置的精确度不超过十亿分之一，因此我们发现在碰撞后，位置的误差还会更大。当然，在下一次碰撞时，误差又将被放大，这样，如果起先只有一点点误差的话，后来就会迅速放大而出现很大的不确定性。举个例子来说：比如一道水流从堤坝上泻下时，会飞溅开来。如果我们站得很近，常常会有一些水滴溅到我们的鼻子上。这一切看来完全是无规则的，然而这样一种行为能由纯粹的经典定律来预言。所有水滴的精确位置取决于水流流过坝以前的精确运动。结果怎样呢？在水流落下时，极微小的不规则性都被放大了，结果就出现了完全的不规则性。很明显，除非我们绝对精确地知道水流的运动，否则就不能真正预知水滴的位置。

说得更明确一些，给定任一精确度，无论它精确到怎样的程度，我们都能找到一个足够长的时间，以致无法对这么长的时间作出有效的预言。其实要点在于这段时间并不太长。如果精确度为十亿分之一，这个时间并不是数百万年。事实上，这个时间随着误差呈对数式地增长，结果发现只在非常、非常短的时间里我们就失去了所有的信息。如果精确度提高到十亿乘十亿再乘十亿分之一——那么不管我们说多少个几十亿，只要最后不再说下去——我们就能找到一个比刚才

提到的精确度的数字还要短的时间——过此时间后就再也不能预言会发生什么了！因此，诸如以下的说法，什么由于人类思维的明显的自由与非决定性，我们应当认识到再也不能希望用经典的“决定论的”物理来理解它；什么欢迎量子力学将我们从“绝对机械论的”宇宙下拯救出来啊，等等都是不公正的，因为从实际的观点来说，在经典力学中早已存在着不可确定性了。

第39章 气体分子动理论

§39-1 物质的性质

从本章起我们将开始一个新的课题，这个课题将占用相当的时间。它是从物质由大量原子或基本单元组成，它们之间存在着电相互作用，并且从遵循力学定律这种物理观点出发，对物质的性质进行分析的第一部分。我们企图了解为什么不同的原子集合会表现出它们所具有的特色。

显然这是一个困难的课题，我们要在一开始就强调指出，事实上这个课题是非常困难的，而且所用的处理方法也必须与迄今为止我们处理其他课题的方法都不相同。在力学和光学中，我们能够从某些定律，比如牛顿定律，或者加速电荷所产生的电场的公式的严格叙述开始。由此可以从本质上理解一大批现象，并且从此以后，这些定律就为我们理解力学与光学提供了基础。这就是说我们在以后可以学到更多的东西，但是我们并不是学习不同的物理内容，而只是学习用以处理问题的更好的数学分析方法。

在研究物质的性质时，我们不能有效地沿用这条途径，只能以一种非常初步的方式来讨论物质；直接从具体的基本定律出发来分析这样的课题是非常复杂的，因为这些定律无非是力学与电学的定律。但它们与我们希望研究的物质的性质之间相隔太远；从牛顿定律得出物质的性质要经过非常多的步骤，而这些步骤本身也是相当复杂的。我

们现在开始采取其中的某些步骤，虽然我们的许多分析相当精确，但所得出的最后结果却越来越不精确。对于物质的性质，我们只能有一个大致的了解。

我们之所以只能用如此不完善的方式来进行分析，其理由之一是它在数学上要求对概率论具有深刻的理解；我们并不要求知道每个原子实际上在哪里运动，而是要求知道平均说来有多少原子在这里运动，有多少原子在那里运动，产生各种效应的可能性是多少。所以这一课题牵涉到概率论的知识，但由于我们的数学基础还不够，我们不想过多地引用这方面的知识。

其次，从物理观点来说更重要的理由是，原子的实际行为并不遵循经典力学规律，而是遵循量子力学规律，因此，在我们了解量子力学以前，不可能得到对这个课题的正确的理解。这里，和弹子房弹球、汽车等情况不同，经典力学规律和量子力学规律之间的差别是非常重要的和非常显著的，以致由经典物理学推导出来的许多结果从根本上来说就不正确。因此，这里学到的某些东西有一部分必须抛弃，然而，我们将指明每一种结果不正确的情况，以便了解它的“界限”何在。在前两章中讨论量子力学的理由之一就是给你们一个概念，使能了解为什么经典力学在许多方面或多或少是不正确的。

为什么我们现在就要处理这个课题呢？为什么不等上一年半载，直到我们更好地掌握了概率的数学理论，并且学了一点量子力学后，再以更为彻底的方式来处理它呢？回答是——这是一个困难的课题，学习它的最好方式是慢慢来！首先要做的是，使我们对不同场合下应当发生的情况多少获得一些概念，这样，以后当我们对这些规律了解得更清楚时，就能更好地用公式来表达它们。

任何一个企图分析实际问题中物质性质的人，可能都想从写出基本方程式出发，然后再从数学上求出它们的解。虽然有一些人试图采用这一条途径，但他们都是这个领域中的失败者；真正的成功来自那些从物理观点出发考虑的人，他们对于要做的事情具有大致的概念，并且在给定的复杂状况下知道哪些是重要的，哪些是次要的，然后开始作正确的近似。这些问题是如此复杂，即使获得那种不精确和不完全的初步理解也是很有价值的，因此在整个物理课程中，我们将一再碰到这个课题，而且一次比一次更为准确。

就在现在开始这个课题的另一个原因是，我们已经在例如化学上用过许多这方面概念，而且甚至在高中时，就听到过其中的某些内容。因此，了解这些事情的物理基础是颇有意义的。

举一个有趣的例子来说，我们都知道，在相同温度、相同压力下，相同体积的气体含有同等数目的分子。阿伏伽德罗把倍比定律，即当两种气体在化学反应中化合时，所需的体积总是成简单的整数比的定律，理解为相同体积中含有相同数目的原子。但是，为什么它们含有相同数目的原子？我们能从牛顿定律推出原子数目应该相等吗？本章中我们将谈到这种特殊的情况。在以下几章中，我们将讨论包括压强、体积、温度及热量的其他各种现象。

我们也发现，不从原子观点出发也同样能着手处理这个课题，并且在物质的性质上存在着许多相互联系。比如说，当我们压缩某个东西时，它会变热；如果把它加热，它就膨胀。在这两件事实之间存在着一种联系，它可以独立于更深一层的机制而推出。这个课题称为热力学。当然，对热力学的最深刻的理解来自对更深一层的实际机制的理解，而这正是我们将要做的：我们从一开始就采用原子的观点，并用它来了解物质的各种性质和热力学定律。

那么，下面就让我们从牛顿力学定律出发来讨论气体的性质。

§39-2 气体的压强

首先，我们知道气体会产生压强。我们必须清楚地理解它是怎么产生的。如果我们的耳朵比现在灵敏几倍，就会听到持续的冲击噪声。进化论幸而没有使耳朵发展到这种地步，因为这样灵敏的耳朵毫无用处——不然我们将听到重复不停的吵闹声。原因是耳膜与空气相接触，而空气里有大量持续运动的分子，这些分子撞击在耳膜上。在撞击耳膜时，它们造成了无规则的咚、咚、咚的声音，这种声音我们听不见，因为原子非常小，以至于耳朵的灵敏度不足以感觉到。原子这样不停地撞击的结果是将耳膜推开，但是当然，在耳膜的另一边也有同样的原子在不停地撞击，因而作用在耳膜上的净力为零。如果我们从一边抽去空气，或者改变两边空气的相对数量，那么耳膜就将被推向这一边或那一边，因为在一边的撞击的量将大于另一边。当我们乘电梯或飞机时，由于上升得太快，特别是如果我们还患有重感冒的话，有时就会有这种不舒服的感觉（当我们感冒时，由于发炎而使通过咽喉联系耳膜内部空气与外部空气之间的导管关闭了，这样，内外压强就不能很快地保持平衡）。

为了定量地分析这种情况，我们设想有一个充满大量气体的容器，容器的一端是一个可移动的活塞（图39-1）。我们希望找出由于容器中有原子存在所引起的作用在活塞上的力是多少。容器的体积为 V ，当原子在容器内以各种不同的速度来回运动时，它们就撞击在活塞上。假定在活塞外部没有什么东西，而是真空，那么它会怎么样呢？如果活塞是自由的，没有什么东西顶着，那么它每次受到撞击

时，都将得到一点点动量，于是便会渐渐地从容器中被推出。所以为了使它不从容器中被推出，我们必须加上一个力 F 。问题在于要用多大的力？表示力的一种方法是考察每单位面积上的力：如果 A 是活塞的面积，那么作用在活塞上的力可以写成某个数乘以面积。于是，我们定义压强为加在活塞上的力除以活塞的面积

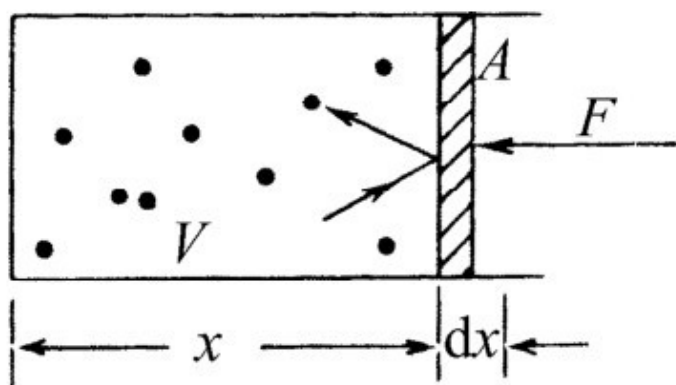


图39-1 一个具有无摩擦活塞的容器中的气体原子

$$P = \frac{F}{A}. \quad (39.1)$$

为了更好地理解这个概念（为其他目的我们也曾推导出它），必须注意由于使活塞移动距离 $(-dx)$ 压缩气体时，对气体所作的元功 dW ，应当是力乘以压缩的距离，而按照式(39.1)，就是压强乘以面积再乘以距离，即压强乘体积变化的负值

$$dW = F(-dx) = -PA dx = -P dV. \quad (39.2)$$

（面积 A 乘以距离 dx 等于体积的变化）。这里的负号是因为气体受压缩时，它的体积减小；如果考虑到这一点，就可以看出在气体受到压缩时，外界对它做了功。

我们必须施加多大的力来平衡分子的碰撞呢？活塞从每次碰撞中获得一定的动量。每秒钟都有一定的动量倾注在活塞上，使它开始运动。为了使活塞保持不动，必须从我们的力中每秒钟输回给它同样大小的动量。当然，这个力正是我们每秒钟必须输送给它的动量的数量。还可以用另一种方法来考虑这个问题：如果让活塞自由活动，它将由于碰撞而获得速率；而每一次碰撞都使速率增大一点，这样它就不断地受到加速。活塞的速率的增加，或者说加速度正比于作用在它上面的力。于是我们看到这个力等于由于分子[1]的碰撞每秒钟传给活塞的动量，而我们前面已经谈到过它等于压强乘以面积。

计算每秒钟施加给活塞的动量是不难的，我们可以分两步来求：首先，找出一个特定的原子在和活塞的一次碰撞中传给活塞的动量，然后，再乘上每秒钟原子与活塞壁发生碰撞的次数。力就是这两个因子的乘积。现在我们来看看两个因子是怎样的：首先，我们假定活塞对原子来说是一个理想的“反射体”，否则，整个理论就是错误的，活塞将开始变热，事情将发生变化。但是最后，当平衡建立后，总的效果是碰撞仍是有效的完全弹性碰撞。平均而言，每个粒子飞来和离开时都带有相同的能量。我们想象气体处在稳定的状态下，并且由于活塞静止不动，所以对于活塞我们没有损耗能量。在这种情况下，如果某一质量的粒子以一定的速率飞来，它也以同样的质量和同样的速率离开。

如果原子的速度为 $\mathbf{v}$ ， $\mathbf{v}$ 的 x 分量为 v_x ，则“入射”粒子动量的 x 分量为 mv_x ；“出射”粒子动量的分量和它相等，这样，粒子在一次碰撞中施加给活塞的总动量是 $2mv_x$ ，因为这个粒子是被“反射”回来的。

现在，我们要知道每秒钟内原子与活塞的碰撞次数；或者说 dt 时间内的碰撞次数，然后再除以 dt 。有多少原子打上去呢？我们假设在体积 V 中有 N 个原子，即单位体积内的原子数为 $n=N/V$ 。为了找出有多少个原子打在活塞上，我们注意到，给定一个时间 t ，若某个粒子离活塞足够近，并且具有一定的指向活塞的速度，就能在这段时间 t 内碰上活塞。如果它离活塞太远，那么在时间 t 内只能向着活塞跑过一段路程，而不能到达活塞。非常清楚，只有离活塞的距离在 $v_x t$ 之内的那些分子，才会在时间 t 内打在活塞上。因而在时间 t 内的碰撞次数等于在距离为 $v_x t$ 内的区域里的原子数，并且由于活塞的面积是 A ，所以能在时间 t 内碰到活塞的原子所占有的体积是 $v_x t A$ 。但是碰撞到活塞的原子数等于这个体积乘以单位体积的原子数，即为 $nv_x t A$ 。当然，我们并不要求时间 t 内的碰撞次数，而是每秒钟的碰撞次数，因而只要除以时间 t ，就得到 $nv_x A$ （这个时间 t 可以很短；如果我们觉得需要更精确一些，可以称它为 dt ，然后再求微商，但结果是相同的）。

这样，我们求得力为

$$F = nv_x A \cdot 2mv_x. \quad (39.3)$$

可见，若保持粒子密度不变，而改变面积，则力与面积成正比。于是压强为

$$P = 2nmv_x^2. \quad (39.4)$$

不过我们注意到在这个分析中有一些小小的麻烦：首先，并非所有分子都具有同样的速度，而且它们并不都以同样的方向运动。因

而，所有这些 v_x^2 项都不相同！因为每个分子都有它自己的贡献，所以，我们要做的自然是对这些 v_x^2 取平均。即我们要求的是 v_x 平方对所有分子的平均值

$$P = nm \langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

这里我们是不是忘了写上因子2？不，在所有的原子中，只有一半是朝着活塞跑的，另一半朝着相反的方向运动。对正的 v_x ， v_x^2 的平均值等于对所有 v_x 所求平均值的一半。

当原子向四面八方运动时，显然在“ x 方向”上没有什么特殊之处；原子同样可以上下、左右、前后地运动。因此在运动过程中，表征原子在一个方向上平均运动的 $\langle v_x^2 \rangle$ 值和在其他两个方向上的平均值全都相等

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

因此，只要稍微用一点点数学技巧就可看出，每一项等于这三项总和的三分之一，而这三项之和当然就是速率的平方

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}. \quad (39.7)$$

这个式子的方便之处在于我们毋须考虑任何特殊的方向，于是，可把压强公式重新写为

$$P = \left(\frac{2}{3} \right) n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (39.8)$$

把最后一个因子写成 $\langle mv^2/2 \rangle$ 是因为这是一个分子的质心运动的动能。由此我们得出

$$PV = N\left(\frac{2}{3}\right)\left\langle\frac{mv^2}{2}\right\rangle. \quad (39.9)$$

如果我们知道速率，用这个公式就可计算出压强有多大。

举一个十分简单的例子，我们考虑氦气或其他任何气体，例如水银蒸气，足够高温度下的钾蒸气或氙气，其中所有分子都是单原子分子，对这些单原子分子，我们可以假定在分子中没有内部运动。如果是复杂的分子，其中就可能存在某些内部运动，相互间的振动，等等。假设我们忽略这些运动（实际上，这些运动是很重要的，以后我们再回过头来考虑）；这样做还是可行的。由于我们假定原子内部的运动可以不考虑，质心运动的动能就是分子所具有的全部能量。所以，对于单原子气体，动能就是总能量。通常我们称 U 为总能量（有时也称 U 为总内能。我们或许会感到奇怪，因为对气体来说，并没有外能），它就是在气体中，或无论什么东西中所有分子的全部能量。

我们假设单原子气体的总能量 U 等于原子数乘以每个原子的平均动能，因为我们不考虑原子内部任何可能的运动或激发。于是，在这些条件下，我们有

$$PV = \frac{2}{3}U. \quad (39.10)$$

附带提一下，我们可以在这里停一下并找出下述问题的答案：假如我们缓慢地压缩盛在一个容器中的气体，要把体积压缩需要多大的压强？这不难求出，因为压强是总能量的三分之二再除以 V 。当我们压缩气体时，就对气体做功，因而增加了能量 U 。于是，我们就得到

了某种微分方程：如果我们从具有一定内能和一定体积的已知条件出发，那么就能求出压强。一旦我们开始压缩气体，内能就增加，同时体积减小，从而压强增大。

这样，我们就需要求解微分方程。我们马上就来解它。不过首先必须强调指出，在压缩这一气体时，我们假设所有的功都转变为增加气体内部原子的能量。我们可能会问：“这种假设是否有必要？它所做的功难道还会跑到别的什么地方去吗？”结果表明，它是能够跑到别的地方去的。有一种所谓通过器壁“漏热”的现象：当热的（即快速运动的）原子撞击器壁时，加热器壁，使能量跑出去。现在我们假定不发生这种情况。

为了略微更普遍一些，虽则我们仍然对气体作某些十分特殊的假设，我们将不写 $PV=2U/3$ ，而写

$$PV = (\gamma - 1) U. \quad (39.11)$$

按照习惯，把它写成 $(\gamma - 1)$ 乘以 U ，因为在以后处理的少数其他情况中， U 前面的因子不是 $2/3$ ，而是其他的数值。所以，为了更一般起见，我们称它为 $(\gamma - 1)$ ，因为人们已经这样称呼了近一百年了。对于像氦这样的单原子气体，因为 $(5/3 - 1)$ 是 $2/3$ ，所以 γ 等于 $5/3$ 。

我们已经注意到，压缩气体时所做的功是 $-P dV$ 。既不加入热能也不取走热能的压缩过程称为绝热（adiabatic）压缩，它是由希腊字a（不）+dia（穿）+bainein（过）而来的。（“绝热”这个词在物理中有几种不同的用法，有时很难看出它们之间有什么共同含义。）这就是说，对于绝热压缩，所作的全部功都转变为内能。没有其他能量损

失——这就是关键，因而我们有 $P dV = -dU$ 。但因 $U = PV / (\gamma - 1)$ ，可得

$$dU = \frac{PdV + VdP}{\gamma - 1}. \quad (39.12)$$

因而我们有 $P dV = - (P dV + V dP) / (\gamma - 1)$ ，或者整理一下，得

$$\gamma P dV = -V dP$$

或

$$\frac{\gamma dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \quad (39.13)$$

幸运的是，假定 γ 是常数（比如对单原子气体），我们就能进行积分：即 $\gamma \ln V + \ln P = \ln C$ ，这里 C 是积分常数。对两边取指数，就得到定律

$$PV^\gamma = C \text{（常数）}. \quad (39.14)$$

换句话说，在绝热条件下，在气体的压缩过程中，由于没有热量流失，因而温度升高，对单原子气体来说，压强乘以体积的5/3次方是一个常数！虽然我们是从理论上推出这个结论的，但事实上，单原子气体在实验上的表现也是如此。

§39-3 辐射的压缩性

我们可以举另一个气体分子动理论的例子，它在化学上用得不多，但在天文学上有用。设有一个装有大量光子的容器，其中温度非

常高（当然，高热恒星中的气体就可看成是这样的容器。太阳还不够热；在那里仍有太多的原子，但是在某种更热的恒星中，会有更高的温度，我们可以忽略原子，而假设在容器中唯一的客体是光子）。而光子具有一定的动量 $\mathbf{p}$ （当我们学习分子动理论时，会一再遇到麻烦： p 既是压强，又是动量； v 既是体积，又是速度； T 既是温度，又是动能、时间或者力矩；我们必须保持警惕）。这里 $\mathbf{p}$ 是动量，是矢量。按照与前面相同的分析，正是矢量 $\mathbf{p}$ 的 x 分量产生“反冲”的，矢量 $\mathbf{p}$ 的 x 分量的两倍是在反冲中给出的动量。于是 $2p_x$ 代替了 $2mv_x$ ，而在计算碰撞次数时， v_x 仍为 v_x ，这样当我们继续采取以前的所有步骤后，发现式（39.4）中的压强可用下式来代替

$$P = 2np_x v_x. \quad (39.15)$$

在作平均时，它变为 n 乘以 $p_x v_x$ 的平均值（因子2的情况同上），最后计入另外两个方向，我们求得

$$PV = \frac{N}{3} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle. \quad (39.16)$$

此式与（39.9）相符，因为动量是 $m\mathbf{v}$ ；只是它稍微更一般些，如此而已。总之，压强乘体积等于原子总数乘 $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})/3$ 的平均值。

对光子来说， $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ 是什么？动量与速度方向相同，而速度就是光速，所以这就是每个光子的动量与光速的乘积。每个光子的动量乘光速是它的能量： $E = pc$ ，因而这些项就是每个光子的能量，当然，我们应当取光子的平均能量乘光子数。这样， PV 的乘积是气体中能量的三分之一

$$PV = \frac{U}{3} (\text{光子气体}). \quad (39.17)$$

于是，对光子来说，由于前面的系数是1/3，即在式（39.11）中的 $(\gamma - 1)$ 是1/3，所以 $\gamma = 4/3$ ，因而我们发现容器内的辐射满足规律

$$PV^{4/3} = C \quad (\text{常数}). \quad (39.18)$$

从而我们知道了辐射的压缩性！这就是用在分析恒星上辐射压强贡献的关系式。这也是我们算出辐射压强的方法，它也表示当我们压缩光子气体时，压强是怎样变化的。瞧，多么奇妙的事情我们也都能处理！

§39-4 温度和动能

到现在为止我们还没有考虑温度；这个概念是我们有意回避的。在压缩气体时，分子的能量增加，我们通常就说气体变热了；现在我们想了解它和温度的关系。如果要做一个所谓等温而不是绝热的实验，该怎么办呢？我们知道，如果让盛有气体的两个容器彼此紧贴足够长时间后，甚至即使开始时它们处在我们称之为不同的温度之下，最后也将具有相同的温度。这意味着什么呢？这意味着它们将达到的状态就是如果我们让它们单独存在足够长时间后它们所应达到的那种状态！我们所说的相同温度指的正是当物体放在一起相互作用足够长时间后达到的最终状态。

如图39-2所示，假设在一个被可移动活塞分开的容器里放有两种气体，我们现在来考虑将会出现什么情况（为了简单起见，假定这两种气体都是单原子气体，如氦与氖）。在容器（1）中的原子质量为 m

v_1 ，速度为 v_1 ，单位体积原子数为 n_1 ，而在另一个容器（2）中，原子质量为 m_2 ，速度为 v_2 ，单位体积原子数为 n_2 。它们的平衡条件是什么？

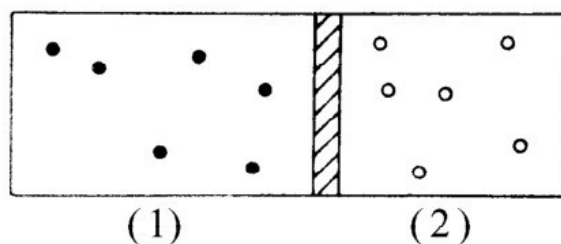


图39-2 两种不同的单原子气体的原子被一可移动的活塞隔开

很明显，从左边来的碰撞必定会使活塞向右移动，并且压缩另一边的气体，使它的压强升高，从而活塞来回移动，逐渐停在某个使两边压强相等的位置上。所以我们可以使压强相等；而这正意味着单位体积的内能相等，或者说每一边的单位体积原子数 n 与平均动能的乘积彼此相等。最后，我们想要证明的是，这些数目本身也相等。到目前为止我们所知道的只是，根据式（39.8），由于压强相等，所以原子数乘平均动能相等

$$n_1 \left\langle \frac{m_1 v_1^2}{2} \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{m_2 v_2^2}{2} \right\rangle.$$

我们必须了解到这并不是经过长时间后所达到的唯一的条件，当相应于温度相等的真正完全的平衡建立起来时，还必将发生某些更缓慢的过程。

为了搞清楚这种概念，假设作用在左边的压强是在高密度和低速度的情况下产生的。具有大的 n 和小的 v ，与具有小的 n 与大的 v 可以

得出同样的压强。原子可能运动得很慢，但挤得很紧密，也可能密度较小，但撞击力很强。它能永久地像这样继续下去吗？一开始我们可能这样想，但是再思考一下就会发现我们忘掉了一件重要的事情。也就是说，中间的活塞不再受到一种稳定的压力；正像我们一开始就讲过的人的耳膜那样，因为撞击不是绝对均匀，它左右摆动。结果没有获得持续、稳定的压力，而是不断地敲击——压强在变化，因而活塞轻轻地晃动。假定右边的原子晃动得不太大，而左边的原子数较少，原子间隔较远，但带有较大的能量，那么，活塞将会从左边得到一个较大的冲量，因而将驱动右边缓慢运动的原子，使它们获得更大的速率（每当原子与活塞碰撞时，它不是得到就是失去能量，取决于原子敲打在活塞上时活塞向哪个方向运动）。这样，由于碰撞的结果，活塞本身就反复地晃动，而这会使其他气体震动——它将能量传给了另一些原子，使它们运动得更快，直到与活塞所引起的晃动相平衡为止。当活塞以这样的平均速率运动，使它在单位时间内从原子获得的能量和它送回给原子的能量的比率大致相等时，系统就达到某种平衡。这样，活塞在速率上就获得一定的平均不规则性，这正是我们要找的。当我们找到它以后，就能更好地解决问题，因为这些气体将调节它们的速度，直到在单位时间内通过活塞彼此交换的能量变成相等为止。

在这种特殊情况下，要描述活塞运动的细节是十分困难的；虽然理解起来非常简单，但分析起来却比较困难。在我们分析这个问题以前，我们先来分析另一个问题：设有一个容器，其中包含由两种不同分子组成的气体，两种分子的质量分别为 m_1 及 m_2 ，速度为 v_1 及 v_2 ，等等；现在就有了一种更为密切的关系。如果所有的第二种分子都静止不动，那么这种情况将不会延续下去，因为它们受到第一种分子的碰撞，从而获得速度。如果所有的第二种分子都运动得比第一种分

子快，那么这种情况也不会持续多久，它们将反过来把能量传给第一种分子。所以当在同一容器中存在两类气体时，问题就是要求出确定两者之间的相对速度的规则。

这仍然是一个十分困难的问题，我们将这样来解决。首先，我们考虑下面一个附属问题（这又是那种情况之一——别管推导——最终的结果很容易记住，但推导方式却是十分巧妙的）。假设有两个质量不同的分子发生碰撞，我们在质心（CM）系来考察这个碰撞。为了避免复杂性，我们在质心观察碰撞。由碰撞过程中动量和能量守恒定律可知，两个分子碰撞后，它们运动的唯一可能方式是各自保持原来的速率，即只改变它们的方向。所以，我们就有了一种看来像图39-3所示的一般碰撞。假设我们暂时从静止的质心系观察所有这类碰撞，并且设想这些分子起初全都沿水平方向运动。当然，在第一次碰撞后，其中有一些以某一角度运动。换句话说，如果起初它们全都沿水平方向运动，那么以后至少会有一些沿垂直方向运动。而在某些其他碰撞中，它们可能来自其他方向，然后又以另外的角度运动。因而即使在开始时分子都排成一个方向运动，它们也会向所有的角度飞离，飞离的分子还将飞离更多次，如此继续下去。最终将怎样分布呢？答案是：任何一对分子沿空间任何方向运动的可能性是相等的。此后进行的碰撞也不会改变这个分布。

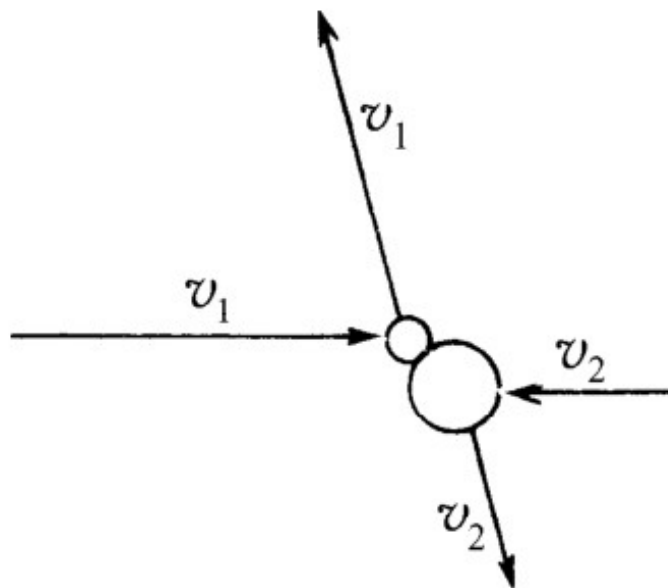


图39-3 从质心系来看两个不同分子间的碰撞

分子沿所有方向运动的机会是相等的，不过我们怎样来表示这一点呢？当然，它们不可能沿某一特定方向运动，因为某一特定方向过于严格，所以我们必须说每单位“某某”。我们的概念是在以碰撞点为中心的球面上，通过任何一块面积的分子数正好等于通过在球面上任何其他相等面积的分子数。因而碰撞的结果将使分子的方向这样分布，使得球面的每个相等的面积有相同的分子通过。

附带说一下，如果我们只要讨论原来的方向和某个与它成角度 θ 的其他方向，那么，有趣的是单位半径球的面积元为 $\sin\theta \, d\theta$ 乘以 2π （图32-1），这正是 $-\cos\theta$ 的微分乘以 2π 。它意味着任意两个方向间夹角 θ 的余弦取-1至+1间的任意值的可能性是相同的。

下面我们来考虑实际情况，这时不是质心系中的碰撞，而是两个速度矢量分别为 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$ 的原子跑到一起的碰撞。这时会发生什么情况呢？我们可以对这个带有速度矢量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的碰撞分析如下：

首先，有一个质心，质心的速度是权重和质量成正比的“平均”速度，即质心的速度是 $\mathbf{v}_{\text{CM}} = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2)$ 。如果我们在质心系中观察这个碰撞，那么我们看到的碰撞正如图39-3所示，彼此以一定的相对速度 $\mathbf{w}$ 靠近。相对速度正好是 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 。现在，我们的想法是，首先，整个质心在运动，在质心系中有一个相对速度 $\mathbf{w}$ ，接着，分子碰撞后按某个新方向离开。所有这些都是在质心系保持原来运动时发生的，没有任何变化。

那么，由此而产生的分布是怎样的呢？由前面的论证我们断定：在平衡时，相对于质心的运动方向来说， $\mathbf{w}$ 在一切方向的可能性相同^[2]。结果，相对速度的方向与质心运动方向之间没有任何特殊联系。当然，如果有，碰撞也会破坏这种联系，直到全部破坏掉为止，因而 $\mathbf{w}$ 与 $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ 之间夹角之余弦的平均值是零，即

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} \rangle = 0. \quad (39.19)$$

但 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}}$ 可用 $\mathbf{v}_1$ 及 $\mathbf{v}_2$ 表示为

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}. \quad (39.20)$$

我们看看 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ 这项； $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ 的平均值是什么？也就是说，一个分子的速度在另一个分子的速度方向上的分量的平均值是多少？显然，找到以一种方式运动的任何给定的分子的可能性与找到以另一种方式运动的给定的分子的可能性相同。速度 $\mathbf{v}_2$ 沿任意方向的平均值是零。所以，在 $\mathbf{v}_1$ 方向上， $\mathbf{v}_2$ 的平均值显然为零。因而 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ 的平

均值就是零！由此能推知 $m_1 v_1^2$ 的平均值必须等于 $m_2 v_2^2$ 的平均值。这就是说，两个分子的平均动能必定相等

$$\left\langle \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\rangle. \quad (39.21)$$

如果在气体中有两种原子，那么可以证明，而且我们相信已经证明当它们两者都处在同样气体、同样容器内，并且处于平衡状态时，则一种原子的平均动能与另一种原子的平均动能相等。这意味着，重的原子将较轻的原子运动得慢一些；这不难用气垫中不同质量的“原子”的实验证明。

现在我们再进一步断言，如果在一个容器内有两种不同的分开的气体，当它们最后达到平衡时，即使不在同一容器内，它们也将具有相同的平均动能。我们可以用几种方法来论证。一种论证方法假定在容器内有一块固定的上面开有一个小孔的隔板（图39-4），使得一种气体可以通过小孔漏出去，而另一种气体则因为分子太大而不能漏出。当达到平衡时，我们知道，在混合的那部分气体中，它们具有同样的平均动能，而通过小孔的那些分子没有失去动能，因而在纯气体中的平均动能和在混合气体中的平均动能必然相等。这个论证还不太令人满意，因为可能不存在把一种气体分子与另一种气体分子分开的小孔。

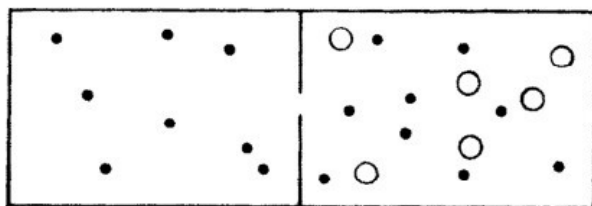


图39-4 两种气体在一个具有半透膜的容器中

现在我们回到活塞的问题上来。我们可以提出一个论证来说明这个活塞的动能必定也是 $m_2 v_{2x}^2/2$ ，实际上，这就是由活塞作纯粹水平运动引起的动能，这样，如果忽略它的上下运动，它所具有的动能同样必然是 $m_2 v_{2x}^2/2$ 。类似地，从另一边的平衡条件，又可证明活塞的动能是 $m_1 v_{1x}^2/2$ 。即使当活塞并不处于气体中央，而是在气体的一边时，虽然证明略为困难一些，我们仍然可以作出同样的论证，也就是由于所有碰撞的结果，活塞的平均动能与气体分子的平均动能彼此相等。

如果这样做还不满意，可以设想一种人为的例子，认为平衡是由一个能打到所有各边的物体产生的。假定我们有一根每一端都有一个小球的短棒，它穿过活塞插在一个无摩擦的滑动万向接头上。每个小球都像一个分子那样是圆的，可以接受所有方向上的撞击。整个物体的总质量是 m 。现在，和之前一样，气体分子的质量各为 m_1 与 m_2 。用前面的分析可知，碰撞的结果是，由于受一边分子的撞击， m 的动能平均说来是 $m_1 v_1^2/2$ 。类似地，由于受另一边分子的撞击， m 的动能平均说来必然是 $m_2 v_2^2/2$ 。所以，当它们处于热平衡时，两边必定有相同的动能。因而，虽然我们只对混合气体证明了这一点，但很容易推广到在同样温度下的两种不同的、分离的气体中去。

这样，当两种气体处于相同温度时，质心运动的平均动能相等。

分子的平均动能只是“温度”的一种特性，由于它只是“温度”的特性，而不是气体的特性，因而我们可以利用它作为温度的定义。于是分子的平均动能即为温度的某种函数。但是，谁来告诉我们温度该用什么尺度呢？我们自己可以任意地定义温度的尺度，使得平均动能和温度成线性正比关系。要做到这一点最好的办法就是把平均动能本身

叫做“温度”。这是一个最简单的函数。遗憾的是，温度的尺度已经按其他方式选定了，所以我们不直接把平均动能称为温度，而是在分子的平均动能与所谓开尔文绝对温度一度之间加上一个常数的转换因子。比例常数是 $k=1.38\times 10^{-23}$ J/K^[3]。因此，如果 T 是绝对温度，按我们的定义，分子的平均动能*是 $3kT/2$ （ $3/2$ 是为了方便而引入的，以便在其他地方去掉它）。

我们指出和运动沿任何特定方向的分量相联系的动能是 $kT/2$ 。因为平均动能包含三个独立的运动方向，所以总和为 $3kT/2$ 。

§39-5 理想气体定律

当然，现在我们可以把温度的定义代入式（39.9）中，从而找到气体压强与温度之间的函数关系：即压强乘体积等于原子总数乘以普适常数 k 再乘以温度

$$PV=NkT. \quad (39.22)$$

而且，在同样的温度、同样的压强与同样的体积下，原子数是确定的；这也是一个普适常数！所以，根据牛顿定律，在同样的温度和同样的压强下，相同体积的不同气体中具有相同的分子数。这是一个令人惊异的结论！

实际上在处理分子时，因为分子数量太大，化学家人为地选择了一个特定的很大的数目，而给它一个名称，称为1摩尔（mol），1 mol只是个方便的数。为什么他们不选 10^{24} 个分子这样的偶数，这只是个历史问题而已。化学家为了方便起见恰巧选择了标准情况下的分子数

$N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ ，而称它为1 mol的分子数。所以化学家并不是以分子为单位来测量分子数，而是以摩尔数^[4]来测量的。根据 N_0 可以写出摩尔数，乘上1 mol中原子数，再乘以 kT ，而且如果我们需要的话，可以取1 mol的原子数乘以 k ，那就是1 mol的 k 值，而把它叫做其他的什么，我们叫它 R 。1 mol的 k 是8.317 J： $R = N_0 k = 8.317 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。这样我们也发现气体定律可写为摩尔数（也称为 N ）乘以 RT ，或原子数乘 kT

$$PV = NRT. \quad (39.23)$$

它们是完全一样的，只是测量数目的尺度不同而已。我们用1作为单位，而化学家用 6×10^{23} 作为单位！

现在我们对气体定律再作一点说明，这与非单原子分子组成的气体的定律有关。我们只处理了单原子气体的原子的质心运动。如果还有一些力存在，会出现什么情况呢？首先，考虑活塞被一水平方向的弹簧拉住的情况，这时，有力作用于活塞上。当然，在任何时刻，原子与活塞间的无规则晃动的交换都和这时的活塞位置无关。平衡条件是相同的。无论活塞在哪里，它的运动速率都能刚好正确地将能量传递给分子。弹簧的存在与否并没有任何不同。平均说来，活塞运动应取的速率是相同的。因而，在一个方向上动能平均值是 $kT/2$ 的这个定理，无论有无力存在，都是正确的。

例如，考虑由原子 m_A 和 m_B 组成的双原子分子的情况。我们已经证明了 A 部分的质心运动与 B 部分的质心运动有下列关系

$$\left\langle \frac{1}{2} m_A v_A^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_B v_B^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT.$$

如果它们合在一起后，是否也会如此呢？虽然它们合在一起，当它们在那里不断自转和旋转，当别的分子撞击它们，和它们交换能量时，唯一要计入的因素是分子跑得多快。只有这一点才确定了它们在碰撞中交换的能量有多快。在那一瞬间，力不是主要的，因此即使有力存在，同样的原理也是正确的。

最后，我们证明，不考虑分子内部运动时，气体定律同样成立。实际上以前我们并没有包括内部运动，只研究了单原子气体。但现在我们将证明，如果把整个系统考虑成一个总质量为 M ，具有质心速度的单个物体的话，则

$$\left\langle \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (39.24)$$

换句话说，我们既可以考虑分开的部分，也可以考虑整体！原因在于：双原子分子的质量是 $M = m_A + m_B$ ，而质心速度等于 $v_{\text{CM}} = (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B) / M$ 。现在要求出 $\langle v_{\text{CM}}^2 \rangle$ 。取 $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ 的平方，得

$$v_{\text{CM}}^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

在两边各乘以 $M/2$ ，然后取平均，可得

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 \right\rangle &= \frac{m_A \frac{3}{2} kT + m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle + m_B \frac{3}{2} kT}{M} \\ &= \frac{3}{2} kT + \frac{m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle}{M}.\end{aligned}$$

[我们用到了 $(m_A + m_B)/M = 1$]。现在， $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle$ 是多少（最好是零）？为了求出结果，我们利用原先的假定，即相对速度 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ 不会特别偏向于哪个方向，也就是说，它在任何方向上的平均分量均为零，即

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} \rangle = 0.$$

但 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}}$ 是什么？它是

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \cdot (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B)}{M} = \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A) \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle - m_B v_B^2}{M}.$$

因此，由于 $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$ ，平均后将第一项与最后一项消去，只剩下

$$(m_A - m_B) \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0.$$

如果 $m_A \neq m_B$ ，就可得出 $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0$ ，因此，将整个分子的总体运动考虑成一个质量为 M 的单个粒子运动时，它所具有的平均动能等于 $3kT/2$ 。

我们附带也证明了，如果不考虑质心的整体运动，则双原子分子内部运动的平均动能也是 $3kT/2$ ！因为分子各部分的总动能是

$m_A v_A^2/2 + m_B v_B^2/2$ ，而其平均值是 $3kT/2 + 3kT/2 = 3kT$ 。而质心运动的平均动能是 $3kT/2$ ，因而分子中两个原子的转动与振动的平均动能是它们之差，也等于 $3kT/2$ 。

关于质心运动平均动能的定理是普遍的：当把任何物体考虑为一个整体时，无论是否有力存在，在这个物体的每个独立的运动方向上，其平均动能都是 $kT/2$ 。这些“独立的运动方向”有时也称为系统的自由度。由 γ 个原子组成的分子的自由度数是 3γ ，因为每个原子都需要有三个坐标来确定它的位置。分子的总动能既可以表示为各个原子的动能的和，也可以表示为质心运动的动能与内部运动的动能之和，后者有时可以表示为分子转动动能与振动动能之和，但这是一个近似。把我们的定理应用到 γ 个原子的分子时表明，分子平均动能将是 $3\gamma kT/2$ ，其中 $3kT/2$ 是整个分子的质心运动的动能，其余的 $3(\gamma - 1)kT/2$ 则是分子内部的振动与转动动能。

[1] 原文如此，在本节文字中，作者有时似将分子和原子这两个概念混用。——译者注

[2] 这个曾为麦克斯韦所采用的论证含有某些微妙之处。虽然结论是正确的，但这个结果并不能纯粹从我们前面用过的对称性的考虑得出，因为过渡到在气体中运动的参考系时，我们可以得到一个改变了的速度分布。但我们还未找到这个结果的简单证明。

[3] 摄氏温标与开尔文温标一样，但 0°C 选在 273.16 K ，所以 $T = 273.16 + \text{摄氏温度}$ 。

[4] 化学家所说的分子量是指 1 mol 的分子以克计量的质量。 1 mol 是这样定义的，即使 1 mol 碳同位素 ^{12}C （也就是说，原子核内有六个质子和六个中子）的质量正好是 12克 。

第40章 统计力学原理

§40-1 大气的指数变化律

我们已经讨论了大量相互碰撞的原子的某些性质。这个课题称为分子动理论，它是从原子碰撞的观点出发来描写物质的。从原则上来说，我们认为物质的总体性质都应当能借助于它的组成部分的运动来加以解释。

目前，我们只限于讨论热平衡状态，这只是所有自然现象中的一部分，我们把只能应用于热平衡状态的力学定律称为统计力学，在这部分中我们要学会这门学科中的某些主要定理。

其实，我们已经有了一个统计力学的定理，即在绝对温度 T 时，任何运动中的每个独立运动的动能，即每个自由度的动能的平均值都是 $kT/2$ 。它告诉了我们有关原子的方均速度的某些知识。我们现在的問題是要对原子的位置知道得更多一些，以便找出在热平衡情况下在不同的位置上的原子数是多少，并且还要对速度分布作稍微详细的研究。虽然我们知道了方均速度，我们还不知道怎么回答比方均根速率快三倍的分子数有多少，或者速率为方均根速率的四分之一的分子有多少之类的问题，或者它们全体的速率都完全相同吗？

所以，我们试图回答的两个问题是：当力作用在分子上时，分子在空间位置上是怎么分布的？它们的速度分布如何？

结果表明，这两个问题是完全独立的。速度的分布总是一样的。当我们发现，不管有无力作用于分子上，每个自由度的平均动能相同，都为 $kT/2$ 时，对速度分布的问题就得到了一个提示。分子的速度分布与力无关，因为碰撞率不依赖于力。

我们以既没有风又没有其他扰动时，像我们所处的那种大气层中分子的分布作为一个例子来开始讨论。假设有一伸展得很高的气柱处在热平衡状态——这就不像我们的大气层，因为我们知道，实际的大气层越向上越冷。这里必须强调指出如果在不同高度上温度各不相同，那么我们可以用一根棒将底部小球与顶部小球连接起来的方法（图40-1）说明气体没有达到热平衡。这些小球从底部的分子中获得 $kT/2$ 的动能，然后通过棒使顶部的小球振动再使顶部的分子振动。当然，这样，最后在重力场中的所有高度上，温度变得相同。

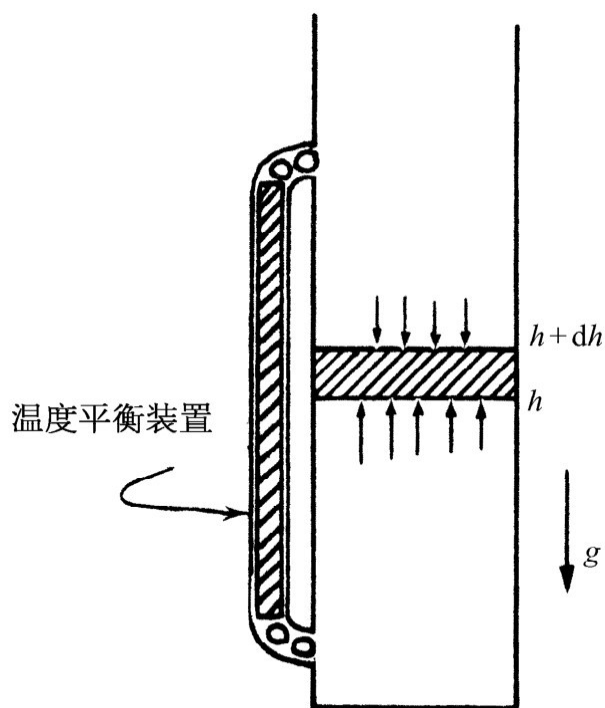


图40-1 高度 h 处的压强必定超过高度 $h + dh$ 处的压强，两者之差等于这两层间气体的重量

如果在所有高度上温度都相同，现在的问题是要找出当高度加大时，大气是按什么规律变得稀薄的。设 N 为在压强 P 下，体积 V 中的气体分子总数，则有 $PV=NkT$ ，或 $P=nkT$ ，这里 $n=N/V$ 是每单位体积中的分子数目。换句话说，如果我们知道每单位体积中的分子数目，就知道了压强，反之亦然。因为在这种情况下，温度不变，它们彼此成正比关系。但是压强并不是常数，它必定随着高度的减小而增加，因为可以这么说，它必须维持在这个高度以上的所有气体的重量。这是一条我们可以用来确定压强随高度如何变化的线索。如果在高度 h 上取单位面积，那么由下往上垂直作用在这个单位面积上的力就是压强 P 。在无重力时，在高度 $h+dh$ 上向下作用在单位面积上的竖向力应当也是 P ，但现在却不是，因为有重力，所以从下往上的力必须超过从上往下的力，超过的部分等于在 h 到 $h+dh$ 之间那部分气体的重量。现在，由于作用在每个分子上的重力是 mg ，其中 g 是重力加速度，而在单位截面上的分子总数是 $n dh$ ，于是我们就得到以下微分方程

$$P_{h+dh} - P_h = dP = -mgn dh .$$

因为 $P=nkT$ ， T 是常数，我们可以或者消去 P 或者消去 n ，比如消去 P ，得微分方程

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT}n .$$

它告诉了我们高度增大时，分子密度将如何下降。

这样，我们就得到了一个分子密度 n 随高度变化的方程，这里，密度的微商正比于它本身。某个函数的微商正比于它本身时，它就是

一个指数函数，所以这个微分方程的解是

$$n = n_0 e^{-mgh / kT}. \quad (40.1)$$

这里积分常数 n_0 显然是在 $h=0$ （我们可以任意选定）的地方的分子密度。分子密度随着高度的上升而指数地衰减。

注意若有质量不同的不同种类的分子，则它们将作不同的指数衰减，较重的分子随高度衰减得比较轻的分子来得快。因而可以预期，由于氧比氮重，在含有氧和氮的大气层中越往上，氮所占的比例越大。但在实际的大气层中，这种情况并没有真正发生，至少在相当的高度上没有发生，这是因为空气中有很多搅动，它使各种气体重新混合在一起。它不是一个等温的大气层。然而，对于较轻的物质，比如氢气，确实有一种在大气层极高的地方占统治地位的趋势，因为当其他的物质都指数地衰减完时，质量最小的却依然存在（图40-2）。

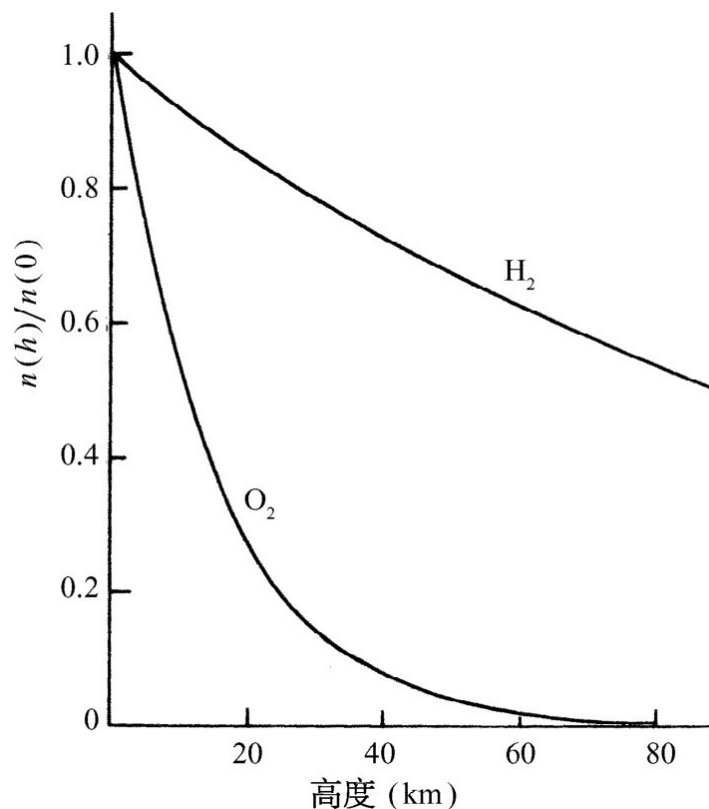


图40-2 温度恒定时，地球重力场中氧和氢的归一化密度与高度的关系

§40-2 玻尔兹曼定律

这里我们注意到一个有趣的事实，在式（40.1）中指数的分子是原子的势能。因此我们也可以将这条特殊定律表述为：在任何一点的密度正比于

$$\exp [- (\text{每个原子的势能}) / kT] .$$

这或许是偶然的，也就是说，可能只对均匀重力场的特殊情况才成立。然而，我们可以证明，这个命题是很普遍的。假定作用在气体分子上的力不是重力，而是其他某种力。比方说，分子可以带电，它们可能受到电场的作用或别的电荷的吸引，由于原子彼此间的相互吸

引，或者分子与器壁、固体或某个东西的相互作用，存在某种随位置而变化的吸引力，它作用在所有分子上。为了简单起见，现在我们假定分子全都相同，在每一个分子上都有力的作用，因而作用在一小部分气体上的总的力就是分子数乘以作用在每个分子上的力。同时为了避免不必要的麻烦，假设我们所选择的坐标系的 x 轴沿力 $\mathbf{F}$ 的方向。

和先前一样，如果我们在气体中取两个相隔为 dx 的平行平面，那么，作用在每个原子上的力乘以每立方厘米的原子数 n （前面的 nmg 项的推广），再乘以 dx ，必须与压强的改变量相平衡

$$Fn \, dx = dP = kT \, dn .$$

或者，也可以将这个规律写成我们以后要用的形式

$$F = kT \frac{d}{dx}(\ln n). \quad (40.2)$$

现在，注意到 $-F \, dx$ 是使分子从 x 跑到 $x + dx$ 我们所要做的功，如果 F 由势而来，也就是说，如果所做的功完全可以用势能来表示的话，那么这也就等于势能（P.E.）之差。势能微分的负值就是所做的功 $F \, dx$ ，因而得出

$$d(\ln n) = - \frac{d(\text{P. E.})}{kT}.$$

积分后，

$$n = (\text{常数}) \, e^{-\text{P.E.}/kT}. \quad (40.3)$$

因此我们在特殊情况下得到的结果在一般情况下也是正确的〔假如力不能由势函数得出的话又会怎样？那时式（40.2）根本没有解。当原子沿一条闭合路径走一圈后，做功不为0，能量可以产生或消失，因而根本不能保持平衡。如果作用在原子上的外力不是保守力，不存在热平衡〕。式（40.3）就是玻尔兹曼定律，它是统计力学的另一条原理：在一种给定的空间排列下找到分子的概率按这种排列的势能的负值除以 kT 作指数的变化。

这就给出了粒子分布：假定在液体中有一个正离子，它将负离子吸引在周围，那么在不同的距离上吸引的负离子有多少呢？如果势能作为位置的函数是已知的，那么在不同距离上粒子的分布比例就可由上面的定律给出。对于这类问题，玻尔兹曼定律有许多应用。

§40-3 液体的蒸发

在更深入一步的统计力学中，人们试图解决下面这样一个重要问题。考虑一个彼此吸引的分子的集合，假定任何两个分子，比如 i 和 j 之间的作用力只依赖于它们的距离 r_{ij} ，并且可以用一个势函数 $V(r_{ij})$ 的微商来表示。图40-3表示这样一种函数可能具有的一种形式。对 $r > r_0$ ，当分子靠近时能量减少，因为它们互相吸引，以后，当它们再靠近时，能量则迅速增加，因为它们强烈地相互排斥。大致地说，这表征了分子的行为。

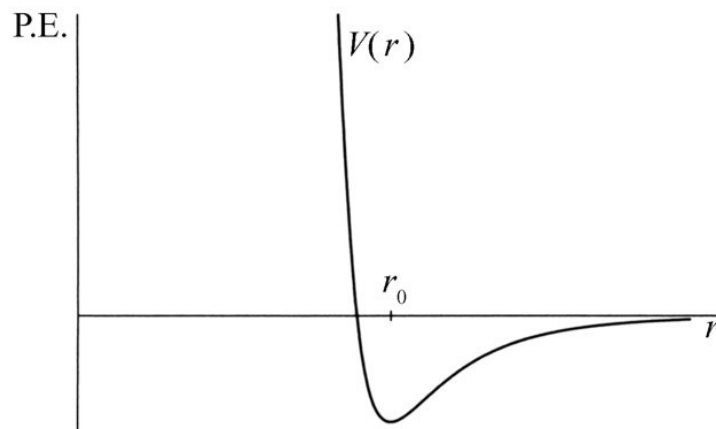


图40-3 两个分子的势能函数，势能只取决于两个分子之间的距离

现在假设有一个容器充满了这样的分子，我们希望知道，平均说来分子之间的位置将如何安排。答案是 $e^{-\text{P.E.}/(kT)}$ 。在这种情况下，假定分子间都是两体力，总势能就是对所有的分子对求和（在更复杂的情况下，可能存在三体力，但是，比如说在电学中，势能全部是成对出现的），于是，在 r_{ij} 的任何特定组合下找到分子的概率将正比于

$$\exp\left[-\sum_{ij} V(r_{ij})/kT\right].$$

现在，假如温度非常高，以致 $kT \gg |V(r_0)|$ ，则指数值几乎处处相对地都很小，因而找到分子的概率几乎与位置无关。我们取只有两个分子的情况为例， $e^{-\text{P.E.}/(kT)}$ 表示在各种不同的相互距离 r 的情况下找到它们的概率。很清楚，当势能为负的最大时，概率最大，而当势能趋于无限大时，概率几乎为零，这只在距离极小时才出现。这意味着，对于这样的气体原子来说，由于它们之间的排斥力很强，因而一个原子跑到另一个原子上面的概率为零。在每单位体积中，在点 r_0 处比在其他任何点找到分子的机会更大。大多少则取决于温度。如

果温度远大于分子处在 $r=r_0$ 和 $r=\infty$ 时的能量差，指数值几乎接近于1。在这种情况下，平均动能（约为 kT ）大大地超过势能，不会由于力的作用而造成很大的差别。但是当温度下降时，在“优越”的距离 r_0 上找到分子的概率相对于在其他任何距离找到分子的概率逐渐增加，事实上，如果 kT 远小于 $|V(r_0)|$ ，那么在 r_0 的邻域我们就有相对较大的正指数。换句话说，在一给定的体积中，较之彼此相距更远的距离来说，分子更加喜欢处在能量较少的距离上。当温度下降时，原子挤在一起，集结成群，凝缩成液体、固体和分子，当对它们加热时，它们又会蒸发掉。

为了精确地确定蒸发的状况，以及在给定条件下发生的情况，需要做下面两件事。第一，必须找出正确的分子作用力定律 $V(r)$ ，它必须由其他办法，比如由量子力学或者实验得到。而给定了分子作用力定律后，只要研究函数 $\exp[-\sum(V_{ij})/k]T$ ，就能找出数十亿分子的运动情况。使我们感到十分意外的是，尽管函数如此简单，概念如此清晰，给定了势以后，整个工作仍是无比复杂的，困难就在于变数的数目极其巨大。

尽管存在这样的困难，这个课题却是十分振奋人心而且趣味无穷的。这是人们常常称之为“多体问题”的一个例子，它确实是一件饶有趣味的事情。在这个简单公式中，包括了所有的细节，例如，关于气体的凝固，或固体可能采取的晶格的形式等。人们一直试图从这个公式找出各种解答。但数学困难是非常巨大的，困难不在于写出定律，而在于要处理如此大量的变数。

这就是粒子在空间的分布。实际上，经典统计力学就到此为止，因为如果知道了力，那么在原则上我们就能求出在空间的分布，而速

度分布是某种我们可以一次了结地找出的东西，而不是对于不同的情况而有所不同的东西。根本的问题在于从我们的形式解中找出特殊的信息，这就是经典统计力学的主要课题。

§40-4 分子的速率分布

下面我们继续讨论速度分布，因为有时了解以不同速率运动的分子数各有多少是有意义和有用的。为此，我们可以利用在研究大气层中的气体时已经发现的事实。取大气作为理想气体，正如我们在写出势能时已假设过的那样，而不考虑原子间的相互吸引的能量。在我们的第一个例子中所涉及的势能只有重力势能。当然，如果分子间存在作用力，可能会出现更复杂的情况。因而现在我们假设分子间没有作用力，并且暂时忽略碰撞，以后我们再回过头来说明为什么可以这样做。如图40-4所示，我们已经看到，在高度为 h 处的分子比高度为零处的分子要少；按公式（40.1），它们随高度而指数地下降。为什么在较高的地方分子数较少呢？难道不是所有在高度为零处向上运动的分子都能抵达高度 h 吗？不！因为在零处有一些往上运动的分子运动得太慢，它们不能爬过势垒到达 h 。由此，我们可以算出以不同速率运动的分子各有多少，因为从式（40.1）我们可以知道有多少分子缺乏足够的速率爬到高度 h 处。正是由于考虑了这一事实，因而在 h 处的分子密度比在零处的分子密度小。

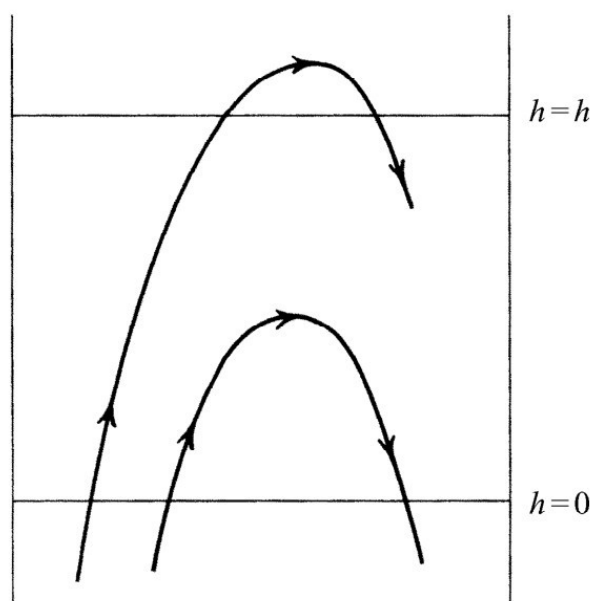


图40-4 只有那些具有足够速度的分子从 $h=0$ 向上移动才能够到达 h 的高度

现在，我们来更严格地表达这种想法。首先，我们来计算一下由下向上穿过 $h=0$ 的平面的分子数（把它的高度叫作零并不意味着在那个地方有这么一层隔板，这只是一个方便的编号，在负 h 处也有气体），这些气体分子沿着每一个方向运动，但其中有一些穿过平面，在任何时刻，它们中每秒钟总有一定数量的分子带着不同的速度自下而上地穿过该平面。现在我们注意到：令 u 为它们刚好能到达高度 h 处所需要的速度（动能 $\frac{1}{2}mu^2=mgh$ ），则每秒钟通过下面的平面向上运动，且速度在垂直方向上的分量大于 u 的分子数正好等于经过上面的平面、带有任何向上运动的速度的分子数。那些垂直速度不超过 u 的分子不可能到达上面的平面，所以，我们看到

穿过 $h=0$ ，且 $v_z > u$ 的分子数=穿过 $h=h$ ，且 $v_z > 0$ 的分子数。

但是，以任何大于零的速度穿过 h 的分子数小于以任何大于零的速度经过更低高度的分子数，因为零高度上的分子数更大；这就是我

们所需要的一切。经过我们以前作过的在大气中所有各处温度相等的论证以后，我们已经知道速度分布是相同的。由于速度分布相同，这正表明在越低的位置上有越多的分子，因而容易看到以正的速度穿过高度为 h 的分子数 $n_{>0}(h)$ 与以正的速度穿过高度为0的分子数 $n_{>0}(0)$ 的比值就是两种高度处密度的比值，即 $e^{-mgh/kT}$ 。但 $n_{>0}(h) = n_{>u}(0)$ ，且 $\frac{1}{2}mu^2 = mgh$ ，因此我们求得

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mu^2/2kT},$$

用文字来表达就是，速度的 z 分量大于 u 的分子每秒穿过高度为零处的单位面积的分子数，等于以大于零的速度穿过同一平面的分子总数乘上 $e^{-mu^2/2kT}$ 。

这不仅对于任意选定的零高度成立，对于其他任何高度当然也成立，可见速度的分布全都相同（最后的说法不包括高度 h ，它只是在论证中间出现）！这个结果为我们提供了速度分布的一般规律。它告诉我们，如果在一个汽笛上钻一个非常小的小孔，使得碰撞很少而且两次碰撞间相距很远，即比孔的直径大很多，那么各种分子跑出时将具有不同的速度，但速度大于 u 的分子所占的比例则是 $e^{-mu^2/2kT}$ 。

现在我们反过来讨论忽略分子碰撞的问题：为什么碰撞没有造成任何差别呢？我们可以采取同样的论证，不过不是对有限的高度 h ，而是对无穷小的高度 h ；这里 h 取得如此小，以致在零与 h 之间没有碰撞的余地。但这是不必要的；因为我们的论证明显地建立在对能量的分析和能量守恒上，而在碰撞时发生的无非是分子之间的能量交换。

然而，如果能量只是和其他的分子进行交换，那么实际上我们毋需注意所考虑的是否为同一个分子。因此，即使对问题作更详细的分析（当然，要做得很严格的话，这是很困难的），结果仍没有什么不同。

有趣的是我们所发现的速度分布只是

$$n_{>u} \propto \exp [-(\text{K.E.})/kT] . \quad (40.4)$$

这种通过给出以某一最小的速度 z 分量穿过某一给定面积的分子数的方式来描写速度分布的方法并不是给出速度分布的最方便的方法。例如，人们通常更想知道气体内在两个确定值之间以速度 z 分量运动的分子数有多少。当然，这不能直接由式（40.4）得出。我们想以更方便的形式表达前面的结果，虽然我们已经把式（40.4）写得很具一般性。注意：不能说任何分子精确地具有某种确定的速度；没有一个分子的速度正好是每秒1.796 289 917 3 m。因而为了使表述具有意义，我们只能问在某个速度间隔中可以找到的分子数目是多少。我们只能说速度介于1.796和1.797之间的分子有多少，等等。用数学术语来说，就是用 $f(u) du$ 表示速度在 u 与 $u+du$ 之间的分子占分子总数的百分比，也就是说（如果 du 是无穷小量的话） $f(u) du$ 代表所有那些速度为 u ，间隔为 du 的分子所占总数的比例。图40-5表示函数 $f(u)$ 的一种可能形式，宽为 du ，平均高度为 $f(u)$ 的阴影部分代表了这个百分比 $f(u) du$ 。也就是说，阴影面积与曲线下的总面积之比就是速度为 u ，而间隔为 du 的分子数相对于总分子数所占的比例。如果我们这样来定义 $f(u)$ ，使得速度在这个间隔中的分子所占的比例直接由阴影面积给出的话，那么总面积必然是百分之百，即

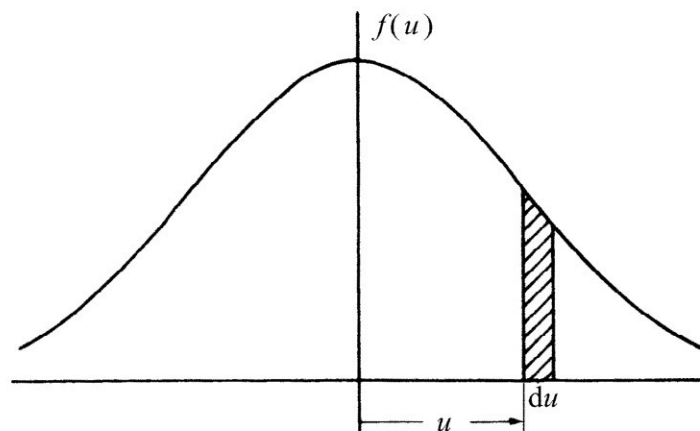


图40-5 速度分布函数。图中的阴影面积代表 $f(u) du$ ，即速度在 u 附近 du 范围内的粒子数在总粒子数中所占的分数

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$

现在只要把它和我们以前推得的结果进行比较，就能求出这个分布。首先我们问，怎样利用 $f(u)$ 来表示每秒钟内以大于 u 的速度通过某一面积的分子数？开始时我们或许以为这只是积分 $\int_u^{\infty} f(u) du$ ，但这是错的，因为我们要求的是每秒钟通过这一面积的分子数。可以这么说，快的分子比慢的分子通过的数目多，为了表示有多少分子经过，还必须乘以速度（在前一章中当我们谈到碰撞数时，曾讨论过这个问题）。在给定的时间 t 内，经过表面的分子总数是所有那些能够到达这个表面的分子数，也就是说来自与表面的距离为 ut 的分子数。所以能够到达的分子数并不单单是在那里的分子数，而是每单位体积的分子数乘上为了通过这块面积它们所走过的距离，而这段距离正比于 u 。于是我们要求的是 u 乘以 $f(u) du$ 的积分，这是一个下限为 u 的无穷积分，积分结果必须和我们以前得到的结果相同，即与 $e^{-mu^2/2kT}$ 成正比，比例常数将在后面求出

$$\int_u^{\infty} u f(u) du = \text{常数} \times e^{-mu^2/2kT}. \quad (40.6)$$

现在，若把这个积分对 u 求微商，我们就得到积分号内的东西，即得到被积函数（因为 u 是下限，所以要加上一个负号），而对另一边求微商，则得到 u 乘同一指数的函数（以及某个常数）。消去 u 后，有

$$f(u) du = C e^{-mu^2/2kT} du. \quad (40.7)$$

我们在两边都保留 du 是为了记住这是一个分布，它告诉我们在速度 u 与 $u+du$ 之间的分子所占的比例。

按式（40.5），常数 C 必须由积分值为1这个条件确定。现在我们可以证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}^*.$$

*为了计算这个积分的数值令 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ，则

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad \text{这是在 } xy \text{ 平面上的二重积分, 用极坐标可改写为:}$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

由此很容易求得 $C = \sqrt{m/2\pi kT}$ 。

因为速度与动量成正比，我们可以说动量的分布与每单位动量间隔的 $\exp [-(\text{K.E.})/kT]$ 成正比。结果发现，若用动量来表达的话，

这个定理在相对论中也成立。而用速度来表述则不行。所以，最好是学习它的动量形式而不是速度形式

$$f(p) dp = C e^{-K.E./kT} dp. \quad (40.8)$$

这样，我们发现在不同的能量（动能和势能）的条件下，它们的概率都可用 $\exp[-(\text{能量})/kT]$ 来表示，这是一个很容易记住的、十分出色的定律。

当然，到现在为止我们还只给出了“垂直”方向的速度分布。我们也可以问，分子沿另一个方向运动的概率有多大？当然，这些分布是有联系的，可以从我们已经有的一个分布求出总的分布，因为总的分布只依赖于速度的大小的平方，而与 z 分量无关。它必然是和方向无关的，这里只包含一个函数，即速度大小不同的概率。有了 z 分量的分布，可以求得其他分量的分布。结果概率仍和 $e^{-K.E./kT}$ 成正比，但现在动能包括三部分： $mv_x^2/2$ ， $mv_y^2/2$ 和 $mv_z^2/2$ ，在指数上相加，或者可将它写成乘积

$$f(v_x, v_y, v_z) dx dy dz \propto \exp \frac{-mv_x^2}{2kT} \cdot \exp \frac{-mv_y^2}{2kT} \cdot \exp \frac{-mv_z^2}{2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (40.9)$$

可以看出这个公式必然是正确的，因为，首先它只是一个 v^2 的函数，这正符合我们的要求，其次，通过对所有的 v_x 与 v_y 积分后得出的不同 v_z 值的概率正好就是式（40.7）。式（40.9）这一函数可以同时满足这两个要求！

§40-5 气体比热

现在我们要找一些办法来检验上面的理论，看看气体的经典理论怎样获得成功。以前我们看到，若 U 是 N 个分子的内能，则 $PV = NkT = (\gamma - 1)U$ 对某些气体有时可能成立。如果是单原子气体，我们知道这也等于原子质心运动动能的 $2/3$ 。对于单原子气体，动能等于内能，因此 $\gamma - 1 = 2/3$ ，但是如果这是一个很复杂的分子，它能够转动和振动，并且我们假定内部运动的能量也正比于 kT （对经典力学而言，这是正确的）。于是在一定的温度下，除了动能 $\frac{3}{2}kT$ 外，还具有内部振动能或转动能。这样，总的 U 不仅包括内部的动能，而且也包括转动能，因而就得到不同的 γ 值。从技术上说，测量 γ 值的最好方法是测出比热，比热表征能量随温度的变化。后面我们还要再来讨论这个问题。目前，我们假设 γ 是从实验上由绝热压缩的 PV^γ 曲线得出的。

我们来计算某些情况下的 γ 值。首先，对单原子气体， U 是总能量，正好就是动能，我们已知 γ 应当是 $5/3$ 。对双原子气体，作为一个例子，我们可以取氧、碘化氢、氢，等等，并且假定双原子气体可以由某种类似于图40-3的力束缚在一起的两个原子来表示。还可以假定（结果表明这是完全正确的），在我们感兴趣的温度下，双原子气体中的一对原子倾向于使它们之间的距离保持为势能取极小值时的距离 r_0 。如情况并非如此，如果概率不是变化很大，不是使绝大多数原子处在势能曲线的底部，我们一定会想起氧气是由 O_2 与单个氧原子以不寻常的比例混合而成的。但事实上，我们知道，单个氧原子是十分罕见的，这意味着，正如我们所见到的那样，势能的最小值在数值上远大于 kT 。由于它们主要集中在距离 r_0 附近，我们唯一要考虑的只是接近曲线极小值的那一部分，它近似地可看作是抛物线，而抛物线型的势意味着有一个谐振子，事实上，在极好的近似下，氧分子可以比喻为用以弹簧连接在一起的两个原子来表示。

那么，在温度 T 下，这个分子的总能量是多少呢？我们知道，对这两个原子中的每一个原子来说，动能都应是 $3kT/2$ 。所以两者合在一起的动能是 $3kT/2+3kT/2$ 。我们也可用不同方式得出这个结果：同样的 $3/2$ 加 $3/2$ 也可看作为质心的动能（ $3/2$ ），转动动能（ $2/2$ ），以及振动动能（ $1/2$ ）。我们知道振动动能是（ $1/2$ ），因为这里只包含一维的振动，而每个自由度的能量是 $kT/2$ 。至于转动，它可以绕两根轴中的任何一根旋转，所以有两个独立的运动。我们假设原子是某种质点，不能绕它们的连线转动；这一点必须记住，因为如果与事实不符时，问题可能正出在这里。但是，另外还有一件事，那就是振动的势能；它有多大？一个谐振子的平均动能与平均势能是相等的，因此振动的势能也是 $kT/2$ 。于是全部总能量是 $U=7kT/2$ 。或者说 kT 是每个原子的 $2U/7$ 。因而这就意味着 $\gamma=9/7\approx 1.286$ ，而不是 $5/3$ 。

我们可以把这些数值与表40-1中所列的测量值比较一下。先看氦，它是单原子气体，我们发现 γ 很接近 $5/3$ ，误差可能还是实验带来的，虽然在这样低的温度下，原子之间可能有某些力。氮和氩都是单原子的气体，在实验的准确度范围之内，理论值也和它相符合。

表40-1 各种气体的比热商 γ 的值

气 体	$T(^{\circ}\text{C})$	γ	气 体	$T(^{\circ}\text{C})$	γ
He	-180	1.660	HI	100	1.40
Kr	19	1.68	Br ₂	300	1.32
Ar	15	1.668	I ₂	185	1.30
H ₂	100	1.404	NH ₃	15	1.310
O ₂	100	1.399	C ₂ H ₆	15	1.22

我们转向双原子气体，发现氢的 γ 值为1.404，与理论值1.286不符合。与此非常类似，氧的实验值为1.399，但也与理论值不符合。碘化氢也有类似的值1.40。乍一看来，正确的答案好像是1.40。但也并非如此，因为再看下去，对于溴来说，出现的值是1.32，而对于碘，我们

看到的是1.30。因为1.30与1.286相接近，因而可以说碘还是符合得比较好的，但氧就差远了。这样就使我们处于进退两难的境地；对某种分子它是对的，而对另一种分子它又不对，为了使两者都得到解释，我们必须十分巧妙地进行构思。

我们进一步看看更复杂的多原子分子，如乙烷（ C_2H_6 ）共有8个不同的原子，它们都以不同的组合在振动和转动，所以总的内能必定为 kT 的许多倍，至少单是动能就有 $12kT$ ，因而 $\gamma - 1$ 必定十分接近于零，或者说 γ 十分接近于1。事实上，它比较小，但1.22并不太小，它比只从动能算出的13/12要大，这也是不可理解的！

再进一步考虑的话，整个事情更显得神秘莫测，因为双原子分子终究不是刚性的，即使我们使原子间的耦合无比坚固，它不能强烈地振动，但仍然不停地振动。内部的振动能仍然是 kT ，因为它并不依赖于耦合强度。但是，如果我们能够设想存在着绝对刚性的分子，停止一切振动，以消除振动自由度的话，那么对双原子分子将得到 $U = 5kT/2$ ， $\gamma = 1.40$ 。这看来对 H_2 或 O_2 是很符合的。然而，这里还是存在着问题的，因为无论对氢或氧， γ 值都随温度而变化！从图40-6的测量值中，我们看到对 H_2 来说， γ 从 $-185^\circ C$ 的1.6变化到在 $2\,000^\circ C$ 的1.3。氢的这种变化比氧来得显著，然而，即使对于氧来说，当温度下降时， γ 也趋向于上升。

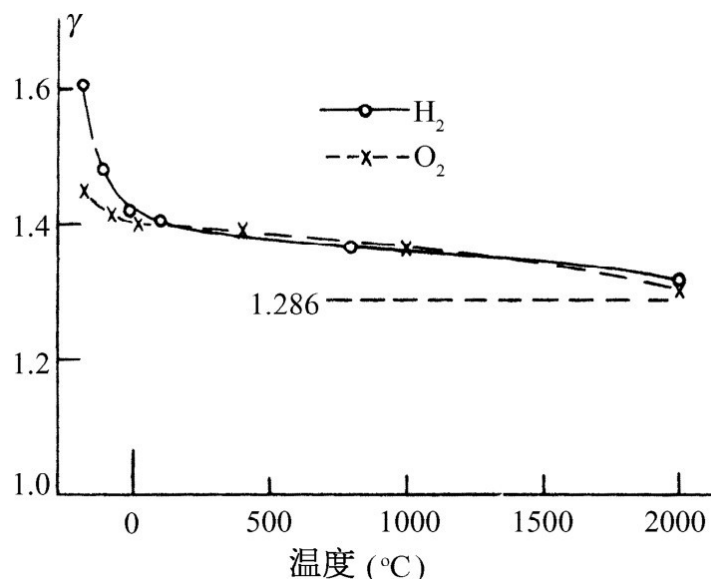


图40-6 氢与氧的 γ 实验值与温度的关系。经典理论预言 $\gamma = 1.286$ ，与温度无关

§40-6 经典物理的失败

总而言之，可以这么说，我们碰到了一些困难。我们可以试用除弹力以外的其他力，但结果是，任何其他力只能使 γ 变大。如果再包括更多形式的能量， γ 就更趋近于1，而与事实不符。人们能够想到的经典理论只是使事情变得更糟。事实上，在每个原子中都有电子，由它们的谱线可知，存在着内部运动；每个电子至少应有 $kT/2$ 的动能，以及某些势能；把这些都加进来后， γ 会变得更小。这是荒谬的，也是错误的。

1859年，麦克斯韦提出了有关气体动力学理论的第一篇出色的论文。在我们已经讨论过的那些观念的基础上，他能够精确地解释大量的已知关系，比如波义耳定律，扩散理论，气体的黏滞性，以及在下一章中要讲到的一些事情，在总结中，他列举了所有这些伟大的成就之后，写道：“最后，在建立了所有的非球形粒子的平动与转动之间的

必然联系以后（他指的是 $kT/2$ 定理），我们证明了这样一个粒子的系统不可能满足两种比热之间众所周知的关系。”这里他谈的就是 γ （以后我们将看到 γ 与测量比热的两种方式有关），他说：“我们知道，我们无法得出正确的答案。”

十年以后，在一次演讲中他说：“现在我要在诸位面前提出在我看来是分子理论上所碰到的一个最大的困难。”这些话是物理学家第一次发现经典物理定律是错误的。它第一次指明由于严格证明了的定理与实验不符，存在着一些根本不可能解释的东西。大约在1890年，金斯又谈到这个疑难。人们常听说十九世纪下半叶的物理学家认为他们已经知道了所有的重要的物理定律，剩下所要做的只是计算更多的小数点位置罢了。有人这么说了一次，其他人则随声附和。但是，充分阅读那个时代的文献就可看出，那时的物理学家都在牵挂着一些事情。金斯讲到这个疑难时说，这是极其神秘莫测的现象；看来好像是，随着温度的下降，某些运动被“冻结”了。

如果我们假设，比方说，在低温下不存在振动，而在高温下存在振动，那么我们就可以设想或许存在这样一种气体，在足够低的温度下不出现振动，因而 $\gamma=1.40$ ，而在较高的温度下开始出现振动，因而 γ 下降。对转动来说也可以作同样的论证。如果我们能够消除转动，比如说在足够低的温度下它被“冻结”了，那么我们就可以理解随着温度的下降，氢的 γ 值接近于1.66这一事实。怎么来理解这种现象呢？当然，这些运动的“冻结”用经典力学是无法理解的，只有在量子力学问世后，才能得到解释。

在这里我们不加证明地叙述量子力学理论用到统计力学后的一些结果。我们还记得，按照量子力学，一个被势，例如振动势束缚的系统具有一组分立的能级，即不同能量的状态。现在的问题是：根据量

量子力学理论如何来修正统计力学？答案非常有趣；虽然大多数问题在量子力学中处理比经典力学更为困难，但统计力学问题在量子论中却更容易！在经典力学中得到的简单结果 $n = n_0 \exp [-(\text{能量})/kT]$ ，在量子论中变为下面一个极为重要的定理：若表示一系列分子状态的能级分别为 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ ，则在热平衡下，在某个具有能量为 E_i 的特定状态中找到一个分子的概率正比于 $e^{-E_i/kT}$ 。这给出了分子存在于不同态的概率。换句话说，在态 E_1 中的概率，即相对机会，与在态 E_0 下的概率之比是

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}}, \quad (40.10)$$

因为 $P_1 = n_1/N$ ，而 $P_0 = n_0/N$ ，故上式当然也可写为

$$n_1 = n_0 e^{-(E_1 - E_0)/kT}, \quad (40.11)$$

可见分子处在较高能态的机会比处在较低能态的机会小。高能态的原子数与低能态的原子数之比是 e 的指数幂（能量差的负值除以 kT ）。这是一个十分简单的命题。

对谐振子来说，能级是等间隔的。如果称最低的能级 $E_0 = 0$ （实际上它并不是零，这里有一点点差别，但把所有能量都移动一个常数没有任何影响），于是第一能级是 $E_1 = \hbar\omega$ ，第二能级是 $E_2 = 2\hbar\omega$ ，第三能级是 $E_3 = 3\hbar\omega$ ，依次类推。

现在我们来看看会出现什么情况。假定我们研究的只是双原子分子的振动，它可以近似地看成是一个谐振子。我们问：在 E_1 态而不是

在 E_0 态找到一个分子的相对机会是多少？答案是，在 E_1 态找到它的机会比在 E_0 态找到它的机会小 $e^{\hbar\omega/(kT)}$ 倍。现在假定 kT 远小于 $\hbar\omega$ ，即气体处在低温条件下。那么，原子出现在 E_1 态的概率是极小的。实际上所有原子都处在 E_0 态。如果我们改变温度，但还是让 kT 保持很小，那么它在 $E_1 = \hbar\omega$ 态找到分子的机会仍然是无穷小的——振子的能量仍接近于零；只要温度远小于 $\hbar\omega$ ，它将不会随温度而改变。所有的振子都处在基态，它们的运动实际上都“冻结”了；这时，振动运动对比热没有贡献。于是，由表40-1，我们可以判断，在 100°C ，即绝对温度 373° 时，相应的 kT 值远小于氧或氢分子的振动能量，但对碘分子情况就不是这样。之所以有这种差别，原因在于碘原子比氢原子重得多，虽然碘中原子间的力与氢中原子间的力可相比拟，但碘分子是这样重，以致使得它的固有振动频率比氢的低得多。对氢来说，在室温下 $\hbar\omega$ 大于 kT ，但对碘来说， $\hbar\omega$ 小于 kT ，因此只有对后者，即碘，才显示出经典的振动能。当从一个很低的 T （此时分子几乎都处在它们的最低能态中），开始增加气体的温度时，它们逐渐以相当的概率出现在第二个状态，然后再出现在下一个状态，等等。当在许多态中分子的概率相当大时，气体的行为就接近于经典物理所描写的情况，因为此时量子化的状态几乎变得和能量的连续性无法区分，并且整个系统差不多可以具有任何数值的能量。于是，在温度升高时，我们再次得到经典物理的结果，正如图40-6所示。同样可以说明分子转动的状态也是量子化的，但是这些状态靠得很近，以致在通常情况下 kT 远大于转动能级的间隔，这时，许多能态被激发，而系统中的转动能以经典方式起作用。在室温下情况不完全如此的一个例子是氢。

这是我们第一次通过和实验的比较确实推断出经典物理上存在着某些错误，并且我们以最初所使用的同样方式从量子力学中寻找解决困难的办法。过了三四十年，人们又发现了另一个困难，这又和统计力学有关，但这一次是光子气体的统计力学问题。普朗克在20世纪初期解决了这个问题。

第41章 布朗运动

§41-1 能量均分

布朗运动是一位植物学家布朗于1827年发现的。当他研究微生物时，他注意到植物花粉的细小微粒在他正在用显微镜观察的液体中到处游来游去，这时，他很明智地领悟到这些东西不是生物，而是在水中沿四周运动的微小的尘粒。事实上，为了帮助说明这一点和生命无关，布朗取一块从地下挖出的年代久远的石英岩，石英岩内含有一些水。这种水必然已贮存了数百万年以上，但是，在这样的水中布朗也看到了同样的运动。人们看到的是非常微小的粒子一直在不停地晃动。

以后，人们证明了这是分子运动的一种效应，我们可以通过想象在游艺场中有一个很大的可以推动的球来定性地理解这种效应。假定我们从很远的地方看去，下面有一大堆人，所有的人都从各个方向推动着这个球。我们看不到人，因为我们想象离开球太远了，但可以看见球，并且注意到它相当无规则地来回运动。由前几章讨论的定理我们知道，悬浮在液体或气体中的微粒的平均动能是 $3kT/2$ ，即使这个微粒远比一个分子重，情况仍然如此。如果它很重，那就意味着速率相对较低。但实际上速率并不那么慢。事实上，我们不能轻易地看到这样一个粒子的速率，因为尽管平均动能是 $3kT/2$ ，但这对于一个直径约为 $1\sim 2\text{ }\mu\text{m}$ 的物体，它的速率大概是 $1\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ，这甚至在显微镜下也是很难观察到的，因为粒子不断地改变运动方向，而且没有任何确

定的目标。在本章的最后一节我们将讨论它到底能跑多远。这个问题是20世纪初由爱因斯坦首先予以解决的。

附带说一下，当我们讲到粒子的平动动能是 $3kT/2$ 时，我们声称这个结果是从分子动理学理论，也就是从牛顿定律推出的。我们将发现能从分子动理论推导出种种令人惊奇的结果。由这么一点点东西就能推导出这么多的结果，这是极有意义的。当然，我们并不是说牛顿定律只是“一点点东西”——实际上，这已经足够了——这里所说的是我们并没有做很多事。那么，怎么能够得出这么多结果呢？答案是，我们一直在作一个重要的假设，那就是，如果某一给定系统在某个温度下处在热平衡状态，那么它与任何处在相同温度下的其他系统也处于热平衡状态。例如，如果我们想看看一个粒子与水分子发生实际碰撞时如何运动，可以想象在这里存在着由另一类微粒组成的气体，它们非常微小（我们假设），不会与水分子发生相互作用，而只与原来的粒子“强烈地”相互碰撞。假定这个粒子有一根伸出的刺，其他所有微粒能作的就是与这根刺碰撞。对这种温度为 T 的假想微粒气体，我们知道得很清楚，它是一种理想气体。水是复杂的，但理想气体是简单的。现在，这种粒子必然与这种微粒气体处于平衡之中。因此，粒子的平均运动必然由与气体微粒的碰撞所决定，因为如果相对于水来说它不是以正确的速度运动，而是比方说运动得更快的话，这就意味着微粒将得到能量而变得比水更热。但是整个系统开始时温度相同，而且我们又假定，某个系统一旦处于平衡状态后，它将保持平衡——它的某些部分不会自发地变热，其他部分也不会自发地变冷。

这个命题是正确的，可以根据力学定律加以证明，但证明非常复杂，而且只有利用高等力学才能作出。在量子力学中证明它比经典力学容易得多。经典力学的证明首先由玻尔兹曼作出，但现在我们简单

地把它看作是正确，于是可以证明粒子在与假想微粒碰撞时，必定具有 $3kT/2$ 的能量，因而当我们拿走假想的微粒而让它和同样温度的水分子碰撞时，它也必然具有 $3kT/2$ 的能量，所以它的平均动能是 $3kT/2$ 。这是一种奇特的论证方法，但它是完全正确的。

除去最初发现布朗运动的那种胶体粒子的运动外，在实验室或其他场合的许多现象中也能见到布朗运动。如果我们要制作一个尽可能精密的仪器，比方说一个非常灵敏的冲击电流计，里面有一块很小的反射镜，悬挂在一根细石英丝上（图41-1），那么这面小镜不会停止不动，而是不停地来回晃动——所有时间都在不停地晃动——因此当我们往镜面上投射一束光线，并观察光点的位置时，由于镜面老是在晃动，因此这不是一台理想的仪器。为什么？因为这面镜子平均说来具有大小为 $kT/2$ 的平均转动动能。

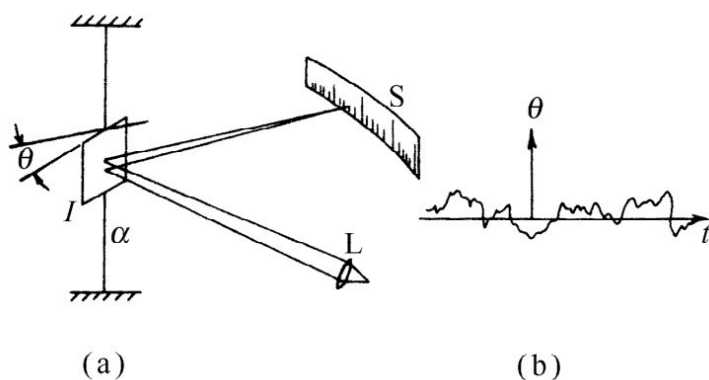


图 41-1

(a) 光束式灵敏电流计，来自光源 L 的光束经小镜反射后射至刻度尺上；(b) 刻度的读数作为时间的函数的记录图

那么，镜面来回晃动的“方均”角是多少？假如我们轻叩小镜的一侧，并观察它来回振动一次得花多长时间，就能得出它的固有振动周期，我们还知道它的转动惯量 I 。我们又知道转动动能的公式，它由

式(19.8)给出, 即 $T = I\omega^2/2$ 。这是动能, 而势能则正比于转动角度的平方, 即 $V = \alpha\theta^2/2$ 。但是, 如果我们知道了周期 t_0 , 并由此算出固有频率 $\omega_0 = 2\pi/t_0$, 则势能就是 $V = I\omega_0^2\theta^2/2$ 。现在我们知道平均动能是 $kT/2$, 由于它是谐振子, 平均势能也是 $kT/2$ 。于是有

$$\frac{1}{2} I\omega_0^2 \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

或

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{kT}{I\omega_0^2}. \quad (41.1)$$

用这种方法我们可以计算电流计镜面的振动, 并由此求出我们这台仪器的使用限度。如果我们想使振动小些, 可以冷却镜子。一个有趣的问题是, 在哪里冷却它? 这要看它受到的“撞击”来自何方。如果来自悬丝, 就在顶部冷却它, 如果镜子周围是气体, 而撞击主要来自气体分子的碰撞, 那么更好的办法是冷却气体。事实上, 只要我们知道振动的阻尼来自何处, 可以证明这常常也就是涨落的起源, 这一点以后我们还将回过头来谈。

使人感到十分惊奇的是, 在电路中, 也会出现同样的情况。假设我们要制作一个对某一确定的频率非常灵敏和非常精确的放大器, 在输入端有一个谐振回路(图41-2), 以使它对于那个确定的频率非常灵敏, 就像一个质量很高的无线电接收机一样。如果我们要研究这个电路本身正常工作的最低的极限, 就可以在电感上取出电压输入到放大器的其余部分。当然, 任何这样的电路总会有一些损失。这不是一

个理想的谐振回路，但它的性能非常好，比方说在回路中还有一点小的电阻（我们把电阻在图上画得能看出来，但假定它很小）。现在我们希望找出：电感上的电压涨落有多大？答案是，我们知道 $LI^2/2$ 是“动能”——即谐振回路中与线圈有关的能量（第25章），因此 $LI^2/2$ 的平均值等于 $kT/2$ ，这告诉我们均方根电流的大小，而从均方根电流又能求出均方根电压。如果要求出电感两端的电压，则公式为 $\hat{V}_L = i\omega L \hat{I}$ ，而电感上的电压绝对值平方的平均值是 $\langle V_L^2 \rangle = L^2 \omega_0^2 \langle I^2 \rangle$ ，代入 $L \langle I^2 \rangle / 2 = kT/2$ ，就得到

$$\langle V_L^2 \rangle = L \omega_0^2 kT, \quad (41.2)$$

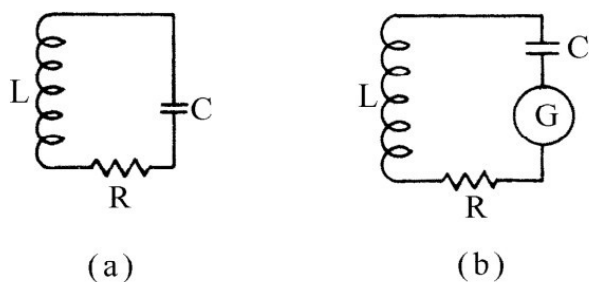


图41-2 高 Q 值谐振电路

(a) 实际的电路，温度为 T ；(b) 人为的电路，具有一理想（无噪声）的电阻及一“噪声发生器” G

这样我们就能设计电路，并指出何时会在电路中出现所谓约翰逊（Johnson）噪声，即与热涨落有关的噪声！

这一种涨落来自何处？它们也是由电阻器产生的。实际上，由于电阻器内的电子与其他物质处于热平衡，因而它们有规则地来回跳

动，并造成电子密度的涨落。这种涨落形成微小的电场，驱动谐振回路。

电子工程师用另一种方式来解答这个问题。从物理上来说，电阻器等效于噪声源。然而我们可以用一个假想的电路代替那个常能造成噪声的真实物理电阻的实际电路，假想的电路包括一个很小的表示噪声的发生器，而现在的电阻器则是某种理想化的不产生噪声的东西。所有的噪声都在假想的发生器内。这样，如果已知电阻器产生噪声的特性，并且有了相应的公式，就能算出电路中噪声的响应。所以，我们需要一个噪声涨落的公式。而电阻器引起的噪声包含了所有的频率，因为电阻器本身并不会产生谐振。当然，谐振回路只能“收听”到接近谐振频率的那一部分频率，但电阻器中却具有许多不同的频率。我们可以用下述方式来描写噪声发生器的强度：如果设想电阻器直接并联在噪声发生器上，则它所吸收的平均功率应当是 $\langle E^2 \rangle / R$ ，这里 E 是发生器上的电压。但是我们想更详细地知道在每种频率下的功率是多少。在任何一个频率上只有很小的功率，它是一个分布。令 $P(\omega) d\omega$ 为发生器在频率为 ω 而间隔为 $d\omega$ 内提供相同电阻器的功率。可以证明（我们将对另一种情况来证明，但数学上是完全相同的），功率应为

$$P(\omega) d\omega = \left(\frac{2}{\pi} \right) kT d\omega. \quad (41.3)$$

此式表明，当用这种方式处理时，噪声功率与电阻无关。

§41-2 辐射的热平衡

我们接着来考虑如下一个更为深入和更为有趣的问题：假定有一像在讨论光时讲到的那样的荷电振子，比如说在一个原子中的一个上下振动的电子。如果它上下振动，就会辐射出光。现在假设这个振子处在其他原子的极稀薄气体中，而且经常与那些原子相碰撞。这样，经过一段长时间后，达到了平衡状态。这个振子获得了能量，它的振动动能是 $kT/2$ ，因为它是一个谐振子，所以它的总能量是 kT 。当然，迄今为止的这种描写还是不正确的，因为振子携带电荷，而如果它带有能量 kT ，就会上下振动并且辐射出光。因此，单单物质本身处于热平衡中而所带电荷不发射出光是不可能的，而当辐射出光时，能量就流走了，随着时间的增加，振子将损失掉它的 kT 能量，于是与振动电子碰撞的整个气体将逐渐冷却。当然，这就是温暖的火炉由于向空间辐射出光而逐渐冷却的方式，因为原子所带的电荷的跳动，它们不断地辐射出光，而慢慢地由于这种辐射，跳动将逐渐减慢。

另一方面，如果把所有的东西都放在一个封闭容器中，使光不能跑到无穷远处，那么我们最后还可以获得热平衡。我们可以或者是把气体放在一个容器中，在这个容器的器壁上有一些其他可使光线反射回来的辐射体，或者是作为一种更巧妙的例子，可以假设容器器壁就是镜子。这种情况较易想象。于是可以认为振子发出的所有辐射都只在容器内传来传去。这样，固然开始时振子确实在辐射，但尽管如此，由于它还被从器壁反射的自身的光线所照射，我们可以说，不久它将保持它的能量 kT 。过了一会儿后，在容器内有大量光线跑来跑去，虽然振子正在辐射一些光，但光又跑了回来，并把辐射出去的能量还给了振子。

我们现在来确定，为了使照射在这个振子上的光产生足够补偿振子所辐射出的能量，在这个温度为 T 的容器中必须有多少光。

假设气体中的原子非常少，彼此相隔很远，因而我们有一个除辐射阻尼外，并无其他阻尼的理想振子。考虑在热平衡状态下振子同时做的两件事。第一，它具有平均能量 kT ，我们要计算它辐射了多少光。第二，因为照射到振子上的光被散射，因而辐射量的大小应当正好等于由散射引起的量。由于能量不可能跑到其他地方，这一有效的辐射实际上正好就是在那里的光所散射的光。

我们首先计算一下，如果振子具有某一能量，它每秒辐射的能量是多少（我们借用第32章中有关辐射阻尼的一些公式，而不去重复它们的推导）。每弧度辐射的能量除以振子的能量称为 $1/Q$ （式32.8）

$$\frac{1}{Q} = \frac{dW}{dt} \cdot (\omega_0 W)^{-1}.$$

利用阻尼常数 γ ，这也可以写为

$$\frac{1}{Q} = \frac{\gamma}{\omega_0}.$$

这里 ω_0 是振子的固有频率，如果 γ 很小， Q 就很大。每秒辐射的能量是

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \gamma}{\omega_0} = \gamma W. \quad (41.4)$$

每秒辐射的能量简单地就是 γ 乘振子的能量。现在，振子应当具有平均能量 kT ，可见 γkT 就是每秒钟辐射能量的平均值

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \gamma k T. \quad (41.5)$$

现在我们只须知道 γ 是什么。由式(32.12)很容易求出 γ ，那就是

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}. \quad (41.6)$$

这里 $r_0 = e^2 / (mc^2)$ 是经典电子半径，而上式已用了 $\lambda = 2\pi c / \omega_0$ 。

因此，对于接近频率 ω_0 的平均光辐射率，最后结果为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2 k T}{c}. \quad (41.7)$$

接着我们要问，必须要有多少光照射在振子上？必须有足够的光，使得从光线（随即被散射）吸收的能量正好等于这样多。换句话说，可以把发射光看作是从照射在容器内那个振子上的光所散射的光。如果有一定量（未知）的辐射照射在振子上，那么我们现在必须计算从振子散射了多少光。令 $I(\omega) d\omega$ 是频率为 ω ，间隔为 $d\omega$ 的光能的数量（因为在某一确定的准确的频率上没有光，光总是扩展到整个光谱区），所以 $I(\omega)$ 是一个确定的光谱分布。现在我们就来求它——这正是将火炉烧红到温度 T 时我们打开炉门观察炉膛时看到的颜色。现在吸收了多少光呢？我们曾求出由一给定的入射光束所吸收的辐射的数量，并用横截面来进行计算。这就等于说所有落在某一确定截面上的光全部被吸收，所以再辐射（散射）的总量就是入射光强度 $I(\omega) d\omega$ 乘以截面 σ 。

我们曾推得的截面公式（式32.19）不包括阻尼。不难再作一次推导，并加上我们曾忽略的阻尼项。我们这样做，并用同样的方式计算

截面，得

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left[\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]. \quad (41.8)$$

现在，作为频率的函数， σ_s 只在 ω 极接近于固有频率 ω_0 时才有显著的数值（我们记得对辐射振子而言， Q 约为 10^8 ）。当 ω 等于 ω_0 时，振子的散射很强，而对其他的 ω 值则很弱。因此，我们可以用 ω_0 代替 ω ， $2\omega_0 (\omega - \omega_0)$ 代替 $(\omega^2 - \omega_0^2)$ ，从而得到

$$\sigma_s = \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2}{3[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.9)$$

现在，整条曲线定域在靠近 $\omega = \omega_0$ 处（实际上我们没有必要作任何近似，但是若使方程简化一些，积分就十分容易了）。现在我们在给定频率间隔内以散射截面乘以强度，就得到在间隔 $d\omega$ 内的散射能量的大小。于是散射的总 能量是这个乘积对所有 ω 值的积分，即

$$\frac{dW_s}{dt} = \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.10)$$

但是现在要使 $dW_s/dt = 3\gamma kT$ 。为什么是3？因为在第32章中对截面进行分析时，我们假定偏振是要使光能驱动振子。如果我们利用一个只能在一个方向上运动的振子，而假定光以错误的方式偏振，那么它就不能产生任何散射。所以，我们必须或者是对一个只能在一个方向上运动的振子的截面求其在所有的光的入射与偏振方向上的平均，或者是更容易一些，可以想象一个不管场怎么指向，总是跟着场运动的振子。这样一个能等价地在三个方向上振动的振子将有 $3kT$ 的平均

能量，因为它有三个自由度。正是因为有三个自由度，所以应该用 $3\gamma kT$ 。

现在我们来算出积分值。假设未知的光的光谱分布 $I(\omega)$ 是一条平滑曲线，在 ω 达到峰值的非常狭窄的频率范围中它的变化不太大（图41-3）。于是唯一有意义的贡献来自 ω 十分靠近于 ω_0 的上下为 γ 的那个频率范围，而 γ 是很小的。因此，虽然 $I(\omega)$ 可能是一个未知的复杂函数，但唯一起重要作用的地方只是在 $\omega = \omega_0$ 附近，而在那里我们可以用同样高度的一条平坦的曲线——一个“常数”来代替那段平滑的曲线。换句话说，我们可以简单地把 $I(\omega)$ 提出到积分号外，并称之为 $I(\omega_0)$ 。还可以把其余的常数放到积分号前，这样就有

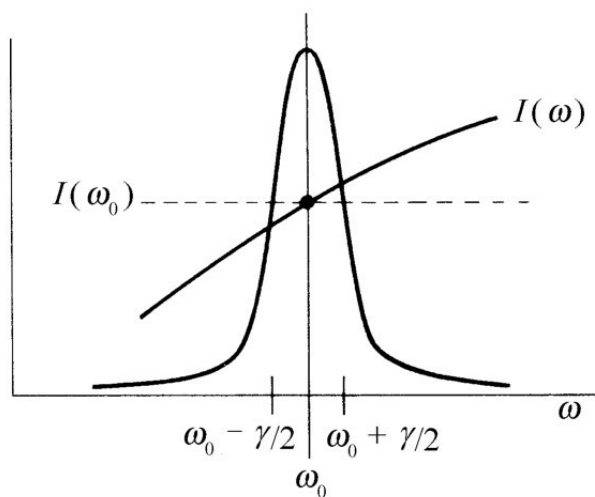


图41-3 式(41.10)被积函数的因式。图中的峰为谐振曲线 $1/[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]$ 。作为一个很好的近似，因式 $I(\omega)$ 可用 $I(\omega_0)$ 来代替

$$\frac{2}{3}\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = 3\gamma kT. \quad (41.11)$$

积分应当是从0至 ∞ ，但0离开 ω_0 很远，以致那时曲线已完全为零，因而可用 $-\infty$ 来代替0，这没有什么差别，但进行积分要容易得多。这个积分即形式为 $\int dx / (x^2 + a^2)$ 的反正切函数。从书上可以查出它等于 π/a 。在我们的例子中就是 $2\pi/r_0$ 。经过整理后，我们得到

$$I(\omega_0) = \frac{9\gamma^2 kT}{4\pi^2 r_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$

然后代入 γ 的公式（41.6式）（在写 ω_0 时不必担心，因为它对任何 ω_0 都成立，我们可以把 ω_0 写为 ω ）， $I(\omega)$ 的公式是

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}. \quad (41.13)$$

这个式子给出了火炉中的光的分布。我们把它叫作黑体辐射，“黑”指的是当温度为零时，我们看到的炉膛是黑色的。

按照经典理论，在温度为 T 的封闭容器内，式（41.13）是辐射能量的分布。首先，我们注意到这个表示式的一个引人注目的特色。振子的电荷、质量、所有振子的特殊性质全部消去了，因为一旦我们和一个振子达到了热平衡后，我们必然也和任何其他不同质量的振子达到热平衡，不然我们将陷于困境。所以，这是平衡并不依赖于处在平衡态的是些什么，而只依赖于温度这个命题的一个重要验证。现在

我们画出 $I(\omega)$ 曲线（图41-4）。它告诉我们在不同的频率下光的强度各是多少。

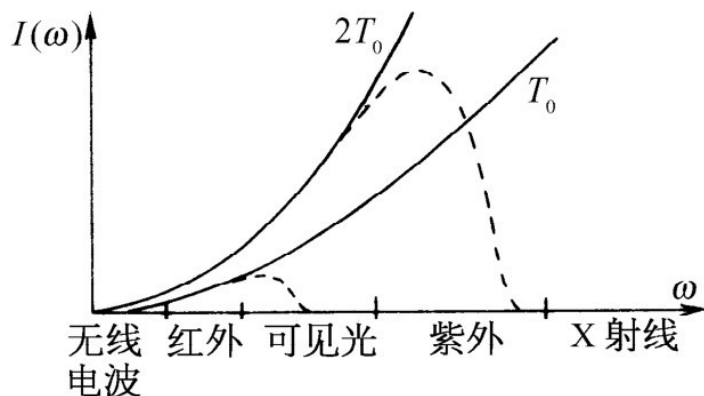


图41-4 在两种温度下，黑体辐射的强度分布。实线表示按照经典物理所给出的分布。虚线表示实际的分布

在封闭容器中，每单位频率间隔内的强度的大小随着频率的平方而变化，这意味着如果我们真的有一个温度完全任意的容器，那么在观察从里面发射出的X射线时，将会发现有大量的X射线！

当然，我们知道这是错误的结论。当我们打开炉门观察炉膛时，根本不会因为其中发射出的X射线而烧伤我们的眼睛。这是完全错误的。其次，容器中的总能量，即一切频率下的所有光强的总和，将是这条无限伸展的曲线下的总面积。由此可见，一定有某些东西从根本上明显地和绝对地错了。

正如经典理论不能正确地描述气体比热一样，经典理论也绝对不可能 正确地描述从黑体发出的光的分布。许多物理学家从种种不同的观点反复推敲这个推导过程，都找不到出路。这是经典物理的预言。公式（41.13）称为瑞利定律，它是经典物理的预言，而它显然是荒谬的。

§41-3 能量均分与量子振子

上述困难是经典物理中不断出现的另一个问题。它从气体比热的困难开始，现在则集中到黑体内光的分布上。当然，在理论物理学家研究这个问题的同时，也对实际曲线作了许多测量。结果发现正确的曲线就像图41-4中的虚线那样。这就是说，其中根本没有X射线。根据经典理论，如果我们降低温度，整条曲线将随着 T 而成比例地下降，但观察到的曲线在更低的温度下也很快切断。因此，曲线的低频端是正确的，但高频端则是错误的。为什么？金斯爵士在考虑气体比热时，注意到在温度太低时，高频运动被“冻结”。这就是说，如果温度太低，频率太高，振子的平均能量不是 kT 。现在回忆一下式（41.13）的推导过程：它完全依赖于振子处于热平衡状态时的能量。式（41.5）中的 kT 是什么，式（41.13）中的 kT 又是什么，它是在温度为 T 、频率为 ω 时的谐振子的平均能量。从经典理论上来说，这是 kT ，但从实验上来说，却不是！当温度太低或振子频率太高时，平均能量就不是 kT 。可见，曲线下降的原因与气体比热问题上的谬误的原因相同！但是研究黑体曲线要比研究气体比热容易，后者太复杂了，所以我们的注意力集中在确定真实的黑体曲线上，因为这条曲线是一条能正确告诉我们在每种频率下作为温度函数的谐振子实际上的平均能量是多少的曲线。

普朗克研究了这条曲线。他首先根据经验通过观察曲线和一个符合得很好的函数进行比较来确定答案，从而有了一个作为频率函数的谐振子平均能量的经验公式。换句话说，他有了一个代替 kT 的正确公式。在经过反复推敲后，在一个非常特殊的假设下，他找到了这个公式的一个简单推导。这个假设是谐振子一次只能取 $h\omega$ 的能量。谐

振子能够具有任何能量的概念是根本错误的。当然，这是经典力学走到了尽头的开始。

现在我们来推导这个最先被正确确定的量子力学公式。假设一个谐振子的可能的能级彼此分开相等的间隔 $\hbar\omega$ ，因而振子只能取这些不同的能量（图41-5）。普朗克作了一些比这里给出的更复杂的论证，因为那是量子力学的开创时期，他必须对某些事情加以证明。但是我们把下面的假设作为一个事实加以接受（普朗克对此进行了证明）：占据能级 E 的概率是 $P(E) = \alpha e^{-E/kT}$ 。由此出发，我们就能得到正确的答案。

$$\begin{array}{lll}
 \frac{N_4}{\text{---}} & E_4 = 4\hbar\omega & P_4 = A \exp(-4\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_3}{\text{---}} & E_3 = 3\hbar\omega & P_3 = A \exp(-3\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_2}{\text{---}} & E_2 = 2\hbar\omega & P_2 = A \exp(-2\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_1}{\text{---}} & E_1 = \hbar\omega & P_1 = A \exp(-\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_0}{\text{---}} & E_0 = 0 & P_0 = A
 \end{array}$$

图41-5 谐振子的能级是等间距的： $E_n = n\hbar\omega$

现在假定有许多振子，每一个振子的振动频率都是 ω_0 。这些振动有些可能处在最下面的量子态，有些则处在下一个量子态，等等。我们希望知道所有这些振子的平均能量。为此，我们计算所有振子的总能量，再除以振子的总数。这将是热平衡状态下每个振子的平均能量，同时也是与黑体辐射达到平衡时的能量，应该把它放在式（41.13）中 kT 的位置上。现在令在基态（最低能态）的振子数为 N_0 ，在 E_1 态的振子数为 N_1 ，在 E_2 态的振子数为 N_2 ，等等。按照前面的假设（我们未加以证明），在量子力学中，代替经典力学中概率 e^{-

P.E./ kT 或 $e^{-K.E./kT}$ 的是随着能量增加 ΔE ，概率下降 $e^{-\Delta E/kT}$ ，我们假定在第一个态的振子数 N_1 是基态的振子数 N_0 乘以 $e^{-\hbar\omega/kT}$ ，类似地，处于第二个态的振子数 N_2 为 $N_2 = N_0 e^{-2\hbar\omega/kT}$ 。为了简化代数运算，可令 $e^{-\hbar\omega/kT} = x$ 。于是就有 $N_1 = N_0 x$ ， $N_2 = N_0 x^2$ ， $\dots$ ， $N_n = N_0 x^n$ 。

首先必须求出所有振子的总能量。如果振子处于基态，则没有能量。如果它处在第一个态，能量是 $\hbar\omega_0$ ，而振子数为 N_1 ，则 $N_1 \hbar\omega$ 或 $N_0 \hbar\omega x$ 就是我们从这里得到的能量。而在第二个态，能量是 $2\hbar\omega_0$ ，振子数为 N_2 ，因而我们从这里得到的能量是 $N_2 \cdot 2\hbar\omega = 2\hbar\omega N_0 x^2$ ，等等。把所有这些加在一起，就得到全部能量为

$$E_{\text{总}} = N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots).$$

现在，振子的总数是多少？当然， N_0 是处在基态的振子数， N_1 是第一个态的振子数，等等。累加起来

$$N_{\text{总}} = N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots).$$

这样，平均能量便是

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{总}}}{N_{\text{总}}} = \frac{N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}. \quad (41.14)$$

我们把这里的两个求和式留给读者作为有趣的练习。当我们算出所有这些求和，并把 x 值代到这些求和中去后，只要在求和时没有算

错，就应当得到

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (41.15)$$

这就是永远为人所熟知或讨论的第一个量子力学公式，它是经过几十年迷惑不解后达到的光辉的顶点。麦克斯韦知道，总是在某些地方弄错了，但问题在于，什么是正确的？这里就是代替 kT 的定量的正确答案。当然，在 $\omega \rightarrow 0$ 或 $T \rightarrow \infty$ 时，式（41.15）应当趋向于 kT 。试试看，你能不能证明这一点——这也是学会如何运用数学的一种办法。

这就是金斯一直寻求的著名的截断因子，如果用它代替式（41.13）中的 kT ，我们就得到在一个黑色的容器内光的分布为

$$I(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

我们可以看出，对大的 ω ，即使分子上有 ω^3 ，但在分母上有一个随 e 的很大的幂增加的数，因而曲线还是下降而并没有“翘起来”——在不希望有紫外光和X射线的地方确实没有看到它们！

或许有人会抗议，在式（41.16）的推导中，对谐振子的能级我们用了量子理论，而在确定截面 σ_s 时又用了经典理论。但光和谐振子相互作用的量子理论所得到的结果与经典理论所得到的结果是完全相同的。实际上，这就是为什么我们花费那么长的时间，利用一个像小振子一样的原子模型来分析折射率和光的散射的道理——因为量子力学公式实质上与此相同。

现在回到电阻器中的约翰逊噪声上来。我们已经强调这个噪声功率的理论实际上与经典的黑体分布理论相同。事实上，比较有趣的是我们已经谈到如果在回路中的阻抗不是真实的电阻，而是像天线（一根天线实质上就像一个阻抗，因为它辐射能量）那样是一个辐射阻尼，那么计算它的功率对我们来说是比较容易的。这个功率正是天线从它周围的光那里取得的功率，所以我们会得同样的分布，只改变一个或两个因子。我们可以假设电阻器是一个具有未知功率谱 $P(\omega)$ 的发生器。 $P(\omega)$ 可由以下事实来确定：当我们把这个发生器连接在图41-2（b）那样的任意频率的谐振回路时，在电感上就产生了一个由式（41.2）给出的电压。由此导致像式（41.10）那样的积分，用同样的方式可以给出式（41.3）。在低温下，式（41.3）中的 kT 当然必须用式（41.15）代替。这两种理论（黑体辐射和约翰逊噪声）在物理上也是密切相关的，因为我们当然可以把谐振回路连接到一根天线上，这样，电阻 R 就是纯粹的辐射阻尼。因为式（41.2）并不依赖于阻尼的物理来源，所以发生器 G 对于真实的电阻和辐射阻尼是相同的。现在，如果电阻 R 只是一个在温度 T 时与它周围环境处于热平衡的理想天线，它所产生的功率 $P(\omega)$ 的起源是什么？那就是在温度为 T 时在空间中的辐射 $I(\omega)$ ，它作为“被接收的信号”冲击天线，并造成一个有效的发生器。因此我们可以推导出 $P(\omega)$ 和 $I(\omega)$ 的直接关系，然后从式（41.13）导出式（41.3）。

我们已经谈到的这一切——所谓约翰逊噪声、普朗克分布以及下面将要描述的布朗运动的正确理论，都是20世纪头十年左右所取得的成就。在了解了这些事情和这段历史后，现在我们再回到布朗运动上来。

§41-4 无规行走

我们现在来考虑对于比“冲击”间隔时间长得多的时间内一个跳动的粒子的位置将如何随时间而变化。一个小的布朗运动的粒子之所以跳动，是因为它四周受到无规则跳动的水分子的撞击。问题是，在经过一段给定的长时间间隔后，它离开起始位置的最可能距离有多远？这个问题为爱因斯坦与斯莫卢霍夫斯基所解决。如果设想把时间分为很小的间隔，比如0.01 s，那么，在第一个0.01 s后粒子运动到这里，下一个0.01 s后它运动得更远一点，再下一个0.01 s后它跑到其他某个地方，等等。就碰撞的频率来说0.01 s是很长的时间。读者不难验证，一个水分子在1 s内的碰撞数大约是 10^{14} 次，因而0.01 s中碰撞 10^{12} 次，这是一个巨大的数字！因此，在经过0.01 s后，粒子不再记得先前发生过什么。换句话说，碰撞全部是无规的，“下一步”与“前一步”之间没有什么联系。这很像那个著名的喝醉酒的水手的问题：有一个水手从酒店出来，踉踉跄跄地走了许多步，但是每一步的方向是随意定的，即是无规的（图41-6）。问题是，经过一段较长的时间后，这个水手走到了哪里？当然，我们不知道！这是无法说出的。我们只能说：他总处在某个地方，这或多或少是无规则的。然而，平均说来，他在哪里？平均说来，他离开酒店有多远？我们已经回答过这个问题，因为有一次我们曾经讨论过从大量带有不同相位的不同光源来的光的叠加问题，这意味着要把许多不同方向的矢量累加起来（第32章）。这里我们发现从一连串无规行走的步伐的一端到另一端的距离的平方平均值（它就是光的强度），等于各个部分的强度之和。因此，用同样的数学方法我们立即可以证明，如果 $\mathbf{R}_N$ 是经过 N 步后离开原点的位移矢量，则离原点的方均距离正比于步数 N 。也就是说， $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$ ，

这里 L 是每步的长度。由于在这个问题中步数正比于时间，所以方均距离也正比于时间

$$\langle R^2 \rangle = at. \quad (41.17)$$

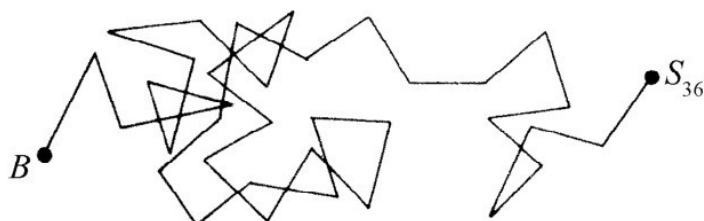


图41-6 36步每步长为 l 的无规行走。 S_{36} 离 B 有多远？答案：平均约为 $6l$

这并不意味着平均距离正比于时间。如果平均距离正比于时间，那就表示漂移是一个很好的匀速运动。水手以某种可感觉到的方式前进，但只有他的方均距离正比于时间。这就是无规行走的特征。

容易证明，每继续走一步，距离的平方平均说来增加 L^2 。因为如果写出 $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}$ 后，则得 $\mathbf{R}_N^2$ 为

$$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} + L^2.$$

对许多走法作平均后，有

$$\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2.$$

因为 $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} \rangle = 0$ 。这样，利用归纳法，即得

$$\langle R_{N-1}^2 \rangle = NL^2. \quad (41.18)$$

现在希望算出式 (41.17) 中的系数 α ，为此必须补充一点东西。我们假定，如果在这个粒子上施加一个力（这跟布朗运动无关——我们暂时考虑一个枝节问题），那么它就会以下述反作用的方式反抗这个力。首先是惯性。令 m 是惯性的系数，即物体的有效质量（不一定必须与实际粒子的真正质量相同，因为当我们推动粒子时也带动了周围的水）。于是，假如我们讨论在一个方向上的运动，那么在一边就会有类似于 $m (d^2 x / dt^2)$ 的项。其次，我们还要假设，如果稳定地推动粒子，液体就会对它产生一个正比于它的速度的阻力。除去液体的惯性外，由于液体的黏滞性和其他复杂性，存在着阻碍流动的阻力。为了出现涨落，某种不可逆的损耗，即某种类似阻力的东西是绝对必需的。除非也有某种损耗存在，否则就不可能产生 kT 。涨落的来源与这些损耗密切相关。我们会很快讨论到这种阻力的机制——我们将谈到与速度成正比的力以及它的由来。但目前我们假定有这样的阻力。当我们以一种正规的方式推动它，在有外力存在时，运动的公式是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{\text{外}}. \quad (41.19)$$

μ 这个量可以直接由实验测定，例如，我们可以观测在重力作用下液滴的下落。我们知道重力是 mg ， μ 是 mg 除以液滴最终达到的下落速率。或者，我们可以将液滴放到离心机上，观察它沉积得有多快，或者如果它带电的话，我们可以对它加上一个电场。因此， μ 是一个可测量，而不是一个人为的东西，对许多种胶体粒子来说，它们的 μ 值都是已知的。

现在，对力不是外力，而是等于布朗运动的无规则力的情况使用同样的公式。我们试图确定客体走过的方均距离。这里我们不讨论三

维的运动，而只取一维运动求出 x^2 的平均值，以作备考（显然， x^2 的平均值与 y^2 的平均值和 z^2 的平均值相同，因此，均方距离应该是我们要算出的值的3倍）。当然，无规则力的 x 分量和其他分量一样地无规则。 x^2 的变化率是什么？它是 $dx^2/dt = 2x (dx/dt)$ ，所以我们要求出的是位置乘以速度的平均值。我们将证明，这是一个常数，因此方均半径值将正比于时间而增大，并将说明增长率为多大。现在，如果以 x 乘以式（41.19）的两边，就有

$$mx \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \mu x \left(\frac{dx}{dt} \right) = x F_x.$$

我们要求 $x dx/dt$ 的时间平均值，所以我们可以对整个方程取平均，再研究这三项。 x 乘以力这一项如何？如果粒子刚巧走了一段距离 x ，那么，由于无规则力是完全紊乱的，它并不知道粒子从哪里开始，下一个冲击可能是在相对于 x 的任何方向上。如果 x 为正，那么没有理由认为平均力也应该在那个方向上。这种方式和那种方式完全一样。冲击力不能在某一个确定的方向驱动粒子。因而 x 乘以 F 的平均值为零。另一方面，对于 $mx (d^2 x/dt^2)$ 这一项，还要再略微想象一下，把它写为

$$mx \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

这样就得到两个项，我们同时取这两个项的平均值。看看 x 乘以速度应当是什么。这个乘积的平均值不随时间而变化，因为当粒子到达某一位置时，它并不记得自己本来在什么地方，因而不会随时间而变

化。故第一项的平均值等于零。剩下的量是 mv^2 ，这是我们已知的唯一的一项： $mv^2/2$ 的平均值是 $kT/2$ 。这样我们得出

$$\left\langle mx \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle x F_x \rangle.$$

这暗示着

$$-\langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0.$$

或者

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (41.20)$$

因此粒子在一定的时间 t 的末了的方均距离 $\langle R^2 \rangle$ 为

$$\langle R^2 \rangle = 6kT \frac{t}{\mu}. \quad (41.21)$$

这样，我们就可以实际确定粒子跑得多远！首先必须确定它们对一个稳定的力的反作用有多大，在一个已知的力下漂移得多快（为了找出 μ ），然后可以确定在它们的无规运动中走了多远。这个方程在历史上具有相当重要的意义，因为它提供了最初测定常数 k 的方法之一。毕竟，我们可以测量 μ 、时间以及粒子走了多远，并取平均。测定 k 之所以重要，原因在于在1 mol理想气体的定律 $PV=RT$ 中， R 可以实际测出，并且等于1 mol中的原子数乘以 k 。1 mol原来的定义是这么多克的氧——16 g（现在用碳），所以1 mol中的原子数本来不是已知的。这当然是一个非常有趣而重要的问题。原子有多大？1 mol有多少个原子？所以，确定原子数的最早的方法之一是，在显微镜下耐心地

观察一段时间，以确定一颗小小的尘粒能走多远。这样，由于 R 的值已经测出，玻尔兹曼常量 k 和阿伏伽德罗常数 N_0 就全都能确定了。

第42章 分子动理论的应用

§42-1 蒸发

本章我们将进一步讨论分子动理论的一些应用。在前一章中，我们强调动理论的一个独特的方面，即分子或其他物体的任何一个自由度的平均动能都是 $kT/2$ 。而我们现在将要讨论的中心则是，在不同位置处的单位体积中找到粒子的概率随 $\exp [-(\text{P.E.}) / (kT)]$ 而变化。我们将讨论这个结论的一些应用。

我们想要研究的现象是十分复杂的：液体进行蒸发，金属中的电子逸出表面，或者包括大量原子的化学反应。由于情况过于复杂，对于这些情况不可能从分子动理论出发作出任何简单和正确的陈述。因此本章中除去特别强调的地方以外，都相应地不精确。要强调的概念只是：从分子动理论出发，我们能够或多或少理解事物的行为应当如何。利用热力学的论据，或由某些临界量的经验测量结果，我们就可以更准确地描写那些现象。

然而，即使只是或多或少知道一点为什么它的行为会那样，也是十分有用的，这样，当我们遇到某种新的情况，或者还没有着手分析过的情况时，我们也可以多少说出一点会发生什么事情。所以，尽管这里的讨论十分不精确，但本质上还是正确的，即在概念上是正确的，不过，比如说，在某些特殊细节上作了一点简化。

我们将考虑的第一个例子是液体的蒸发。假设有一个体积很大的容器，里面放有一部分在一定温度下和它的蒸气达到平衡状态的液体。假定蒸气的分子彼此相距很远，而在液体内的分子则紧靠在一起。现在的问题是要知道，与液体中的分子数相比较，气相的分子数有多少？在给定的温度下蒸气的密度有多大？它对温度的依赖关系如何？

我们不妨假设蒸气中的每单位体积的分子数为 n 。当然，分子数会随着温度而变化。假如对液体加热，蒸发增加，就得到更多的蒸气。现在用另一个量 $1/V_a$ 表示液体中每单位体积的分子数。假定液体中的每个分子都占有一定的体积，若液体的分子较多，则合在一起所占的体积就较大。所以，若 V_a 为单个分子所占有的体积，那么单位体积除以每个分子的体积就是单位体积中的分子数。此外，我们假设，在分子之间存在着吸引力，以使它们能在液体中结合在一起，否则，我们就无法理解为什么液体是凝聚的。因而我们假设存在有这样一种力，并且在液体的分子中存在着束缚能，而当它变为蒸气时，就失去了这部分能量。这就是说，我们假定为了使一个分子从液体跑到蒸气中，必须对它作一定量的功 W 。一个处在蒸气状态下的分子和一个处在液体状态下的分子之间有一定的能量差 W ，因为我们是从其他分子对它的吸引中把它拉出来的。

现在我们利用上面的一般原理：在两个不同的区域中每单位体积的分子数的关系为

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT}.$$

因而蒸气中每单位体积的分子数 n 除以液体中每单位体积的分子数 $1/V_a$ ，就等于

$$nV_a = e^{-W/kT}, \quad (42.1)$$

这是一条普遍的规则。它就像在重力作用下处于平衡状态的大气层，其下层气体要比上层气体稠密，因为把气体分子提到高度 h 处需要作 mgh 的功。液体中的分子比蒸气中的分子稠密，因为要通过能量的“小丘” W 才能拉开它们，而两种密度比是 $e^{-W/kT}$ 。

这就是我们所要推导的结果——蒸气密度随着 e 的某种负的能量除以 kT 的幂而变化。前面的因子我们实际上并不感兴趣，因为在大多数情况下蒸气密度远比液体密度小。在某些情况下，只要不是靠近临界点（那里两种密度几乎相同），而是蒸气密度远小于液体密度， n 远小于 $1/V_a$ 的事实是由 W 远大于 kT 的事实引起的。所以像式（42.1）那样的公式只有在 W 大大超过 kT 的情况下才有意义，因为在这种情况下，我们把 e 自乘到一个很大的负指数幂，只要使 T 变化一点点，这个指数幂也变化一点点，而由指数因子引起的变化要比前面的因子可能出现的任何变化重要得多。为什么在像 V_a 这样的因子上会出现一些变化呢？因为我们的分析是近似的。说到底，实际上并不是每个分子都有一定的体积，当我们改变温度时，体积 V_a 不会保持不变——液体膨胀了。此外，还有与此类似的其他次要的特征，所以实际状况更为复杂。在整个过程中都有着随温度缓慢变化的因素。事实上可以说 W 本身也随温度而略有变化，因为在较高的温度和不同的分子体积下，有不同的平均吸引力等。因而，可以想象，如果我们有一个公式，其中每一个量都以一种未知的方式随温度而变化，那么实际上就等于完全

没有公式。如果我们认识到，指数 W/kT 一般说来非常大，我们就会看出，作为温度函数的蒸气密度曲线，其主要的变化由指数因子引起，若取 W 为常数，以及取系数 $1/V_a$ 近似为常数，对于曲线中比较短的间隔来说，这是一个很好的近似。换句话说，最主要的变化具有 $e^{-W/kT}$ 这样的普遍特征。

结果表明，在自然界的许许多多现象中都有这样一个特征：要从某个地方汲取一些能量，而它随温度变化的最主要的特征是有一个 e 的负能量除以 kT 的指数幂因子。只有当能量远大于 kT ，从而最主要的变化是由 kT 的变化引起，而不是由常数或其他因子引起时，这个特征才是一个有用的事实。

现在，我们考虑另一个会对蒸发得到大约相似结果的方法，但要过程观察得更细致一些。在得出式(42.1)时，我们曾简单地使用了在平衡状态下成立的一条规则，但为了更好地理解这一切，不妨观察一下所发生的具体细节。我们也可以以下述方式来描述所发生的事：蒸气中的分子不断地碰撞液体的表面，当它们撞击在液面上时，可能被弹开，也可能进入液体内部。这里有一个未知的比例——可能是50对50，也可能是10对90——我们并不知道。不妨先认为它们都跑到液体内部，以后再回过头来分析假设它们不全都跑到液体内部的那种情况。于是在某一给定的时刻，总有一定数目的分子凝聚在液体表面。凝聚分子数，即到达单位面积上的分子数，等于每单位体积的数目 n 乘以速度 v 。分子的速度与温度有关，因为我们知道 $mv^2/2$ 的平均值是 $3kT/2$ 。所以 v 就是某种平均速度。当然，我们应当对各种方向的速度进行积分从而得到某种平均值，但粗略地说它正比于方均根速度，并带有某个系数。总之

$$N_c = nv \quad (42.2)$$

是到达每单位面积并凝聚的分子数。

同时，液体的分子不停地跳动，时而它们中的某个分子被“踢”出液面。现在我们来估计它们被踢出液面有多快。这里的概念是，在平衡时每秒钟踢出的分子数与到达的分子数相等。

踢出的分子有多少？为了能跑出液面，必须要求某个特殊的分子偶然获得超过其邻近分子的额外能量——一个可观的额外能量，因为它受到液体中其他分子的很强的吸引力。通常由于这种很强的吸引力分子不会离开液体，但是在碰撞中有时它们中的某个分子会偶然得到一份额外的能量。若 $W \gg kT$ ，那么要得到在我们的情况下所需的额外能量 W 的机会是非常小的。事实上， $e^{-W/kT}$ 是一个分子得到大于这么多的能量的概率。这是分子动理论的一条一般性原理：为了取得超过平均值的额外能量 W ，概率是 e 的负指数幂，指数是我们所要获得的能量除以 kT 。现在假设有一些分子获得了这个能量。我们来估计每秒钟有多少分子离开液面。当然，仅仅使分子具有必要的能量并不意味着它实际上必然蒸发，因为它可能浸没在液体内部很深的地方，或者，即使它接近表面，但可能沿着不适当的方向运动。每秒钟离开单位面积的分子数应当是：靠近表面的单位面积的分子数除以使得一个分子离开所需的时间，然后再乘上它们具有足够能量跑出液面的概率 $e^{-W/kT}$ 。

我们假设液面上的每个分子占有一定的截面 A ，则液面上单位面积内的分子数为 $1/A$ 。现在一个分子跑出液面需要多长的时间？如果分子具有一定的平均速率 v ，以及足够的能量可以移动一个分子的直

径 D 那样的路程（即第一层的厚度），则它经过这一厚度的时间就是离开液面所需的时间。这段时间即为 D/v 。于是蒸发的分子数近似地可写为

$$N_e = (1/A) (v/D) e^{-W/kT}. \quad (42.3)$$

式中每个分子的面积乘以这层分子的厚度近似地等于单个分子所占的体积 V_a ，因此为了达到平衡，必须使 $N_e = N_c$ ，或者

$$nv = (v/V_a) e^{-W/kT}. \quad (42.4)$$

我们可以消去 v ，因为它们相等，虽然一项是蒸气中分子的速度，另一项是正在蒸发的分子的速度，但它们是相同的，因为我们知道它们在一个方向上的平均动能是 $kT/2$ 。但是有人会反驳说：“不！不！这些是运动得特别快的分子，是获取了额外能量的分子。”不过，实际上并非如此，因为开始把它们从液体中拉出来时，为了抵抗势能，它们必须消耗这些额外能量。所以，当它们跑到液面时，已经减慢到速度 v ！它与我们讨论过的大气中分子速度分布的情况相同：在底部，分子具有一定的能量分布，而到达顶部的那些分子具有同样的能量分布，因为速度慢的分子根本到达不了上面，而速度快的分子的运动则减慢下来。正在蒸发的分子和液体内的分子的能量分布相同——这是一个颇为引人注目的事实。无论如何，因为还有种种其他的不精确性，诸如存在着蒸气分子从液面弹回而不是跑入液体的概率，等等，所以过于细致地讨论我们的公式是无益的。这样我们对于蒸发率与凝结率有了一个粗略的概念，当然，我们看到蒸气密度 n 变化的方式还是像以前那样，但是现在我们比较具体地理解了它，而不是只把它看成一个任意的公式。

这个比较深入的理解使我们得以分析某些事情。例如，假定我们抽出蒸气的速率快到跟蒸气形成的速率一样（倘若有一个很好的泵，而液体的蒸发又很慢），那么，如果将液体温度保持为 T ，蒸发会有多快？假设我们已从实验上测量了处于平衡状态时的蒸气密度，因而知道在给定的温度下，与液体处于平衡状态时单位体积的分子数。现在我们希望知道液体蒸发得有多快。虽然迄今为止我们只对它蒸发的部分作过粗略的分析，但除去有一个未知的反射系数因子外，到达液面的蒸气分子数也可以大体知道。所以我们可以利用平衡时离开液面的分子数与到达液面的分子数相等的事实。确实，当不断抽去蒸气时，分子只会跑出液面。但是如果蒸气被留下来，它将达到平衡状态下的密度，这时跑回液体的分子数等于蒸发的分子数。因此，不难看出每秒离开液面的分子数等于某个未知的反射系数 R 乘以假设蒸气仍然存在时每秒返回液面的分子数，因为这就是在平衡时应该补偿掉的数目，故

$$N_e = nvR = (vR/V_a) e^{-W/kT}. \quad (42.5)$$

当然，从蒸气中碰撞到液体上的分子数是不难算出的，因为我们毋须像在考虑分子如何离开液面那样，要对有关的力知道得那么多，用其他方式作论证要容易得多。

§42-2 热离子发射

我们举另外一个很实际的例子，它和液体的蒸发非常类似，以至于不值得另行分析。这在本质上是同样的问题。在电子管中，有一个电子发射源，即一根加热的钨丝以及一块吸引电子的带正电的板极。

任何电子离开钨丝表面后就直接向板极飞去。这是一个理想的“泵”，它不停地“抽掉”电子。现在的问题是：每秒有多少电子从钨丝发射出来？而这个电子数目又怎样随温度而变化？这个问题的答案与式（42.5）相同，因为在一块金属中，电子受到金属的离子或原子的吸引。粗略地讲，它们被金属吸引。为了从金属中拉出一个电子，必须提供一定的能量，或拉出它来的功。这个功的大小视金属的种类而异。事实上，它甚至随某种给定金属表面的性质而变化，但是总的功约为几个电子伏，附带提一下，它是化学反应中所涉及的典型的能量。只要回忆一下化学电池中由化学反应产生的类似闪光灯电池上的电压约为1V左右就可以想起这一事实了。

我们怎么能够找出每秒钟有多少电子跑出来呢？分析电子跑出的效应是十分困难的，用其他方法来分析比较容易。所以，开始时我们可以设想并没有将电子抽走，电子就像气体一样可以跑回到金属内。因此在平衡时应当有一定的电子密度，当然，它可以准确地由与式（42.1）同样的公式给出。在这里，粗略地讲， V_a 是金属中每个电子的体积，而 W 等于 $q_e \phi$ ，其中 ϕ 称为功函数，或者说是把一个电子拉出金属表面所需的电势。这就告诉我们，应当有多少电子存在于金属周围的空间中并撞到金属上，以平衡从金属跑出来的电子。于是，很容易算出如果抽走所有电子的话，会有多少电子从金属跑出，因为跑出的电子数恰好等于具有上述密度的电子“蒸气”跑回金属的电子数。换句话说，答案是：单位面积流入的电流等于每个电子的电荷乘以每秒到达单位面积的电子数，后者正如我们已多次见到的那样，就是单位体积的电子数乘以速度

$$I = q_e n v = (q_e v / V_a) e^{-q_e \phi / kT}. \quad (42.6)$$

而1 eV相当于温度为11 600 K的 kT 值。电子管灯丝比方说可以在温度为1 100 K下工作，这样指数因子约为 e^{-10} ，当我们改变一点温度时，指数因子变化很大。这样，我们再次看到公式的主要的特征是 $e^{-q_e \phi / kT}$ 。实际上，前面的因子是完全不正确的——结果表明金属中的电子的行为不能从经典理论得到正确描写，而要用量子力学才行，但是这只使前面的因子改变一点点。事实上，还没有一个人能够很好地直接求得它，虽则为了计算它许多人应用了高等量子力学理论。主要的问题是， W 是否略微随 T 而变化？如果是的话，人们就无法把 W 随温度的缓慢变化和式前系数上的差别区别开来。比方说，如果 W 随温度呈线性变化，那么 $W=W_0+\alpha kT$ ，这样就有

$$e^{-W/kT} = e^{-(W_0+\alpha kT)/kT} = e^{-\alpha} \cdot e^{-W_0/kT}.$$

于是， W 和温度的线性依赖关系等价于“常数”的改变。试图精确地得到式前的系数确实是非常困难的，并且通常是徒劳的。

§42-3 热电离

我们现在继续讨论另外一个应用同样概念的例子——总是同样的概念。这个例子与电离有关。假设在一种气体中有大量原子，它们处在中性状态，但气体很热，原子可能被离子化。我们想知道，如果温度一定，并且每单位体积的原子密度一定，在这种情况下将有多少离子。我们仍旧考虑一个容器，其中共有 N 个带有电子的原子（如果一个电子离开一个原子，那个原子就叫做离子，而如果原子呈中性，我们就简单地叫它为原子）。假设在任何确定的时刻，每单位体积中的

中性原子数是 n_a ，离子数是 n_i ，而电子数是 n_e 。问题是：这三个数之间的关系如何？

首先，在这些数之间存在两个条件或约束。例如，在改变不同的条件，像温度或其他时， $n_a + n_i$ 将保持不变，因为这正是容器中的原子核数 N 。如果使单位体积的原子核数保持固定，而比方说改变温度，那么在电离过程中，某些原子将变为离子，但原子加离子的总数不会变化，也就是说

$$n_a + n_i = N.$$

另一个条件是，如果整个气体呈中性（如果我们忽略二次或三次电离），这就意味着在所有时间内离子的数目等于电子的数目，即

$$n_i = n_e.$$

这就是两个补充方程，它们只是简单地表示电荷守恒与原子守恒。

这些方程是正确的，我们在考虑实际问题时，最后要用到它们。但我们要想得到这些量之间的另一个关系式。为此可以这样做，我们再用类似的概念：电子离开原子需要一定的能量，称为电离能。同时为了使所有公式看起来一样，我们将它写为 W 。这样， W 就是从原子中拉出一个电子以产生一个离子所需要的能量。我们仍认为，在“蒸气”中每单位体积的自由电子数等于原子中单位体积的束缚电子数乘以 e 的负指数幂，其指数为束缚态与自由态之间的能量差除以 kT 。这又是一个基本方程。我们怎么把它写出来呢？每单位体积的自由电子数当然是 n_e ，因为这就是 n_e 的定义。那么，每单位体积中束缚在原子

中的电子数是多少？可以放进电子的位置的总数看来是 $n_a + n_i$ ，我们假设电子被束缚时，每个电子都束缚在一定的体积 V_a 之内。所以总的可束缚电子的体积将是 $(n_a + n_i) V_a$ ，这样我们可以把公式写为

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i) V_a} e^{-W/kT}.$$

但这个式子在一个基本方面是错误的，即当一个电子已经在原子内以后，另一个电子再也不可能进入这个体积之内！换句话说，对于一个正在考虑究竟是要跑到“蒸气”中去，还是要凝结在某一位置上的电子来说，实际上并非所有可能位置的全部体积都是可供选择的。因为在这个问题中还有另外的特点：当已有其他电子处在那里时，这个电子就不能跑进去——它受到排斥力。由于这个原因，我们应当计算的只是电子可能位于那里或者不位于那里的那部分体积。也就是说，已为电子占据的体积不计在总的可供选择的体积之内，而允许占有的只是离子的体积，在那里有空位可让电子占据。所以，在这种情况下，我们发现可将公式写得更准确一些，就是

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} e^{-W/kT}. \quad (42.7)$$

这个公式叫作萨哈 (Saha) 方程。现在我们来看看能否从所发生的动力学讨论中定性地了解为什么类似于这样的公式是正确的。

首先，每当一个电子跑到离子内，它们就组合成一个原子。同样，每当一个原子受到碰撞后，就会分裂为一个离子和一个电子。这两种比率应该相等。电子与离子彼此发现对方有多快呢？如果每单位体积的电子数增加，这种比率一定增加。如果每单位体积的离子数增

加，比率也会增加。这就是说，产生复合的总比率一定正比于电子数和离子数的乘积。而由于碰撞引起的总电离率必定线性地依赖于电离的原子有多少，于是，当 $n_e n_i$ 的乘积与原子数 n_a 之间有某种关系时，两种比率将得到平衡。这种关系正好能用式（42.7）这个特殊公式（其中 W 是电离能）表述出来，这一事实当然包含的内容要更多一些。但我们不难理解公式必然包含像 $n_e n_i / n_a$ 这样的电子浓度、离子浓度与原子浓度之间的组合以得到一个与各个密度无关而只取决于温度、原子截面和其他的常数因子的常数。

我们可能还注意到，由于方程中包括每单位体积的粒子数，如果在原子加离子的总数 N 固定，即原子核的总数固定情况下做两个实验，但用两个体积不同的容器，则在大容器中，所有的 n 都较小。但由于比值 $n_e n_i / n_a$ 保持不变，因此，在较大的容器中电子与离子的总数必然较大。为了看出这一点，假定在体积为 V 的容器内有 N 个原子核，其中被电离的百分比是 f 。则 $n_e = fN/V = n_i$ ，而 $n_a = (1-f)N/V$ 。这样我们的方程变为

$$\frac{f^2}{1-f} \frac{N}{V} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

换句话说，如果我们使原子密度越来越小，或使容器体积越来越大，电子与离子的百分比 f 必定增加。由于存在这种只是因密度下降即“膨胀”引起的电离现象，使得我们即使还不能从适当的能量观点来理解它，但也有理由相信，在极低的密度下，比如在恒星间的冷的空间中，也可能存在着离子。虽然为了产生离子需要许多 kT 的能量，但离子还是存在。

为什么当周围空间这么大时也会有离子存在，而当我们增加密度时，离子却趋于消失？答案是：考虑一个原子。偶尔，会有光，会有另一个原子或离子，总之会有保持热平衡的某个东西去撞击它。这种情况是极其罕见的，因为要使一个电子飞去而留下一个离子，需要大量的额外能量。如果空间极大，那么电子到处荡来荡去，经过年复一年也许还没有接近任何东西。但极其偶然地，它回到一个离子处，并和离子复合而组成一个原子。所以电子从原子中跑出来的比率非常低。但是因为空间体积极大，一个已经跑出来的电子要经过很长时间才能找到另一个和它复合的离子，因而复合概率非常小。因此，尽管需要很大的额外能量，仍然会有一定数量的电子存在。

§42-4 化学动力学

在化学反应中也可以见到我们刚才称为“电离”的同样情况。例如，假定两个物体A与B组成化合物AB，稍加思考后就能看出，AB就是我们所谓的“原子”，B可以叫作“电子”，A可以叫作“离子”。经过这样代替以后，平衡方程式的形式就完全相同

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = C e^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

当然，这个公式不是严格的，因为“常数”C与容许A和B组合的体积等有关。但是，利用热力学的论据，人们可以确定指数因子上的 W 的含义，结果表明它与反应中所需的能量非常接近。

假定我们试图把这个公式理解为碰撞的结果，就像我们在理解蒸发公式时那样，看看单位时间有多少电子跑出来，又有多少电子跑回去。假设A和B在偶尔进行的一次碰撞中形成一个化合物AB。假设AB

是一个复杂分子，它四面八方作无规则运动，不时受到其他分子的碰撞，使它逐渐得到足够的能量以重新分裂为A和B。

实际表明，在化学反应中，如果原子靠近时带有的能量太小，即使在 $A+B \rightarrow AB$ 的反应中可能释放能量，但是，A与B可能彼此接触这一事实不一定会使反应开始进行。事实上，通常要求碰撞得很厉害才能使反应得以发生，A与B之间的一次“软”碰撞不可能做到这一点，即使在反应过程中可能释放能量。所以我们假定在化学反应上这样的情况是非常普遍的：为了使A与B形成AB，它们不能只靠彼此碰撞，而必须在碰撞时具有足够的能量。这个能量称为激活能——亦即使反应“激活”所需的能量。我们称 A^* 为激活能，为了使反应实际上得以进行，这是碰撞中所要求的额外能量。A和B产生AB的速率 R_f 应当包括A的原子数乘B的原子数，乘以单个原子碰撞在一定截面 σ_{AB} 上的速率，再乘以因子 $e^{-A^*/kT}$ ， $e^{-A^*/kT}$ 是它们具有足够能量的概率

$$R_f = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

现在我们要求出相反的速率 R_r 。AB也有一定的飞散开的机会。为了能够飞散开，不仅必须有一个使A、B完全分开的能量，而且正像使A和B难以化合在一起那样，必须存在一类A和B必须爬过它才能再次分开的能量“小丘”，它们必须不但具有正好可使彼此分开的足够能量，而且必须有一定的额外能量。这就像要翻过一座小山进入到一个深谷一样，人们得爬过小山进入深谷，在返回时又得爬出深谷，然后再爬过小山（图42-1）。于是AB变成A和B的速率将正比于已存在的数目 n_{AB} ，再乘以 $e^{-(W+A^*)/kT}$

$$R_r = C' n_{AB} e^{-(W+A^*)/kT}. \quad (42.11)$$

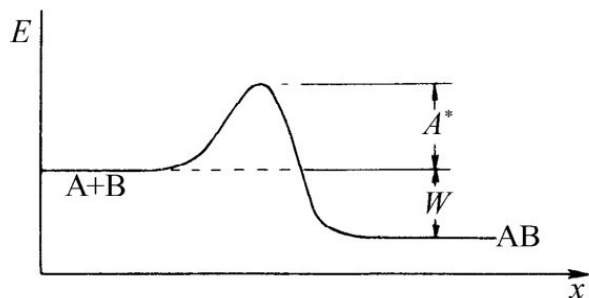


图42-1 化学反应 $A+B \rightarrow AB$ 的能量关系

这里的 C' 与原子的体积和碰撞率有关，我们可以像在蒸发的情况下所做的那样，用面积、时间和厚度来求出它，但我们在这里将不这样做。我们感兴趣的主要事情是在这两种速率相等时，它们的比值等于1。这告诉我们

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = C e^{-W/kT}.$$

像以前一样，这里的 C 包括截面、速度以及其他与 n 无关的因子。

有趣的是，反应率也随 $\exp[-(\text{常数})/(kT)]$ 而变化，虽然这里的常数与支配浓度的常数并不相同，激活能 A^* 与能量 W 也截然不同。 W 支配在平衡状态下A、B与AB的比例，但是，如果我们想知道 $A+B$ 变为 AB 有多快，这就不是一个平衡的问题了，这里有一种不同的能量——激活能，通过指数因子来支配反应率。

此外， A^* 并不是一个像 W 那样的基本常数。假如在器壁的表面——或在某些其他地方——A和B得以按某种方式暂时粘附在那里，从而能使它们更易化合。换句话说，我们可以找到一条穿过小山的“隧道”，或者一座较低的小山。由能量守恒定律知道，当一切都完成后，

我们仍由A和B组成AB，因而能量差 W 与反应发生的方式完全无关，但是激活能 A^* 则与反应发生的方式极有关系。这就是为什么化学反应率对外部条件非常敏感的原因。如果化学反应依赖于表面的性质，我们可以通过放入一个不同类型的表面以改变反应率，也可以使反应率在一个“不同的圆筒”中进行，这样它就有不同的反应率。或者，如果我们放入第三种物质，它可以大大改变反应率。有的东西仅仅通过使 A^* 稍加变化就能使反应率产生极大的变化——我们把它叫做催化剂。在一定的温度下，由于 A^* 过大，可能会使一个反应实际上根本无法进行，但是，当加入这种特殊物质——催化剂后，因为降低了 A^* ，反应就进行得非常快。

附带说一下，在A加B产生AB这样的反应中，存在着一些麻烦，因为当我们企图将两种物质放在一起以组成一种更稳定的物质时，无法使能量和动量两者都守恒。因此，我们至少还需要第三种物质C，这样实际反应就远为复杂了。正方向的反应速率包括乘积 $n_A n_B n_C$ ，看来，我们的公式是错误的，但并非如此！当我们考察AB沿反方向的反应率时，我们发现它也需要和C发生碰撞，这样，在反方向的反应率中也存在着 $n_{AB} n_C$ ，而在浓度平衡公式中 n_C 已被消去。无论反应机制如何，我们开始写下的平衡定律式（42.9）绝对保证正确！

§42-5 爱因斯坦辐射律

我们现在转到一个类似的有趣问题，它与黑体辐射定律有关。在上一章中，我们用普朗克的方法，考虑了振子的辐射问题，得出了空腔内的辐射分布定律。振子必定具有某个平均能量，既然它在振动，

它将辐射，而且不断地往空腔辐射能量，直至它积蓄了足够的辐射以使吸收和发射保持平衡。这样我们得到频率为 ω 的辐射强度由下列公式给出

$$I(\omega)d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (42.12)$$

这个结果包括了进行辐射的振子具有有限的、间隔相等的能级的假设。我们没有说过光必定是光子或任何某种与之类似的东西。当一个原子从某一能级跑到另一个能级时，能量必然以光的形式按一个能量单位 $\hbar \omega$ 释放出来。至于为什么会这样我们还没有讨论过。普朗克的原始思想认为物质而不是光是量子化的：物质振子不能取任何能量，它必须一份一份地取得能量。此外，推导中的麻烦还在于它是部分经典的。我们按经典物理计算了一个振子的辐射率，然后又回过来说：“不，这个振子有一系列能级。”所以，为了求得正确的和完全量子力学的结果，物理学经历了非常缓慢的发展，终于在1927年建立了量子力学。但在此期间，爱因斯坦作了努力，他改变了普朗克的只有物质振子才可量子化的观点，而认为实际上光是一些光子，并且在某些方面可以看作是具有能量 $\hbar \omega$ 的粒子。此外，玻尔指出，任何原子系统都有能级，但并不需要像普朗克振子那样均匀地隔开。所以，从更完全的量子力学观点来重新推导，或者至少重新讨论辐射定律就成为必要了。

爱因斯坦假设普朗克的最后公式是正确的，他利用这个公式得到了某些前所未有的有关辐射和物质相互作用的崭新的知识。他的讨论如下：考虑一个原子的许多能级中的任何两个能级，比方说第 m 个与第 n 个能级（图42-2）。爱因斯坦假设，当这样一个原子受到适当频率的光照射时，它能够吸收光线中的光子，使它从 n 态跃迁到 m 态，

而每秒钟发生这种情况的概率当然与这两个能级有关，但是它也正比于照射在原子上的光线有多强。我们把比例常数称为 B_{nm} ，以便提醒我们这不是一个自然界的普适常数，而只是与特定的两个能级有关：有的能级易于激发，有的能级则难于激发。现在，从 m 到 n 的发射率公式是什么？爱因斯坦认为必须把它分为两部分。首先，即使没有光存在，也应当存在原子从激发态落到较低能态而发射出一个光子的机会，我们称这一现象为自发发射。这与一个具有一定能量的振子即使在经典物理中也不会保持能量，而将通过辐射丧失能量的思想相似。于是，经典系统自发辐射的类比是：如果原子处在一种激发态，那么它就存在着一个确定的从 m 下降到 n 的概率 A_{mn} ， A_{mn} 仍是依赖于这两个能级，但与原子是否受到光的照射无关。但是爱因斯坦再前进了一步，通过与经典理论的比较以及其他的论据得出，发射也受光的存在的影响——当恰当频率的光照射到原子上时，它会增加一个光子的发射率，而这个发射率正比于光的强度，比例常数是 B_{mn} 。如果后来我们推导出这个系数是零的话，就能发现爱因斯坦错了；当然，我们将发现他是对的。

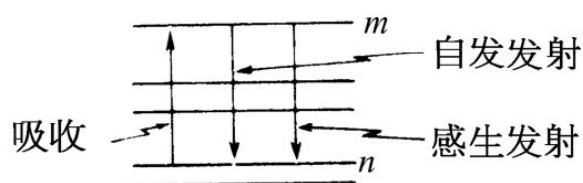


图42-2 原子内两个能级间的跃迁

这样，爱因斯坦假定存在着三种过程：一种是正比于光强度的吸收，一种是正比于光强度的发射，它称为感生发射或者有时称为受激发射，还有一种是与光无关的自发发射。

现在我们假设在温度为 T 的平衡条件下，在 n 态有 N_n 个原子，在 m 态有 N_m 个原子。那么由 n 态跑到 m 态的原子总数就是在 n 态的原子总数乘以每秒钟一个原子从 n 态上升到 m 态的比率。所以我们就得到一个每秒钟从 n 上升到 m 的原子数的公式

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega). \quad (42.13)$$

从 m 到 n 的数目可以用同样方式表示，即在 m 态的原子数 N_m 乘以每秒钟一个原子掉到 n 态的概率。这一次我们的表示式是

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]. \quad (42.14)$$

现在我们假设，在热平衡时跑上去的原子数必定等于落下来的原子数。至少，这是使每个能级上的原子数确实保持不变的一种方式^[1]。所以我们将假定这两种比率在平衡时相等。此外，我们还有另一种情况：我们知道 N_m 与 N_n 相比有多大——两者的比值是 $e^{-(E_m - E_n)/kT}$ 。现在爱因斯坦假设：从 n 到 m 的跃迁中唯一有效的光线只是具有相应于能级差的频率的光，所以在我们的所有公式中就有 $E_m - E_n = \hbar \omega$ ，于是

$$N_m = N_n e^{-\hbar \omega / kT}. \quad (42.15)$$

这样，如果使两种比率相等

$$N_n B_{nm} I(\omega) = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)],$$

除以 N_m ，得到

$$B_{nm}I(\omega)e^{\hbar\omega/kT} = A_{mn} + B_{mn}I(\omega). \quad (42.16)$$

我们可以由这个方程算出 $I(\omega)$ ，它就是

$$I(\omega) = \frac{A_{mn}}{B_{nm}e^{\hbar\omega/kT} - B_{mn}}. \quad (42.17)$$

但普朗克已经告诉我们这个公式必须是式(42.12)。由此我们可以推出一些结论：首先， B_{nm} 必定等于 B_{mn} ，否则我们就不能得出 $(e^{\hbar\omega/kT} - 1)$ 。所以，爱因斯坦发现了某种他还不知道如何计算的东西，即感生发射概率必定等于吸收概率。这是十分有趣的。此外，为了使式(42.17)与式(42.12)一致， A_{mn}/B_{mn} 必须为

$$A_{mn}/B_{mn} = \hbar\omega^3/\pi^2c^2. \quad (42.18)$$

所以，比如说如果已知一定能级的吸收率，就可以推导出自发发射率和感生发射率，或者它们的任何组合。

这就是迄今为止爱因斯坦或任何别的人利用这样的论证所能得到的结果。当然，要实际计算绝对自发发射率或对任何特殊原子跃迁的其他比率，都需要所谓量子电动力学的有关原子内部机制的知识，这些知识直到11年后才被人们所发现。而爱因斯坦的这个工作是在1916年完成的。

今天感生发射的可能性已找到了颇有意义的应用。如果有光存在，它将倾向于激发向下的跃迁。如果某些原子处于较高的状态，跃迁就会使可资应用的光能增加 $\hbar\omega$ 。现在，通过某种非热学的方法，可以使气体中 m 态的原子数远大于 n 态的原子数。这种情况远离平衡态，因此不能用平衡态的公式 $e^{-\hbar\omega/kT}$ 。我们甚至可以安排得使较高

状态的原子数非常之大，而较低状态的原子数实际为零。于是具有相应于能量差 $E_m - E_n$ 的频率的光不会强烈地被吸收，因为在 n 态中没有那么多原子去吸收它。另一方面，当这样的光存在时，它将诱发从高能态的发射！所以，如果在高能态有大量原子，就会产生一种连锁反应，也就是说一旦原子开始发射，越来越多的其他原子将引起发射，最后大量的原子都一起倾泻到低能级上去。这就是所谓的激光，或者在远红外的情况下，就称为微波激射（图42-3）。

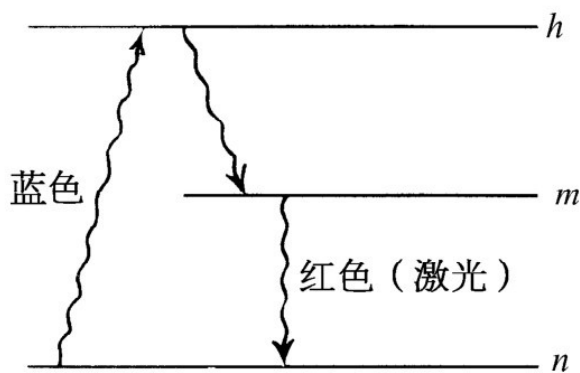


图42-3 如用蓝光将原子激发到较高的状态 h ，它可以发射一个光子使原子处于 m 态， m 态的原子足够多时就开始产生激光

为了得到处在 m 态的原子，可以应用各种技巧。如果我们用高频的强光束照射，原子就能到达更高的能级。它们能够从这些高能级上发射出各种光子而落下来，直至全部到达 m 态。如果它们趋向于停留在 m 态而不发射，这种状态称为亚稳态。以后，通过感生发射，它们一起倾泻到 n 态。一个比较技术性的问题是，假如我们将这个系统放在一个普通的容器内，那么与感应效应相比较，它们将沿许多方向自发辐射，以致又会引起麻烦。但是，如果在容器的每一边放上一面接近于理想的镜子，以致被发射的光得到更多的机会一而再、再而三地感生更多的发射，那么我们就能够加强感应效果，提高它的效率。虽然镜子几乎能100%地反射，但它仍有少许透射，因而有一点点光跑出

去。当然，最后从能量守恒定律看来，所有的光都沿一个统一的笔直的方向跑出去，而形成强光束。今天，利用激光器可能做到这一点。

[1] 这并非唯一可能的使不同能级上的原子数保持不变的安排方式，但这是实际发生的情况。在热平衡状态下，每一个过程必定被它准确的相反过程所平衡，这一原理称为细致平衡原理。

第43章 扩散

§43-1 分子间的碰撞

迄今为止，我们只考虑了处于热平衡状态下气体中的分子的运动。我们现在要讨论当情况接近但不是精确处于平衡态时将发生什么。在远离平衡态的情况下，问题极其复杂，但在非常接近于平衡态时，我们很容易得出会出现什么。然而为了要看出会发生什么事情，我们必须回到分子动理论上去。统计力学和热力学所处理的是平衡态，但是在偏离平衡的情况下，可以说，我们只能通过一个一个原子来分析所发生的事情。

作为非平衡状态的一个简单例子，我们来考虑气体中离子的扩散。假设在气体中存在着浓度相当小的离子——即带电分子。如果在气体上施加一个电场，则每个离子将受到一个力，这个力不同于气体中的中性分子所受的力。假设没有其他分子存在，直至到达容器壁前，离子都有一个恒定加速度。但是，由于存在着其他分子，它不能这样，它的速度只在和其他分子发生碰撞并失去动量以前增加。此后再次增加速率，它又会再次失去动量。净结果是，这个离子沿着一条奇特的路径运动，但是净运动总是沿着电力的方向。我们将看到离子在作一种平均速率正比于电场的平均“漂移”，电场越强，离子跑得越快。当加上电场，并且离子沿着电场方向运动时——当然这不是处在热平衡状态，而是力图趋向于平衡——离子位于容器的终端。利用分子动理论，我们可以计算漂移速度。

我们现在的数学水平实际上不能精确 计算将出现的事情，但是我们可以获得能显示所有基本特色的近似结果。我们可以找出事情如何随着压强、温度等变化，但是不可能精确地得出所有各项前面的正确的数值因子。所以，在推导过程中，我们将不去为数值因子的精确值而担心。这只有使用非常细致的数学处理方法才能得出。

当我们考虑在非平衡状态下将会出现什么之前，需要稍微仔细地考察热平衡状态下的气体还会发生什么情况。比如说，我们要知道分子相继两次碰撞之间的平均时间。

显然，任何分子会以一种无规则的方式与其他分子作一连串碰撞。在一段相当长的时间 T 中，一个特定的分子具有一定的碰撞次数 N 。如果使时间加倍，碰撞次数也将加大一倍。可见碰撞次数正比于时间 T 。我们可以将这一点写成

$$N = T / \tau . \quad (43.1)$$

这里将比例常数写为 $1/\tau$ ，常数 τ 具有时间的量纲，并且是碰撞之间的平均时间。例如，假定在1h内有60次碰撞， τ 就是1 min。我们将说，这个 τ （1 min）就是碰撞之间的平均时间。

我们常常会提出这样的问题：“在下一个很短的时间间隔 dt 内，一个分子受到一次碰撞的机会 是多少？”可以直接想到，答案是 dt / τ 。但是我们要作出一个更使人信服的论证。假设分子数 N 很大。在下一个时间间隔 dt 内将发生多少次碰撞？如果处在平衡态，任何东西对时间的平均 值不变。所以 N 个分子在时间 dt 内发生的碰撞次数与一个分子在时间 $N dt$ 内发生的碰撞次数相同。我们知道这个数目是 $N dt / \tau$ 。所以 N 个分子在时间 dt 内的碰撞次数是 $N dt / \tau$ ，而任何一个分子作

一次碰撞的机会或者概率都正好是 $1/N$ ，或者正像我们上面所猜测的那样，是 $(1/N)(N dt/\tau) = dt/\tau$ ，这就是说，在时间 dt 内受到一次碰撞的分子数占总分子数的比例为 dt/τ 。举一个例子来说，如果 τ 是1 min，那么在1 s内受到碰撞的分子所占的比例是 $1/60$ 。当然，这意味着，占总数 $1/60$ 的分子正好和那些下一个时刻就会碰撞的分子靠得足够近，因而它们的碰撞将在下一秒内发生。

当我们说碰撞之间的平均时间 τ 是1 min时，并不意味着所有的碰撞都分别在正好相隔1 min时发生。某一特定的分子并不要等1 min后才有另一次碰撞。相继两次碰撞间的时间完全是可变的。我们后面的工作也并不需要知道它。但是我们可以将“两次碰撞之间的时间是什么？”这样的问题略加改动。我们知道，对于上述情况，平均时间是1 min，但是我们或许还想知道，比方说，在2 min内不发生碰撞的机会有多大？

我们将找出对以下的一般性问题的答案：“一个分子在时间 t 内一次碰撞也不发生的概率是多少？”在某一个任意时刻——可以称为 $t=0$ ——我们开始注视一个特定的分子。直到时刻 t 它还未和另一个分子碰撞的机会有多大？为了计算这个概率，我们观察在容器内所有 N_0 个分子将发生什么情况。在等了一段时间 t 后，它们中的某些已受到碰撞。令 $N(t)$ 为直到时间 t 为止没有受到碰撞的分子数。当然， $N(t)$ 小于 N_0 。我们可以求得 $N(t)$ ，因为我们知道它随时间怎样变化。如果我们知道了直到 t 为止的未碰撞分子数是 $N(t)$ ，那么，直到 $t+dt$ 为止的未碰撞分子数 $N(t+dt)$ 小于 $N(t)$ ，其差值就是在 dt 内发生碰撞的分子数。我们上面已用平均时间 τ 将 dt 时间内所发生的碰撞数写为

$$dN = -N(t) dt / \tau.$$

于是有方程式

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (43.2)$$

按照微分的定义，左边的量 $N(t + dt)$ 可写为 $N(t) + (dN/dt) dt$ ，将此代入后，方程式(43.2)就成为

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}. \quad (43.3)$$

在 dt 间隔内损失的分子数正比于现在的分子数，反比于平均寿命 τ 。如果把式(43.3)改写为

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau}, \quad (43.4)$$

就很容易积分。每一边都是个全微分，所以积分是

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \text{常数}, \quad (43.5)$$

也就是说

$$N(t) = \text{常数} \cdot e^{-t/\tau}. \quad (43.6)$$

我们知道常数必定正好是现在的总分子数 N_0 ，因为从 $t=0$ 开始它们全都等待着它们的“下一次”碰撞。我们可以把结果写为

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

如果我们要知道不发生碰撞的概率 $P(t)$ ，可以将 $N(t)$ 除以 N_0 来得到，于是

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

我们的结果是：某个分子直到时间 t 还没有发生碰撞的概率是 $e^{-t/\tau}$ ，这里的 τ 是两次碰撞间的平均时间。概率从 $t=0$ 时的 1（或者必然发生）开始随 t 越来越大而变小。一个分子在等于 τ 的时间内还不发生一次碰撞的概率是 $e^{-1} \approx 0.37\dots$ 。两次碰撞之间的时间大于平均碰撞时间的机会小于 $1/2$ 。这是完全正确的，因为有足够多的分子在远大于平均碰撞时间的时间前不发生碰撞，因而平均碰撞时间仍然可以是 τ 。

我们原来定义 τ 为碰撞之间的平均时间。由式 (43.7) 得到的结果也表明从任一时刻开始到下一次碰撞的平均时间也是 τ 。我们可以证明这个多少有点使人惊讶的事实：在任意选定的初始时刻后的时刻 t ，在时间间隔 dt 内，受到下一次碰撞的分子数是 $N(t) dt \tau /$ 。当然，这些分子的“在下一次碰撞前的时间”正好是 t 。“在下一次碰撞前的平均时间”可以用通常求平均值的方法写为

$$[\text{在下一次碰撞前的平均时间}] = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \frac{N(t)}{\tau} dt.$$

利用式 (43.7) 得出 $N(t)$ ，并计算积分，我们确实发现 τ 是从任一时刻到下一次碰撞的平均时间。

§43-2 平均自由程

描写分子碰撞的另一种方式是不谈碰撞之间的时间，而谈碰撞之间分子走了多远。如果我们说碰撞之间的平均时间是 τ ，而分子的平均速度是 v ，我们就可预期碰撞之间的平均距离（记为 l ）正好是 τ 与 v 的乘积。两次碰撞之间的距离通常称为平均自由程

$$\text{平均自由程 } l = \tau v. \quad (43.9)$$

在本章中，我们对每一个特殊场合下所指的究竟是哪一类平均并不那么在意。各种可能的平均——权重平均，方均根，等等——全都近似相等，只差一个接近于1的因子。不管怎样，为了得到正确的数值因子，必须进行详细的分析，因此我们不必担心在每一种特殊情况下需要用哪种平均值。我们也要提醒读者注意，这里对某些物理量采用的代数符号（如平均自由程的 l ）并非根据共同接受的习惯方式，主要是因为没有被普遍采纳的记法。

正如一个分子在短时间 dt 内进行一次碰撞的机会是 dt/τ 一样，它在距离 dx 内进行一次碰撞的机会是 dx/l 。按照上面采用过的同样论证，读者可以证明一个分子在下一次碰撞前至少跑过距离 x 的概率是 $e^{-x/l}$ 。

一个分子在与其他分子碰撞前走过的平均距离——平均自由程 l ——取决于它周围有多少分子以及这些分子的“大小”，即取决于它面临的“靶”有多大。我们通常用“碰撞截面”来描写在一次碰撞中靶的有效“大小”，这与核物理或光散射问题中采用的概念相同。

考虑一个运动粒子在气体中移动距离 dx 的情况。气体中每单位体积内有 n_0 个散射体（分子）（图43-1）。观察与所选定的粒子运动方向相垂直的每单位面积，将发现那里有 $n_0 dx$ 个分子。如果每个分子

提供一个有效碰撞面积，即通常说的“碰撞截面” σ_c ，则散射体所覆盖的总面积为 $\sigma_c n_0 dx$ 。

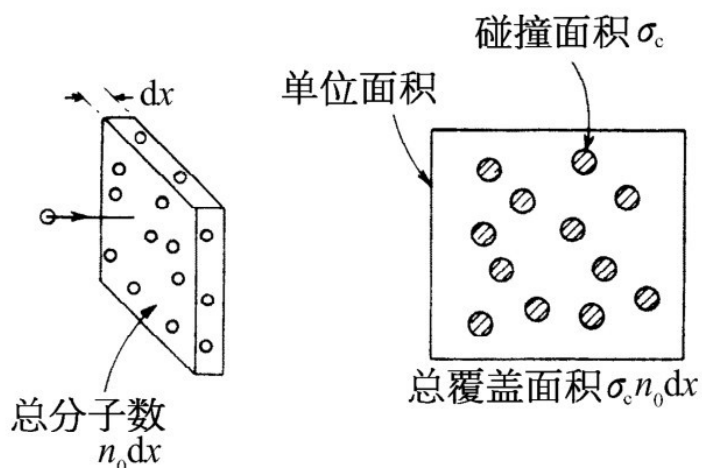


图43-1 碰撞截面

所谓“碰撞截面”指的是这样一种面积，只要所研究的分子和一个特定的分子相碰撞，这种分子的中心必定处在那块面积内。假如分子是一些小球（一幅经典图像），我们就可以预期 $\sigma_c = \pi (r_1 + r_2)^2$ ，这里的 r_1 和 r_2 是两个碰撞体的半径。分子发生一次碰撞的机会是散射分子所覆盖的面积与总面积之比，总面积可取为一个单位。故在距离 dx 内发生一次碰撞的概率正好是 $\sigma_c n_0 dx$

$$\text{在} dx \text{ 中发生一次碰撞的机会} = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

我们从上面已经看到过在 dx 内发生一次碰撞的机会也可用平均自由程 l 写为 dx/l ，与式（43.10）比较，就可以把平均自由程与碰撞截面联系起来

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0. \quad (43.11)$$

如果把它写为

$$\sigma_c n_0 l = 1, \quad (43.12)$$

将更便于记忆。

这个公式可以这样来看，当分子经过距离 l ，在这段距离内散射分子正好能够覆盖住整个面积时，平均说来将会发生一次碰撞。在一个长度为 l 、底面积为单位面积的圆柱形体积内，有 $n_0 l$ 个散射体，如果每一个散射体具有面积 σ_c ，则总的覆盖面积是 $n_0 l \sigma_c$ ，它正好是一个面积单位。当然，整块面积并没有被覆盖住，因为有些分子被其他分子遮盖了一部分。这就是为什么有些分子在碰撞前跑得比 l 远的原因。分子在跑过距离 l 的这段时间内进行了一次碰撞，这只是就平均而言。从平均自由程的测量中，我们可以确定散射截面 σ_c ，并与建立在更详尽的原子结构理论上算出的结果进行比较。但这是一个不同的课题！所以我们还是回到非平衡态的问题上来。

§43-3 漂移速率

我们来描述一个或几个分子发生的行为，它们在有的方面与气体中的大多数分子不同。我们把“大多数”分子称为“背景”分子，而跟背景分子不同的分子则称为“特殊”分子，或简称为S分子。任何原因都可以使分子变成特殊：比如它可能比背景分子重一些，可能有不同的化学成分，还可能带有电荷——也就是说是一个在中性分子（不带电荷

分子)背景下的离子。由于S分子在质量或电荷上的不同, S分子可能受到的力与作用在背景分子上的力不同。考虑了在这些S分子上所发生的情况后, 我们就能够理解一些基本效应, 它们在许多不同的现象中以相似的方式出现。可以列举几个例子: 气体的扩散、电池中的电流、沉淀、离心分离, 等等。

我们先集中注意以下基本过程: 在背景气体中的一个S分子受到某种特殊的力 $\mathbf{F}$ 的作用(比如说可能是重力或电力), 此外 它还受到由于和背景分子碰撞而产生的比较寻常的力。我们现在来描写S分子的一般行为。就细节来说, 它所表现出的就是一再与其他分子碰撞, 一会儿冲到这里, 一会儿冲到那里。但是, 如果我们留心观察的话, 会注意到在力 $\mathbf{F}$ 的方向上, 这个分子确实有某些净移动。可以说, 在它的无规则运动上再叠加了一个漂移运动。我们希望知道这个分子由于力 $\mathbf{F}$ 而产生的漂移速度有多大。

如果我们从某个时刻开始观察S分子, 可以预期它处在两次碰撞之间的某个位置上。除了它在最后一次碰撞中所留下的速度外, 还获得了由于力 $\mathbf{F}$ 产生的某一速度分量。在一个短时间内(平均而言, 在 τ 时间内), 它受到一次碰撞, 因而开始沿着一个新的轨道运动。它将具有一个新的初速度, 以及由 $\mathbf{F}$ 产生的加速度。

为了简单起见, 暂时假设每次碰撞后, S分子都获得一个“全新”的开始。也就是说, 它根本不记得由 $\mathbf{F}$ 产生的过去的加速度。如果我们的S分子比背景分子轻得多, 这是一个合理的假说, 但一般说来它肯定不成立。以后我们将讨论一种改进的假设。

所以, 暂时我们假定S分子在每次碰撞后所具有的速度沿任何方向的可能性都是相等的。这个初始速度是各向同性的, 而且对任何净

运动均无贡献，所以在一次碰撞后，我们将不必考虑它原来的速度。每个S分子除了它的无规则运动外，在任何时刻，还具有自上一次碰撞起由力 $\mathbf{F}$ 的作用而引起的沿 $\mathbf{F}$ 方向的附加速度。速度的这一部分的平均值是多大呢？它正是加速度 $\mathbf{F}/m$ （这里的 m 是S分子的质量）乘以自上一次碰撞以来的平均时间。而自上一次碰撞以来的平均时间必定和直到下一次碰撞为止的平均时间相同，前面我们曾把它称为 τ 。当然，由 $\mathbf{F}$ 所引起的平均速度正是我们所说的漂移速度，这样得到关系式

$$v_{\text{漂移}} = \frac{F\tau}{m}. \quad (43.13)$$

这个基本关系式是本章课题的核心。在确定 τ 是什么时，会出现某些复杂性，但是基本过程由式（43.13）确定。

你们会注意到，漂移速度正比于力。遗憾的是，对比例常数没有通用的名称。对于每类不同的力采用了不同的名称。在电学问题中，力可以写成电荷乘以电场 $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ ，而速度和电场 $\mathbf{E}$ 之间的比例常数通常称为“迁移率”。尽管有可能出现一些混淆，对于任何力，我们都将采用迁移率这个词来表示漂移速度与力的比值，即写为

$$v_{\text{漂移}} = \mu F, \quad (43.14)$$

而一般地称 μ 为迁移率。由式（43.13）有

$$\mu = \frac{\tau}{m}. \quad (43.15)$$

迁移率正比于碰撞之间的平均时间（ τ 长时使S分子运动减慢的碰撞也少），并反比于质量（较大的惯性意味着在碰撞之间获得的速率较

小)。

要想得到式(43.13) (它是正确的) 中的正确数值系数, 必须小心一些。为了避免混淆起见, 我们还应当指出, 在论证中包含着一个只有经过小心而详尽的考察才能领会的微妙之处。不管表面上如何, 为了说明确实存在困难, 我们以一种似乎合理但却是错误的方式重复一次能导出式(43.13) 的论证(这种方式可以在许多教科书上找到)。

我们本来可以这样说: 碰撞之间平均时间是 τ 。在一次碰撞后粒子以无规速度开始运动, 但在两次碰撞之间它得到了某个附加速度, 并且等于加速度乘以时间。由于到下一次碰撞所需的时间为 τ , 那时它具有 $(F/m)\tau$ 的速度。在碰撞开始时, 它的速度为零。所以在两次碰撞之间, 平均说来, 速度是末速度的一半, 因而平均漂移速度为 $F\tau/2m$ 。但这个结果是错误的! 而式(43.13) 才是正确的, 虽然这些论证听起来同样使人满意。第二个结果之所以不正确, 其理由较为微妙。它与下述情况有关: 有论证中, 似乎所有的碰撞间隔时间都是平均时间 τ 。事实上, 某些时间比平均值短, 另一些时间又比平均值长。短的时间出现得较频繁, 但是对漂移速度的贡献却较小, 因为它们提供给粒子进行“真正得以运动”的机会较小。如果计及碰撞间自由时间的分布, 可以证明没有从第二种论证中得到的因子 $1/2$ 。发生错误的原因在于企图通过简单的论证将平均末速度与平均速度本身联系起来。这种联系不是简单的, 所以最好还是集中注意我们所想要的东西本身, 即平均速度。我们给出的第一个论证直接地——并且正确地——确定了平均速度! 但是也许我们现在可以看出, 为什么在初步的推导中, 一般地说我们并不企图得出所有正确的数值系数!

现在回来讨论我们的简化假设，即每次碰撞把所有与过去运动有关的记忆全部消除掉——每次碰撞后都有一个全新的开始。假如S分子是在较轻的背景分子中的一个较重的物体，那么在每次碰撞中S分子将不会丢失它“前进”的动量。在它的运动再次“无规则化”以前，还要经过几次碰撞。因此我们应该假设，在每次碰撞中——平均说来在每一个时间 τ 内——S分子将失去其一定比例的动量。我们不打算讨论细节，而只是说明结果等价于用一个新的较长的 τ ——它相应于平均“忘却时间”，即“忘却”它的前进动量的平均时间——来代替平均碰撞时间 τ 。对 τ 作了这样一个解释，我们就可以把式（43.15）运用到那种不完全像起先所假设的那样简单的情况中去。

§43-4 离子电导率

现在我们把所得结果运用到一个特殊情况中去。假设在一个容器内盛有气体，其中也有某些离子——带净电荷的原子或分子。图43-2描绘了这一情况。如果容器的两个正对面的器壁都是金属板，我们可以将它们联在电池的正负极上，从而在气体内产生一个电场。电场使离子受到作用力，这样它们开始向这一块或那一块极板漂移，引起一个电流，而带有离子的气体的行为就像一个电阻器。由漂移速度算出离子流后，就可以算出电阻。我们特别要问：电流与加在两板之间的电位差 V 的关系如何？

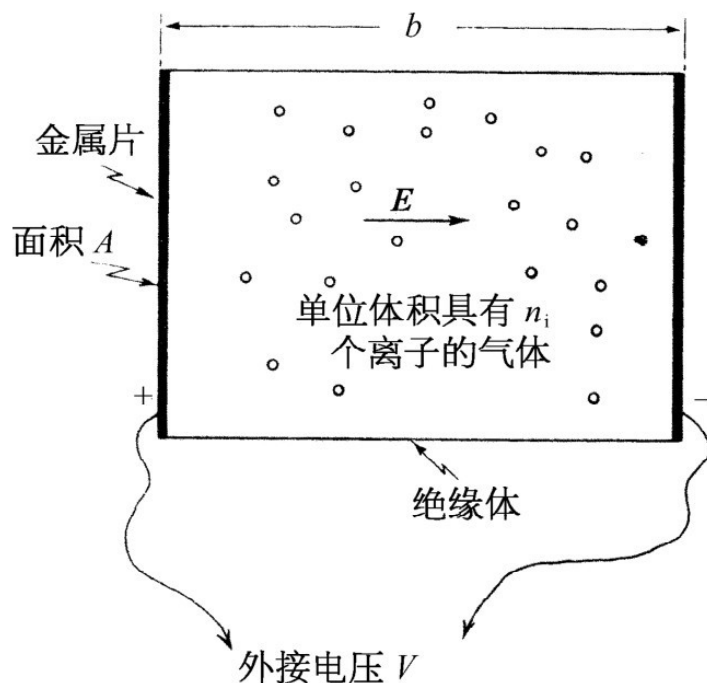


图43-2 电离气体的电流

假设我们的容器是一个长方形的盒子，长为 b ，横截面积为 A （图43-2）。如果从一块极板到另一块极板的电位差或电压降是 V ，极板之间的电场 E 就是 V/b （电势就是使单位电荷从一块极板跑到另一块极板所做的功。在单位电荷上的力是 E 。如果两极板之间的任何地方 E 都相同——在我们这里这是一个足够好的近似，那么电场在单位电荷上所做的功正好是 Eb ，所以 $V=Eb$ ）。作用在气体的一个离子上的特殊的力是 qE ，这里 q 是离子的电荷。因而离子的漂移速度是 μ 与这个力的乘积，即

$$v_{\text{漂移}} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{V}{b}. \quad (43.16)$$

电流 I 是单位时间内流过的电荷。抵达两块极板之一的电流由单位时间内到达这块极板的离子的总电荷给出。如果离子向这块极板漂移的速度是 $v_{\text{漂移}}$ ，则在距离（ $v_{\text{漂移}} T$ ）内的离子将在时间 T 内到达这块极

板。如果每单位体积内有 n_i 个离子，则在 T 时间内到达极板的离子数为 $(n_i A v_{\text{漂移}} T)$ 。每个离子带电荷 q ，故有

$$\text{在时间 } T \text{ 内收集的电荷} = q n_i A v_{\text{漂移}} T. \quad (43.17)$$

电流 I 是在 T 时间内所收集的电荷再除以 T ，这样

$$I = q n_i A v_{\text{漂移}}, \quad (43.18)$$

用式(43.16)的 $v_{\text{漂移}}$ 代入，就有

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} V. \quad (43.19)$$

我们发现电流正比于电压，这正好是欧姆定律的表达形式，而电阻 R 是比例常数的倒数

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

这样我们就得到了电阻与分子的性质 n_i 、 q 和 μ 之间的一个关系式， μ 又取决于 m 和 τ 。如果由原子的测量中知道 n_i 与 q ，就可用 R 的测量来确定 μ ，由 μ 还可以确定 τ 。

§43-5 分子扩散

现在我们转到另一类问题和另一类分析——扩散理论。假设有一个处在热平衡状态的气体容器，我们在容器中的某处放入少量不同种类的气体。我们把原来的气体称为“背景”气体，新的气体称为“特殊”

气体。特殊气体将开始扩展到整个容器中，但是由于有背景气体的存在，它只能缓慢地扩展开来。这种缓慢的扩展过程称为扩散。扩散过程主要由特殊气体的分子与背景气体的分子之间的碰撞所控制。经过大量碰撞后，结果特殊分子或多或少均匀地遍布整个容器。我们必须十分小心，不要把气体的扩散和可能由于对流引起的大量分子的总体输运现象混为一谈。更一般地说，两种气体的混合通常都是由对流和扩散组合而成的。我们现在感兴趣的只是那种不存在“风生流”的情况。气体只是由于分子运动和扩散而扩展的。我们希望算出扩散有多快。

现在我们来计算由于分子运动而引起的“特殊”气体分子的净的流动。只有在分子的分布上存在某种不均匀性时，才会有净的流动，否则，所有分子运动取平均后不会有净的流动。我们首先考虑沿 x 方向的流动。为此设想一个表面垂直于 x 轴的平面，并计算经过这个平面的特殊分子数目。为了得到净分子流，我们必须把沿正 x 方向通过平面的分子数计为正的，然后减去沿负 x 方向通过平面的分子数。我们曾多次看到，在时间 ΔT 中经过一个表面积 A 的分子数等于在该表面和与之相距 $v \Delta T$ 处的表面间的体积内的分子数（注意这里的 v 是分子的实际速度，而不是漂移速度）。

为了简化代数运算，取平面面积为一个单位面积。因而从左向右（以向右表示正 x 方向）通过的特殊分子数是 $n_- v \Delta T$ ，这里 n_- 是左边每单位体积的特殊分子数（实际上差一个2左右的因子，但我们不去管这些因子）。类似地，从右向左通过平面的分子数是 $n_+ v \Delta T$ ，这里 n_+ 是平面右边的特殊分子数密度。如果我们称分子流为 J ，即单位时间通过单位面积的净分子流，则有

$$J = \frac{n_- v \Delta T - n_+ v \Delta T}{\Delta T}. \quad (43.21)$$

或

$$J = (n_- - n_+) v. \quad (43.22)$$

对 n_- 和 n_+ 将用什么值呢？当我们说“左边的密度”时，究竟指的是离左边多远距离处的密度？我们应当选择分子开始“飞行”的那个地方的密度，因为开始这种旅行的分子数由在那个地方的分子数来决定。因此 n_- 应当是在左边的距离等于平均自由程 l 处的密度，而 n_+ 则是在我们的假想平面右边 l 处的密度。

如果考虑用一个称为 n_a 的 x 、 y 与 z 的连续函数来描写特殊分子在空间的分布，这将是方便的。 $n_a(x, y, z)$ 指的是中心在 (x, y, z) 的小体积元中的特殊分子数密度。利用 n_a ，可以将差 $(n_+ - n_-)$ 表示为

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l. \quad (43.23)$$

将这个结果代入式(43.22)并略去因子2，得

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

我们发现，特殊分子流正比于密度的微商，或者说正比于有时称为密度“梯度”的那个量。

显然，我们已经作了某些粗略的近似。除去略掉几个2之类的因子外，我们在原来应当用 v_x 的地方用了 v ，并且还假设了 n_+ 与 n_- 是离开假想平面垂直距离为 l 的两个地方的值，而对于那些没有垂直地飞过平面元的分子来说， l 应该是离开平面的斜向距离。所有这些都可以改进，更仔细的分析结果表明，式（43.24）的右边应乘以1/3，所以更好的答案是

$$J_x = -\frac{lv}{3} \cdot \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

对 y 方向与 z 方向可以写出类似的方程式。

扩散流 J_x 与密度梯度 dn_a/dx 可以由宏观的观察来进行测量。它们从实验上测得的比值称为“扩散系数” D ，这样

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

我们已经能够表明，对于气体来说

$$D = \frac{1}{3}lv. \quad (43.27)$$

到目前为止，在本章中已考虑了两种不同的过程：迁移率，即由于“外”力而引起的分子的漂移；扩散，即仅由内力和无规则碰撞引起的分子的扩展。然而，在它们之间存在一个关系，因为它们两者从根本上说都依赖于分子的热运动，而在两种计算中都出现平均自由程 l 。

如果在式（43.25）中，以 $l=v\tau$ 及 $\tau=\mu m$ 代入，我们就有

$$J_x = -\frac{1}{3}mv^2\mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

但 mv^2 只取决于温度。回想一下

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (43.29)$$

则

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

我们发现扩散系数 D 正是 kT 乘以迁移率 μ

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

实际情况是式（43.31）的数值系数是完全正确的——不用再加上什么的因子来修正我们的粗糙假设。事实上，可以证明，即使在我们简单计算的细节完全不适用的复杂情况中（例如，液体中微粒悬浮的情况），式（43.31）也必定同样正确。

为了说明式（43.31）一般来说也必然正确，我们将以另一种方式，即只使用统计力学的基本原则来推导它。设想一种存在“特殊”分子的梯度的情况，按照式（43.26），将有一个正比于密度梯度的扩散流。现在我们在 x 方向上施加一个力场，使每个特殊分子感受到力 F 。按迁移率 μ 的定义，将出现一个由下式决定的漂移速度，即

$$v_{\text{漂移}} = \mu F. \quad (43.32)$$

利用我们通常的论证，漂移流（单位时间内通过单位面积的净分子数）将是

$$J_{\text{漂移}} = n_a v_{\text{漂移}}, \quad (43.33)$$

或

$$J_{\text{漂移}} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

现在，我们来调整力 F 使得由它引起的漂移流刚好与扩散流平衡。这样，在我们的这些特殊分子中不存在净流。于是有

$$J_x + J_{\text{漂移}} = 0,$$

或

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

在“平衡”条件下，我们找到了一个稳定的（对时间说来）密度梯度

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

但是，请注意！我们正在描写一个平衡条件，所以可以运用统计力学的平衡定律。按照这些定律，在坐标 x 处找到一个分子的概率正比于 $e^{-U/(kT)}$ ，这里 U 是势能。用数密度 n_a 表示，这意味着

$$n_a = n_0 e^{-U/kT}. \quad (43.37)$$

将式 (43.37) 对 x 求微商, 得

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_a e^{-U/kT} \cdot \frac{1}{kT} \cdot \frac{dU}{dx}, \quad (43.38)$$

或

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \cdot \frac{dU}{dx}. \quad (43.39)$$

在我们的情况下, 由于力 F 沿 x 方向, 势能 U 正好是 $-Fx$, 而 $-dU/dx = F$ 。由式 (43.39) 得出

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

[这正是式 (40.2), 我们曾由它第一次推导出 $e^{-U/kT}$, 所以我们兜了一个圈子]! 比较式 (43.40) 与 (43.36), 正好得出式 (43.31)。这样, 我们就证明了式 (43.31) (它用迁移率 μ 给出扩散流) 具有正确的而且是十分普遍的系数。迁移与扩散有着密切联系, 这一联系首先是由爱因斯坦推得的。

§43-6 热导率

上面运用的分子动理论方法也可以用来计算气体的热导率。如果某个容器顶部的气体比底部的气体热, 热量将从顶部流到底部 (我们假定顶部的气体较热, 是因为否则将会形成对流现象, 这样问题就不再是热传导问题了)。热量由较热的气体向较冷的气体传递是由于带有较大能量的“热”分子往下扩散, 以及“冷”分子往上扩散而引起的。为了计算热能流, 我们可以问: 通过面积元向下运动的分子带到下面

的能量，以及通过这个面积向上运动的分子带到上面的能量是多少。它们的差就是向下的净能流。

热导率 κ 定义为单位时间内通过单位面积的热能与温度梯度之比

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dz}. \quad (43.41)$$

由于具体的计算十分类似于我们前面在考虑分子扩散时所作的计算，因此我们把证明

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1} \quad (43.42)$$

留给读者作为一个练习。 $\frac{kT}{\gamma - 1}$ 是一个分子在温度 T 时的平均能量。

如果我们利用关系式 $n\lambda\sigma_c = 1$ ，热导率 κ 可以写为

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

这是一个十分惊人的结果。我们知道，气体分子的平均速度与温度有关，而与密度无关。我们期望 σ_c 只与分子的大小 有关，这样上面那个简单的结果表明热导率 κ （因此也就是在任何特定情况下的热流率）与气体的密度 无关！由于密度变化而带来的能量“载流子”数目的变化正好被两次碰撞之间载流子跑过的较长的距离所抵消。

有人会问：“在气体密度趋向于零的极限情况下，热流是否也和气体密度无关？如果这里根本没有气体呢？”当然不会！式（43.43）的推导和本章中的所有其他推导一样，是建立在碰撞之间的平均自由程远小于容器的任何尺度这个假设之上的。只要气体密度低到这种程

度，使得一个分子有充分机会无碰撞地从容器的一个器壁跑到另一个器壁，本章的所有计算就都不能用。在这种情况下，我们必须回到分子动理论上去，重新计算将会出现的具体情况。

第44章 热力学定律

§44-1 热机、第一定律

迄今为止，我们讨论物质性质都是从原子观点出发的，我们假定物质由遵从一定规律的原子所构成，企图由此来大致理解物质会出现什么情况。然而，物质性质之间的许多关系可以不考虑材料的具体结构而求得。不去过问物质的内部结构以确定物质各种性质之间的关系乃是热力学的课题。历史上，在人们了解物质内部的结构之前，热力学就得到了发展。

举个例子说：由分子动理论我们知道气体的压强是由分子的碰撞引起的。我们还知道，如果加热气体，碰撞就会增加，压强也会增大。反之，如果一个气体容器上的活塞朝里移动以反抗碰撞的力，则碰撞在活塞上的分子能量将增大，结果温度也将上升。所以，一方面，如果在一定的体积下升高温度，压强就增大。另一方面，如果压缩气体，就会发现温度将上升。由分子动理论，人们可以得出这两种效应之间的定量关系，但是我们也许会本能地猜测它们之间是由某种与碰撞细节无关的必然方式联系起来的。

再考虑另一个例子。许多人都很熟悉橡皮的一个有趣性质：如果拉长一根橡皮带，它就会变热。例如，如果把橡皮带放在嘴唇间拉长它，你就会感到橡皮带明显地变热。这种变热是可逆的，也就是说，如果当橡皮带还在嘴唇间时很快地放松它，它就会明显地变冷，这意

味着当我们拉紧橡皮带时，它会变热，而当我们放松橡皮带的张力时，它就会变冷。现在，我们的直觉告诉我们，如果加热橡皮带，它可能会拉紧：拉一根带子会使它变热的事实也许还意味着加热一根带子会使它收缩。事实上，如果我们用煤气灯加热一根悬挂着重物的橡皮带时，就会看到带子会骤然收缩（图44-1）。所以确实在加热橡皮带时它会拉紧这个事实与我们放松橡皮带的张力时它会变冷的事实之间有着一定的联系。

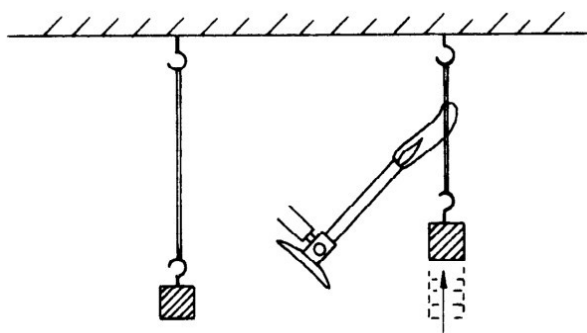


图 44-1 加热的橡皮带

引起这些效应的橡皮带的内部机制是非常复杂的。我们将从分子的观点出发来作一些描写，虽然本章的主要目的是不涉及分子模型来理解这些效应之间的关系。不过我们可以从分子模型来说明这些效应是紧密联系的。理解橡皮带行为的一种方法是认为这种物质是由大量的长分子链（像一种分子“面条”那样）缠在一起而组成的。此外，它还具有另一种复杂性：分子链之间有着交键——就像有时一根面条穿过另一根面条时交叉在一起那样——那样的一种大的缠结。当我们拉开这样的缠结时，其中某些分子链趋向于沿着拉伸的方向排列。同时，链又处于热运动之中，所以互相之间又不停地碰撞。结果是，这样一根链如果被拉长的话，将不能自己保持这种状态，因为它将受到来自旁边的其他链和其他分子的碰撞，从而倾向于重新缠结在一起。所以，橡皮带具有收缩倾向的真实原因是，当把它拉开时，链变长

了，而链旁边的分子的热扰动则趋向于使链重新缠结起来，使它变短。于是人们意识到，如果链保持伸长，而温度升高，使得链四周碰撞的活跃程度增加，链就趋向于收缩，因而在加热橡皮带时能拉起较大的重量。如果在拉伸了一段时间后，让橡皮带放松，那么每个链都变软，而碰撞到放松了的链上的分子在碰撞的时候损失了能量，于是温度就降低。

我们已经看到，加热时收缩与放松时变冷这两种过程可以由分子动理论联系起来，但是要从分子动理论确定这两者之间的精确关系，将是一个巨大的挑战。我们必须知道每秒发生多少次碰撞，这些链究竟像什么样子，同时还必须考虑到所有其他的复杂情况。细致的机制是这样复杂，以致我们实际上无法用分子动理论来精确确定所发生的事情。但是，我们可以得出所观察到的这两种效应间的明确关系，而毋须知道任何有关的内部机制。

热力学整个课题从本质上说依赖于下面的这种考虑：因为橡皮带在高温时比在低温时更“强有力”，因此它应当有可能提起重物，移动重物，也就是说用热量做功。实际上，我们已从实验上看到受热的橡皮带能提起重物。研究利用热量来做功的方式是热力学这门科学的开端。我们能否制造出一台利用橡皮带的加热效应来做功的机器？我们可以制造一台外形不美观的机器来做这件事。它由一个自行车的轮子组成，轮子上的所有辐条都是橡皮带（图44-2）。如果我们在轮子的一边用一对加热灯泡来加热橡皮带，它们就比另一边的橡皮带更“强有力”。轮子的重心将偏离轴承中心而移到一边去，从而使轮子转动。当它转动时，冷的橡皮带向热的地方运动，已受热的橡皮带离开热的地方而变冷，所以在不断地加热时，轮子就一直缓慢地转动。这台机器的效率是非常低的。给两个灯泡提供400 W的功率，这台机器才刚刚

能提起一只苍蝇！然而，一个有趣的问题是，我们能否用更有效的方式来利用热量做功？

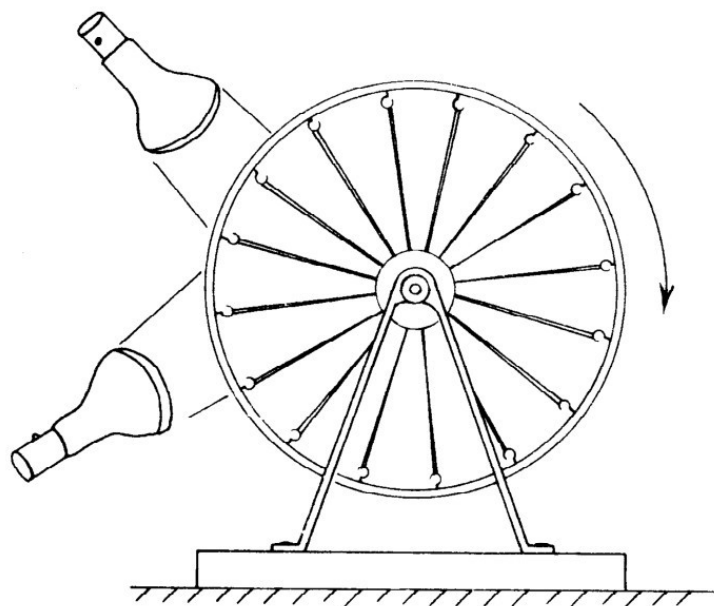


图44-2 橡皮带加热机

事实上，热力学这门科学就是起源于伟大的工程师卡诺对如何制造最好的和最有效的热机这个问题所作的分析，这是工程学对物理理论作出基本贡献的少数几个著名的例子之一。可以想到的另一个例子是香农所作的信息论的最近的分析。顺便提一下，这两种分析之间有着密切的联系。

一台蒸汽机通常的工作方式是先用锅炉烧开一些水，所产生的蒸汽膨胀推动活塞而使飞轮转动。这样，蒸汽就推动了活塞——以后怎么办呢？我们必须做完的事是：完成一个循环，一个笨拙的方法是让蒸汽放到空气中去，于是就要不断地加水。比较便宜也比较有效的方法是把蒸汽放到另一个箱子里，在那里用冷水使它凝结，然后再把这些水抽回到锅炉里去，这样就能连续地循环往复工作。于是蒸汽机不断得到热量并把它们转变为功。现在我们要问，利用酒精是不是会更

好一些呢？为了得到一台最好的热机，物质应当具有怎样的性质？这就是卡诺向自己提出的问题，而其中的副产品之一就是发现了我们上面刚刚解释过的这种类型的关系。

热力学的结果全都包括在一些称为热力学定律的十分简单明了的命题里。在卡诺那个时代，人们还不知道热力学第一定律——能量守恒定律，然而卡诺的论证作得很仔细，以致虽然当时还不知道第一定律，但这些论证仍然成立！若干年后，克拉珀龙（Clapeyron）作了一个比较简单的推导，它比起卡诺的非常精巧的推理来更易理解。结果表明，克拉珀龙假设的不是一般的能量守恒定律，而是按照热质说认为热量是守恒的。后来知道，热质说是错误的，所以人们时常说卡诺的逻辑是错误的。但他的逻辑是完全正确的。只有克拉珀龙的简化的论证人人都看得出是不正确的。

所谓热力学第二定律是卡诺在热力学第一定律之前发现的！给出卡诺不使用第一定律来作出的论证是有趣的，但是，我们不这样做，因为我们要学的是物理而不是历史。我们从开始就运用热力学第一定律，尽管许多事情没有它也能作出。

我们首先陈述第一定律，即能量守恒定律：如果对一个系统加热，并对它做功，那么它的能量将由于吸收热量和对它所做的功而增加。这可以表示为：加进系统的热量 Q ，加上对系统所做的功 W ，等于系统的能量 U 的增加；能量 U 有时称为内能。于是

$$\text{能量 } U \text{ 的变化} = Q + W. \quad (44.1)$$

能量 U 的变化可以通过热量微元 ΔQ 与功微元 ΔW 相加来表示

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (44.2)$$

这是同一条定律的微分形式。关于这一点，在早先的一章中我们已知道得很清楚。

§44-2 第二定律

现在要问热力学第二定律是什么？我们知道，如果反抗摩擦力做功，那么所损耗的功就等于所产生的热量。如果我们在温度为 T 的室内足够缓慢地做功，室温不会改变得很大，那么我们是在给定的温度下将功转变为热。是否可能存在逆过程？是否有可能在给定的温度下反过来将热转变为功？热力学第二定律断言这是不可能的。假定能够只通过把像摩擦这样的过程反过来就能使热转变为功，这就太方便了。如果我们只从能量守恒来考虑，我们可以想象把热能（比如在分子振动中的能量）作为提供有用能量的良好来源。但是卡诺认为，不可能在单一温度下取出热能。换句话说，如果整个世界处于同一温度下，那么我们就不可能将任何热能转变为功：在一个给定的温度下，使功转变为热的过程是可以发生的，但不能把它反过来再得到这些功。说得更具体一些，卡诺认为：不可能在一个给定的温度下取出热量，并把它转变为功而不引起系统或周围环境的其他任何变化。

最后一句话是非常重要的。假设有一罐处在某给定温度下的压缩空气，我们让空气膨胀。这时它就能做功，比如说，可以使锤子移动。在膨胀中气体会稍稍变冷，但是如果在一个给定温度下，我们有一个像海洋那样的热库，那么就可以使空气再变热。这样就从海洋中取出了热量，并利用压缩空气做功。但是，卡诺并没有错，因为我们没有使每件事情保持原样。如果我们重新压缩已经膨胀的空气，就会发现我们做了额外的功，在完成这一切后我们发现，不仅没有从温度

为 T 的系统内取出功，实际上反而对它做功。我们讲的必须只是这样一种状况，其中整个过程的净结果是取出热量，并把它转变为功，正如反抗摩擦力做功这个过程的净结果是取出功，并把它转变为热那样。如果系统循环运动，我们可以使系统严格回到它的出发点，产生的净结果是反抗摩擦力做功，并产生热量。能把这个过程反过来吗？能否按一下开关，使每样东西都反过来进行，从而使摩擦力反抗我们做功，而海洋就冷却下来呢？卡诺的回答是：不行！所以我们也假定这是不可能的。

假定这种情况可能出现，那就意味着，我们可以不花任何代价而从一个冷的物体中取出热量，并把它放进一个热的物体中去。我们知道一个热的东西能使一个冷的东西变热，这是很自然的。我们的实验还证实，如果只是简单地把热的物体与冷的物体放在一起，而其他一切都保持不变的话，那么绝不会发生热的物体越来越热，冷的物体越来越冷的情况！但是如果我们能从比如说海洋中，或从任何在单一温度下的其他东西中取出热量来做功的话，这个功就可以在某个其他温度下反过来通过摩擦而转变成热。例如，一台正在工作的机器的某工作臂可以和某种已经变热的东西发生摩擦。净结果是从一个“冷”的物体，即海洋中取出热量来，并把它放进一个热的物体里去。现在，按照卡诺的假定有时也把热力学第二定律表述如下：热量不能自动地从冷的物体流到热的物体。正如我们刚才看到的，这两个命题是等价的：第一个命题说，人们不可能设计这样一种过程，它的唯一结果是在一个单一的温度下将热转变为功，第二个命题说，人们不可能使热量自动地从冷的地方流到热的地方。我们主要采用第一种形式。

卡诺对热机的分析十分类似于第4章讨论能量守恒时我们对于起重机械问题所作的论证。事实上，那个论证正是仿效卡诺对热机的论

证，所以现在的处理看起来非常相似。

假设我们建造了一台带有某个温度为 T_1 的“锅炉”的热机。从锅炉中取出了一定的热量 Q_1 ，蒸汽机做了某些功 W ，放出一些热量 Q_2 给另一个温度为 T_2 的“冷凝器”（图44-3）。由于卡诺不知道热力学第一定律，所以他不谈热量是多少，也不用 Q_2 等于 Q_1 这条规则，因为他不相信这一点。虽然根据热质说，每个人都会认为 Q_1 与 Q_2 必定相等。卡诺则不说它们是相等的——这就是他的论证中的部分高明之处。如果利用热力学第一定律，就会发现放出的热量 Q_2 等于吸收的热量 Q_1 减去所做的功

$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$

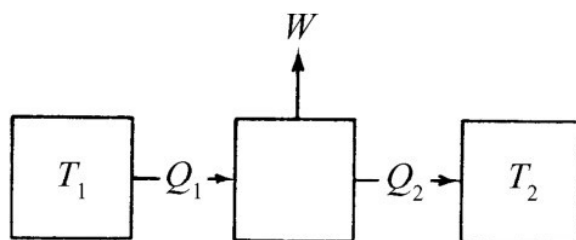


图 44-3 热机

（假设有某种循环过程：在凝结后又把水泵回到锅炉中去，我们将说，在每一循环中，对进行循环过程的一定量的水来说，吸收了热量 Q_1 ，并做了功 W ）。

现在我们将建造另一台热机，看看若用在温度 T_1 下放出的同样的热量，以及温度仍为 T_2 的冷凝器，能否做更多的功。我们将利用从锅

炉中得到的同样多的热量 Q_1 ，并试图用别的液体，如酒精，以得到比在蒸汽机的情况下更多的功。

§44-3 可逆机

现在必须对我们的热机进行分析。有一件事很清楚：如果热机中含有存在着摩擦的装置，那么就有损耗。最好的热机是无摩擦的热机。于是，我们作一个和在研究能量守恒时作过的同样理想化的假设，即假设一个理想的无摩擦的热机（图44-3）。

我们还必须考虑与无摩擦运动相类似的情况，即“无摩擦”的热传递。把一个温度高的热物体放在一个冷物体上，于是有热流产生，这时不可能通过让每个物体的温度作非常微小的变化来使热量沿相反方向流动。但是，当我们有一台实际上没有摩擦的机器时，如果用一个小小的力沿一个方向推它，它就沿这个方向运动，如果用一个小小的力沿另一个方向推它，它就沿另一个方向运动。我们需要找出与无摩擦运动类似的情形：只利用微小的变化就能把热量传输的方向反过来。如果温度差有限，那么这是不可能的，但是如果我们能够确信热量流动总是在温度基本相同的两个物体之间发生，只要两个物体具有无限小的差别就可使热量顺着我们所希望的方向流动，这种流动称为可逆的（图44-4）。如果我们在左边稍微加热物体，热量将流向右边；如果我们使左边稍微冷却，热量将向左边流动。这样我们就发现理想热机就是所谓可逆机，其中的每一个过程在这种意义下都是可逆的，即只作极小的、无限小的变化，我们就能使热机沿相反方向运行。这意味着在机器中的任何地方都必然不存在可觉察到的摩擦力，

并且也肯定没有发生热库或锅炉火焰直接和某种确定地较冷或较热的东西相接触。

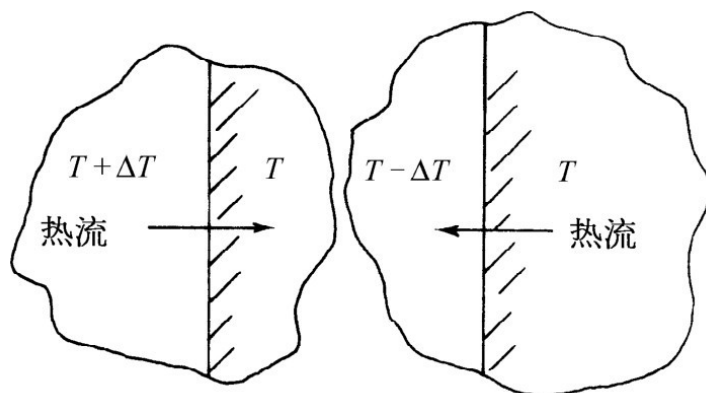


图44-4 可逆的热传递

现在考虑一台所有过程都可逆的理想热机。为了说明这一种东西在原则上是可能的，我们将举一个热机循环的例子，它可能是也可能不是实际的，但至少在卡诺设想的含义上是可逆的。如图44-5所示，假设有一个盛有气体的汽缸，汽缸上带有一个无摩擦的活塞。气体不一定必须是理想气体，甚至液体也不一定必须能汽化，但是为了确定起见，我们认为这是一种理想气体。假设我们还有两个很大的热垫 T_1 和 T_2 ——一种具有确定温度 T_1 和 T_2 的很大的东西。假定现在的情况是 T_1 高于 T_2 。我们先加热气体，同时让它膨胀，这时它与热垫 T_1 接触。在这样做的时候，一旦热量流入气体，活塞就非常缓慢地被顶出，我们确信气体的温度永远不会远离 T_1 。假定活塞被顶得太快，气体的温度就会比 T_1 低许多，于是过程就不完全是可逆的，但若活塞被顶得足够慢，气体的温度就永远不会远离 T_1 。另一方面，如果我们缓慢地把活塞推回来，气体温度只比 T_1 高一个无限小量，热量将传回给

热垫。我们看到，这样一种进行得足够缓慢的等温（温度不变）膨胀是可逆过程。

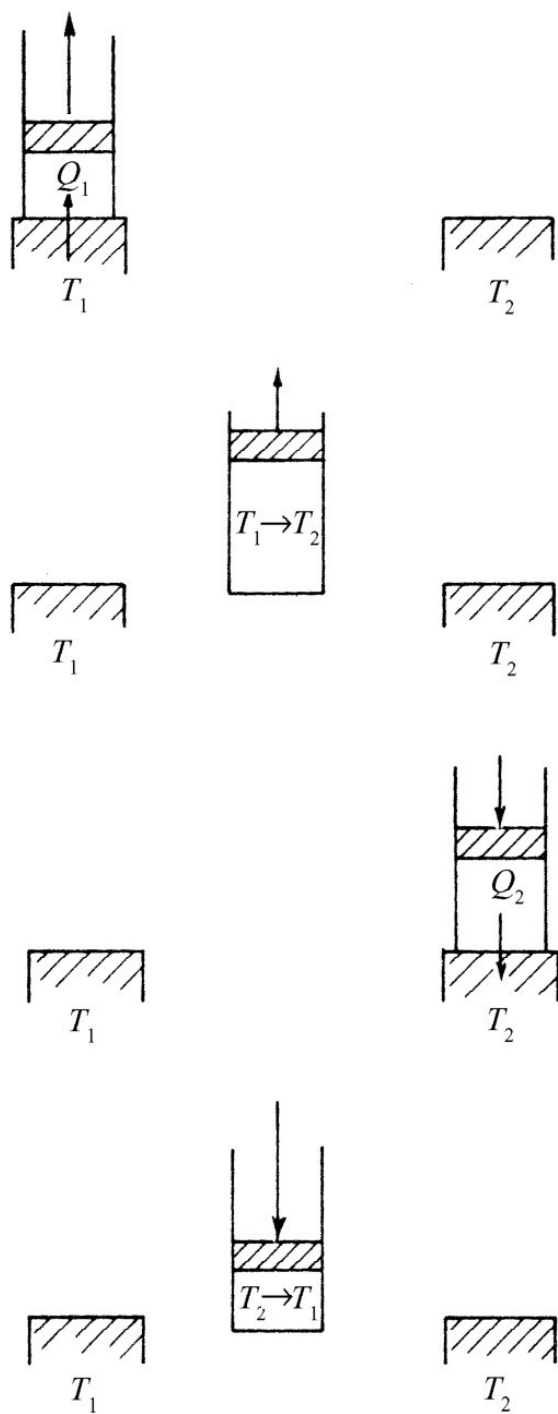


图44-5 卡诺循环中的各个步骤

为了理解刚才所做的事，我们画出气体压强与体积之间的关系图（图44-6）。当气体膨胀时，压强下降。记为（1）的曲线告诉我们当温度固定为 T_1 时，压强随体积会如何变化。对于理想气体来说，这条曲线就是 $PV=NkT_1$ 。在等温膨胀中，当体积增加时，压强降低，直到停在 b 点为止。同时，必然有一定的热量 Q_1 从热库流入气体，因为我们已知，如果气体膨胀时不与热库接触，它就会冷却。完成了等温膨胀而停止在 b 点后，我们将汽缸从热库拿开，并让它继续膨胀。这时我们不让任何热量进入汽缸，同时仍让气体缓慢地膨胀，再假设没有任何摩擦力，因此没有任何理由说这个过程不可逆。气体继续膨胀时，因为再没有任何热量进入汽缸，所以气体温度将下降。

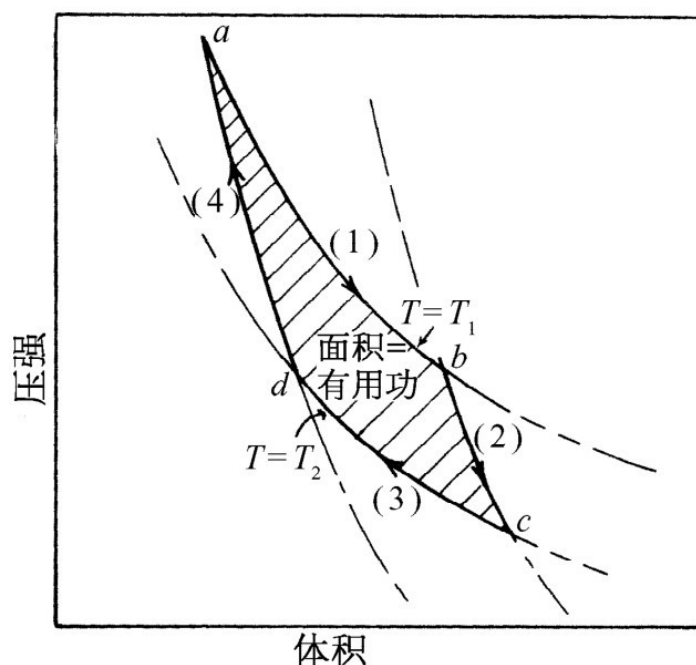


图44-6 卡诺循环

令气体沿着记为（3）的曲线膨胀，直到温度降为 T_2 到达 c 点。我们把这种不加进热量的膨胀称为绝热膨胀。对于理想气体来说，我

们已知曲线（2）具有 $PV^\gamma = \text{常数}$ 的形式，这里 γ 是大于1的常数，所以和等温曲线相比，绝热曲线具有更负的斜率。现在汽缸的温度达到 T_2 ，因而如果我们把它放在温度为 T_2 的热垫上，将不会出现不可逆的变化。现在在气体与温度为 T_2 的热库接触的情况下，沿着记为（3）的曲线缓慢地压缩气体（图44-5，第二步）。因为汽缸与热库接触，它的温度不会升高，但是热量 Q_2 要在温度为 T_2 时从汽缸流入热库。在沿曲线（3）等温地压缩气体至 d 点后，我们把汽缸从温度为 T_2 的热垫上拿开，并继续压缩气体，同时不让任何热量流出。于是气体的温度将上升，压强将沿记为（4）的曲线变化。如果妥善地实现每一步骤，我们可以回到温度为 T_1 的起点 a 处，并且重复这一个循环。

在图44-6上可以看到，我们已经使气体作一个完整的循环，在这一循环中，我们在温度 T_1 处加进了热量 Q_1 ，而在温度 T_2 处取走了热量 Q_2 。现在，要点在于这个循环是可逆的，因而我们能够把所有的步骤用另外反过来的方式表示。我们可以反向循环而不是正向循环：让气体从温度为 T_1 的 a 点出发，沿曲线（4）膨胀，膨胀到温度 T_2 后再吸收热量 Q_2 ，等等，使循环反向进行。如果我们沿这个方向作一个循环，我们必须对气体做功；而如果我们沿相反的方向循环，气体必定对我们做功。

附带提一下，不难求出功的总量，因为在任何膨胀过程中所做的功是压强乘以体积的变化，即 $\int P \, dV$ 。在这个特殊的循环图中，垂直轴表示 P ，水平轴表示 V 。如果我们称垂直坐标为 y ，水平坐标为 x ，功就是 $\int y \, dx$ ——换句话说，就是曲线下的面积。因此每条曲线下的面积

就是对应的那个步骤中对气体或由气体所做的功。不难看出所做的净功就是图中的阴影面积。

现在我们已经举了一个可逆机的简单例子。我们还将假定可能有其他这样的热机。设有某个可逆机A，它在 T_1 温度下吸收热量 Q_1 ，做了功 W ，并且在 T_2 温度下释放了部分热量。现在我们假设还有另一台热机B，它或许已经设计成功，或许还没有发明出来。这台热机由许多橡皮带、蒸汽或别的什么东西制成，既可以是可逆的，也可以是不可逆的，但要设计得使它在温度 T_1 下吸收同样多的热量 Q_1 ，而在较低的温度 T_2 下释放出热量（图44-7）。假设热机B做了一定的功 W' 。现在我们将要证明， W' 不会大于 W ，也就是说没有一台热机做的功能够超过可逆机。为什么？假设 W' 确实大于 W ，那么我们可以从 T_1 热库中取出热量 Q_1 ，利用热机B可以做功 W' ，并且释放一些热量到 T_2 热库中去，至于究竟有多少我们不去管它。这样做以后，由于已经假设 W' 大于 W ，我们可以省下 W' 中的某些功，利用它的一部分功 W 而使其余的功 $W'-W$ 作为有用功。利用功 W 可使热机A反过来运转，因为它是一个可逆机。它将从 T_2 热库中吸收某些热量，并把热量 Q_1 放回给 T_1 热库。经过两重循环后，净结果就是每样东西都回到原来的状态，但可以做某些额外的功，即 $W'-W$ ，而我们所做的一切就是从 T_2 热库中取出能量！我们已经很小心地把热量 Q_1 还给了 T_1 热库，因而这个热库可以很小，也可以把它放在联合热机（A+B）“之内”，这个联合热机的净结果是由 T_2 热库取出净热量（ $W'-W$ ），并把它变为功。但是，按照卡诺的假设，要从某个单一温度下的热库中取得有用功而不发生任何其他变化是不可能的，它是无法实现的。因此，在相

同温度的运行条件下，没有一台热机能从较高温 T_1 吸收一定的热量，又在 T_2 温度下释放一些热量，而所做的功能大于可逆机。

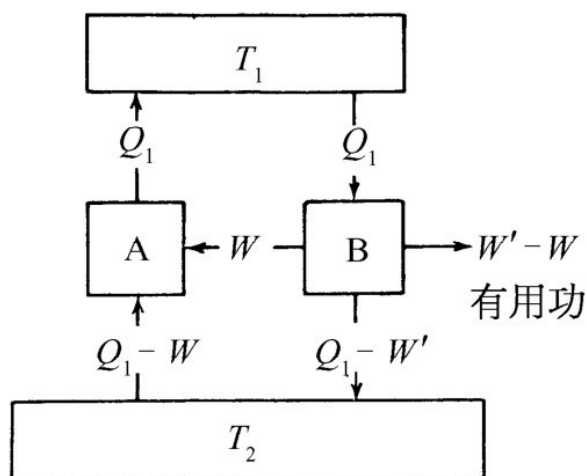


图44-7 热机B使可逆机A反向运转

现在假设B机也是可逆的。当然，这时不但必须满足 W' 不大于 W ，也可以把论证反过来证明 W 也不能大于 W' 。所以，如果两台热机都可逆，它们必定做同样大小的功，这样，我们就得到了卡诺的光辉结论：如果一台热机是可逆的，那么不管它是怎样设计的，都不会有任何不同，因为如果这台热机在温度 T_1 下吸收一定的热量，而在某个其他温度 T_2 下释放一些热量，人们所得到的功与热机的设计无关。这是自然界的属性，而不是个别热机的特性。

如果我们能够找出一条定律来确定在温度 T_1 下吸收热量 Q_1 和在温度 T_2 下释放一些热量时能够做多少功，那么这个量将具有普遍的性质，而与物质无关。当然，如果我们知道了某种特殊物质的性质，并且能把这个量求出，就能够说，在一台可逆机中工作的所有其他物质也必定给出同样大小的功。这是一个关键的想法，利用这条线索，我

们可以求出，比方说，当加热橡皮带时它收缩的程度与放松橡皮带时它冷却的程度之间的关系。我们不妨设想把这样的橡皮带放进一台可逆机中，并使它经过一个可逆循环。净结果（即做功的总量）是一个普适函数，亦即一个与物质无关的函数。所以我们看到物质的性质必然有一定的限制。人们不能要求任何想要的东西，也不可能发明一种物质，使这种物质经过一个可逆循环后，得出比所允许的最大值还大的功。这条原则和这种局限性是热力学得出的唯一真实的规则。

§44-4 理想热机的效率

现在来找出决定功 W 作为 Q_1 、 T_1 和 T_2 的函数的定律。显然 W 正比于 Q_1 ，因为如果我们考虑两个并联的可逆机时，这两台一起工作的热机组合起来仍然是可逆机。假设每台热机都吸收热量 Q_1 ，那么两台热机合在一起吸收热量 $2Q_1$ ，所做的总功就是 $2W$ ，等等。所以 W 正比于 Q_1 是合理的。

现在，下一个重要步骤是找出这条普适定律。如果研究一台用我们已经知道它的规律的特定物质（例如理想气体）制成的可逆机，我们就能够而且一定找得出这个定律。通过纯粹的逻辑论证，根本不用任何特殊的物质也能得出这条规律。这是物理学中最出色的理论证明之一，如果不把它证明给你们看，就会于心不安，所以对于那些希望知道证明的人来说，我们将在适当时候讨论它。但是我们先用理想气体进行直接计算，这是一种不太抽象的、较为简单的方法。

我们只要得到 Q_1 和 Q_2 的公式（因为 W 刚好等于 $Q_1 - Q_2$ ），即在等温膨胀或压缩的过程中和热库交换的热量的公式。例如，从压强为 p_a ，体积为 V_a ，温度为 T_1 的 a 点〔图44-6中标记为（1）的曲线〕，等温膨胀至压强为 p_b ，体积为 V_b ，温度仍为 T_1 的 b 点时，将从温度为 T_1 的热库中吸收多少热量 Q_1 ？对于理想气体来说，每个分子具有一个只取决于温度的能量，而且因为 a 点和 b 点的温度和分子数相同，内能也就相同。内能 U 没有任何变化。气体在膨胀过程中所做的总功

$$W = \int_a^b p \, dV.$$

它等于由热库取出的能量 Q_1 。在膨胀过程中， $pV = NkT_1$ ，或

$$p = \frac{NkT_1}{V},$$

于是

$$Q_1 = \int_a^b p \, dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V}, \quad (44.4)$$

即

$$Q_1 = NkT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right).$$

这就是从 T_1 热库取得的热量。同样，对于在 T_2 温度下的压缩来说 [图44-6曲线 (3)]，释放给 T_2 热库的热量是

$$Q_2 = NkT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right). \quad (44.5)$$

为了完成我们的分析，只要求出 V_c/V_d 与 V_b/V_a 之间的关系。注意到曲线 (2) 是从 b 到 c 的绝热膨胀，在这个过程中 pV^γ 是一个常数，就可以找出这个关系。因为 $pV = NkT$ ，可以把它写为 $(pV) V^{\gamma-1} = \text{常数}$ ，或者，利用 T 和 V ，可写为 $TV^{\gamma-1} = \text{常数}$ ，即

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

类似地，由于曲线 (4)，从 d 到 a 的压缩也是绝热的，我们有

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

式 (44.6) 除以式 (44.6a) 后，可得 V_b/V_a 必定等于 V_c/V_d ，所以式 (44.4) 与式 (44.5) 中的对数项相等，于是便有

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

这就是我们要找的关系。虽然这是对理想气体热机所作的证明，但我们知道对于任何可逆机它都必定完全成立。

现在我们来看看如何能通过逻辑推理求得这条普适的定律，而无需知道任何特殊物质的性质。现推导如下：假定有三个热机和三种温

度 T_1 、 T_2 和 T_3 。令一台热机在 T_1 温度下吸收热量 Q_1 ，做功 W_{13} ，并在温度 T_3 下放出热量 Q_3 （图44-8）。令另一台热机在 T_2 和 T_3 之间反过来运转。再假定把第二台热机设计得正好吸收同样的热量 Q_3 ，放出热量 Q_2 。我们必须对它做一定的功 W_{32} ，这里 W_{32} 是负的，因为这台热机反过来运转。当第一台热机经过一个循环后，它吸收热量 Q_1 而在温度 T_3 下放出热量 Q_3 ，然后第二台热机从 T_3 热库取出同样的热量 Q_3 ，而将热量 Q_2 释放给温度为 T_2 的热库。因此这两台热机一前一后地运行的净结果是从 T_1 吸收热量 Q_1 ，而在 T_2 放出热量 Q_2 。于是这两台热机等价于第三台热机，第三台热机是在 T_1 下吸收热量 Q_1 ，做功 W_{12} ，然后在 T_2 下放出热量 Q_2 。因为由热力学第一定律我们立刻可以证明 $W_{12} = W_{13} - W_{32}$

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}, \quad (44.8)$$

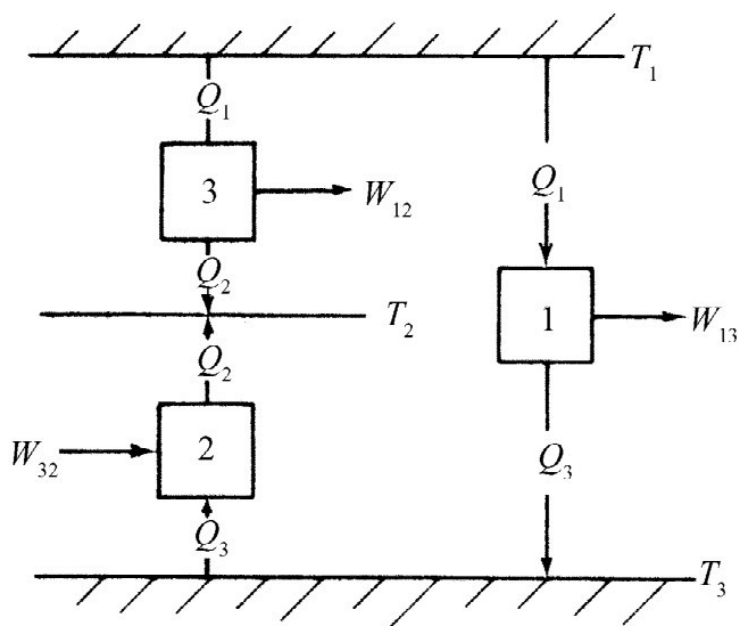


图44-8 热机1与2联合起来等于热机3

于是我们可以得到关于热机效率的定律，因为在温度 T_1 和 T_3 之间， T_2 和 T_3 之间，以及 T_1 和 T_2 之间运行的热机效率之间显然必定存在某种联系。

我们可以用下述方式使论证更为清楚：刚才已经看到，我们总可以通过找出在某个其他温度 T_3 下释放的热量，而把在 T_1 吸收的热量和在 T_2 释放的热量联系起来。如果引进一个标准温度，用这个标准温度来分析每一样东西，我们就能求得所有的热机的性能。换句话说，如果我们知道一台运转在一定的温度 T 和某个确定的标准温度间的热机效率，就可以求出在任何其他温度差下的热机效率。因为我们假定只用可逆机，我们可以使它从初始温度下降到标准温度，然后再回升到最终温度。我们将标准温度任意定义为 1° ，并用一个特殊记号 Q_s 来表示在这个标准温度下所释放的热量。换句话说，当一个可逆机在温度 T 下吸收热量 Q 时，它将在 1° 下释放热量 Q_s 。如果一台热机在 T_1 下吸收热量 Q_1 ，而在 1° 下放出热量 Q_s ，并且如果一台热机在 T_2 下吸收热量 Q_2 ，而在 1° 下也放出同样的热量 Q_s ，则一台运行于温度 T_1 和 T_2 之间的热机将在温度 T_1 下吸收热量 Q_1 ，而在 T_2 下放出热量 Q_2 ，这正好和我们考虑在三种温度之间工作的热机时所证明的一样。所以实际上我们所要做的就是求出在温度 T_1 时必须给热机多少热量 Q_1 才使它在单位温度下放出一定量的 Q_s 。一旦求得了它，就什么都有了。当然，热量 Q 是温度 T 的函数。不难看出，当温度增加时，热量也必定增加，因为我们知道使一台热机反过来运行，并把热量释放到温度更高的热库时需要对它做功。也不难看出热量 Q_1 必定与 Q_s 成正比。所以这一条重大的定律可以大致叙述如下：一台在温度 T 下运行的热

机，在 1° 下释放出一定的热量 Q_s ，则热机所吸收的热量 Q 必定是 Q_s 乘以某个温度的递增函数

$$Q = Q_s f(T). \quad (44.9)$$

§44-5 热力学温度

现在我不想利用熟知的水银温标来找出上述温度递增函数的公式，而是要用一个新的温标来定义温度。在一段时期内，人们曾经将水的膨胀划分为一定大小的均匀标度来任意地定义“温度”。但是后来用水银温度计测量温度时，人们发现这些“度”不再是均匀的了。不过我们现在可以给出一个与任何特殊物质无关的温度的定义。我们可以利用与所使用的装置无关的函数 $f(T)$ ，因为这些可逆机的效率与它们的工作物质无关。由于我们找到的这个函数随温度而增加，所以我们将把这个函数本身定义为温度，而以标准的 1° 作为单位来测定温度，即

$$Q = ST, \quad (44.10)$$

而

$$Q_s = S \cdot 1^\circ. \quad (44.11)$$

这意味着，如果使一台可逆机运行于某个物体的温度与单位温度之间，只要求出这台可逆机吸收的热量，我们就能说出这个物体有多热（图44-9）。如果从锅炉中吸收的热量是释放到 1° 的冷凝器中的热量的7倍，锅炉的温度就是 7° ，等等。所以，通过测量在不同温度下所吸

收的热量，我们就能确定温度。以这种方法定义的温度称为热力学绝对温度，它和物质无关。以后我们将一概应用这个定义^[1]。

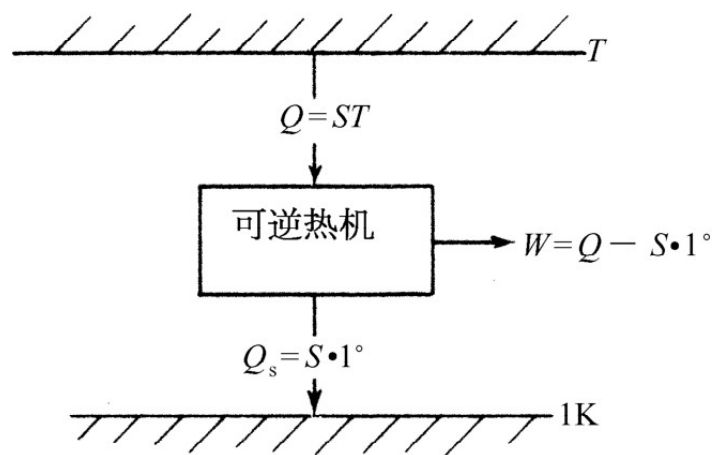


图44-9 绝对热力学温度

现在我们看到，如果有两台热机，一台工作于 T_1 与 1° 之间，另一台工作于 T_2 与 1° 之间，它们在单位温度下释放相同的热量，则它们吸收的热量必然满足下列关系

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

这意味着，如果有某一台运行于 T_1 和 T_2 之间的热机，那么整个分析所得出的极为重大的结果是：如果热机在温度 T_1 吸收热量 Q_1 ，并且在温度 T_2 放出热量 Q_2 ，则 Q_1 比 T_1 等于 Q_2 比 T_2 。只要热机是可逆的，这个热量之间的关系就必须满足。全部结果都包括在这里，这是热力学领域的核心。

如果这就是热力学的所有一切，为什么把热力学看成是这样一门困难的学科呢？在处理一个包含一定质量的某种物质的问题时，在任

何时刻物质的状态都可以通过给出它的温度和体积来描写。如果我们知道了物质的温度和体积，以及压强是温度与体积的某个函数，则我们就知道内能。有人会说：“我不想这么做，告诉我温度和压强是多少，我就会告诉你体积是多少。我可以把体积看成是温度和压强的函数，把内能看成是温度和压强的函数，等等。”这就是热力学之所以困难的原因，因为每个人都可采用一种不同的途径。只要我们坐下来，决定我们的变量，并且坚持使用下去，那么热力学就会变得非常容易了。

现在我们将进行一些推论。正如 $F=ma$ 是力学领域的核心，所有一切都不断由它派生，同样的原则也适用于热力学。但人们能由此推出一些什么结论呢？

让我们来开始做这件事情。为了得到第一个推论，我们把能量守恒定律和把 Q_2 与 Q_1 联系起来的定律结合起来，于是很容易得出可逆机的效率。由热力学第一定律，我们有 $W=Q_1-Q_2$ 。而按照我们的新原理

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1,$$

于是功可以写成

$$W = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.13)$$

这个公式指出了热机的效率——从那么多的热量中得到了多少功。热机的效率等于热机在其中工作的两个温度之差除以较高的温度

$$\text{效率} = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

它不可能大于1，因为绝对温度不可能小于绝对零度。这样，由于 T_2 必须为正，所以效率总是小于1。这就是我们的第一个推论。

§44-6 熵

式(44.7)或式(44.12)可以按另一种特殊方式来解释。如果工作时都是用可逆机，而 $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ ，那么从一个被吸收另一个被释放的意义上来说，温度 T_1 的热量 Q_1 “等效”于温度 T_2 的热量 Q_2 。这就启发了我们，如果称 Q/T 为某个量，就可以说：在可逆过程中，吸收和放出的 Q/T 是一样多； Q/T 既不增加也不减少。这个 Q/T 称为熵。于是我们说：“在可逆循环中，没有熵的净变化。”如果 T 是 1° ，那么熵就是 $Q/1^\circ$ ，用我们的符号是 $Q_S/1^\circ = S$ 。实际上， S 正是通常用来表示熵的字母，在数值上它等于释放给 1° 热库的热量 Q_S （熵本身并不是热量，它等于热量除以温度，因此单位是焦每度）。

有意思的是，除去压强与内能这两个量是温度与体积的函数外，我们发现另一个量，即物质的熵，也是状态的函数。我们要解释计算它的方法以及把它称为“状态函数”的含义。考虑两个处在不同状态下的系统，它们很像我们在绝热膨胀和等温膨胀的实验中所遇到的情况（附带提一下，热机不一定只有两个热库，它可以从三个或四个不同温度吸热或放热，等等）。我们可以在整个 pV 图上到处运动，从一种状态转变到另一种状态。换句话说，我们可以说气体处于某一状态 a ，接着转变到另一个状态 b ，我们要求从 a 至 b 的转变是可逆的。现在

假设在沿着整条从 a 到 b 的路径上有许多不同温度的小热库，使得在每一条小路径上由物质放出的热量 dQ 都传递给每一对应于路径上该点温度的小热库。然后，我们用可逆热机将所有这些热库联结到单位温度的单个热库上去，当我们完成了物质状态从 a 到 b 的转变，将使所有热库回到它们的原始状态。在温度 T 下从物质中所吸收的任何热量 dQ 都被可逆机变换了，而且把一定量的熵传递给单位温度，即

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (44.15)$$

我们来计算所传递的总熵。熵的差值，或者说在这个特殊的从 a 到 b 的可逆变化中所需要的熵，就是从小热库中所得并传递给单位温度的熵的总和

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.16)$$

问题在于熵的差值是否与所选路径有关？从 a 至 b 不止有一条路径。我们记得在卡诺循环中，从图44-6中的 a 到 c 可以先等温膨胀，然后再绝热膨胀，也可以先绝热膨胀，然后再等温膨胀。所以问题是，当我们从图44-10的 a 到 b 时，沿一条路径的熵的变化是否与沿另一条路径相同？答案是它们必须相等。因为如果我们沿着这个循环走过所有路径，向前走的时候沿着一条路径，回来的时候沿着另一条路径，这就相当于一台可逆机，并且对于单位温度的热库来说，没有什么热量损失。在整个可逆循环中不必从单位温度的热库取出热量，所以经过从 a 到 b 的一条路径与经过另一条路径所需的熵相同，它与路径无关，只取决于端点。因此我们可以说，存在着称为物质的熵的某个确定的函数，它取决于物质的状态，即只取决于体积和温度。

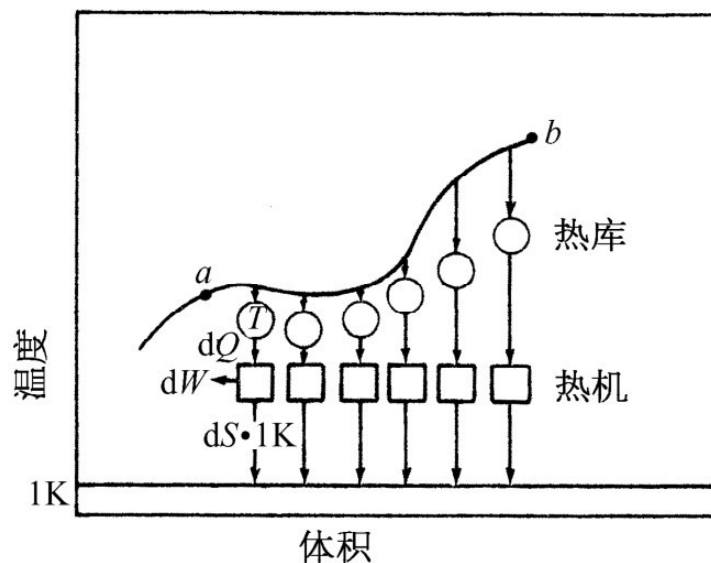


图44-10 在可逆变化中熵的改变

我们可以找出一个函数 $S(V, T)$ ，它具有这样的性质，当我们根据单位温度释放出的热量来计算物质沿任何一条可逆路径熵的变化时，有

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}, \quad (44.17)$$

这里 dQ 是从温度为 T 的物质取走的热量。这个总的熵的改变是在起点和终点计算的熵的差值

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.18)$$

这个表示式并没有完全确定熵函数，而只是决定了两个不同状态之间的熵的差。只有当我们能够计算一种特殊状态下的熵以后，才可以真正确定 S 的绝对值。

长期以来人们相信，绝对熵毫无意义——只有它们的差才可以定义——但是最后能斯特（Nernst）提出他的所谓热定理，也叫做热力学第三定律。这是一条非常简单的定律，我们将讲一下它是什么，而不去解释它为什么是对的。能斯特的假设简单说来就是：在绝对零度时任何物质的熵为零。于是我们就知道一种 T 和 V 的情况，即 $T=0$ 时 S 值为零。因而我们可以得到其他任何点的熵。

为了说明这些概念，我们来计算理想气体的熵。在等温可逆膨胀中， dQ/T 是 Q/T ，因为 T 是常数。所以由式（44.4），可得出熵的变化为

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

因此 $S(V, T)$ 等于 $Nk \ln V$ 加上某个仅是 T 的函数。 S 和 T 的依赖关系如何？我们知道，在可逆绝热膨胀中不交换热量。所以即使 V 发生变化，熵也不发生变化，因为假设 T 也随着变化，以致有 $TV^{\gamma-1} = \text{常数}$ 。读者能否看出这意味着

$$S(V, T) = Nk \left[\ln V + \frac{1}{\gamma-1} \ln T \right] + a,$$

这里 a 是与 V ， T 两者都无关的某个常数 [a 称为化学常数，它取决于所考虑的气体，可以按能斯特定理从实验上通过测量气体冷却到 0° 并凝结为固体（对氦是液体）时所释放的热量，再由积分 $\int dQ/T$ 来确定。也可以从理论上用普朗克常数与量子力学来确定，但在这个课程中我们不准备进行讨论]。

现在我们要对物质的熵的某些性质作些说明。首先我们记得，如果沿着一条可逆循环路径从 a 到 b 运动，那么物质的熵将改变（ $S_b - S_a$ ）。我们也记得，如果沿着这条路径运动，熵——在单位温度释放的热量——将按照 $dS = dQ/T$ 的规则增加，这里 dQ 是从温度为 T 的物质中取走的热量。

我们已经知道，如果一个循环可逆，则一切事物的总熵就不会改变，因为在 T_1 吸收的热量 Q_1 与在 T_2 放出的热量 Q_2 对应着相等和相反符号的熵的变化，所以熵的净变化为零。所以对于可逆循环，包括热库在内的一切事物的熵没有变化（图44-11）。这条规则看起来似乎像能量守恒，但其实不然，它只适用于可逆循环。如果包括不可逆循环，就不存在熵的守恒定律。

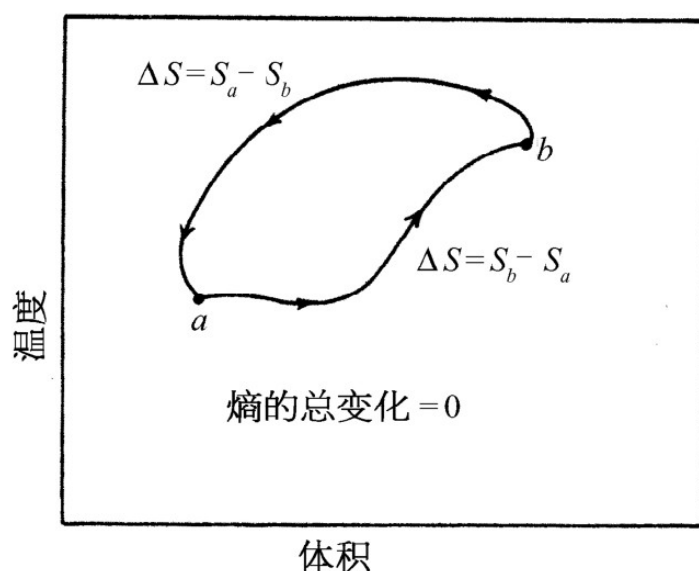


图44-11 在完全可逆循环中熵的改变

举两个例子来说明。首先，假设我们通过摩擦对一个物体做了不可逆功，在某个温度 T 下的物体产生了热量 Q ，则熵增加了 Q/T 。热

量 Q 等于所做的功，所以当我们通过摩擦对温度为 T 的物体做了一定的功时，整个系统的熵增加了 W/T 。

再举一个不可逆的例子：如果我们把两个不同温度 T_1 和 T_2 的物体放在一起，那么一定量的热量将自动地从一个物体流到另一个物体。比方说，假如将一块很热的石头放到冷水中去，当从 T_1 到 T_2 传递了一定的热量 ΔQ 后，热的石头的熵的改变有多大？它减少了 $\Delta Q/T_1$ 。水的熵的改变又是多少？它增加了 $\Delta Q/T_2$ 。当然，热量只能从较高的温度 T_1 流向较低的温度 T_2 ，如果 T_1 大于 T_2 ， ΔQ 为正。所以整个系统的熵的改变为正，它是这样两个分数之差

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \quad (44.19)$$

因此，下述命题成立：在任何不可逆过程中，整个系统的熵将增加。只有在可逆过程中熵才保持不变。由于没有什么过程是绝对可逆的，熵至少总有一点增加；一个可逆过程是一种使熵的增加最小的理想化过程。

遗憾的是，我们不打算深入到热力学领域中去。我们的目的只在于说明所涉及的原则性概念，以及为什么能作这些论证的理由，而不想在这门课程中使热力学用得太多。工程师，特别是化学家常常要运用到热力学。所以我们必须在化学或工程的实践中学习热力学。因为不值得对每件事情都花双倍的精力，所以我们只对热力学理论的起源作一些讨论，而不详细研究它的特殊应用。

人们常将两条热力学定律表述为：

第一定律：宇宙的能量始终保持不变；

第二定律：宇宙的熵值始终不断增加。

这不是第二定律的最好的表述；例如，它没有说明在可逆循环中熵值保持相同，也没有精确说明熵是什么。这只是便于记忆这两条定律的很好的办法，但是实际上它没有告诉我们真正的立足点。在表44-1中，我们概括一下本章所讨论的定律。下一章我们将运用这些定律来找出在橡皮带膨胀时所产生的热量与加热带子时的附加张力之间的关系。

表44-1 热力学定律总结

第一定律：

加进一个系统中的热量 + 对系统所做的功 = 系统内能的增加

$$dQ + dW = dU.$$

第二定律：

不可能有这样一个过程，它的唯一结果只是从一个热库取出热量，并把它转变为功。

没有任何一台热机，在从 T_1 取得热量 Q_1 ，而在 T_2 放出热量 Q_2 的过程中所做的功比可逆机更大。对于可逆机，

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

系统的熵用以下方式定义：

(a) 如果 ΔQ 是可逆地加在温度为 T 的系统的热量，那么这个系统的熵增加为 $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ ；

(b) 当 $T = 0$ 时， $S = 0$ (第三定律)。

在可逆变化中，系统所有部分 (包括热库) 的总熵不变。

在不可逆变化中，系统的总熵始终不断增加。

[1] 我们以前曾用不同的方式定义了温标，由理想气体知道分子的平均动能正比于温度，或者说根据理想气体定律， pV 正比于 T 。这个新定义和它等价吗？等价的，因为由气体定律推出的最后结果式 (44.7) 和这里推出的相同。关于这一点我们将在下一章再作讨论。

第45章 热力学示例

§45-1 内能

热力学的应用是一门相当困难和复杂的课题。

在本课程中我们不宜在应用方面过分深入。当然，热力学对工程师和化学家来说极为重要，对这方面感兴趣的人可以在物理化学或工程热力学中学到许多有关应用的内容。关于热力学也有一些好的参考书，如泽曼斯基（Zemansky）的《热与热力学》，可以从中学到更多的有关内容。在大英百科全书（第十四版）的热力学与化学热力学条目中，以及化学条目的物理化学，蒸发，气体液化等段落中人们也可以找到很好的论述。

热力学之所以复杂，是因为在描写同一件事情时存在着许多方式。如果我们要描写气体的行为，既可以说压强取决于温度和体积，也可以说体积取决于压强和温度。对于内能 U 而言，假如选择温度和体积为变量，我们可以说内能取决于温度和体积——但是我们也可以说它取决于温度和压强，或压强和体积，等等。在前一章中，我们讨论了另一个温度和体积的函数，并称之为熵 S 。当然，我们也可以建立起这些变量的许多其他我们所想要的函数：如 $(U-TS)$ 是温度和体积的函数。这样，我们就有许多不同的物理量，它们可以是许多不同变量组合而成的函数。

为了使本章的讨论简单起见，我们决定一开始就用温度和体积作为独立变量。化学家则使用温度和压强，因为在化学实验中这两个量较易测量和控制。但是在本章中我们从头至尾都用温度和体积，除了在一个地方我们将看一下怎样把它变换为化学家的变量系统。

这样，我们首先将只考虑一种独立变量系统——温度和体积。其次，我们将只讨论两个有关的函数：内能和压强。所有其他函数都可由此推导出来，所以不必讨论它们。即使作了这些限制，热力学仍是相当困难的课题，但已不是那么难以对付了！

我们先复习一下数学。如果一个量是两个变量的函数，那么考虑它的微商概念时要求比只有一个变量的情况更小心一些。所谓压强对温度的微商是什么意思呢？当然，随着温度变化而引起的压强变化部分地依赖于当 T 改变时体积的变化。在使对 T 的微商这一概念具有确切意义之前，必须指明 V 的变化。例如，我们可以问，如果 V 保持不变， P 对 T 的变化率有多大。这个变化率就是通常写为 dP/dT 的普通导数。习惯上我们使用一个特殊符号 $\partial P/\partial T$ ，以便提醒我们 P 除了取决于 T 外，还取决于另一个变量 V ，而此时另一个变量 V 保持为常数。我们将不仅用符号 ∂ 使人们注意另一变量保持不变的事实，而且还把这个保持不变的变量写成下标： $(\partial P/\partial T)_V$ 。由于只有两个独立变量，这种记法是多余的，但它将使我们易于搞清楚热力学中的偏微商。

假定函数 $f(x, y)$ 取决于两个独立变量 x 和 y 。把 y 看成常量后， $(\partial f/\partial x)_y$ 就表示以通常方法求得的普通微商

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

类似地，我们定义

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

例如，设 $f(x, y) = x^2 + yx$ ，则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2x + y, \quad \text{而} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x.$$

我们可以把这个概念推广到高阶微商： $\partial^2 f / \partial y^2$ 或 $\partial^2 f / \partial y \partial x$ 。后一个记号表示先把 y 看成常数，求 f 对 x 的微商，然后再把 x 看成常数，把结果对 y 求微商。微商的实际次序是不重要的

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

我们要计算当 x 变到 $x + \Delta x$ 以及 y 变到 $y + \Delta y$ 时 $f(x, y)$ 的改变量 Δf 。下面一律假设 Δx 和 Δy 是无穷小量

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} \quad (45.1) \\ &= \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x. \end{aligned}$$

最后的式子是用 Δx 和 Δy 表示 Δf 的基本关系式。

举一个利用这个关系式的例子，我们来计算当温度由 T 变到 $T+\Delta T$ ，体积由 V 变到 $V+\Delta V$ 时内能 $U(V, T)$ 的变化。利用式(45.1)，可写出

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T. \quad (45.2)$$

上一章我们发现当在气体中加进热量 ΔQ 时内能变化 ΔU 的另一个表示式

$$\Delta U = \Delta Q - P \Delta V. \quad (45.3)$$

比较式(45.2)和式(45.3)，一开始人们可能会猜想 $P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$ ，但这是不正确的。为了得到正确的关系，我们先假设在保持体积不变，即 $\Delta V=0$ 时加入气体一些热量 ΔQ 。由 $\Delta V=0$ ，从式(45.3)可知 $\Delta U = \Delta Q$ ，而式(45.2)告诉我们 $\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \Delta T$ ，所以 $\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \Delta Q / \Delta T$ 。比值 $\Delta Q / \Delta T$ 是在体积不变时为了使温度改变一度所需加入物质中的热量，并称为定容比热，用符号 C_V 表示。这样，我们就论证了

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V. \quad (45.4)$$

现在，我们再给气体加入一些热量 ΔQ ，但这一次保持 T 不变而让体积改变 ΔV 。在这种情况下的分析比较复杂，但是我们可以利用上一章所介绍的卡诺循环，通过卡诺的论证来计算 ΔU 。

图45-1是卡诺循环的压强-体积图。我们已经证明，在一个可逆循环中气体所做的总功是 ΔQ ($\Delta T/T$)，这里 ΔQ 是当气体在温度 T 下等温地从体积 V 膨胀到 $V+\Delta V$ 时所加入气体中的热量。而 $T-\Delta T$ 是在循环的第二步气体绝热膨胀时所到达的最终温度。现在我们要证明这个功也可以由图45-1中的阴影面积表示。在任何情况下，气体所做的功都是 $\int P dV$ 。当气体膨胀时，它是正的；当气体被压缩时，它是负的。如果我们画出 PV 图， P 与 V 的变化情况可以用一根曲线表示；每给定一个 V 值，在这条曲线上就可找到对应的 P 值。当体积从一个值变到另一个值时，气体所做的功 $\int P dV$ 是连接 V 的初值和终值的曲线下的面积。当我们把这个想法应用到卡诺循环时，注意到气体所做的功的正负号，就可以看到作一个循环后气体做的净功正是图45-1中的阴影面积。

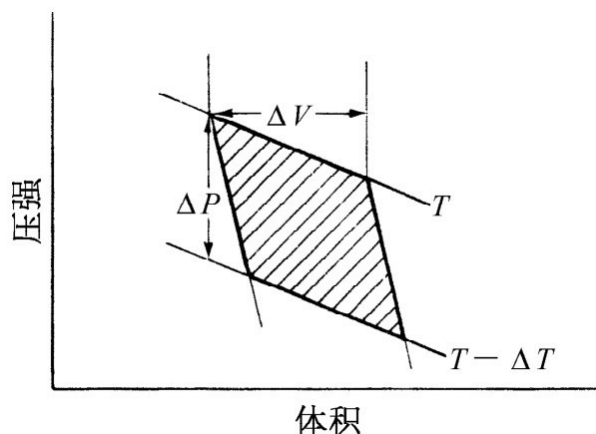


图45-1 卡诺循环的压强-体积图。标有 T 和 $T-\Delta T$ 的曲线是等温线；较陡的曲线是绝热线。 ΔV 是在恒定温度 T 下给气体加入 ΔQ 的热量所引起的体积改变。 ΔP 是在恒定体积下温度从 T 变为 $T-\Delta T$ 所引起的压强改变

现在我们要从几何上算出阴影面积。图45-1表示的循环与上一章中所用的循环的差别在于，我们现在假定 ΔT 和 ΔQ 都是无穷小量。循环图中所示的绝热线和等温线非常靠近，当增量 ΔT 和 ΔQ 趋向于零

时，在图45-1中用粗线画出的图形接近于一个平行四边形。这一平行四边形的面积正是 $\Delta V \Delta P$ ，这里的 ΔV 是在温度不变时，对气体加入能量 ΔQ 后体积的变化，而 ΔP 则是等容情况下温度改变了 ΔT 时压强的变化。只要承认阴影面积等于图45-2中包围在虚线中的面积，就不难证明图45-1的阴影面积就是 $\Delta V \Delta P$ ，虚线中面积与由 ΔP 和 ΔV 所包围的矩形的差别只在于加上和减去图45-2中相等的三角形面积。

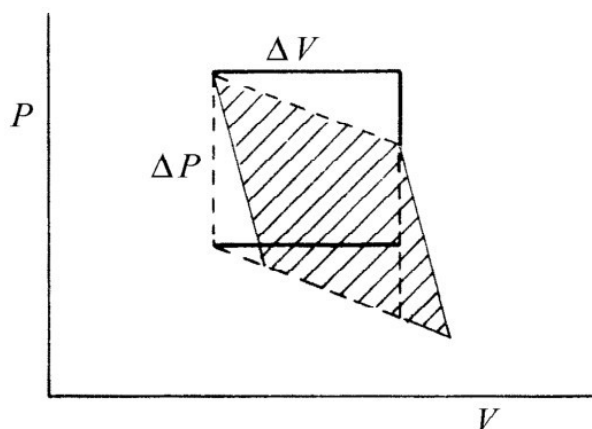


图45-2 阴影面积=虚线所包围的面积=长方形面积= $\Delta P \Delta V$

现在我们来归纳一下迄今为止已论证的结果

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{气体所做的功} = \text{阴影面积} = \Delta V \Delta P = \Delta Q \left(\frac{\Delta T}{T} \right) \\
 \text{或} &\frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{使 } V \text{ 改变 } \Delta V \text{ 所需的热量})_{\text{等温}} = \Delta V \cdot (T \text{ 改变 } \Delta T \text{ 时 } P \text{ 的变化})_{\text{等容}} \\
 \text{或} &\frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{使 } V \text{ 改变 } \Delta V \text{ 所需的热量})_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V
 \end{aligned} \right\} (45.5)$$

方程式（45.5）表示卡诺论证的基本结果。全部热力学都能由式（45.5）及式（45.3）表示的热力学第一定律推导出。式（45.5）实质

上就是第二定律；虽然它和卡诺原来的推导在形式上略有不同，因为他没有用到我们的温度定义。

现在我们可以着手计算 $(\partial U / \partial V)_T$ 。如果体积改变 ΔV ，内能 U 将改变多少？内能之所以改变，第一是因为加进了热量，第二是由于做了功。根据式 (45.5)，加进的热量是

$$\Delta Q = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V,$$

而对物质所做的功是 $-P \Delta V$ ，因此内能的变化 ΔU 包括两部分

$$\Delta U = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V - P \Delta V. \quad (45.6)$$

两边除以 ΔV ，我们发现在 T 不变的情况下， U 对 V 的变化率是

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P. \quad (45.7)$$

在我们的热力学中， T 和 V 是仅有的变量， P 和 U 是仅有的函数，式 (45.3) 和式 (45.7) 是基本的方程，由此可推导出本课题的所有结果。

§45-2 应用

现在我们来讨论式 (45.7) 的意义，看看为什么它能回答在上一章中所提出的问题。我们考虑以下的问题：按照分子动理论，由于原

子对活塞的碰撞，温度的增加显然会引起压强的增加。由于同样的物理原因，当让活塞往复运动时，就从气体中取出热量，为了保持温度不变，必须再加入热量。气体膨胀时会冷却，而在气体被加热时压强会增加。在这两种现象之间必定存在某种联系，而这种联系十分清楚地由式（45.7）给出。如果我们使体积保持固定而增加温度，压强就按 $(\partial P / \partial T)_V$ 的比率增加。与这个事实有关的是：如果我们增加体积，除非加入一些热量以保持温度不变，否则气体将冷却，而 $(\partial U / \partial V)_T$ 告诉我们为了保持温度不变所需要的热量。式（45.7）表示这两种效应之间的基本的内部联系。这就是当我们开始学习热力学时，曾经许诺要找到的关系。无需知道气体的内部机制，只要懂得不能造出第二类永动机，我们就可以推导出当气体膨胀时为了保持温度不变所需的热量与保持体积不变加热气体时压强变化之间的关系！

对于气体我们已经有了希望得到的结果，现在再来考虑橡皮带的问题。当把橡皮带拉长时，我们发现它的温度上升，而在加热橡皮带时，我们发现它会收缩。对一根橡皮带，给出与气体的方程式（45.3）同样关系的方程是什么？大体上来说情况如下：加进热量 ΔQ 时，内能改变了 ΔU ，并且做了某些功。唯一的差别是要以橡皮带所做的功 $-F \Delta L$ 代替 $P \Delta V$ ，这里 F 是作用在带上的力， L 是带长。力 F 是温度和带长的函数。把式（45.3）中的 $P \Delta V$ 改为 $-F \Delta L$ ，有

$$\Delta U = \Delta Q + F \Delta L. \quad (45.8)$$

比较式（45.3）和式（45.8），我们看到只要用一个字母代替另一个字母就可以得到橡皮带的方程。此外，如果以 L 代替 V ， $-F$ 代替 P ，我们所有关于卡诺循环的讨论都可以用到橡皮带上。例如，通过与方程式（45.5）进行类比可以立即推出为使长度改变 ΔL 所需的热量

$$\Delta Q = - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L \Delta L.$$

这个方程告诉我们，若保持带长不变而加热带子，我们可以根据把带子拉长一点点时为保持温度不变所需要的热量算出力增加多少。所以我们看到对气体和橡皮带两者，可以用同样的方程。事实上，如果我们写出

$$\Delta U = \Delta Q + A \Delta B,$$

这里 A 和 B 表示不同的量，如力和长度，压强和体积，等等，那么就可以通过分别以 A 、 B 代替 P 、 V ，应用在气体情况下所得到的结果。例如，考虑电池中的电势差或“电压” E 及流过电池的电荷 ΔZ 。我们知道，一个可逆电池（如蓄电池）所做的功是 $E \Delta Z$ 。（因为在功中不包括 $P \Delta V$ 这一项，因而要求电池的体积不变。）我们来看看热力学能对电池内的性能说些什么。如果在式（45.6）中以 E 代替 P ，以 Z 代替 V ，就得到

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = - T \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_Z - E. \quad (45.9)$$

式（45.9）说明在电荷 ΔZ 通过电池时内能 U 会发生变化。为什么 $\Delta U / \Delta Z$ 不简单地是电池的电压 E 呢？回答是，在电荷通过电池时，真实的电池会发热。电池的内能之所以会发生变化，首先是因为电池在外电路上做功，其次是由于电池被加热。值得注意的是，第二部分又可以借助于电池的电压随温度的变化来表示。附带提一下，在电荷通过电池时，就会发生化学反应，式（45.9）为测量产生一种化学反应所需要的能量提供了一种别致的方法。我们所要做的一切只是制造一个能

在反应中工作的电池，测量电压，再测定当电池中不流出电荷时电压随温度变化的关系！

我们已经假设电池的体积可以保持不变，因为我们在写出电池做的功为 $E \Delta Z$ 时已忽略了 $P \Delta V$ 这一项。但实际情况是要使体积保持不变在技术上是极其困难的。使电池保持在不变的大气压下要容易得多。为此，化学家不喜欢我们上面写下的任何方程：他们喜欢描述等压下各种特殊性的方程。在本章开始时我们选择 V 和 T 为独立变量。化学家则喜欢用 P 和 T ，我们现在来考虑怎样把迄今为止我们得到的结果改换为化学家的变量系统。注意在下述处理中，由于要把变量从 T 和 V 变换到 T 和 P ，所以很容易引起混淆。

我们从式（45.3），即 $\Delta U = \Delta Q - P \Delta V$ 出发， $P \Delta V$ 可以用 $E \Delta Z$ 或 $A \Delta B$ 代替。如果能用某种方式在最后一项以 $V \Delta P$ 代替 $P \Delta V$ ，那么就能变换 V 和 P ，这样化学家就会感到满意了。好，一个聪明人会注意到乘积（ PV ）的微分是

$$d(PV) = P dV + V dP,$$

如果把这个等式加到式（45.3）中，就可得到

$$\begin{array}{r} \Delta(PV) = P\Delta V + V\Delta P \\ \Delta U = \Delta Q - P\Delta V \\ \hline \Delta(U + PV) = \Delta Q + V\Delta P \end{array}$$

为了使结果看起来与式（45.3）相似，我们定义 $U + PV$ 为某个新的，称为焓的量 H ，并写为

$$\Delta H = \Delta Q + V \Delta P.$$

现在我们已经能够用下述规则： $U \rightarrow H$ ， $P \rightarrow -V$ ， $V \rightarrow P$ 来把我们的结果换成化学家的语言。例如，化学家用来代替式（45.7）的基本关系式是

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V.$$

现在，怎样换为化学家的变量 T 和 P 这一点应该清楚了。我们现在回到原来的变量上：本章的其余部分， T 和 V 都是独立变量。

现在把我们已经得到的结果应用到几种物理状况中去。首先考虑理想气体。由分子动理论我们知道理想气体的内能只与分子的运动以及分子数有关，内能取决于 T 而不是 V 。如果改变 V ，但保持 T 不变， U 就不变，因此 $(\partial U / \partial V)_T = 0$ ，于是式（45.7）告诉我们对于理想气体

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = 0. \quad (45.10)$$

式（45.10）是一个可以告诉我们有关 P 的情况的微分方程。我们用下述方式来处理偏微商：因为偏微商是在等容下求得的，我们可用普通微商代替偏微商，并为醒目起见，清楚地写出“ V 不变”。这样式（45.10）就变为

$$T \frac{\Delta P}{\Delta T} - P = 0, V \text{ 不变}; \quad (45.11)$$

由此积分可得

$$\ln P = \ln T + \text{常数}, V \text{ 不变}$$

或

$$P = \text{常数} \times T, V \text{ 不变}. \quad (45.12)$$

我们知道，对于理想气体，压强等于

$$P = \frac{RT}{V}, \quad (45.13)$$

这与式（45.12）一致，因为 V 和 R 都是常数。但是，既然我们已经知道了结果，那么何必还要作这样的计算呢？这是因为我们利用了两种独立的温度定义！前面我们曾假设分子的动能正比于温度，这个假设定义了一种我们称之为理想气体的温标。式（45.13）中的 T 是建立在这种理想气体温标上的。我们也把理想气体温标测得的温度称为动理温度。以后，我们又以与任何物质完全无关的第二种方式定义了温度。从基于热力学第二定律的论证出发，我们定义了称之为“绝对热力学温度” T 的温标，这就是在式（45.12）中出现的 T 。我们这里又证明了理想气体（根据理想气体的定义，它的内能与体积无关）的压强正比于绝对热力学温度。我们也知道压强正比于理想气体温标测得的温度。因此可以推断动理温度正比于“热力学绝对温度”。当然，这意味着，如果我们聪明的话，可以令两种温标一致。至少，在这一事例中，已经将这两种温标选择成相互重合，即比例系数已选取为1。许多时候人们往往总是自找麻烦，但是这一次他们却使两种温标相等了！

§45-3 克劳修斯-克拉珀龙方程

液体的汽化是我们已经推得的结果的另一个应用。假如在一个汽缸中盛有一些液体，我们能够通过推动活塞来压缩它。我们可以问：“如果温度保持不变，压强将怎样随体积而变化？”换句话说，我们希望在 PV 图上画出等温线。汽缸中的物质不是我们以前考虑过的理想气体；它可能处于液相或气相，或者两相共存。如果压力足够大，物质将凝结为液体。如果压缩得更厉害，体积只改变一点点，我们的等温线将随着体积的减小而迅速上升，如图45-3中左方所示。

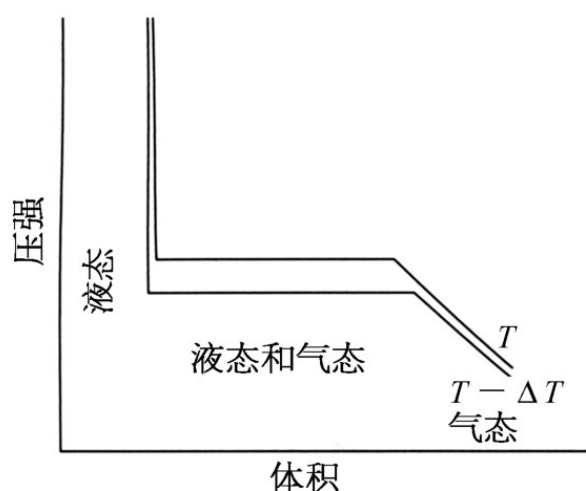


图45-3 在汽缸中进行压缩的可凝结蒸气的等温线。在左边，物质处于液相。在右边，物质汽化。在中央部分，液体和蒸气并存

如果把活塞向外拉以增加体积，压强将下降到液体开始沸腾的那一点为止，然后蒸气开始形成。如果我们继续向外拉活塞，所发生的是有更多的液体汽化。当汽缸中存在部分液体和部分蒸气时，两相达到平衡——液体的蒸发率与蒸气的凝结率相同。如果给蒸气以更多的空间，为了保持压力不变需要更多的蒸气，所以液体蒸发得稍多一些，但压强仍保持不变。在图45-3中曲线的平坦部分，压强不变，这个压强的数值称为温度 T 时的蒸气压。当体积继续增加时，将到达没有更多的液体可供蒸发的时刻。此时，如果使体积进一步膨胀，压强

就会像普通气体那样下降，如 PV 图上的右方所示。图45-3中的较低曲线是对应于稍低温度 $T-\Delta T$ 的等温线。液相中的压强略有减少，因为在温度增加时液体膨胀（这是对大多数物质而言，而对近于冰点的水则并非如此），当然，在较低温度下蒸气压也较小。

我们现在把两条等温线平坦部分的端点连接（比如说用绝热线）起来形成一个循环，如图45-4所示。我们来应用卡诺的论证，它告诉我们，为了使物质从液体变为蒸气所需加入的热量与物质在循环中所做的功有关。令 L 为使汽缸中的物质汽化所需要的热量。用式（45.5）前面的那种论证就可知道 $L(\Delta T/T)$ =物质所做的功。同前面一样，物质所做的功就是阴影面积，它近似地等于 $\Delta P(V_G - V_L)$ ，这里 ΔP 是 T 和 $T-\Delta T$ 这两个温度下的蒸气压之差， V_G 是蒸气的体积， V_L 则是液体的体积，都是指在温度 T 时饱和蒸气压强下所测得的体积。令这两个面积的表示式相等，就有

$$L \frac{\Delta T}{T} = \Delta P(V_G - V_L)$$

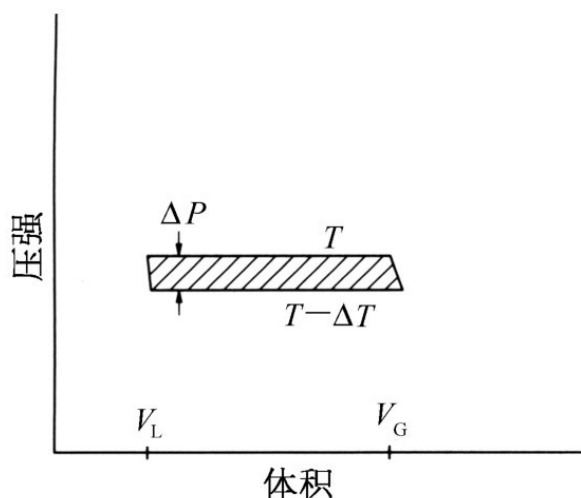


图45-4 汽缸中可凝结蒸气的卡诺循环压强-体积图。在左边，物质处于液态。在温度 T 时，加入热量 L 使液体汽化。蒸气绝热膨胀时，温度由 T 变为 $T - \Delta T$

或

$$\frac{L}{T(V_G - V_L)} = \frac{\partial P_{\text{蒸气}}}{\partial T}. \quad (45.14)$$

式(45.14)给出蒸气压随温度的变化率与使液体蒸发所需要的热量之间的关系。这个关系曾被卡诺推得，但它却称为克劳修斯-克拉珀龙方程。

现在我们把式(45.14)与分子动理论推得的结果比较一下。通常 V_G 远大于 V_L ，所以 $V_G - V_L = V_G = RT/P$ （每摩尔）。如果进一步假设 L 是常数，而与温度无关——这不是一个很好的近似——我们就有

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{LP}{RT^2}.$$

这个微分方程的解是

$$P = \text{常数} \times e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

我们把它与以前由分子动理论得出的压强随温度的变化作一个比较。分子动理论至少大略表明在液面上的蒸气的分子数可能是

$$n = \frac{1}{V_a} e^{-(U_G - U_L)/RT}, \quad (45.16)$$

这里的 $U_G - U_L$ 是气体中每摩尔的内能减去液体中的每摩尔的内能，即汽化一摩尔液体所需要的能量。因为压强是 nkT ，由热力学得到的式(45.15)与由分子动理论得到的式(45.16)是密切相关的，但它们不完全相同。然而，假如我们设 $U_G - U_L = \text{常数}$ 以代替 $L = \text{常数}$ ，那么结果将完全相同。如果设 $U_G - U_L = \text{常数}$ ，而与温度无关，那么推导式(45.15)的论证也同样能推导出式(45.16)。

下面这个比较说明了热力学比分子动理论有利与不利之处：第一，由热力学得出的式(45.14)是精确的，而式(45.16)只在比方说 U 近似不变，而且模型正确的情况下才近似成立。第二，我们也许没有正确了解气体怎样变为液体，然而式(45.14)还是正确的，而式(45.16)只是近似的。第三，虽然我们的处理是用在气体凝结为液体的情况，但对于状态的任何其他变化，这种论证同样成立。例如，固—液相变就具有与图45-3和图45-4同一类型的曲线。引入熔解潜热， M /摩尔，则类似于式(45.14)的公式为

$$\left(\frac{\partial P_{\text{熔解}}}{\partial T} \right)_V = \frac{M}{T(V_{\text{液}} - V_{\text{固}})}.$$

虽则我们也许不知道熔解过程的动理学理论，但还是有一个正确的方程。不过，当我们能够了解分子动理论时，就会有别的好处。式(45.14)只是一个微分关系式，我们无法得出积分常数。在分子动理论中，如果有一个能完全描写现象的适当模型，我们能求出积分常数。所以，两者各有利弊。当我们缺乏有关知识，并且情况较为复杂时，热力学关系实际上是最有效的。当情况很简单，可以进行理论分析时，最好试试看从理论分析得出更多的信息。

再举一个例子：黑体辐射。我们已经讨论过一个包含辐射而无其他物质的容器。我们曾讨论过振子和辐射之间的平衡。我们也得出过打在器壁上的光子将产生一个压强 P ，并得出 $PV=U/3$ ，这里 U 是所有光子的总能量， V 是容器的体积。如果我们以 $U=3PV$ 代入基本方程(45.7)中，就有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 3P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (45.17)$$

由于容器的体积是常数，可用 dP/dT 代替 $(\partial P/\partial T)_V$ ，从而得到一个常微分方程，积分后得 $\ln P = 4\ln T + \text{常数}$ ，或 $P = \text{常数} \times T^4$ 。辐射压强随温度的四次方而变化，而辐射能量密度 $U/V=3P$ 也随 T^4 而变化。通常将 U/V 写为 $U/V = (4\sigma/c) T^4$ ，这里 c 是光速， σ 是斯特藩-玻耳兹曼(Stefan-Boltzman)常数。只从热力学考虑不可能得出 σ 。这个例子很好地说明了热力学的功效及其局限性。知道 U/V 随 T^4 而变化是很了不起的，但为了知道在任何温度下 U/V 实际上有多大则需要更深入详细的讨论，并且只有一种完全的理论才能做到这一点。对于黑体辐射，我们已经有了这样的理论，可以按下述方式求出常数 σ 的表示式。

令 $I(\omega) d\omega$ 是强度分布，即每秒流过1米²的频率在 ω 与 $\omega + d\omega$ 之间的能量。能量密度分布=能量/体积= $I(\omega) d\omega / c$ ，所以

$$\frac{U}{V} = \text{总能量密度} = \int_{\omega=0}^{\infty} (\text{从 } \omega \text{ 至 } \omega + d\omega \text{ 的能量密度}) = \int_0^{\infty} \frac{I(\omega) d\omega}{c}.$$

由先前的讨论，我们知道

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}.$$

将这个 $I(\omega)$ 的表示式代入 U/V 的等式中，就有

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega.$$

如以 $x = \hbar \omega/kT$ 代换，就得

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

这个积分的数值可以用画出曲线并用方块来量面积的方法近似求出其值。它大致是6.5。数学家可以证明准确的积分值是 $(\frac{\pi^4}{15})$ [\[1\]](#)。将这个结果与 $U/V = (4\sigma/c) T^4$ 相比较，我们求得

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

如果在器壁上开一个小孔，那么每秒钟流过单位面积的小孔的能量有多大？从能量密度到能流，须将能量密度 U/V 乘以 c ，还要乘以1/4，这是由于：首先，一个1/2的因子是因为只有流出的能量才能跑掉；其次，另一个1/2的因子是因为到达小孔的能量与小孔的法线成一个角度时，其通过小孔的有效程度与沿法线方向通过小孔的情形相比差一个余弦因子。余弦的平均值是1/2。现在可以清楚看出，我们为什

么把 U/V 写为 $(4\sigma/c) T^4$ 。这样，最后我们就可以说，从小孔流出的能流是每单位面积 σT^4 。

[1] 由于 $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$ ，积分是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx.$$

但 $\int_0^{\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$ ，对 n 微分三次得 $\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = \frac{6}{n^4}$ ，所以积分是 $6\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots\right)$ ，把前几项相加就得到一个很好的估值。在第50章中我们将找到一种方法来证明，整数的负四次幂之和事实上等于 $\pi^4/90$ 。

第46章 棘轮和掣爪

§46-1 棘轮是怎样工作的

在这一章中我们要讨论棘轮和掣爪，这是一种非常简单的只让转轴往一个方向转动的装置。对某个东西只往一个方向转动的可能性需要作一些详尽而仔细的分析，这里有一些十分有趣的结论。

我们现在所安排的讨论，目的在于要从分子动理论的观点出发，对从一台热机中所能得到的功具有最大值这一事实提供一个基本的解释。当然，我们已经知道了卡诺论证的实质，但是能够找到一个基本的解释就好了，所谓基本是指我们能从物理上看出发生一些什么而言。现在已经有一些复杂的数学论证，它从牛顿定律出发说明当热量从一个地方流到另一个地方时，我们只能得到一定量的功。但是，把它变成基本的证明却存在着很大的困难。概而言之，虽然我们可按照数学方法一步一步地进行推导，但是并不理解它。

在卡诺的论证中，关于从一个温度到另一个温度之间所能取出的功不能大于一定的数量这一点是从另一个公理推出的，那就是说：如果每一样东西都处在相同的温度下，那么就不可能通过一个循环过程来使热量转变为功。所以先让我们回过头来看看为什么这个比较简单的命题至少对一个基本的例子来说是正确的。

我们试图发明一个违反热力学第二定律的装置，它是一个能从所有东西都处在相同温度的热库中取出功来的小玩意儿。假设有一箱处

在一定温度下的气体，其中有一根带叶片的转轴（见图46-1，但取 $T_1 = T_2 = T$ ）。由于气体分子撞在叶片上，叶片会振动和跳动。我们要做的是在轴的另一端套上一个转轮，它只能沿一个方向转动，这就是棘轮和掣爪。于是，当轴试图往一个方向跳动时，它不能转动，而往相反方向跳动时，它能转动。于是，轮子将缓慢地转动，或许，我们甚至可以把一个跳蚤缚在一根从轴上的鼓轮悬挂下来的弦上，并将它提起来！现在我们要问这是否可能？按照卡诺的假设，这是不可能的。但是如果光看这个轮子，那么最初的印象会认为这是完全可能的。所以必须更仔细地研究一下。的确，如果观察棘轮和掣爪，我们会看到一些复杂的情况。

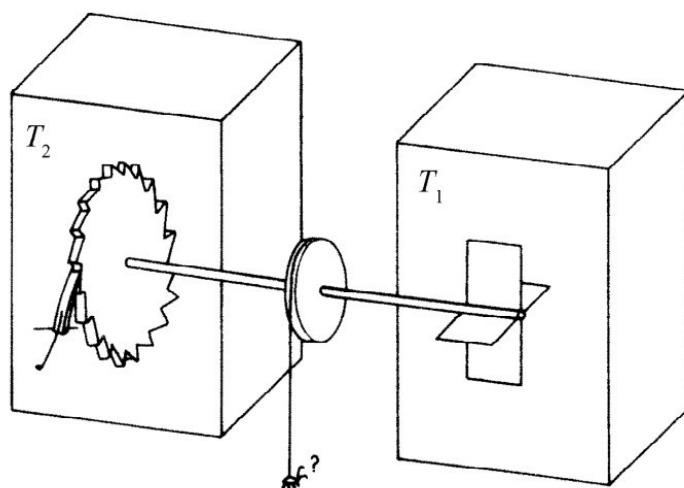


图46-1 棘轮和掣爪机械

首先，我们的理想化棘轮是尽可能简单的，尽管如此，总还有个掣爪，而在掣爪上又必须有一根弹簧。在经过一个轮齿后，掣爪必须又返回来，所以弹簧是必要的。

这个棘轮和掣爪的另一个特性在图上没有画出，但却是很本质的。假设这个装置由完全弹性的部件组成。在掣爪提离一个轮齿的边

缘后，就被弹簧拉回来，再撞到轮子上，并且继续撞来撞去。于是，当另一个涨落到来时，轮子可能往相反方向转动，因为当掣爪跳起的那个时刻轮齿可能在它的下方！所以我们这个轮子不可逆性的实质部分是一种使跳动中止的阻尼或减弱的机制。当然在阻尼出现时，掣爪中的能量跑到了轮子上，并表现为热量的形式。所以，在棘轮转动时，轮子将越来越热。为了使事情再简化一些，我们可以在轮子四周充以气体来带走一些热量。无论如何，我们假设气体将和轮子一起升高温度。这种情况会永远继续下去吗？不行！棘轮和掣爪两者都处在某个温度 T 下，也都有布朗运动。也就是说，每当作用在叶片上的布朗运动企图使轮轴反转时，如果碰巧掣爪自己正好跳起一个轮齿的高度，它就会让这个轮齿转过。随着这个装置越来越热，这种情况就发生得越频繁。

所以，这就是这个装置不可能“永动”的原因。当叶片受到碰撞时，有时掣爪提高而越过轮齿边缘，但有时当叶片企图朝相反方向转动时，掣爪已经由于它在轮边运动的涨落而被提升，这样，轮子就反过来朝反方向运动！净结果等于零。不难证明，当两边的温度相等时，轮子没有净平均运动。当然，它会往这个方向或那个方向作多次晃动，但不会如我们所希望的那样只顺着一个方向转动。

让我们来看看理由何在。为了把掣爪提高到一个轮齿的顶部，必须克服弹簧做功。我们称这个能量为 ε ，两个轮齿之间的夹角为 θ 。系统可以积聚起足够的能量 ε 使得掣爪越过轮齿顶部的概率是 $e^{-\varepsilon/kT}$ 。但掣爪由于偶然原因而提高的概率也是 $e^{-\varepsilon/kT}$ 。因此掣爪提高而轮子可以自由地倒转的次数就等于在掣爪放下时我们具有足够的能量使轮子正转的次数。于是我们取得一种“平衡”，因而轮子不会转动。

§46-2 作为热机的棘轮

现在我们继续讨论下去。我们举这样的例子，设叶片的温度为 T_1 ，而轮子或棘轮的温度是 T_2 ， T_2 小于 T_1 。由于轮子较冷，掣爪的涨落相对地要少一些，因而要使它获得能量 ε 是很难的。因为叶片的温度 T_1 较高，它将经常地取得能量 ε ，所以我们的装置将像设计的那样沿着一个方向转动。

现在我们来看看它是不是能够提起重物。在鼓轮中间我们缚上一根线，将一个重物，比方说跳蚤悬挂在线上。设 L 是重物所产生的力矩。如果 L 不太大，那么由于布朗涨落将使装置比起其他方向更多地往一个方向转动，它就会提起重物。我们要求出它可以提起多大的重量以及转动得多快，等等。

首先我们考虑向前转动，这是人们通常设计的棘轮转动方式。为了向前转一步，要从叶片末端取得多少能量呢？要提起掣爪，必须取得能量 ε 。轮子反抗力矩 L 转过角度 θ ，所以还需要能量 $L\theta$ 。这样，必须取得的总能量是 $\varepsilon + L\theta$ 。得到这样的能量的概率正比于 $e^{-(\varepsilon + L\theta)/kT_1}$ 。实际上，这不仅是一个取得能量的问题，而且我们还希望知道每秒它具有这个能量的次数。每秒钟的概率正比于 $e^{-(\varepsilon + L\theta)/kT_1}$ ，我们称此比例常数为 $1/\tau$ 。不管怎样这个常数最后将会消去。当向前转一步时，对重物所做的功是 $L\theta$ 。从叶片中取出的能量是 $\varepsilon + L\theta$ 。弹簧用能量 ε 拉紧，然后它咔嗒、咔嗒地跳起，弹回，使这些能量变成了热量。所有由叶片取得的能量都花在提高重物和驱动掣爪上，然后掣爪又落回来，并将热量传给另一边。

现在我们要看一看相反的情况，即反过来转动。这时会出现什么呢？为了使轮子向后转，我们必须做的只是提供能量来把掣爪提得足够高以使棘轮能滑过去。这个能量仍是 ε 。每秒钟使掣爪提得这么高的概率是 $(1/\tau)e^{-\varepsilon/kT_2}$ 。比例常数是相同的，但是因为温度不同，这次出现了 kT_2 项。当出现这种情况时，由于轮子向后转，功就被释放出来。滑过一个轮齿要放出 $L\theta$ 的功。所以，从棘轮系统取得的能量是 ε ，而给予叶片那边温度为 T_1 的气体的能量是 $L\theta + \varepsilon$ 。这需要稍加思索才能看出其中的道理。假设偶然由于一次涨落，掣爪自动地提高，那么当它落下时，弹簧把它推向轮齿，由于轮齿压在一个斜面上，于是就有一个力企图转动轮子。这个力在做功，而由小重物产生的力也在做功。两者加在一起就是总的力，而所有的能量都缓慢地在叶片末端以热的形式放出（当然，按照能量守恒定律，这必定如此，不过我们还是有必要透彻地思考这个问题）。我们注意到，所有这些能量都完全相等，但是符号则相反。这样，重物或者缓慢升高，或者缓慢放下，取决于这两个比率中哪一个更大。当然，它不断上下跳动，一会升高，一会降低，但我们讲的是平均的行为。

假定对于某个特定的重物两种比率正好相等，那么我们可以在线上加上一个无限小的重物。这个重物将缓慢地下落，因而对机器做了功。能量将从棘轮取出并传给叶片。假如我们相反地取走了一点重量，就会出现相反的不平衡情况；重物被提高，热量从叶片中取出，并传给轮子。这样倘使重物的大小正好使两种概率相等，我们就得到卡诺可逆循环的条件。很明显这个条件就是 $(\varepsilon + L\theta)/T_1 = \varepsilon/T_2$ 。假设机器缓慢地提起了重物。由叶片取得的热量是 Q_1 ，释放给轮子的热量是 Q_2 ，这两个能量的比是 $(\varepsilon + L\theta)/\varepsilon$ 。假如我们缓慢地降低重物，也会有 $Q_1/Q_2 = (\varepsilon + L\theta)/\varepsilon$ 。于是（见表46-1）我们就有

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

表46-1 棘轮和掣爪的运行过程小结

向前转:需要的能量 $\epsilon + L\theta$, 取自叶片。 $\therefore$ 比率 = $e^{-(L\theta + \epsilon)/kT_1} / \tau$.	
取自叶片	$L\theta + \epsilon$
做功	$L\theta$
给予棘轮	ϵ
向后转:需要的能量 ϵ 用于掣爪。 $\therefore$ 比率 = $e^{-\epsilon/kT_2} / \tau$.	
取自棘轮	ϵ
放出功	$L\theta$
给予叶片	$L\theta + \epsilon$
如果系统是可逆的,则比率相等,因此 $\frac{\epsilon + L\theta}{T_1} = \frac{\epsilon}{T_2}$,	
给予棘轮的热量 = $\frac{\epsilon}{L\theta + \epsilon}$. 因此 $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$.	

此外,我们所得出的功与由叶片取出的能量之比和 $L\theta$ 与 $L\theta + \epsilon$ 之比相同,因此也就是 $(T_1 - T_2) / T_1$ 。由此可见,如果我们的装置可逆运行时,不可能得出比这更多的功。这就是我们从卡诺的论证希望得到的结果,也是本讲的主要结果。然而我们可以利用这个装置来理解若干其他现象,甚至包括那些偏离了平衡状态,因而也就超出了热力学范畴的现象。

我们现在来计算一下,如果每件东西的温度都相同,那么当在鼓轮上悬挂一个重物时,我们的单向装置将会转动得多快。当然,如果拉得非常非常紧,就会出现种种复杂现象——掣爪滑过棘轮,或者弹簧断裂,等等。但是假定我们只是轻轻地拉,那么每件东西都正常地工作。在这种情况下,如果记得两个温度是相同的,上述对于轮子向前转和向后转的概率的分析是正确的。轮子每转一下都通过一个角度 θ

，所以角速度是 θ 乘以每秒钟内转一下的概率。向前转的概率是 $(1/\tau) e^{-(\varepsilon + L\theta)/kT}$ ，向后转的概率是 $(1/\tau) e^{-\varepsilon/kT}$ ，所以对于角速度有

$$\omega = (\theta/\tau) [e^{-(\varepsilon + L\theta)/kT} - e^{-\varepsilon/kT}] = (\theta/\tau) e^{-\varepsilon/kT} (e^{-L\theta/kT} - 1) . \quad (46.1)$$

如果我们画出 ω 对 L 的曲线，就得到如图46-2所示的形状。我们看到 L 取正还是取负有极大的差别。如果 L 在正的区域增加（这在我们试图使轮子向后转时出现），向后转的速度趋于一个常数。当 L 变为负值时， ω 实际上上升得很快，因为指数幂的增长非常迅速。

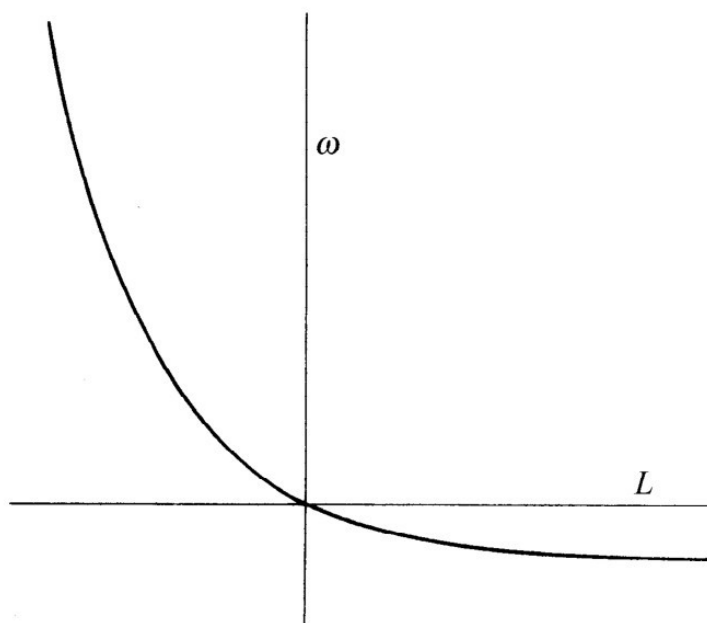


图46-2 棘轮的角速度与力矩的关系

于是，由不同的力得到的角速度很不对称。向一个方向转动很容易：一点点力就能得到很大的角速度。而向另一个方向转动时，即使我们用很大的力，轮子还是几乎不转动。

我们发现，在电子整流器中也有同样的情况。这时出现的不是力而是电场，不是角速度而是电流。对于整流器，电压不与电阻成正

比，这种情况是非对称的。我们对于机械整流器所作的分析，也同样适用于电子整流器。事实上，上面得到的这一类公式正是典型的作为电压函数的整流器载流特性曲线。

现在把所有的重物拿走，并且观察这台原来的机械。如果 T_2 小于 T_1 ，棘轮向前转，这是每个人都相信的。但是初看起来很难相信还存在着相反的过程。如果 T_2 大于 T_1 ，棘轮就会朝反方向转动！一个具有大量热能的动态棘轮会使自己反转，因为掣爪一直在跳动着。如果在某个时刻掣爪处在轮齿斜面某处，它就会斜着推动这个斜面。但它总是经常推在一个斜面上，因为如果它碰巧提得足够高，以致超过了一只轮齿的边缘，这个斜面就会滑过去，而又会重新落在另一个斜面上。所以，可以制作一个理想的热的掣爪和棘轮，它能够往与原设计截然相反的方向转动！

无论我们的单向转动的设计如何巧妙，如果两个温度严格相等，那么向一个方向转动的倾向不会比向另一个方向转动的倾向更大。当我们在某一时刻观察时，它可能往这个或那个方向转动，但是从长远来看，往哪儿也不转动。正是这个往哪儿也不转动的事实，实际上反映了一个深刻的基本原理，而整个热力学就建立在这个原理上。

§46-3 力学中的可逆性

究竟有哪一条更深刻的力学原理告诉我们，如果温度处处相同，则我们的装置最终既不向右转也不向左转？很明显，我们有了一个基本命题：不可能设计这样一台机器，在让它自己运行足够长时间以

后，它往一个方向转动的可能性比往另一个方向转动的可能性大。我们必须试试看怎样从力学定律推得这个结论。

力学的定律大致如下：质量乘加速度是力，而作用在每个粒子上的力是所有其他粒子位置的某个复杂函数。也有其他一些情况，其中力与速度有关，比如在磁学中就是如此，但现在我们不去考虑这一点。我们取一种比较简单的情况，比如重力，其大小只与位置有关。现在，假定我们已解出了一组方程，并且对于每个粒子求得了一定的运动表示式 $x(t)$ 。在足够复杂的系统中，解是十分复杂的，而且随着时间的推移会出现令人非常惊异的事情。如果我们对各个粒子写下任何认为合适的排列，那么只要等待足够长时间，我们将看到这种排列实际上会出现！如果我们跟随粒子运动的解足够长的时间，可以说，它会尝试做每件事情。在最简单的装置中，这不一定是绝对必需的，但是当系统充分复杂，带有足够多的原子时，就会出现这种情况，此外，解还能起一些别的作用。如果我们解运动方程，也许会得到如 $(t+t^2+t^3)$ 这样的函数。我们声称另一个解将是 $-t+t^2-t^3$ 。换句话说，假定在整个解中处处都以 $-t$ 代替 t ，我们将再一次得到同一个方程的一个解。这个结论是从下述事实得出的：如果在原来的微分方程中以 $-t$ 代替 t ，由于在方程中只有对 t 的二阶导数出现，因此方程不会有任何变化。这意味着，如果我们有了一个确定的运动，那么严格相反的运动也是可能的。如果我们等待足够长的时间，系统将出现完全混乱的状况，它有时以这种方式运动，有时又以其他方式运动。没有哪种运动比另一种更占优势。所以不可能设计一台足够复杂的机器，并且从长远来看，它以一种方式运动的可能性会比另一种方式更大。

人们可能会想出一个对它来说上面这一点明显不正确的例子。比方说，如果使一个轮子在真空中转动，它会永远同样地转动下去。所以，存在着某些条件（像角动量守恒那样）违背上文的论证。但这只要求把论证作得更小心一些。也许，墙壁或者某些类似于墙壁之类的东西取走了角动量，这样我们就没有特殊的守恒定律。可见，如果系统是足够复杂的，论证就是正确的。它建立在力学定律可逆这一事实的基础上。

出自对科学史的兴趣，我们想提一下麦克斯韦发明的一个装置，麦克斯韦是第一个建立气体动力论的科学家。他的假设如下：有两箱同温度的气体，箱子之间有一个小孔。孔上坐着一个小妖（当然，它可以是一台机器），在小孔上还有一扇可以由小妖打开或关闭的门。它注视着从左边来的分子，无论何时只要看到速度很快的分子，就把门打开，看到速度很慢的分子，就将门关上。如果我们要求它是一个极为特殊的小妖，使它的脑后也长着眼睛，它就能对来自另一边的分子作相反的事情。这样它就让慢的分子跑到左边，而让快的分子跑到右边。很快左边将变冷，右边将变热。问题在于，是否因为我们有了这样一个小妖而破坏了热力学定律？

结果表明，如果我们造出的是一个有限大小的小妖，它自己就会变得这样热，使得过了一会儿以后，不能很好地看清楚东西。举个例子来说，一个可能是最简单的小妖可以是一扇用一根弹簧扣住的遮住小孔的活动门。一个快速分子可以通过，因为它能推开活动门。慢的分子不能通过而被弹回。但是这个东西不是别的什么，不过是我们的棘轮和掣爪在另一种形式下的体现罢了。最后这个装置会发热。如果假设小妖的比热不是无限大，它一定会发热，它只有有限数目的内部轴承和转轮，所以不能清除由于观察分子而取得的额外热量。不久，

它就会由于布朗运动而摇动得这么厉害，以致再也不能说出它自己是来还是去，更不用说分子是来还是去了，所以它不起作用。

§46-4 不可逆性

所有的物理定律都可逆吗？显然不是！不信就试试看让一个炒蛋重新变成新鲜蛋吧！如果把电影倒过来放，不出几分钟就会使人们放声大笑。所有现象的最自然特征莫过于它们的明显的不可逆性。

那么，不可逆性是从哪里来的？它并非来自牛顿定律。如果我们声称每件事的行为最后都要按物理规律来理解，并且，如果所有的方程最后都有这么一个奇妙的性质，即以 $t = -t$ 代入时，将得到另一个解，那么一切现象都是可逆的。为什么自然界在宏观的尺度上，事情都是不可逆的呢？显然必定存在着某条定律，某个尚未明了然而基本的方程，或许在电学中，或许在中微子物理学中，对它来说，时间朝哪个方向这一点是至关重要的。

我们现在来讨论这个问题。我们已经知道其中有一条物理定律指出：熵始终是增加的。如果有一个热的和一个冷的物体，那么热量总是从热的物体流到冷的物体。所以，熵的定律就是这样的一条定律。但是我们希望从力学观点出发来理解熵的定律。事实上，我们刚才就是从力学论证成功地获得了热量不可能自动倒流这一论证的所有结果，并由此得到了对于热力学第二定律的一种理解。看来我们能从可逆的方程得出不可逆性。但是，我们所用的只是力学论证吗？我们来更仔细地考察一下。

由于我们的问题和熵有关，因此必须设法找出一种熵的微观描述。如果在某种东西，比如气体中，有一定的能量，我们可以得出它的一幅微观图像，并且说每个原子都有一定的能量。所有这些能量相加起来就是总能量。类似地，或许每个原子都有一定的熵，把每个累加起来就得到总熵。但事情并不那么顺利，我们来看一看会发生什么情况。

举个例子说，我们要计算某一确定温度下，某一体积中的气体和在相同温度下，另一个体积中气体的两个熵值之差。由第44章知道，对熵的改变有

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

在现在的情况下，气体的能量在膨胀前后是相同的，因为温度没有变化。所以，我们必须加入足够的热量以补偿气体所做的功，或对每一个体积的小变化来说

$$dQ = P dV.$$

把 dQ 代入上式，就有

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{T} \frac{dV}{V} = Nk \ln V_2/V_1.$$

这正是第44章得到的结果。例如，若体积膨胀为2倍，则熵变为 $Nk \ln 2$ 。

现在我们考虑另一个有趣的例子。假定有一个容器，中间放一块隔板，一边是氦气（“黑”分子），另一边是氩气（“白”分子）。我们取出隔板，让它们混合起来。试问熵的改变有多大？可以设想用两个活塞来代替隔板，一个活塞上有一些只让白分子而不让黑分子通过的小孔，另一个活塞的作用正相反。如果把两个活塞往相反方向各自推到底，我们就会看到，对每一种气体来说，情况正像上面刚解过的那样。所以，熵改变了 $Nk \ln 2$ ，这意味着，每个分子的熵增加了 $k \ln 2$ 。这个因子的得出与分子占有的额外空间有关，这一点是颇为奇特的。它不是分子本身的特性，而是与分子能活动的空间大小有关。这是一个奇怪的情况，熵增加了，但每样东西具有相同的温度和能量！唯一发生变化的是分子的分布不同了。

我们都很了解，如果把隔板拿走，经过一段较长时间后，由于分子的碰撞、跳动、敲击等等，它们全都混合起来。有时一个白分子跑向黑分子，有时一个黑分子跑向白分子，也可能彼此穿过。渐渐地，由于偶然的机会，白分子进入到黑分子的空间，黑分子也进入到白分子的空间。如果我们等待足够长的时间后，就会得到一种混合的状态。很清楚，这是真实世界中的一种不可逆过程，它应当包含有熵的增加。

在这里我们有了一个完全由可逆事件组成的不可逆过程的简单例子。每当两个分子碰撞后，它们各以确定的方向离开。假如我们将拍摄某次碰撞过程的电影倒过来放，电影没有任何不对头的地方。事实上这一类碰撞正与另一类碰撞相似。所以混合过程完全是可逆的，然而它又是不可逆的。我们都知道，如果起先黑、白分子分开，几分钟内它们就会混合起来。如果我们坐下来观察好几分钟，它们也不会重新分开，而是仍然混合在一起。所以我们有了一种建立在可逆情形的

基础上的不可逆性。但是现在我们也同时看到其原因何在。开始的排列在某种含义上是有序的，由于碰撞产生的混杂，它变成无序。从有序的排列到无序排列的变化是不可逆性的起源。

的确，如果我们拍下这些分子运动的影片，再将它倒过来放，我们会看到它会渐渐地变成有序。也许有人会说：“这是违反物理定律的！”那么我们将影片再重放一次，并观察每一次碰撞。每一样东西都是完善的，都遵循物理定律。当然，原因在于每个分子的速度都是适当的，所以如果沿着所有的路径返回，它们就会回到原来的状态。但是，这种情况是极不可能出现的。如果气体在开始时没有什么特殊的安排，只是白的归白，黑的归黑，它就永远不会回到原来的状态。

§46-5 序与熵

这样我们就必须讲一下无序是什么意思，有序又是什么意思。这不是什么有序合我们的意，无序不合我们意的问题。在上节所提到的例子中，混合与不混合的差别如下：假设我们把空间划分成许多小体积元。如果将白分子和黑分子分布在这些体积元中，并使白分子分布在一边，黑分子分布在另一边，试问有几种这样的分布方式？另一方面，如果对黑白分子分布到哪里不加任何限制，又有多少种分布方式？显然，在后一种情况下的排列方式要多得多，我们以在从外部看来完全一样的条件下，内部可能有的排列方式的数目来作为“无序”的量度。这种排列方式的数目的对数就是熵。在黑白分子分开的情况下，排列方式的数目较少，故熵较小，或“无序性”较小。

这样，有了上面对无序的术语上的定义，我们就可以理解这个命题。第一，熵是无序的量度。第二，宇宙总是从“有序”变到“无序”，

所以熵总是增加的。“有序”并不是指我们所喜欢的排列这个意义的有序，而是指从外部看来完全一样的条件下所具有的内部不同排列方式的数目是相当有限的。在把气体混合的影片倒过来放的情况下，并没有我们所想象的那么多的无序。每个单个原子都恰好以正确的速率和方向出现。熵并不像表面上看来那么大。

其他物理定律的可逆性如何？当我们谈到由加速电荷产生的电场时，我们曾说过必须取推迟场。在时刻 t ，离电荷为 r 的地方，我们取加速电荷在 $t - r/c$ ，而不是 $t + r/c$ 的时刻所产生的场。这样，初看起来，似乎电学定律是不可逆的。然而，非常奇怪的是，我们所应用的定律来自实际上可逆的麦克斯韦方程组。而且，有可能论证如果我们只用超前场，即由在时刻 $(t + r/c)$ 的事态而引起的场，并在一个完全封闭的空间里始终如一地应用它，那么所发生的每一件事情都和使用推迟场严格一样！因此，这种电学中的表观不可逆性，至少在一个闭合体内，根本不是一种不可逆性。我们已经对此有过某种体会，因为我们知道，一个振动电荷产生的场从闭合体的四壁反射回来后，最后达到一种没有什么偏向性的平衡。用推迟场只是为了解法上的方便而已。

就我们所知，所有的物理学基本定律，像牛顿方程那样，都是可逆的。那么不可逆性究竟是从哪里来的呢？它是从有序变到无序时产生的，但是在我们知道有序性的起源以前，我们并不理解这一点。为什么我们自己每天所发现的情况总是不处在平衡态呢？有一个可能的解释如下。我们不妨再来看一下黑白分子混合的箱子。如果我们等待足够长的时间，大多数白分子都在一边，大多数黑分子都在另一边的分布情况，虽然总的讲是不大可能的，但偶尔或许仍是可能的。此

后，随着时间的推移，连续不断地出现一些偶然事件，它们又重新混合起来。

这样，对今天世界之所以高度有序的一个可能解释是，这恰恰是一种侥幸。或许我们的宇宙碰巧在过去发生过某种涨落，使得各种事物得以分开，而现在它们正在重新混合起来。这种理论不是非对称的，因为我们可以问，在不远的将来或是在不远的过去分离的气体是怎样的。不论哪一种情况，我们在分界面上都看到一层灰雾，因为分子正在重新混合。无论我们是往前还是往后计算时间，气体都在混合。所以这种理论认为不可逆性只是生活中的许多偶然事件之一。

我们试图论证情况并非如此。假定我们不是一下子观察整个箱子，而只是观察其中的一小部分，并且在某个确定的时刻，发现了某种程度的有序，那么在这一小部分空间中，黑分子与白分子是分开的。我们应当怎样来推论那些我们还没有观察过的地方的状况呢？如果我们确实认为有序是依靠涨落从完全的无序中产生的，那么我们一定是碰到了能产生这种情况的最可能的涨落，而最可能的情况不是它的其他部分也是分离的！所以，我们从这个世界是一种涨落的假设，能够预期的全部结论是，如果观察以前从未见到过的那一部分世界，我们将发现它已混合起来，而不像刚才所见到那部分世界那样。如果将有序归因于涨落，那么除了刚才注意到的地方之外，不能期望任何其他地方有序。

现在我们假定分离之所以产生是由于宇宙的过去实际上是有序的。它并非由一次涨落而造成，而是因为整个事情原来一直是区分为白的和黑的。现在这种理论预言在其他地方也将存在着有序——这种有序不是由于涨落，而是由于在时间的开始具有更高得多的序。这样，我们可以期望在人们还没有观察过的地方发现有序。

例如，天文学家只观察过天上的某些恒星。他们天天将望远镜转向一些新的恒星，而新的恒星的行为与其他恒星相同。因此我们可以推论宇宙不是一种涨落，而有序乃是对于万物开始时的状况的一种记忆。这并不是说我们明白了它的逻辑。由于某种原因，宇宙在某一时刻对它的能量来说有过非常低的熵，此后熵就不断增加。这就是通向未来的道路，也是一切不可逆性的起源；它引起了生长衰亡的过程，使我们回忆起过去，而不是将来；也使我们记得接近宇宙历史上那个有序性比现在高的时刻的事物，以及为什么我们不能记得那些无序性比现在更高的时刻，即所谓将来发生的事件。所以正像我们在第3章中曾指出的那样，如果我们足够近地去观察宇宙，整个宇宙就寓于一杯酒中，在这种情况下，这杯酒是复杂的，因为这里有水，玻璃，光线，以及其他种种东西。

物理学的另一件值得高兴的事是，即使简单而理想化的事物，比如棘轮和掣爪，它们之所以工作只是因为它们是宇宙的一部分。棘轮和掣爪之所以只能单向转动是因为它们与宇宙的其他部分有着某种最终的接触。如果将棘轮和掣爪放在一个箱子内，并且隔离了足够长的时间，轮子朝一个方向的转动就不再比朝另一个方向的转动更为可能。但是，因为我们拉起窗帘让光线射出，因为在地球上感觉到冷时能从太阳得到热量……总之，因为诸如此类的原因，所以我们制造的棘轮与掣爪能单向转动。这种单向性与棘轮本身是属于宇宙的一部分这一事实有关。棘轮是宇宙的一部分——这不仅意味着它遵循宇宙的物理学定律，而且也意味着，它的单向行为是受整个宇宙的单向行为制约的。在进一步把关于宇宙历史开端的奥秘由推测化为科学的理解之前，我们是不可能完全理解它的。

第47章 声、波动方程

§47-1 波

本章我们将讨论波动现象。这种现象出现在整个物理学的许多领域中，所以我们应当把注意力放在它上面，不仅是因为这里所考察的特殊例子——声，而且也因为有关的概念在物理学的所有分支中有着相当广泛的应用。

我们在研究谐振子时已经指出过，振动系统的例子不仅在力学中存在，而且在电学中也同样存在。波动与振动系统有关，但波动不仅仅表现为在一处的随时间的振动，并且还在空间中传播。

实际上我们已经研究过波动。在研究光学，讨论光的波动性质时，我们曾特别研究若干位于不同地方以同一频率振动的波源发出的几列波在空间的干涉现象。而在光波即电磁波以及其他任何形式的波动中所出现的两个重要现象，我们还不曾讨论。其中一个现象就是，波在时间上而不是在空间上的干涉现象。如果两个声源的频率稍有差别，在我们同时收听这两个声音时，有时声波波峰一起来，有时则是波峰和波谷一起来（见图47-1）。这样所产生的声音的起伏就形成拍现象，或者说时间上的干涉。第二个重要现象涉及波型，当波动约束在一定体积中，在界面之间来回反射时，就形成了这种现象。

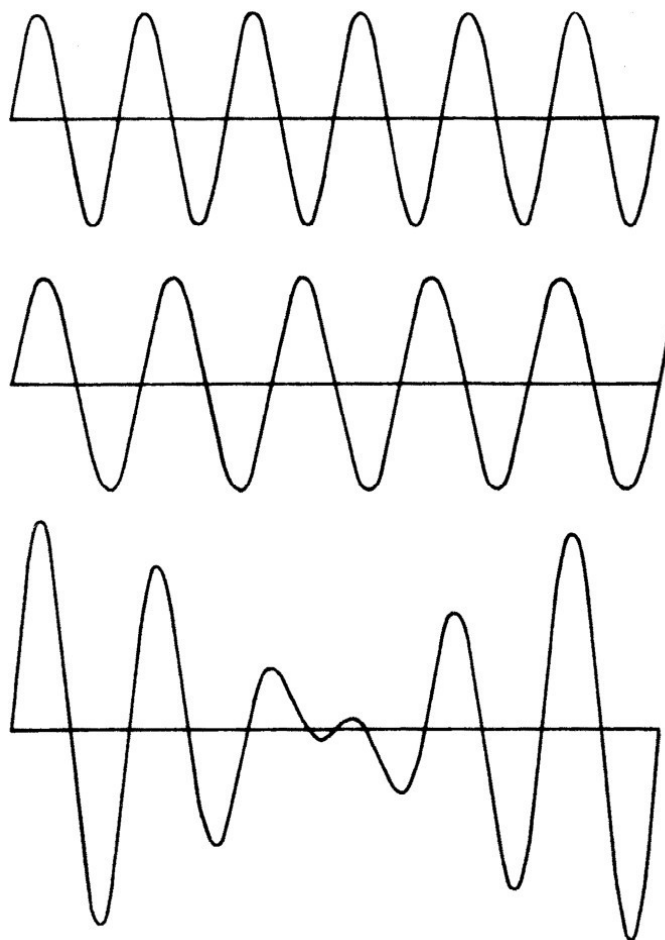


图47-1 频率略有差异的两个波源在时间上的干涉形成拍

当然，在研究电磁波时，本来可以对这些效应加以讨论。我们之所以没有这样做，是因为只使用一种例子也许会使我们不能体会到实际上已同时学习了许多不同的课题。为了强调波动概念的普适性超出了电动力学范围，我们这里考虑一种不同的例子，特别是声波的情况。

我们在海岸边缘见到过由长长的大浪形成的水波翻腾的情况，也见过由表面张力的涟漪形成的小水波。这又是一些波动的例子。再举另外一种例子，在固体中有两类弹性波：一类是压缩波（或纵波），固体中的粒子沿着波传播的方向来回振动（气体中的声波就属于这一

类)；另一类是横波，固体中的粒子在垂直于波传播的方向上振动。地震波包括了这两类弹性波，它们是由某处地壳的运动而造成的。

在现代物理学中还可找到另一类波的例子。这类波给出了在确定地方发现粒子的概率振幅，即我们已经讨论过的“物质波”。它们的频率正比于能量，波数则正比于动量。这就是量子力学中的波。

在本章中我们将只考虑波速与波长无关的波动。例如，光在真空中的传播情况就是如此。对无线电波、蓝光、绿光或任何其他波长的光来说，光速都相同。由于这种性质，当初开始描写波现象时，我们并没有指出波在传播这一点。我们只是说，如果有一个电荷在某处运动，那么离开它 x 处的电场正比于在较早时刻 $(t - x/c)$ 的加速度，而不是在 t 时刻的加速度。所以，如果我们画出某个瞬间空间中的电场，如图47-2所示，那么经过时间 t 后的电场将移动距离 ct ，如图中所示。在这里所取的一维例子中，从数学上我们可以说，对这个一维的例子，电场是 $(x - ct)$ 的函数。我们看到，当 $t=0$ 时，它是 x 的某个函数。如果我们考虑较后一个时刻，只需适当增加 x 值就可以得到同样的电场值。举例说，如果在 $t=0$ 时，电场极大值出现在 $x=3$ 处，那么，为了找到在时刻 t 电场极大值的新位置，就得有

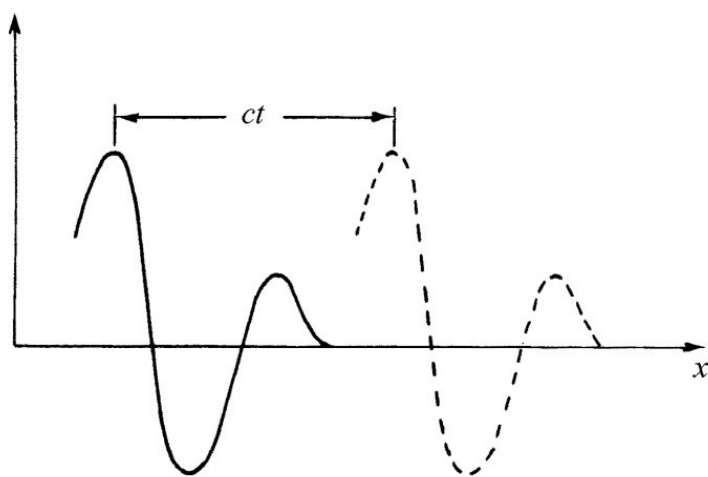


图47-2 实线表示在某一瞬时电场的可能情况，虚线表示在时间 t 后的电场

$$x - ct = 3 \quad \text{或} \quad x = 3 + ct .$$

我们看到，这样的函数表示了波的传播。

所以， $f(x - ct)$ 这种函数就表示了波。我们可以这样简单地总结波的描述

$$f(x - ct) = f[x + \Delta x - c(t + \Delta t)] ,$$

这里 $\Delta x = c \Delta t$ 。当然，还有另一种可能，即波源不是像图47-2中所示的那样在左边，而是在右边，结果波往负 x 方向传播。这时就要用 $g(x + ct)$ 来描写波。

此外，还存在这样一种可能性，空间同时存在着比方说一系列以上的波，那么总电场就是两个独立传播的电场的和。电场的这种性质可以叙述为，假定 $f_1(x - ct)$ 是一列波， $f_2(x - ct)$ 是另一列波，那么它们的和也是波。这就叫做叠加原理。叠加原理对于声波来说同样有效。

我们都熟悉这样一个事实：声音产生以后，我们所听到的声音的顺序与产生时的顺序完全相同。假定高频的声音传播得比低频的快，那么短促尖锐的噪声将发生在乐声之后。类似地，如果红光跑得比蓝光快，那么当白光闪一下后，人们就会先看到红色，接着是白色，最后是蓝色。我们所知道的事实表明，情况并非如此。声与光在空气中的传播速率都非常接近于跟频率无关。跟频率有关的波传播的例子将在第48章中讨论。

对于光（电磁波）的情况，我们提供了一条规则来确定因电荷的加速而在某点所产生的电场。人们现在可能也期望有这么一条规则，由此能借助声源本身的运动并考虑到声传播时间引起的推迟，确定声源外一给定距离上空气的某个物理量如压强的数值。对于光来说，这种做法是行得通的，因为我们所要知道的一切就是一处的电荷对在另一处的另一个电荷施加作用力。从一处到另一处的传播细节并不是绝对重要的。然而，在声的情况下，我们知道它通过声源与收听者之间的空气而传播。因此，无疑人们会提出一个很自然的问题：在任何给定时刻，空气的压强有多大。另外，我们还想确切地知道空气怎样运动。在电学情况下，我们可以接受一条规则，因为我们可以说自己还不知道电学定律，但对于声来说，我们就不能讲同样的话了。因为整个过程应当作为力学定律的结果而得到理解，所以我们当然不会满足于仅仅陈述声压如何通过空气而传播的规则。简言之，声学是力学的一门分支，所以它要用牛顿定律来解释。声波由一处往另一处的传播，只是力学定律及传播声的那种物质的性质（如果在气体中传播，就指气体的性质，如果在液体或固体中传播，就指这些介质的性质）的推论。以后我们将用类似的方法从电动力学定律导出光的性质和光波的传播。

§47-2 声的传播

我们准备从牛顿定律导出声波在声源与接收者之间传播的特性，而对声源与接收者之间的相互作用将不予考虑。通常我们强调的是推导的结论而不是某一特殊推导过程本身。在本章中我们将采取相反的观点。在某种意义上，这里的要点就在于推导本身。在我们知道了旧现象的规律之后，能借助于已知现象来解释新现象这件事或许是数学

物理学的最伟大艺术。数学物理学家要解决两个问题：一个是给定了方程之后求出解答，另一个是找出描写新现象的物理方程。这里的推导是属于后一种情形的一个例子。

我们在这里将取一个最简单的例子——声波的一维传播。要进行这样的推导，首先必须对所发生的事情有一定的了解。这里所包含的基本事实就是，如果一个物体在空气中的某个地方运动着，我们就观察到有一种扰动在空气中传开。这是怎样的一种扰动？我们可以认为物体的运动产生了压强上的变化。当然，如果物体的运动相当缓慢，空气便只是绕着它流过去。但我们要讨论的是快速的运动，因此空气没有足够的时间作这样的流动。于是，随着物体的运动空气被压缩，引起压强上的变化，这种变化推动了周围的气体，接着这部分气体又被压缩，这又引起额外的压强，这样波就传播开了。

现在我们要把这个过程写成公式。首先必须决定所需要的变量。在这个特定问题中，我们要知道空气移动了多远，所以在声波中空气的位移肯定是一个有关的变量。此外，我们还要描述，在空气移动时它的密度怎样变化。空气压强也会发生改变，所以这又是一个值得注意的变量。当然，空气还有速度，因而我们必须描写空气粒子的速度。这些粒子还有加速度——但是，当我们列举了这么多变量之后，立即会认识到，如果知道了空气位移怎样随时间而变化，那么速度和加速度也就知道了。

我们已经说过，要考虑的是一维波动。如果离开波源足够远，以致所谓的波前非常接近于平面，那么就可以这样处理。取一个复杂性最小的例子会使论证比较简单一些。因此，我们可以说：位移 χ 只取决于 x 和 t ，而与 y 和 z 无关。所以我们用 $\chi(x, t)$ 来描写空气的位移。

这个描述完全吗？看来远远谈不上完全。因为我们一点也不知道空气分子运动的详情。它们往四面八方运动，这种情况肯定不能用函数 $\chi(x, t)$ 来描写。从分子动理论的观点来看，假定在一个地方分子密度较高，而在邻近的地方分子密度较低，那么分子就会从密度较高的区域跑向密度较低的区域，使得差异抵消。显然，这样一来就不会产生振动，于是也就没有声音。为了得到声波，必须出现下述情况：当分子由密度较高及压强较大的区域冲出去时，它们将把动量传递给邻近的密度较低区域中的分子。为了使声波得以产生，密度与压强上有变化的区域必须远远大于分子在与其他分子进行碰撞前所走过的距离。这段距离即平均自由程，而压强的波峰与波谷之间的距离必须远远超过它，不然分子就会自由地从波峰跑向波谷，一下子把波抹平。

十分清楚，我们是在远大于平均自由程的尺度上来描写气体行为的，所以不用个别分子的运动来描写气体的性质。例如，所谓位移就是指一小块气体的质心的位移，而压强或密度则是这一小块区域中的压强或密度。我们称压强为 P ，密度为 ρ ，它们都是 x 和 t 的函数。我们必须记住这种描写只是近似的，只有当气体的有关性质随距离的变化不太快时才成立。

§47-3 波动方程

声波现象的物理内容包括了三个特征：

- I. 气体的移动使密度发生变化。
- II. 密度上的变化对应着压强上的变化。

III. 压强的不相等导致气体的运动。

我们首先考虑II。对于气体、液体或固体，压强是密度的某个函数。在声波抵达之前，我们有一个平衡状态，它的压强为 P_0 ，对应的密度是 ρ_0 。介质中的压强 P 与密度 ρ 由某种函数关系 $P=f(\rho)$ 联系起来，特别是平衡状态时的压强 P_0 由 $P_0=f(\rho_0)$ 给定。声波中的压强相对于平衡值的变化是极其微小的。量度压强的一个方便单位是巴 (bar)：1 bar=10⁵ N·m⁻²。1 atm非常接近于1 bar，即1 atm=1.013 3 bar。在声学中我们采用声强的对数标度，因为耳朵的灵敏度近似地按对数变化。这个标度是分贝 (dB) 标度，对于振幅为 P 的压强，其声压级 I 用下式来定义

$$I = 20 \lg \left(\frac{P}{P_{\text{参}}} \right) \text{ dB.} \quad (47.1)$$

这里参考压强 $P_{\text{参}}=2 \times 10^{-10}$ bar^[1]。如压强振幅为 $P=10^3 P_{\text{参}}=2 \times 10^{-7}$ bar，与之对应的就是60 dB的中等强度的声音。我们看到，在声波中压强的变化与平衡压强或平均压强一个大气压相比极其微小，位移和密度的变化相应地也极其微小。在爆炸时，变化就不是这么小了；所产生的额外压强可能超过1个大气压。这么大的压强变化将导致新的效应，我们在以后再来讨论。对声音来说，通常我们不考虑超过100 dB的声强级，120 dB的声强级已使耳朵有痛觉。因此，对声波来说，如果写下

$$P=P_0+P_e, \quad \rho=\rho_0+\rho_e, \quad (47.2)$$

那么与 P_0 相比压强变化值 P_e 总是很小，而与密度 ρ_0 相比密度变化值 ρ_e 也总是很小。于是

$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0). \quad (47.3)$$

这里 $P_0 = f(\rho_0)$ ，而 $f'(\rho_0)$ 是当 $\rho = \rho_0$ 时得出的 $f(\rho)$ 的微商值。只是由于 ρ_e 很小，我们才可以取第二步等式。这样我们就发现额外压强 P_e 正比于额外密度 ρ_e ，如果称比例系数为 κ ，则

$$P_e = \kappa \rho_e, \text{ 这里 } \kappa = f'(\rho_0) = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \quad (\text{II}) \quad (47.4)$$

所以，对于II来说我们要得到的就是这个非常简单的关系式。

现在来考虑I。我们假设没有被声波扰动的那部分空气的位置是 x ，而在时刻 t 由声波引起的位移是 $\chi(x, t)$ ，因此新的位置是 $x + \chi(x, t)$ ，如图47-3所示。我们还假设邻近的未受扰动的一部分空气的位置是 $x + \Delta x$ ，而其新的位置是 $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ 。现在可以用下述方法来求出密度的变化。因为只限于平面波，所以我们可取垂直于 x 方向的单位面积， x 方向就是声波传播的方向。于是由单位面积和 Δx 所围成的那部分空气的质量就是 $\rho^0 \Delta x$ ，这里 ρ^0 是未受扰动的或平衡状态下的空气密度。这些空气在声波驱动下移到 $x + \chi(x, t)$ 与 $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ 之间，这样，这个区间内的气体质量应与未扰动前处在 Δx 区间内的气体质量相同。如果以 ρ 表示新的密度，就有

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$

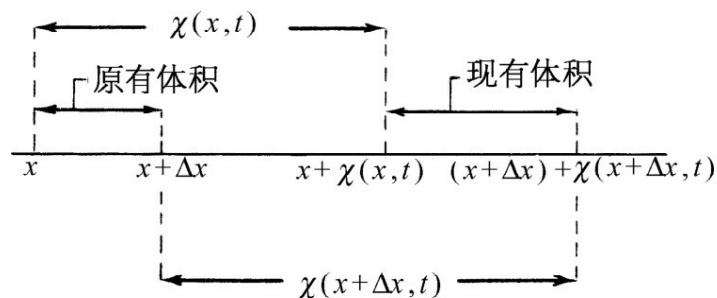


图47-3 在 x 处空气的位移为 $\chi(x, t)$ ，在 $x + \Delta x$ 处为 $\chi(x + \Delta x, t)$ 。

平面波中，截面为单位面积的空气柱原来的体积为 Δx ；新的体积为

$$\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$$

因为 Δx 很小，我们可以写出

$$\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \Delta x,$$

这个微商是偏微商，因为 χ 与时间 t 及 x 都有关系。我们的方程于是就变为

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right) \quad (47.6)$$

或

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e. \quad (47.7)$$

由于在声波中所有的变化都很小，因此 ρ_e 很小， χ 很小， $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ 也很小。所以在我们刚找到的关系式

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (47.8)$$

中，与 $\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}$ 相比我们可以略去 $\rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x}$ 。这样我们就得到I所要求的关系式

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (\text{I}) \quad (47.9)$$

这个方程从物理上是可以预料的；如果位移随着 x 而改变，那么就会有密度上的变化。式中的符号也是正确的：如果位移 χ 随着 x 而增加，那么空气就扩展开来，密度就一定会下降。

现在我们需要第三个方程，那就是由压强改变所产生的运动方程。如果我们知道力与压强之间的关系，就可以得出运动方程。现在我们取一薄层空气，它的厚度为 Δx ，侧面积为与 x 相垂直的单位面积，则此薄层气体的质量是 $\rho_0 \Delta x$ ，其加速度为 $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ ，于是质量与加速度的乘积就是 $\rho_0 \Delta x \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right)$ （当 Δx 很小时，不管加速度 $\partial^2 \chi / \partial t^2$ 是指薄块边上的值还是指某个中间位置的值都没有关系）。假如现在我们求得在垂直于 x 的单位面积上给予这层空气的作用力，那么它就等于 $\rho_0 \Delta x \left(\partial^2 \chi / \partial t^2 \right)$ 。在 x 处沿 $+x$ 方向，单位面积所受的力是 $P(x, t)$ ，在 $(x + \Delta x)$ 处沿 $-x$ 方向，单位面积所受的力是 $P(x + \Delta x, t)$ （图47-4），由于 Δx 甚小，并且 P 中的变化部分只有额外压强 P_e ，结果我们得到

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = \frac{-\partial P}{\partial x} \Delta x = \frac{-\partial P_e}{\partial x} \Delta x. \quad (47.10)$$

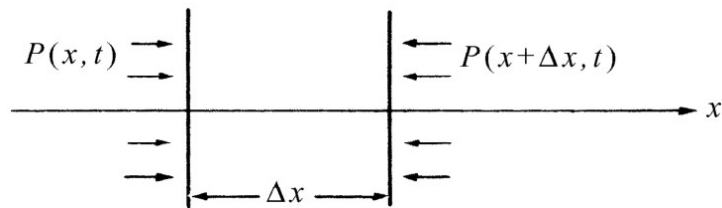


图47-4 作用在垂直于 x 的单位面积上的压强在正 x 方向上所产生的净力是 $-(\frac{\partial P}{\partial x})\Delta x$

最后，对于Ⅲ，我们有

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (\text{Ⅲ}) \quad (47.11)$$

这样就有足够的方程将各件事情联系起来，并将变量减少到一个，比如说 χ 。利用（Ⅱ）式能从（Ⅲ）式中消去 P_e ，于是有

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad (47.12)$$

再利用（Ⅰ）式就可消去 ρ_e 。这样我们发现 ρ_0 也被消去，余下的就是

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (47.13)$$

我们令 $c_s^2 = \kappa$ ，因此可写出

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

这就是描写物质中声波行为的波动方程。

§47-4 波动方程的解

现在我们可以来看看这个方程是否确实描写了物质中声波的基本性质。我们希望由此推出声脉冲或扰动将以恒定速率运动，并且希望证实两个不同的脉冲可以相互穿过——叠加原理。我们还想证实声波可以往右或往左传播。所有这些性质都应当包括在这一个方程之中。

我们已经说过，任何以恒定速度 v 运动的平面波的扰动都具有形式 $f(x - vt)$ 。现在必须来看一下 $\chi(x, t) = f(x - vt)$ 是否为波动方程的一个解。在计算 $\partial\chi/\partial x$ 后，就得到 $\partial\chi/\partial x = f'(x - vt)$ ，再进行一次微商，则得到

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

这同一函数对 t 的微商是 $-v$ 乘以函数的微商，即 $\frac{\partial \chi}{\partial t} = -vf'(x - vt)$ ，而二阶时间微商是

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

很明显，倘使波速 v 等于 c_s ， $f(x - vt)$ 就满足波动方程。因此，根据力学定律我们发现任何声扰动以速度 c_s 传播。此外，我们还发现

$$c_s = \kappa^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0^{\frac{1}{2}},$$

这样我们就把波速与介质的性质联系起来了。

假如考虑一列沿相反方向传播的波，那么 $\chi(x, t) = g(x + vt)$ ，不难看出这样一种扰动也满足波动方程。这列波跟从左向右行进的波的唯一差别就是 v 前的符号，但是，无论函数中的变量是 $x - vt$ 还是 $x + vt$ ，都不影响 $\partial^2 \chi / \partial t^2$ 的符号，因为它包含的只是 v^2 项。由此可见我们具有以速度 c_s 往左或往右传播的波的解答。

叠加性是非常有趣的问题。假定我们已经找到波动方程的一个解，比方说 χ_1 ，这意味着 χ_1 对 x 的二阶微商等于 $1/c_s^2$ 乘以 χ_1 对 t 的二阶微商。现在如果有任意另一个解 χ_2 亦具有同样的性质。假定把这两个解叠加起来，就有

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t), \quad (47.17)$$

我们要证实 $\chi(x, t)$ 也是波，即 χ 也满足波动方程。这个结果很容易证明，因为我们有

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$

以及

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

所以就有 $\partial^2 \chi / \partial x^2 = \left(\frac{1}{c^2}\right) \partial^2 \chi / \partial t^2$ 。这样我们就证实了叠加原理。叠加原理的证明正是建立在波动方程对 χ 是线性的这个事实上的。

现在我们可以预期，沿 x 方向传播而其电场在 y 方向上的偏振平面光波将满足波动方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

这里 c 是光速。这个波动方程是麦克斯韦方程的结论之一。电动力学的定律将导致光的波动方程，正像力学定律导致声的波动方程一样。

§47-5 声速

上面对声波的波动方程的推导使我们得到了一个公式，它把波速与正常大气压下压强对密度的变化率联系在一起

$$c_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

在计算这个变化率时，必须知道温度如何变化。在声波中，我们预期压缩区域的温度会升高，而稀薄区域的温度会降低。牛顿第一个计算了压强对密度的变化率，他假设温度保持不变。他论证热量十分迅速地由一个区域传导到另一个区域，以致温度不可能升高或降低。在这种论证下得到了声波的等温速率，但这是错误的。正确的推导是后来由拉普拉斯作出的。他提出了相反的概念——在声波中压强与温度进行着绝热变化。只要波长远大于平均自由程，热量从压缩区域往稀薄区域的流动是可以忽略的。在这种条件下，声波中的少量热流并不影响速度，虽然它吸收了一点声能。我们可以正确地预计到这种吸收将随着波长趋近于平均自由程而增加，但这种波长大约比可闻声波波长的百万分之一还要小。

声波中压强随密度的实际变化是一种没有热流的变化。这相当于绝热变化。对这种情况， $PV^\gamma = \text{常数}$ ，这里 V 是体积。由于密度反比于

V , P 与 ρ 之间的绝热关系是

$$P = \text{常数} \rho^\gamma. \quad (47.22)$$

由此可得 $dP/d\rho = \gamma P/\rho$ 。于是对于声速就有关系式

$$c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}. \quad (47.23)$$

我们也可写为 $c_s^2 = \gamma PV/(\rho V)$ ，再利用等式 $PV = NkT$ ，而且由于 ρV 是气体质量，它也可表示为 Nm 或 μ ，这里 m 是一个分子的质量， μ 是分子量，由此可得

$$c_s^2 = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}, \quad (47.24)$$

从此式显然可知声速只与气体温度有关，而与压强或密度无关。我们还注意到

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

这里 $\langle v^2 \rangle$ 是分子的方均速率。因此 $c_s^2 = \left(\frac{\gamma}{3}\right) \langle v^2 \rangle$ ，或

$$c_s = \left(\frac{\gamma}{3}\right)^{\frac{1}{2}} v_{\text{平均}}. \quad (47.26)$$

这个式子表明声速的大小大致等于 $1/\sqrt{3}$ 乘以分子的某种平均速率 $v_{\text{平均}}$ （方均速率的平方根）。换句话说，声速与分子速率具有同样的数量级，实际上多少小于分子平均速率。

当然，我们可以预料到会有这样的结果，因为扰动像压强的变化一样，归根结底是由于分子运动而传播的。然而，这种论证并不能告诉我们精确的传播速率；因为既可以说声波主要是由最快的分子传播的，也可以说主要是由最慢的分子传播的。一种合乎情理的并令人满意的看法是认为声速大约为分子平均速率 $v_{\text{平均}}$ 的一半。

[1] 在这样选择 $P_{\text{参}}$ 时，相应的 P 不是声波的峰值压强，而是“方均根”压强，它等于 $1/\sqrt{2}$ 乘以峰值。

第48章 拍

§48-1 两列波的相加

不久前我们相当详细地讨论过光波的性质以及光波的干涉，即从不同波源发出的两列波叠加的效应。在所有这些分析中我们假设波源的频率全都相同。本章我们将讨论的某些现象则是由于具有不同频率的两个波源的干涉所造成的。

很容易猜想到会发生什么事。我们采用与以前同样的做法，假设有两个相同的振动波源，其频率相等，相位则调整到比方说使它们发出的信号在到达某点 P 时同相。到达这一点的如果是光，光就很强，如果是声，声音就很响；而若是电子，那么其中到达的就很多。反之，假如抵达 P 点的信号彼此的相位差是 180° ，则在 P 点我们就可能得不到信号，因为在该处净的振幅为最小。现在，假设某个人转动其中一个波源的“相位旋钮”，来回改变该波在 P 点的相位，比方说先使其为 0° ，然后为 180° ，等等。当然，这样一来我们就会发现净的信号强度有变化。我们还可看出，如果一个波源的相位相对于另一个波源逐渐地、均匀地缓慢变化，由 0° 开始，增加到 10° ， 20° ， 30° ， 40° ，等等，那么在 P 点所测得的就是一串强弱相间的“脉动”，因为当相位移过 360° ，振幅就回到极大值。当然，说一个波源的相位相对于另一个波源以均匀的速率移动就等于说两个波源在每秒钟内的振动次数略有差别。

于是我们知道答案就是：假定两个波源的频率略有差别，我们将发现其净结果就是出现一个强度缓慢脉动的振动。对本课题而言，这实际上就是一切！

这个结果也很容易用数学公式来表示。例如，假定有两列波，我们暂时不去考虑所有的空间关系，而只是分析到达 P 点的波。不妨假设一个波源在这一点引起的振动是 $\cos\omega_1 t$ ，另一个波源则是 $\cos\omega_2 t$ ， ω_1 与 ω_2 不完全相等。当然，它们的振幅也可能不相同，但这个一般性的问题可以留在后面去解决，我们不妨先假定振幅是相等的。在 P 点的总振幅就是这两个余弦函数之和。如果像图48-1那样，画出波的振幅对时间的曲线，我们就看到波峰与波峰重合之处恰好出现较强的波，而在波峰与波谷重合之处，总振幅实际上为零，而当波峰再度重合时，又得到较强的波。

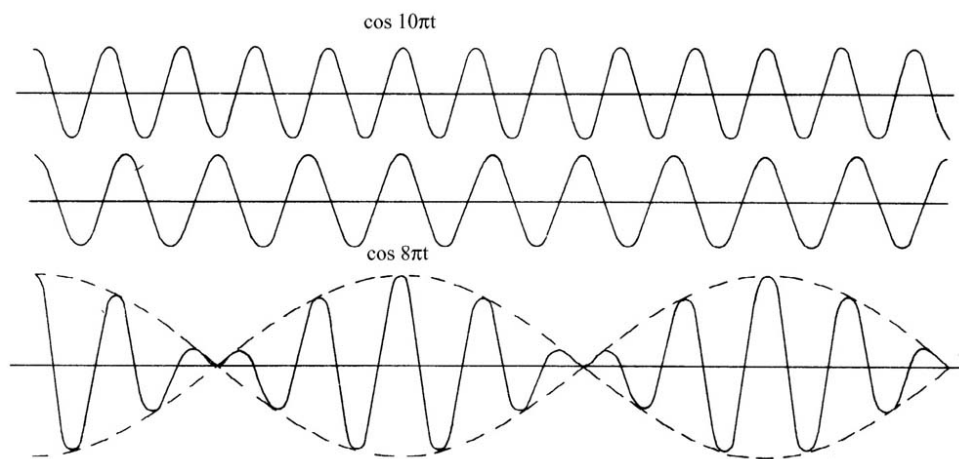


图48-1 频率比为8:10的两列余弦波的叠加。图中各个“拍”内的图样精确重复这一点在一般情况下并不具有代表性

在数学上，我们只要将两个余弦相加并对结果进行一些整理。对于余弦函数有一些有用的关系式，它们是不难推得的。我们当然知道

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}, \quad (48.1)$$

而 e^{ia} 有一个实部（即 $\cos a$ ）和一个虚部（即 $\sin a$ ）。如果取 $e^{i(a+b)}$ 的实部，就得到 $\cos(a+b)$ 。将 e^{ia} 和 e^{ib} 相乘，就有

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b),$$

我们得到 $\cos a \cos b - \sin a \sin b$ ，加上一些虚部。但我们现在只要实部，于是有

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

假如改变 b 的符号，因为这时余弦不变而正弦变号，所以，对 $-b$ ，等式就是

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (48.3)$$

将这两个等式相加，消掉正弦项，便有

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b). \quad (48.4)$$

将这个公式反过来，可以得到 $\cos \alpha + \cos \beta$ 的公式，这只要令 $\alpha = a+b$ ， $\beta = a-b$ ，于是 $a = (\alpha + \beta)/2$ ， $b = (\alpha - \beta)/2$ ，因此有

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

现在可以来分析我们的问题了， $\cos \omega_1 t$ 与 $\cos \omega_2 t$ 之和为

$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.6)$$

我们假定两个频率近似相等，这样 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 就是平均频率，它与 ω_1 与 ω_2 几乎都相同。但 $\omega_1 - \omega_2$ 远小于 ω_1 或 ω_2 ，因为已假设 ω_1 与 ω_2 近似相等。这意味着我们可以这样来说明这个解：它是一个多少与我们开始时所具有的波相类似的高频余弦波，但它的“大小”将缓慢地变动，即以频率 $(\omega_1 - \omega_2)/2$ 作脉动变化。但这是不是人们所听到的拍频呢。虽然式 (48.6) 表示振幅随 $\cos [(\omega_1 - \omega_2)t/2]$ 而变化，实际上它所告诉我们的是高频振动被包含在两个相反的余弦曲线之内（如图48-1中的虚线所示）。根据这一点人们可以说振幅变化的频率是 $(\omega_1 - \omega_2)/2$ ，但如果说到波的强度，则必须认为它的频率两倍于此。这就是说，按强度而言，振幅的调制频率是 $\omega_1 - \omega_2$ ，虽然式 (48.6) 表明我们所乘的余弦因子其频率为此一半。存在这种差别的物理原因是在第二个半周内高频波的相位关系有一点不同。

如果不去考虑这个小小的复杂性，我们可以得出结论说，将频率为 ω_1 与 ω_2 的两列波相加，就会得到以平均频率 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 振动而强度又按频率 $(\omega_1 - \omega_2)$ 变化的合成波动。

如果两列波的振幅不相同，我们可以重新再计算一下：将余弦乘上不同的振幅 A_1 和 A_2 ，利用类似于式 (48.2) ~ (48.5) 的关系式，进行一系列运算，整理等。然而还可用其他一些较简易方法来进行同样的分析。例如，我们知道指数的运算比正弦和余弦的运算要容易得多，并且可以将 $A_1 \cos \omega_1 t$ 看作为 $A_1 e^{i\omega_1 t}$ 的实部。另一个波也同样地可以看作是 $A_2 e^{i\omega_2 t}$ 的实部。如果将两者相加，就得到 $A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$ ，将平均频率的因子提出，就有

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 + \omega_2)t} [A_1 e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t}]. \quad (48.7)$$

我们再一次得到带有低频调制的高频波。

§48-2 拍符和调制

如果现在要求出式(48.7)所表示的合成波的强度，可以取该式左边或右边的绝对值平方。我们取左边来计算，于是强度为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.8)$$

由此可见强度以频率 $(\omega_1 - \omega_2)$ 涨落，其变化界限则为 $(A_1 + A_2)^2$ 和 $(A_1 - A_2)^2$ 。如果 $A_1 \neq A_2$ ，则最小强度不为0。

另一种表示这个概念的方法是作图，如图48-2所示。我们画一根长为 A_1 ，以频率 ω_1 旋转的矢量，用以表示复平面上的一个波。再画出一个长为 A_2 ，旋转频率为 ω_2 的矢量来表示第二个波。如果两个频率正好相等，那么旋转时合矢量的长度就固定不变，于是由此两个波得出的是确定不变的强度。但是如果频率略有差别，两个复矢量就以不同速率旋转。图48-3表示相对于矢量 $A_1 e^{i\omega_1 t}$ 所见到的情况。我们看到 A_2 缓慢地转离 A_1 ，于是两列波叠加后得出的合成振幅起先最强，然后，两者拉开，当 A_2 相对于 A_1 转过 180° 时，合成振幅变得特别弱，等等。在矢量旋转时，合矢量的振幅时而变大，时而变小，因而强度作脉动变化。这是一个相当简单的方法，还有许多别的方法表示这件事情。

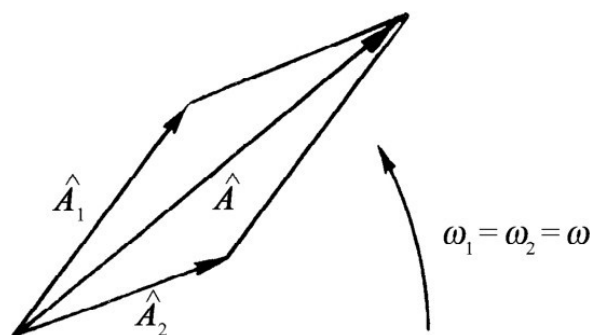


图48-2 两个相同频率复矢量的合成

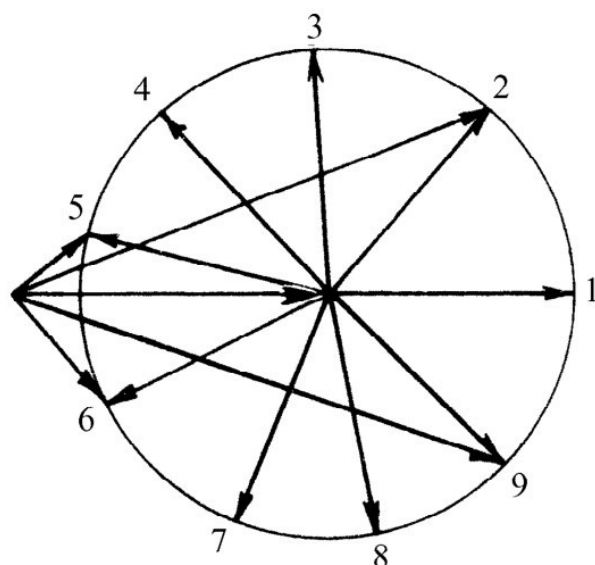


图48-3 以一个旋转矢量为参考系来看，两个不同频率的复矢量的合成。图中绘出了缓慢旋转的矢量的九个相继位置

上述效应很容易从实验上观察到，在声学实验中，我们可以将两个扬声器分别连接到两个独立的振荡器上，一个振荡器接一个扬声器，因此每个扬声器发出一种音调。于是我们从一个声源接收到一种音符，从另一个声源接收到另一种音符。如果使彼此的频率精确相等，则其总的效果为在一定的空间位置上具有确定强度。如果接着使两个音调略微调偏一些，就会听到强度上的某些变化。调偏得越厉

害，声音的变化就越快。当这种变化每秒钟超过十次左右时，人耳要跟上这种变化就有些困难了。

我们也可以从示波器上见到这个效应，在示波器上可以直接显示出两个扬声器的电流的和。假如脉动频率颇低，我们就简单地看到一系列振幅作脉动变化的正弦波，但当脉动加快时，我们就看到如图48-1所示的那类波形。当频率差再增大时，图中的“隆起部分”之间靠得更近。此外，如果两个信号振幅并不相等，一个强于另一个，那么，正如我们所预料的那样，所得到的合成波的振幅永远不会变为零。无论从声学上还是从电学上都得出了应得的结果。

也会出现与上述相反的现象！在利用所谓调幅（AM）现象的无线电发送中，广播台是这样播送声音的：无线电发射机在广播频带产生频率很高的交流振荡，比如说800 kHz。如果接通这个载波信号，电台就会发出频率为800 kHz幅度均匀不变的电波。将“消息”发送出去（常常是一类无用的消息，诸如去买哪种牌子的汽车）的方法是，当某个人的讲话送入话筒后，载波信号的幅度就随进入话筒的声音振动一起发生变化。

我们举一个数学处理上最简单的例子。如果有一个女高音歌手正在唱着一首优美动听的歌曲，她的声带产生完好的正弦振动，那么我们就得到一个强度如图48-4那样交替变化的信号。然后，在接收机中将这样的音频变化复原，我们去掉载波只看包络，这个包络就表示了声带的振动，或歌手的声音。于是扬声器就在空气中以同样的频率作相应的振动，而听众基本上不能够说出这与真实声音有何区别。当然由于许多畸变以及其他微妙的效应，实际上有可能说出我们是在听收音机还是在听真的女高音在歌唱；不然事情就像上面所说的那样。

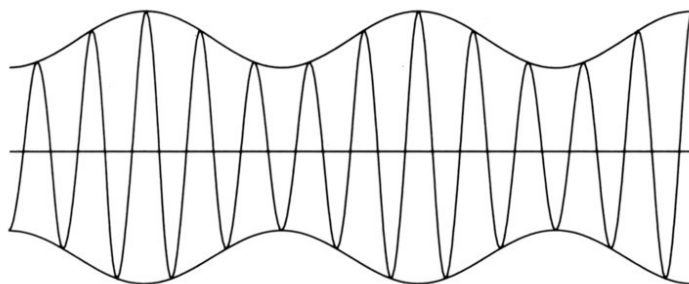


图48-4 调制载波。在此简图中， $\frac{\omega_c}{\omega_m} = 5$ 。在实际的无线电波中， $\frac{\omega_c}{\omega_m} \approx 100$

§48-3 旁频带

在数学上，刚才所描写的调制波可以表示为

$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_c t, \quad (48.9)$$

这里 ω_c 表示载波频率， ω_m 是音频。我们再次利用有关余弦的定理，或者利用 $e^{i\theta}$ 来计算（虽然用 $e^{i\theta}$ 简单一些，但这是一回事，没有什么差别），于是得到

$$S = \cos \omega_c t + \frac{1}{2} b \cos(\omega_c + \omega_m)t + \frac{b}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t. \quad (48.10)$$

所以，从另一个观点来看，我们可以说，电台所输出的波是由三列波叠加在一起的：首先是频率 ω_c 的规则波，即载波，另外两个是新的波，各自具有一个新的频率。一个是载频加上调频，另一个是载频减去调频。因此，假如我们画出信号发生器产生的信号强度对频率的函数图像，就会在载波频率上发现颇高的强度，这是很自然的，但当一位歌唱家开始歌唱时，我们就会在频率 $(\omega_c + \omega_m)$ 及 $(\omega_c - \omega_m)$ 处突然发现正比于歌唱家声强 b^2 的强度，如图48-5所示。这就称为旁频

莹，只要在发射机中存在调制信号，就会有旁频带出现。如果同时出现的律音不止一个，比如说有两个律音 ω_m 及 ω'_m ，即有两个乐器在演奏；或者说，假如存在着另外一个复杂的余弦波，那么，从数学上可以看出，我们将会得到频率相应地为 $\omega_c \pm \omega'_m$ 的更多的波。

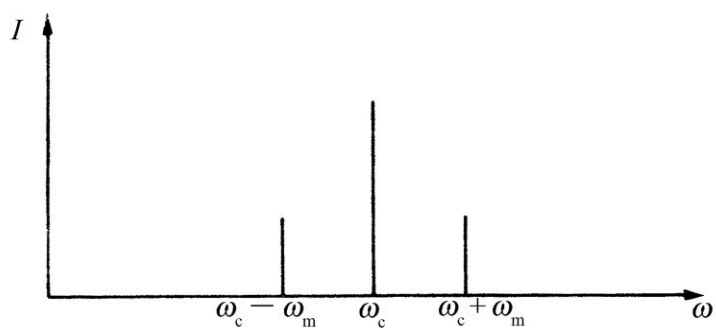


图48-5 载波 ω_c 被单个正弦波 ω_m 调制时的频谱

因此，当有一个可以表示成许多余弦之和[1]的复杂调制时，我们就会发现实际的发射机发送的是在一段频率范围内的信号，即载频加上或减去调制信号所包含的最高频率。

虽然原先我们可能认为无线电发射机发送的只是载波的标称频率，因为在广播台里有许多大的、超稳定的晶体振荡器，而且一切都调整到正好是800 kHz，但在某人刚宣告他们在800 kHz播音那个瞬间，他已调制了800 kHz载波，因此就不再正好是800 kHz了！假如我们建造的放大器，其频宽覆盖了人耳灵敏度的一个很大区域（人耳可以听到高达20 kHz的声音，但通常发射机与接收机工作范围不超过10 kHz，所以我们不能听到最高频率部分），而当一个人说话时，他的声音中可以包括高到比如说10 kHz的频率。那么发射机发送的频率可以从790 kHz到810 kHz。现在，假定另一个广播台的频率是795 kHz，那么就会出现混乱。此外，如果我们的接收机的灵敏度如此之佳，以致只接收800 kHz的信号，而不会接收到上下10 kHz的信号，那么我们

也不能听到播音员在说话，因为信息正是在这两种频率上！因此，使各广播台的工作频率彼此保持一定的间隔是绝对必要的，这样它们的旁频带才不会交叠，此外接收机的选择性必须不至于强到不能接收到主标称频率和旁频带信号。对声音来说，这个问题实际上并不会造成太多麻烦。我们可以听见的频率范围是 $\pm 20\text{ kHz}$ ，而广播波段通常是由 500 kHz 到 $1\,500\text{ kHz}$ ，所以对广播来说可以设立许多电台。

电视的问题就比较困难了。当电子束扫过显像管屏幕时，屏幕上就有许多小亮点和暗点。“亮”和“暗”就是“信号”。通常整个画面的电子束扫描是在约 $1/30\text{ s}$ 中扫过大约500条线。假定画面的垂直分解与水平分解差不多相同，这样沿着每条扫描线的每英寸中具有同样数量的斑点。在500条线上我们希望将明暗区分开来。为了用余弦波能做到这一点，所需的最短波长相当于从一个极大值到另一个极大值之间的长度，即屏幕尺寸的 $1/250$ 。于是每秒钟就有 $250 \times 250 \times 30$ 个信息。所以，要携带的信号的最高频率接近于 4 MHz 。实际上，为了使电视台彼此间有一定的频率间隔，我们必须用更高的频率，即约 6 MHz ；其中一部分用来携带伴音信号和其他信息。所以电视频道的宽度约为 6 MHz 。用 800 kHz 的载波肯定不能发送电视，因为我们不可能以高于载频的频率去进行调制。

无论如何，电视频带从 54 MHz 开始，第一个发送频道是2（！）频道，频率范围从 54 MHz 到 60 MHz ，宽为 6 MHz 。“但是，”有人会说，“我们刚证明过在两旁都有边频带，因此频宽应为 6 MHz 的两倍”。但幸而无线电工程师相当聪明。如果在分析调制信号时，不是只使用余弦项，而是一起使用余弦项和正弦项把相位差考虑进去，我们可以看到在高频端的边频带和低频端的边频带之间存在着确定不变的关系。这就是说在另一个边带上没有什么新的信息。因此要做的就是

抑制一个边频带，并将接收机中的线路接成使失去的信息能从单个边频带和载波中重新组成。单个边频带的发送对于减少发送信息所需的带宽来说是一个聪明的方案。

§48-4 定域波列

我们要讨论的下一个题目是波动在空间与时间两方面的干涉。假定有两列在空间行进的波。当然，可以用 $e^{i(\omega t - kx)}$ 来表示在空间行进的波。例如，这可以是声波中的位移。如果 $\omega^2 = k^2 c^2$ （这里 c 是波的传播速度），那么上式就是波动方程的一个解。在这种情况下，我们可以将它写成 $e^{ik(x - ct)}$ ，它可归入一般形式 $f(x - ct)$ 之中。因此这必定是以速度 ω/k ，即 c 传播的波。一切都很正常。

现在，我们要将这样的两列波相加。假定一列波以某个频率行进，另一列波以另一频率行进。我们把振幅不同的情况留给读者去考虑，这不会造成实质性的差别。于是我们来计算 $[e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}]$ 。在做加法时可以使用将信号波相加时用过的同样的数学方法。当然，如果 c 对于两者都相同，这就很容易，因为这与我们前面的计算一样

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{i\omega_1 (t - \frac{x}{c})} + e^{i\omega_2 (t - \frac{x}{c})} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'}, \quad (48.11)$$

这里只是用变量 $t' = t - x/c$ 代替 t 。所以，我们显然得到同样的调制，但我们当然也看到，这种调制是随着波一起运动的。换句话说，如果将两列波相加，但这些波不只是振动，而且也在空间移动，那么合成波也以相同速率运动。

现在我们打算将这种情况推广到波的频率与波数 k 之间的关系不再那么简单的情形。举例来说，波在具有折射率的物质中的传播就属于这种情形。在第31章中我们已经研究过折射率的理论，在那里我们知道可将 k 写成 $k = n\omega / c$ ，这里 n 即折射率。作为一个有趣的例子，对于X射线，我们得出折射率 n 是

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m\omega^2}. \quad (48.12)$$

实际上在第31章中我们导出过更复杂的公式，但作为一个例子，这个式子同任何其他式子一样适用。

顺便说一下，我们知道，即使 ω 与 k 不呈线性关系，比值 ω / k 仍然是波在该特定频率和波数下的传播速率。我们把它称为相速度，这是相位或单列波的波节移动的速率

$$v_{\text{相}} = \frac{\omega}{k}. \quad (48.13)$$

对于X射线在玻璃中的传播，其相速度大于真空中的光速〔因为式（48.12）中的 n 小于1〕，这有些使人费解，因为我们并不认为可以用大于光速的速度发送信号！

现在我们要来讨论的是 ω 与 k 之间有确定关系式的两列波的干涉。上面关于 n 的公式表明 k 是 ω 的确定函数。具体地说，在这个特定问题中，用 ω 来表示的 k 的公式是

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

这里 $a = Nq_e^2/(2\epsilon_0 m)$ ，是一个常数。总之，对每个频率，都有一个确定的波数，我们要做的是将这样的两列波相加。

让我们像计算（48.7）式那样来计算

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \times \{ e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + e^{-\frac{1}{2}i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} \}. \quad (48.15)$$

于是我们又得到了调制波，它以平均频率与平均波数行进，但它的强度则以取决于频率差和波数差的方式而变化。

现在，我们来讨论两列波之间的差别颇小的情形。假设相加的两个波的频率近于相等，于是 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 实际上与 ω_1 或 ω_2 相同，

$(k_1 + k_2)/2$ 亦然。这样，波、快速振动或波节的速率基本上仍为 ω/k 。但要注意，调制的传播速率并不相同！对于一定量的时间改变 t ， x 应变化多大呢？这种调制波的速率就是比值

$$v_{\text{调}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

调制速率有时称为群速度。假如取频率差相当小，波数差也相当小的情况，那么在极限情况下，这个表示式就趋于

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

换句话说，对于非常慢的调制和非常慢的拍而言，它们有一个确定的行进速率，而这个速率与波的相速率不同——这是一件多么不可思议的事！

群速度是 ω 对 k 的微商，而相速度是 ω/k 。

让我们看看是否可以理解其原因。考虑两列波，其波长仍略有不同，如图48-1所示。它们反相，同相，再反相，等等。现在，这两列波实际上也表示了在空间以略有不同的频率传播的波。因为相速，即这两列波的波节速度，不是正好相等，于是就发生某种新的情况。假定我们处在其中一列波上去看另外一列波；如果它们的速率相同，那么当我们处在这个波峰上时，另一列波相对于我们的位置是静止不动的。我们若处在波峰上，那么看到正好在对面的也是一个波峰；如果两个波速相等，波峰与波峰就重叠在一起。但这两个波速实际上并不相等。这两个波在频率上略有差别，因此其速度也略有差别，但由于这种速度上的差异，当我们处在一列波上前进时，另一列波相对于我们这列波就缓慢地朝前或者朝后运动。那么，随着时间的消逝，对波节会发生一些什么呢？如果我们使其中一列波稍微往前挪动一点，波节就会朝前（或往后）移过相当的距离。这就是说，这两列波之和有一个包络，当两列波行进时，包络以不同的速率前进。群速度就是将调制信号发送出去的速度。

假如我们发出一个信号，即在波中形成某种变化，使别人在收听时能识别它（亦即一种调制），那么倘若这个调制相当慢，它就以群速度行进（当调制很快时，分析起来要困难得多）。

现在我们终于可以证明，X射线在一块碳中的传播速度并不比光速大，虽然其相速度大于光速。为此我们必须求出 $d\omega/dk$ 。这可由对式（48.14）微分得到

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{a}{\omega^2 c}.$$

因此，群速度就是其倒数，即

$$v_g = \frac{c}{1 + a/\omega^2}, \quad (48.18)$$

可见 v_g 小于 c ！所以，虽然相速度可以超过光速，但调制信号运动得较慢，这就解决了那个表观的佯谬！当然，对于 $\omega = kc$ 这种简单的情况， $d\omega/dk$ 也是 c 。所以如果所有的相位都具有同样的速度，波群自然也具有相同的速度。

§48-5 粒子的概率幅

我们现在来考虑另一个关于相速度的极其有趣的例子。它与量子力学有关。我们知道，在某些情况下，在一处找到粒子的概率幅可以按下列公式随空间（假设为一维空间）和时间而变化

$$\Psi = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad (48.19)$$

这里 ω 是频率，它通过 $E = \hbar\omega$ 而与经典的能量概念相联系。 k 是波数，通过 $p = \hbar k$ 而与动量相联系。假如波数精确地等于 k ，即无论在何处都具有相同振幅的理想波，那么我们就说粒子有一个确定的动量 p ，式（48.19）给出了这个波的振幅，如果我们取其绝对值的平方，就得到发现粒子的相对概率作为位置与时间的函数。如果这个相对概率是常数，那就意味着在各处找到粒子的概率相同。现在假定我

们知道比起其他地方来说，粒子更可能位于某处。对于这种情形，我们将用一个具有极大值并且向两边衰减的波来表示（图48-6）[它与式（48.1）表示的波不完全一样，该波有一系列极大值，但是，如果将几个 ω 和 k 差不多相同的波相加，就可能去掉所有其余极大值，只留下一个极大值]。

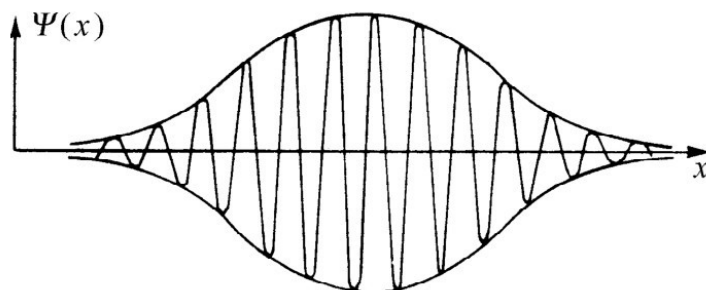


图48-6 定域波列

在这种情况下，由于式（48.19）的平方表示在某处发现粒子的概率，我们知道在一定时刻粒子最可能位于“隆起部分”中心附近，在那里波幅是极大值。如果我们等待一些时间，波会前进，过了一會兒，“隆起部分”将移至另一处。在经典物理中，如果知道粒子原来位于某处，那么就可以预言它在以后将位于另一处，这是因为它毕竟具有速度，即具有动量。只有当波的群速度，即调制速度等于从经典理论得出具有同样动量的粒子的速度时，量子理论给出的动量、能量与速度的关系才过渡到正确的经典关系。

现在必须说明情况是否如此。按照经典理论，能量与速度通过如下方程相联系

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.20)$$

类似地，动量是

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (48.21)$$

这就是经典理论。作为它们的一个推论，可以证明在消去 v 后，就得到

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

这就是我们一再谈到的对四维世界的主要结果，它也可写为 $p_\mu p_\mu = m^2 c^2$ ；这就是经典理论中能量与动量之间的关系式。由于用 $E = \hbar \omega$ 和 $p = \hbar k$ 代入后，可将 E 和 p 化为 ω 和 k ，因此对量子力学来说，上述结果就意味着下式必然成立

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = m^2 c^2. \quad (48.22)$$

这就是表示一个质量为 m 的粒子的量子力学振幅波中频率与波数之间的关系式。由这个方程可推得 ω 为

$$\omega = c \sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}.$$

在这里我们再次看到相速度 ω/k 比光速快！

现在我们来看群速度。群速度应为 $d\omega/dk$ ，即调制行进的速度。为此要对平方根进行微分，这并不很困难。它的微商是

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}}.$$

但平方根正是 ω/c ，所以我们可写成为 $d\omega/dk = c^2 k/\omega$ 。其次， $k/\omega = p/E$ ，所以

$$v_g = \frac{c^2 p}{E}.$$

但由式(48.20)和式(48.21)， $c^2 p/E = v$ ，即经典的粒子速度。所以我们看到，鉴于量子力学的基本关系式 $E = \hbar\omega$ 和 $p = \hbar k$ （由此两式可认为 ω 与 k 同经典的 E 与 p 是一致的）只得出方程 $\omega^2 - k^2 c^2 = m^2 c^4 / \hbar^2$ ，我们现在还理解了将 E 和 p 与速度相联系的关系式(48.20)和(48.21)。当然，如要解释得通，群速度就必须是粒子的速度。如果我们按照量子力学的说法想象某一时刻粒子在这儿，十分钟后它又跑到那儿，则这个“隆起部分”所通过的距离除以时间间隔，必须等于经典的粒子速度。

§48-6 三维空间的波

现在我们对波动方程作一点一般性的评论，以结束有关波的讨论。在这些评论中，我们打算对未来作些概述——这并不是说我们此刻就能精确理解一切，而是看看我们稍微多研究一点波之后事情将会成为什么样子。首先，一维的声波方程是

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

这里 c 是该波的速率，在声波的情况下就是声速；在光的情况下则是光速。我们已证明过对声波来说，位移将以一定的速率传播。但额外压强也以一定的速率传播，额外密度亦然。所以我们可以预料压强也会满足这个方程，事实上也确实如此。我们把它留给读者去证明。提示： ρ_e 正比于 χ 对 x 的变化率。因此如果将波方程对 x 进行微分，立即会发现 $\partial \chi / \partial x$ 亦满足同样的方程，这就是说 ρ_e 满足同样的方程。但 P_e 正比于 ρ_e ，因此 P_e 也满足同样的方程。所以无论压强、位移等都满足同样的波动方程。

通常人们见到的声波方程是用压强而不是用位移写出的，因为压强是标量，没有方向，但位移是矢量，有方向，因此分析压强更容易一些。

其次，我们要讨论的是三维空间中的波动方程。我们知道一维声波方程的解是 $e^{i(\omega t - kx)}$ ，这里 $\omega = kc_s$ ，但我们也知道三维空间的波应当表示为 $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ ，这里 $\omega^2 = k^2 c_s^2$ ，当然也就是 $\omega^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c_s^2$ 。现在我们要做的是猜出正确的三维波动方程。自然，对于声波我们可以像前面对一维情况那样，通过三维的动力学论证来导出方程。但是我们不这么做；我们直接把它写出来，对于压强（或位移，或其他什么量）的方程是

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2}. \quad (48.23)$$

以 $P_e = e^{i(\omega t - k \cdot r)}$ 代入即可证实此等式。显然，对 x 每微分一次，就等于乘上 $-ik_x$ 。微分二次，就等于乘上 $-k_x^2$ ，所以这个波方程的第一

项就成为 $-k_x^2 P_e$ ，类似地第二项成为 $-k_y^2 P_e$ ，第三项则成为 $-k_z^2 P_e$ 。在右方，我们得到 $-(\omega^2/c_s^2) P_e$ 。于是，消去 P_e 项并改变符号后，我们就看到 k 与 ω 之间的关系式正是我们所希望的。

再回头看一下，我们禁不住要写下与色散方程式 (48.22) 对应的量子力学波动基本方程。如果 ϕ 表示在位置 x 、 y 、 z 及时间 t 发现粒子的概率幅，那么有关自由粒子的量子力学的方程就是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi. \quad (48.24)$$

首先可以看出式中的 x 、 y 、 z 及 t 系以相对论中经常涉及的那种组合形式出现，这就暗示该式具有相对论的特征。其次，这是一个波动方程，如果我们用平面波试一下，就会得出 $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2 c^2/\hbar^2$ 这一结果，这正是量子力学的正确关系式。在这个方程中还包括了另一个重要事实，即任何波的叠加亦是一个解。所以这个方程包括了量子力学与相对论中我们迄今讨论过的一切东西，至少在处理真空中不受外部势场或外力作用的单个粒子时是如此！

§48-7 简正模式

现在我们转到拍现象的另一个例子，这个例子颇为奇特，而且与前相比略有不同。想象有两个相同的单摆，其间以一相当软的弹簧相联。它们的摆长尽可能做得相同。如果我们把一个摆推向一侧，然后放开它，它就会来回运动。这时它又推动相联的弹簧，所以它实际上就是一个产生力的机械，力的频率就是另一个摆的固有频率。作为先

前学过的共振理论的一个推论，我们知道当我们恰好以正确的频率对某一物体施加一个力时，就会驱动该物体。所以可以肯定，一个来回摆动的摆将驱动另一个摆。然而，在这种情况下发生了一件新的事情，因为系统的总能量是有限的，所以当第一个摆将其能量传给另一个摆而驱动该摆时，它本身就逐渐失去能量，如果节拍正好与速率一致，最后它就失去所有的能量，而变为处于静止状态！当然，此时另一个摆具有全部能量，而前一个摆则没有能量。随着时间的推移，我们将看到情况又沿相反的方向发生，能量又传回到第一个摆，这是一个非常有趣和吸引人的现象。然而，我们说这与拍的理论有关，现在我们应当解释一下，如何从拍的理论的观点来分析这个运动。

我们注意到两个摆中每一个的运动都是振动，并且振动的振幅是循环变化的。所以我们推想可用一种不同的方式来分析一个摆的运动，即将它看成两个振动的和，这两个振动同时存在，但具有略有不同的频率。所以应当有可能在这个系统中找到另外两个运动，从而声称我们所见到的是这两个解的叠加，因为这显然是一个线性系统。的确，很容易找到两种使运动开始的方式，其中每一个都是完整的单频率运动——绝对的周期性运动。像前面那样开始的运动并非严格周期性的，因为它不会持续下去，一旦一个摆将能量传给另一个，它自己的振幅就改变了。但是，也有使运动得以开始而又使一切都不改变的方式，当然，我们一旦见到它，就会理解其中的道理。例如，假定我们使两个摆一起摆动，那么，由于它们具有相同长度，弹簧不起任何作用；同时假定没有摩擦，一切都很完善，那么它们当然会一直这样摆动下去。另一方面，还存在着另一种具有确定频率的可能运动，也就是说，如果我们使摆相反地运动，将它们向外拉过相等的距离，那么它们也会作绝对的周期运动。我们可以意识到弹簧只是在重力所提供的恢复力上加上一点力，全部情况就是如此，而系统正好以比第一

种情况略高一点的频率不断振动。为什么高一点呢？因为除去重力外，弹簧施加了一个拉力，它使系统变得“倔强”一些，所以这种运动的频率正好略高于前一种运动的频率。

因此这个系统具有两种以不变的振幅振动的方式：或者使两个摆在所有时间中以同一频率同向振动，或者使它们以略微高一些的频率沿着相反方向振动。

现在，由于系统是线性的，摆的实际运动可以表示为上述两个运动的叠加（请记住，本章的主题就是不同频率的两个运动相加后的效应）。想想看，如果我们将这两个解组合起来，会出现什么情况？如果在 $t=0$ 的时刻，以等振幅与同相位开始两个运动，它们的和就意味着，其中一个摆受到第一个运动往一个方向的推动，还受到第二个运动往相反方向的推动，从而其位移为零，而另一个摆在两种运动中都产生同样的位移，从而具有较大的振幅。然而，随着时间的推移，两个基本运动独立地进行，所以两者的相对相位就缓慢地改变。这意味着，当时间足够长，以致一个运动能够进行“900.5”周，而另一个运动只进行了“900”周，那么与先前相比，相对位移正好相反。这就是说，振幅大的运动将下降至0，当然，与此同时，原来无运动的摆就将达到最大振幅！

这样我们看到，对这个复杂运动的分析，或者可以认为存在着共振现象，一个将能量传送给另一个，或者也可以认为，这是两个不同频率的等振幅运动的叠加。

[1] 一个稍稍偏题的注释：在哪种情况下曲线可以表示成许多余弦的和？答案是：除去数学家杜撰出来的某些情况外，在所有通常的情况下都能这样做。当然曲线在给定点必须是单值的，它必须不是一种在无限小距离内跳跃无穷多次或者诸如此类的曲线。除去这种限制

外，任何合乎情理的曲线（歌手振动她的声带就能造成这样的曲线）总是可以通过叠加余弦波而合成。

第49章 波模

§49-1 波的反射

本章将讨论把波动限制在某一有限区域中时所产生的一些值得注意的现象。首先，我们将介绍几个有关振动弦所特有的事实作为例子，然后由这些事实归纳出一条原理，这一原理很可能是影响最广泛的数学物理原理。

约束波的第一个例子是使波动在一个界面上受到限制。现在来看一下弦上的一维波动这个简单例子。我们也完全可以讨论朝着墙传播的一维声波或其他性质类似的情况，但是弦的例子目前对我们来说已足够了。假定弦的一端固定，例如把弦系于一堵“无限坚实”的墙上。从数学上讲，这种情况可以表述成：弦在位置 $x=0$ 处的位移 y 必须是零，因为该端点没有运动。现在，如果对于墙来说不是这样，那么我们知道运动的通解是 $F(x-ct)$ 和 $G(x+ct)$ 这两个函数之和，前面一项表示弦中沿一个方向传播的波，后面一项表示弦中沿相反方向传播的波，即

$$y = F(x-ct) + G(x+ct) \quad (49.1)$$

是对任意弦的通解。但是，接下来我们必须满足弦的一端不运动这个条件。如果令方程式(49.1)中的 $x=0$ ，并对任何 t 的数值考察 y 的值，于是我们得到

$$y = F(-ct) + G(ct).$$

如果对所有的时间，这个值都是零，那就意味着函数 $G(ct)$ 一定等于 $-F(-ct)$ 。换句话说，任何量的函数 G 必定等于该量负值的函数 F 之负值。如果将这个结果代回到方程(49.1)中，我们就发现问题的解是

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct). \quad (49.2)$$

如果令 $x=0$ ，就得到 $y=0$ ，这一点很容易验证。

图49-1表示在 $x=0$ 附近沿负 x 方向传播的一个波，以及另一符号相反、在原点另一边沿正 x 方向传播的假想波。我们说假想的，当然是因为没有弦在原点的另一边振动。弦上总的运动被看成为这样两个波在正 x 区域中的叠加。当它们到达原点 $x=0$ 处，这两个波总是相互抵消，最后，在正 x 区域将只存在第二个（被反射的）波，此波当然将沿相反方向传播。这些结果与下列表述是一致的：如果一个波到达弦的固定端，它将被反射，同时改变符号。对这种反射总是可以这样来理解，即想象向弦端点行进的波，在墙后倒转波形再传出来。简单地说，如果我们假定弦是无限长的，每当我们有一个沿某一方向行进的波时，总有另一个沿相反方向行进的波，而且具有上述的对称性，则在 $x=0$ 处的位移总是零，这时，即使在 $x=0$ 处把弦固定也是毫无影响的。

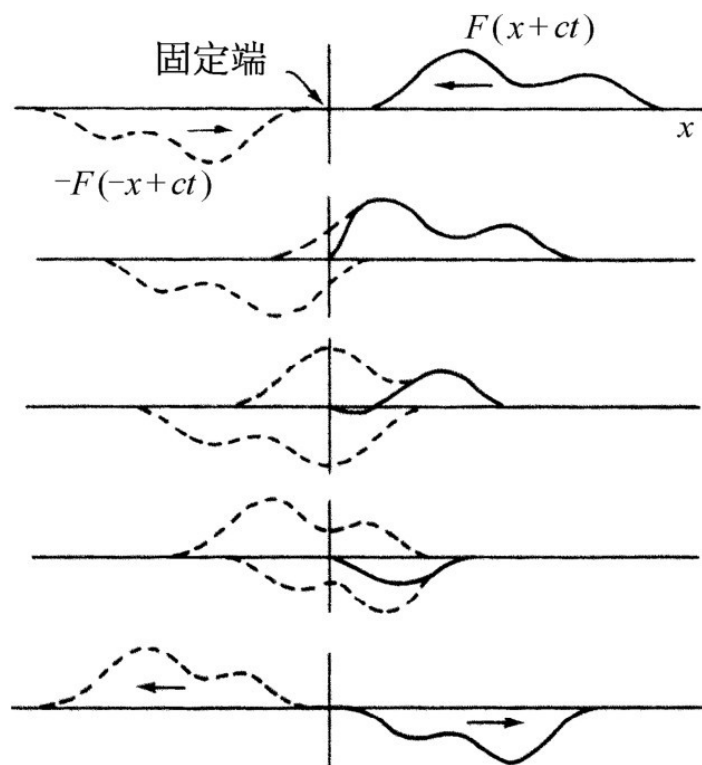


图49-1 把波的反射看作为两个行波的叠加

下面讨论周期波的反射。假定用 $F(x-ct)$ 表示的波是一个正弦波，并且已被反射；那么，反射波 $-F(-x-ct)$ 也是同一个频率的正弦波，但沿相反方向传播。这种情况可以很简单地用复变函数记号来描写： $F(x-ct) = e^{i\omega(t-x/c)}$ 和 $F(-x-ct) = e^{i\omega(t+x/c)}$ 。如果将这两个表示式代入式(49.2)，并且令 x 等于0，就可以看到，对所有的 t 值， $y=0$ ，所以它满足所需的条件。由于指数的性质，式(49.2)可以写成更为简单的形式

$$y = e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin(\omega x/c). \quad (49.3)$$

这个解告诉我们一些有趣的、新的东西，这就是如果我们在任一固定的 x 处观察弦，那么它以频率 ω 振动。不论这一点在哪里，频率都相同！但是在有一些地方，特别是在 $\sin(\omega x/c) = 0$ 的地方，则根

本没有位移。另外，如果在任一时刻 t ，我们给振动弦拍一张快照，那么将得出一张正弦波的像。但是这个正弦波的位移与时间 t 有关。从方程式（49.3）可以看出此正弦波一周的长度等于两个叠加波中任何一个波的波长

$$\lambda = 2\pi c / \omega . \quad (49.4)$$

没有运动的那些点满足条件 $\sin(\omega x / c) = 0$ ，这就意味着 $(\omega x / c) = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ 这些点称为波节。在任何两个相邻波节之间，每一点按正弦规律上下运动，但是运动的图样在空间是固定不动的。这一特征就是我们称之为波模的基本特征。如果能够找到一个运动图样，它具有这样的性质，即在任何点处物体完全按正弦规律运动，而且所有的点都以相同频率运动（虽然有些点比另一些点运动得更多），那么我们就得到了所谓的波模。

§49-2 具有固有频率的约束波

下一个有趣的问题是讨论如果弦的两端（比如说在 $x=0$ 和 $x=L$ 处）都固定时所发生的情况。我们可以由波的反射的概念着手，首先考察沿某一方向行进的某种“隆起部分”的运动。随着时间的推移，我们可以预期“隆起部分”将到达一个端点附近，而随着时间的继续推移，由于与来自另一边、方向与符号都相反的假想“隆起部分”合成的结果，它将变成一种小的颤动。最后，原始的“隆起部分”将消失，假想的“隆起部分”将沿反方向运动，并在另一端点重复上述过程。这个问题的解很容易，但是一个有趣的问题是我们能否得到一个正弦运动（刚才描述的解是周期性的，但当然不是正弦周期性的）。让我们来试一下在弦上产生一个正弦周期波。如果弦的一端被系住，我们知道

它一定与我们先前的解式（49.3）相同。如果弦的另一端被系住，那么它在那一端出现的情况也必定相同。因此，对于周期的正弦运动，唯一的可能性是正弦波必须恰好能适合弦的长度。如果正弦波不能适合弦的长度，那么它的频率就不是一个可以使弦连续不断振动的固有频率。简单地说，如果弦恰好以合适的正弦波形状开始运动，那么它将继续保持完善的正弦波形，并在某个频率上谐和地振动。

数学上，我们可以将上述波形写成 $\sin kx$ ，式中 k 等于方程式（49.3）和（49.4）中的因子 ω/c ，这一函数在 $x=0$ 处等于零。但是，它在另一端点也必须等于零。这点的意义是，这里 k 不再像在一端固定的弦中那样是任意的了。当弦的两个端点均固定时，唯一的可能性就是 $\sin(kL)=0$ ，因为这是使两个端点均保持固定的唯一条件。现在，为了要使正弦值等于零，角度必须等于 $0, \pi, 2\pi$ 或者另一些 π 的整数倍。因此，方程

$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

将给出任何一个可能的 k 值，取决于所取的整数值是多少。对每一个 k 值，就有一个确定的频率 ω ，按照（49.3）它就是

$$\omega = kc = n\pi c/L. \quad (49.6)$$

因此，我们得出下述结论：弦具有一种可以作正弦运动的性质，但仅能以某些确定的频率作正弦运动。这是约束波的最重要的特征。无论系统怎么复杂，结果表明总是存在某些运动图样，它们具有完好的对时间的正弦依赖关系，但频率则取决于该特定系统及其边界的性质。对弦来说，我们可以有许多不同的频率，根据定义，每一个频率对应一个模式，因为模式就是按正弦方式反复重演的运动图样。图49-

2表示弦的前三种模式。对于第一种模式，波长 λ 等于 $2L$ 。只要将波延长到 $x=2L$ ，得出一个完整的正弦波，就能看出这一点。通常，角频率 ω 等于 $2\pi c$ 除以波长，现在由于 λ 等于 $2L$ ，角频率就等于 $\pi c/L$ ，与式(49.6)中 $n=1$ 的结果相符。我们把第一种模式的频率称为 ω_1 。第二种模式给出了两个波腹，在其中点有一个波节。于是，这种模式的波长就等于 L 。相应的 k 值增大为两倍，频率也增大为两倍，等于 $2\omega_1$ 。对于第三种模式，频率等于 $3\omega_1$ ，如此等等。因此弦的所有不同频率都是最低频率 ω_1 的整数倍——1倍、2倍、3倍、4倍，等等。

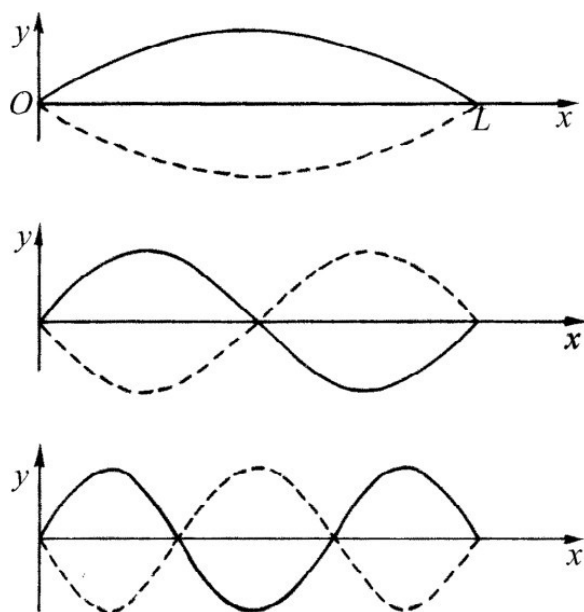


图49-2 振动弦的前三种模式

现在，回到弦的一般运动，结果是任何可能的运动总可以这样来分析，即认为弦上同时振动着多个模式。事实上，对一般运动来说，必须同时激发无数个模式。为了得到有关这方面的某些概念，让我们用图来说明，当有两个模式同时振动时所发生的情况：假定第一种模

式按图49-3中所示的次序振动着，图中画出在最低频率的半个周期内每隔相等的时间间隔弦的挠曲形状。

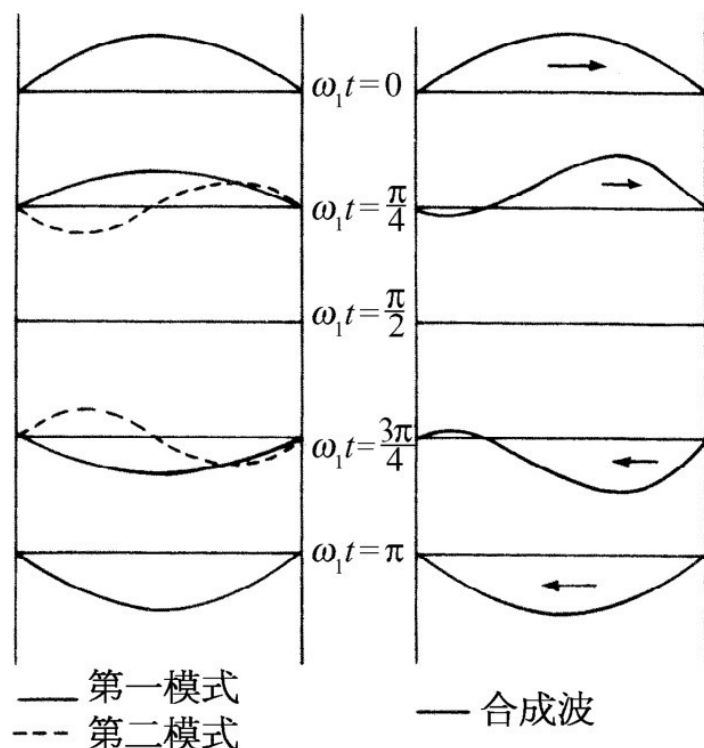


图49-3 两种模式组合成一个行波

现在，我们假定同时还存在着两种模式的振动。图49-3也画出了一系列这种模式的图样，该模式在开始时与第一种模式有 90° 的相位差。这意味着它开始时没有位移，但是弦的两半具有相反方向的速度。现在，我们回想一下有关线性系统的一般原理：如果存在任意两个解，那么它们的和也是该系统的一个解。因此，由图49-3所示的两个解相加得到的位移应是弦的第三种可能的运动。合成结果也画在图中，它开始显示出在弦的两个端点之间来回运动的一个“隆起部分”的样子，虽然只有两个模式，我们作不出非常好的图，好的图需要更多的模式。事实上，这个结果是关于线性系统的重要原理的一个特殊情况：

任何运动都可以这样来分析，即设想它是所有各种由适当振幅和相位组成的不同模式的运动之和。

每个模式都非常简单——只随时间作正弦运动，这一事实使该原理显得很重要。诚然，即使弦的一般运动实际上并不非常复杂，但是存在着另一些系统，例如飞机机翼的抖动，其运动就复杂得多。然而，即使是机翼，我们也发现存在着具有一种频率的某个特定的扭曲方式，以及具有别的频率的其他扭曲方式。如果能够找到这些模式，那么机翼的复杂运动总是可以分解为一些简谐振动的叠加（除非抖动达到这种程度，以至于系统不能再看成是线性的）。

§49-3 二维波模

下一个要讨论的例子是二维模式的有趣情况。到目前为止，我们只讲了有关一维的情况——张紧的弦或管中的声波。我们最终应讨论三维情况，但是比较容易的一步是对二维情况进行讨论。为了明确起见，我们来讨论一个受到这样约束的矩形橡皮鼓面，它的矩形边界上任何地方的位移都为零，同时设矩形的尺寸为 a 和 b ，如图49-4所示。现在的问题是，可能具有的运动方式有什么特征？我们可以从处理弦问题时所采用的同样步骤着手。如果鼓面根本不受约束，那么可以预期，波将以某种波动形式向前传播。例如， $e^{i\omega t}(e^{-ik_x x + ik_y y})$ 就代表沿某方向传播的正弦波，此方向取决于 k_x 和 k_y 的相对值。现在，我们怎样才能使 x 轴，即 $y=0$ 的直线成为波节呢？利用从一维弦发展而来的概念，我们可以想象用复函数 $(-e^{i\omega t})(e^{-ik_x x - ik_y y})$ 表示的另一个波。不论 x 和 t 为何值，这两个波的叠加，在 $y=0$ 处得到的位移将为零（虽然这些函数是对负的 y 定义的，在那里没有鼓面在振动，但是这一点

可以不予理会，因为在 $y=0$ 处位移确实等于零）。在这种情况下，我们可以视第二个函数为反射波。

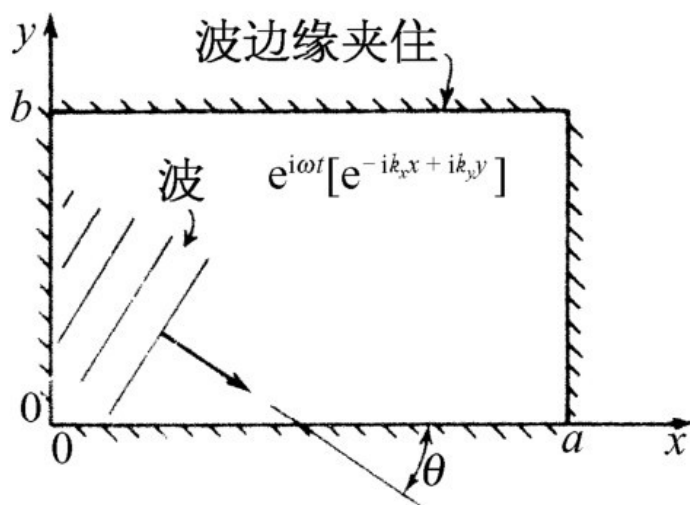


图49-4 振动的矩形板

然而，我们不仅要求 $y=b$ 处为波节线，而且还要求 $y=0$ 处为波节线。怎么做到这一点呢？问题的解与我们研究晶体反射时所得出的结论有关。只有当 $2b \sin\theta$ 是 λ 的整数倍时，这些在 $y=0$ 处相互抵消的波才会在 $y=b$ 处也相互抵消，式中 θ 是图49-4中所示的角

$$m\lambda = 2b \sin\theta \quad (m=0, 1, 2, \dots) . \quad (49.7)$$

现在，按同样的方法，加上两个函数 $-e^{i\omega t} (e^{+ik_x x + ik_y y})$ 和 $+e^{i\omega t} (e^{+ik_x x - ik_y y})$ ，分别代表来自直线 $x=0$ 的另两个波中的反射波，我们就可以使 y 轴成为波节线。使 $x=a$ 成为波节线的条件与使 $y=b$ 成为波节线的条件相似。即 $2a \cos\theta$ 也必须是 λ 的整数倍

$$n\lambda = 2a \cos\theta . \quad (49.8)$$

于是最终的结果是框中来回反射的波展现出一个驻波图样，即一个确定的模式。

因此，要得到一个模式，就必须满足上述两个条件。我们先来求一下波长。由式（49.7）和（49.8）消去角度 θ ，就可以求得用 a ， b ， n 和 m 表示的波长。最容易的计算方法是将上述两个方程的两边分别用 $2b$ 和 $2a$ 去除，然后将它们平方，再把这两个方程相加。结果是 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = (n\lambda / 2a)^2 + (m\lambda / 2b)^2$ ，由此可以解出 λ

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

这样，我们根据两个整数决定了波长，同时由波长，可立刻得到频率 ω ，因为我们知道，频率等于 $2\pi c$ 除以波长。

这个结果很有趣并且相当重要，因此我们还应通过纯粹数学的分析，而不是仅从关于反射的讨论来推导出这一结果。让我们用这样选定的四个波的叠加来表示振动，使四条直线 $x=0$ ， $x=a$ ， $y=0$ 和 $y=b$ 全都是波节。另外，我们还要求所有的波具有同样的频率，以使合成的运动代表一个模式。由前面对光反射的讨论，我们知道 $e^{i\omega t} (e^{-ik_x x + ik_y y})$ 代表沿图49-4所示的方向传播的波。式（49.6），即 $k = \omega / c$ 仍然成立，只要

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (49.10)$$

显然，由图可知 $k_x = k \cos \theta$ ， $k_y = k \sin \theta$ 。

现在，我们的矩形鼓面的位移（比如说 ϕ ）的方程具有这种很长的形式

$$\phi = e^{i\omega t} [e^{(-ik_x x + ik_y y)} - e^{(+ik_x x + ik_y y)} - e^{(-ik_x x - ik_y y)} + e^{(+ik_x x - ik_y y)}]. \quad (49.11a)$$

虽然这个式子看起来相当混乱，但是计算上述各项之和并不十分困难。将各指数项合并，就可以得到正弦函数，这样一来，位移就是

$$\phi = [4 \sin k_x x \sin k_y y] [e^{i\omega t}]. \quad (49.11b)$$

换句话说，这是一种正弦振动，其图样在 x 方向和 y 方向上也都是正弦的，一切都很好。当然，我们的边界条件在 $x=0$ 和 $y=0$ 处是满足的。我们还要求 ϕ 在 $x=a$ 和 $y=b$ 时也等于零。因此，我们必须加进另外两个条件： $k_x a$ 必须是 π 的整数倍，而 $k_y b$ 必须是 π 的另一个整数倍。因为我们已经看到 $k_x = k \cos \theta$ ， $k_y = k \sin \theta$ ，所以立即就得到式（49.7）和（49.8），并由这两个式子得出最后结果式（49.9）。

现在我们取一个宽是高的两倍的矩形作为例子。如果我们选取 $a=2b$ ，并利用式（49.4）和（49.9），那么就能够计算出所有模式的频率

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{4m^2 + n^2}{4}. \quad (49.12)$$

表49-1列出几个简单的模式，并且还定性地表示了它们的形状。

表49-1

模 式 形 状	m	n	$(\omega/\omega_0)^2$	ω/ω_0
	1	1	1.25	1.12
	1	2	2.00	1.41
	1	3	3.25	1.80
	2	1	4.25	2.06
	2	2	5.00	2.24

关于这种特殊情况，要强调的最重要之点是频率互相不成倍数，它们也不是任何数的倍数。固有频率间具有谐和地相关的概念并不是普遍正确的。对于一维以上的系统它是不正确的，对于比具有均匀密度和均匀张力的弦更复杂的一维系统，它也是不正确的。后一种情况的一个简单例子是悬挂着的链条，链条顶部的张力比底部的张力大一些。如果使这种链条作谐振动，那么就有各种不同的模式和频率，而各频率都不是任何数的简单倍数，模式形状也不是正弦的。

更复杂一些的系统的波模就更加复杂了。例如，在我们的口腔内，声带上部是腔体，依靠使舌头和嘴唇活动，等等，可以做成不同口径和形状的开管或闭管。这是一个极其复杂的共振器，但它不过是一个共振器。当人们运用声带讲话时，声带就用来产生某种类型的音调。这种音调是相当复杂的，出来的有许多声音，但是由于口腔具有各种各样的共振频率，它进一步改变了这个音调。例如，一个歌手能

够在同样的音调上发出各种元音a、o或oo等，但是它们听起来不一样，因为在口腔中，各种谐音的共鸣程度不同。空腔的共振频率在改变发声中的极端重要性可以用一个简单的实验来演示。由于声音的传播速率随介质密度的平方根的倒数而变化，因此利用不同的气体可以改变声音的速率。如果我们用氦气代替空气，这样密度就降低，声音的传播速率大大增加，空腔的所有频率都将升高。因而，如果在某人讲话前用氦气充满肺部，那么虽然声带还是以同样的频率振动，但他的发声特征将发生极大变化。

§49-4 耦合摆

最后，我们要着重指出，不仅仅是复杂的连续系统存在着波模，而且非常简单的力学系统也存在着波模。前一章中讨论过的两个耦合摆组成的系统，就是一个很好的例子。在那一章中已经证明，可以把这种运动看作具有不同频率的两个谐运动的叠加来分析。因此，即使是这样的系统也可以用谐运动或波模来分析。弦具有无穷个模式，二维的表面也具有无穷个模式。如果我们知道如何计算无穷大，那么在某种意义上，二维表面的模式数目是一个二重无穷大。但是，仅有两个自由度，只要求用两个变量来描述的一个简单的力学系统只有两个模式。

让我们在摆是等长的情况下对这两个模式进行数学的分析。如图49-5所示，令一个摆的位移为 x ，另一个摆的位移为 y 。如果没有弹簧，由于重力，作用在第一个物体上的力与该物体的位移成正比。如果没有弹簧，仅仅对于这一个摆来说，就应该有某个固有频率 ω_0 。没有弹簧时，运动方程应为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (49.13)$$

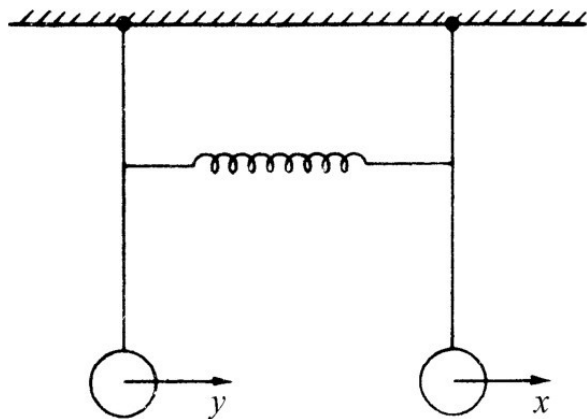


图 49-5 两个耦合摆

如果没有弹簧，另一个摆应以同样的方式摆动。但当存在弹簧时，除去由于重力而产生的恢复力外，还有一个附加力在拉第一个物体。这个拉力取决于 x 超过 y 的距离，并且与其差额成正比，因此，拉力就等于取决于几何位置的某个常数乘以 $(x - y)$ 。同样大小但方向相反的力作用在第二个物体上。因此，要解的运动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x - y), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y - x). \quad (49.14)$$

为了求出两个物体都以同样频率摆动的运动，我们必须决定每一个物体移动多少。换句话说，摆 x 和摆 y 将以同样的频率振动，但是它们的振幅必须具有确定的数值 A 和 B ， A 和 B 的关系是固定的。我们用这种解来尝试一下

$$x = A e^{i\omega t}, \quad y = B e^{i\omega t}. \quad (49.15)$$

如果将这两个试解代入方程式(49.14)，合并同类项，结果为

$$\begin{aligned}\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)A &= -\frac{k}{m}B, \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)B &= -\frac{k}{m}A.\end{aligned}\tag{49.16}$$

所写出的方程中，公共因子 $e^{i\omega t}$ 已被消去，并且都除以 m 。

现在，我们看到，有两个似乎包含两个未知数的方程式。但是事实上没有两个未知数，因为运动的整个大小是无法由这些方程来决定的。上述方程可以决定的仅仅是 A 与 B 之比，但是这两个方程必定给出同样的比例。要使这两个方程相一致，就要求频率是某个非常特殊的值。

在这种特殊情况下，频率可以相当容易地求出。如果将这两个方程相乘，那么结果是

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)^2 AB = \left(\frac{k}{m}\right)^2 AB.\tag{49.17}$$

方程两边的 AB 项可以消去，除非 A 和 B 都为零，而那就意味着根本没有运动。如果存在运动，那么剩下的两项必定相等，这给出一个要求出解的二次方程。结果是存在两个可能的频率

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}.\tag{49.18}$$

另外，如果把这些频率值代回到方程（49.16）中，我们发现对第一个频率有 $A=B$ ，对第二个频率有 $A=-B$ 。这些就是“模式形状”，这很容易用实验来验证。

显然，在 $A=B$ 的第一种模式中，弹簧从来没有被拉伸，因而两个摆都以频率 ω_0 振动，就好像弹簧不存在时一样。在 $A=-B$ 的另一个解中，弹簧提供一个恢复力，因而提高了振动频率。如果两个摆具有不同的长度，则可得出更为有趣的情况。有关的分析与上面给出的十分相似，我们将它留给读者作为练习。

§49-5 线性系统

现在，我们来总结一下上面所讨论过的概念，它可能包含了数学物理的最普遍、最奇妙的原理的所有方面。如果我们有一个特征与时间无关的线性系统，那么它的运动并不一定具有什么特别的简单性，事实上，它可以是非常复杂的，但是存在着一些（通常是一系列）非常特殊的、其整个图样随时间指数地变化的运动。对我们现在正在谈论的振动系统，指数是虚数，因而我们不说它随时间“指数地”变化，而宁可说它随时间“按正弦规律”变化。然而，人们可以更一般地说运动随时间以非常特殊的形状及非常特殊的模式指数地变化。系统最普遍的运动总是可以表示成包含各个不同指数的运动的叠加。

对于正弦运动的情况，将上述结论再叙述一遍是值得的：一个线性系统不一定作纯粹的正弦运动，即以确定的单个频率运动，但是无论它如何运动，这个运动总可以表示成纯正弦运动的叠加，这些正弦运动中每个运动的频率是系统的一个特征，并且每个运动的图样或波形也是系统的一个特征。在任何一个这样的系统中，一般运动的特征可以这样来表示，即给出各个模式的强度和相位，并把它们统统合在一起。叙述这一点的另一种方式是：任何一个线性振动系统等效于一组互相独立的谐振子，每个谐振子具有与各模式相应的固有频率。

我们评述一下模式与量子力学的联系作为这一章的结束。量子力学中的振动客体（或在空间变化的东西）是概率函数的振幅，它给出了在一个已知组态中，找到一个电子或一组电子的概率。这个振幅函数可以随空间和时间变化，并且事实上还满足一个线性方程。然而，在量子力学中有一种变换，在这种变换中我们所谓的概率振幅的频率就等于经典概念中的能量。因此，只要用能量一词来代替频率，我们就可以将上述原理变成适用于量子力学的情况。它变成这样：一个量子力学系统，例如一个原子，不必具有一个确定的能量，正像一个简单的力学系统并不一定要具有一个确定的频率一样。但是，无论系统表现得怎样，其行为总可以表示为一些具有确定能量的状态的叠加。每个状态的能量是该原子的一个特征，同时决定在不同地点找到粒子概率的振幅图样也是原子的一个特征。一般的运动可以用给出各个不同能量状态的振幅来描写。这就是量子力学中能级的由来。由于量子力学是用波来表示的，在电子不具备足够的能量最终脱离质子的情形下，这些波都是约束波。就像弦的约束波一样。量子力学波动方程的解中存在许多确定的频率。量子力学解释说这些就是确定的能量。因此一个量子力学系统，由于它是用波来表示的，可以具有能量固定的确定状态；各种各样原子的许多能级就是例子。

第50章 谐波

§50-1 乐音

据说毕达哥拉斯（Pythagoras）曾经发现如下事实：两根相似的弦处于同样的张力下，只是长度不同，当它们同时发声时，如果两根弦的长度之比为两个小整数之比，则所发出的声音是悦耳的。如果两根弦的长度为1与2之比，则这两根弦发出的声音相当于音乐中的八度。如果两根弦的长度为2与3之比，则相当于C到G之间的音程，称之为五度音程。一般认为这些音程是“悦耳”的和音。

毕达哥拉斯对于他的这一发现感受如此之深，因而把它作为一个学派的基础——人们称之为毕达哥拉斯派——这个学派对数字的巨大威力有着神秘的信仰。他们还相信，在行星（或“天体”）方面也会找到类似的现象。我们有时听到“天体音乐”这样的说法，它的意思就是在行星轨道之间或者在自然界中其他事物之间会存在数字关系。人们通常认为这只是希腊人的一种迷信。但是，这种迷信与我们自己对定量关系所表现的科学兴趣是这样的大不相同吗？除了几何学以外，毕达哥拉斯的发现是关于自然界中存在数字关系的第一个例子。突然发现自然界中确实包含简单的数字关系这件事肯定令人深感惊奇。通过简单的长度测量，我们就能对表面上看来与几何学毫无关系的某种事情作出预言——产生悦耳的声音。人们从这一发现可以引申出这样一点：算术和数学分析或将成为了解自然界的良好工具。现代科学的成果证实了这个观点。

毕达哥拉斯只能通过实验观察来得到他的发现。然而这个重要方面似乎并未给他留下深刻的印象。如果不是这样的话，那么物理学就会开始得更早一些（回顾别人已经做过的事情，并且判断他在当时应该怎么做总是很容易的）。

我们不妨讲一下这个非常有趣的发现的第三方面，即这一发现与发出悦耳声音的两个音调有关。我们不妨自问，在关于为什么只有某些声音是悦耳的这一点上，我们是否比毕达哥拉斯了解得更多？在今天，美学的一般理论未必比毕达哥拉斯的时代更进步。希腊人的这个发现包括三个方面：实验，数学关系和美学。物理学只是在前面两个方面取得了巨大的进步。在本章中将要论述我们今天对毕达哥拉斯发现的认识。

在我们听到的声音中，有一种我们称之为噪声。噪声和鼓膜的一种不规则振动相对应，这个振动是由鼓膜附近的某个物体的不规则振动所引起的。如果我们画一个图来表示作用在鼓膜上的空气压力（及由此产生的鼓膜位移）对时间的函数关系，那么，和噪声相对应的曲线大致如图50-1（a）所示（该图所示的噪声大致相当于一个踏脚声）。音乐的声音具有不同的性质。音乐的特征是存在着或多或少持续音——或“律音”（当然，乐器同样会产生噪声）。这种乐音可以像按下钢琴琴键时那样，持续一个较短的时间，也可以像长笛演奏者吹奏一个长音调那样，几乎一直持续下去。

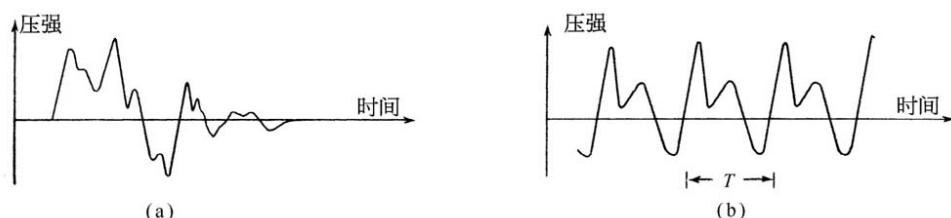


图50-1 压力与时间的关系

(a) 噪声； (b) 乐音

从空气压力的观点来看，律音的特征是什么？律音和噪声的差别在于它的图形具有周期性。空气压力随时间变化的曲线呈现出高低不平的形状，而且这个形状不断重复出现。图50-1 (b) 表示与一个乐音相对应的压力-时间函数。

通常音乐家是根据响度、音调和“音色”这三个特性来谈论乐音的。已经发现“响度”对应于压力变化的大小，“音调”对应于基本压力函数重复一次所需的时间（“低”音的周期比“高”音的周期长），乐音的“音色”与我们对两个相同响度和相同音调的律音之间仍能听得出其差别有关。双簧管、小提琴或女高音，即使当它们以同一音调发声时，我们仍能一一分辨出来。音色与重复的图样的结构有关。

现在我们来考虑由弦的振动所产生的声音。如果我们拨一下弦，先把它拉向一边，然后放开，其后的运动将由我们所产生的波的运动来决定。我们知道，这些波将向两个方向传播，并分别被两端反射。它们将来回运动很长一段时间。然而不管这个波有多么复杂，它总是重复自身。重复的周期恰好等于这个波传播整整两个弦长所需要的时间，因为这段时间正是任何一个波一经开始后被两端反射，回到出发点，再沿着原来的方向传播所需的时间。无论波在开始时向哪一个方向传播，其所需要的时间都是一样的。因此，弦上的各点经过一个周期后都将回到它原来的位置，再经过一个周期，又将回到它原来的位置，如此一直重复下去。它所产生的声波也必定同样地重复。这样我们就懂得了为什么拨一下弦会产生乐音。

§50-2 傅里叶级数

在前一章中，我们讨论了另一种考察振动系统运动的方法。我们知道弦有各种固有振动模式，而且对任何一种由起始条件所造成的特定振动，都可以看成是由一些同时振动的固有模式以适当的比例组合而成的。对弦来说，我们发现其振动的简正频率为 ω_0 ， $2\omega_0$ ， $3\omega_0$ ，…。所以，一根被拨动的弦，其最一般的运动是由频率为基频 ω_0 、二次谐频 $2\omega_0$ 、三次谐频 $3\omega_0$ 等等正弦振动组成的。基波模式每经过一个周期 T_1 重复一次， $T_1=2\pi/\omega_0$ 。二次谐波模式每经过一个周期 T_2 重复一次， $T_2=2\pi/(2\omega_0)$ 。当然它每经过 $T_1=2T_2$ ，即两个周期，也照样会重复。同样，三次谐波模式经过 T_1 的时间，即它的三个周期，也会重复一次。我们又一次看到了，为什么一根被拨动的弦，会按照周期 T_1 重复它的全部图样。它产生一个乐音。

我们一直都在谈论弦的运动。然而，声音是空气的运动，它是由弦的运动产生的。因此，空气的振动也一定是由同样的谐波组成的——不过我们不再考虑空气的简正模式。同时，各谐波在空气中的相对强度可以和在弦中的不同，特别是如果弦是通过共鸣板和空气耦合的。不同的谐波对空气耦合的效率不同。

如果我们用 $f(t)$ 表示一个乐音[如图50-1(b)所示]的空气压力与时间的函数关系，那么我们预期，可以把 $f(t)$ 写成若干个像 $\cos\omega t$ 这样的时间简谐函数之和——对每个谐频都有一个这样的函数。设振动周期为 T ，则基波角频率为 $\omega=2\pi/T$ ，谐波角频率为 2ω ， 3ω ，等等。

这里有一点略为复杂一些。也就是对所有的频率来说，我们预期各个频率的初相未必全都相同。因此，应该用像 $\cos(\omega t + \phi)$ 这样的

函数。然而，如果对于每一频率都以正弦和余弦两函数代替，就会比较简单。我们记得

$$\cos(\omega t + \phi) = (\cos\phi \cos\omega t - \sin\phi \sin\omega t) . \quad (50.1)$$

因为 ϕ 是常数。所以频率为 ω 的任何正弦振动，都能写作一个含 $\cos\omega t$ 的项与另一个含 $\sin\omega t$ 的项之和。

由此得出：周期为 T 的任何函数 $f(t)$ 都可写成下面的数学形式

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (50.2)$$

式中 $\omega = 2\pi/T$ ， a 和 b 等均为常数，它们表明各个分振动在振动 $f(t)$ 中所占的分量。我们在式中还加了“零频率”的项 a_0 ，因此我们的式子具有充分的普遍性，虽然乐音的 a_0 通常为零。这一项表示声压的平均值（也就是“零”级）的移动。有了它上式就能适用于任何情况。等式（50.2）概括地表示在图50-2中（谐函数的振幅 a_n 和 b_n 一定要适当地选择。图中画的只是大致情形，并没有规定任何特定的尺度）。级数式（50.2）称为 $f(t)$ 的傅里叶级数。

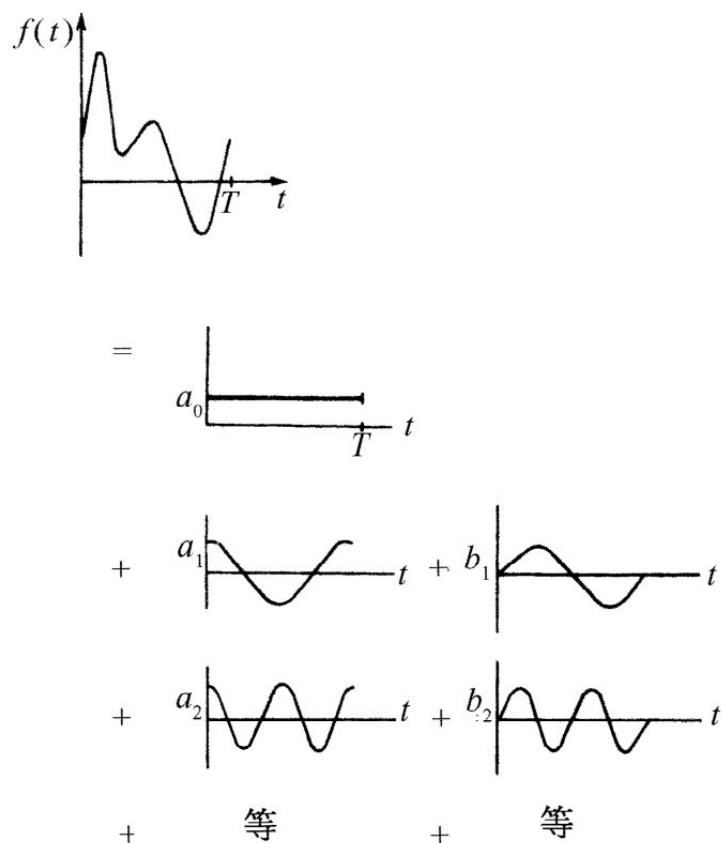


图50-2 任何周期函数 $f(t)$ 等于简谐函数之和

我们已经讲过，任何 周期函数都能这样组成。现在应把这句话更正为：任何声波或我们在物理学中通常遇到的任何函数，都能用这样的和组成。数学家能创造出不能由简谐函数组成的函数——例如一个具有“反扭”的函数，因此对于某些 t 值它有两个数值！这里，我们不必去为这类函数操心。

§50-3 音色与谐和

现在我们能够讲述是什么决定了乐音的“音色”了。这就是各种谐波的相对量—— a 和 b 之值。只含有基谐波的音是“纯音”。含有许多强谐波的音称为“重音”。小提琴和双簧管产生的谐波比例不同。

如果把几个“振荡器”与扩音器联接起来，就能“制造”出各种不同的乐音（一个振荡器通常产生近乎纯粹的简谐函数）。我们应选择那些频率为 ω ， 2ω ， 3ω ，...的振荡器。然后通过调节各个振荡器的音量控制，我们就能随意加进任何量的各谐波——由此产生不同音色的乐音。电风琴就是大致以这种方法工作的。“键”是选择基音振荡器的频率的，“音栓”是控制谐波相对比例的开关。按动这些开关就能使电风琴发出像长笛、双簧管或小提琴的声音。

有趣的是，产生这种“人造”乐音，对每一频率只需要一个振荡器——对正弦和余弦分量不必采用各自的振荡器。耳朵对于谐波的相对相位并不很敏感。它主要注意各频率的正弦和余弦部分的总体。我们的分析已经超过了解释对音乐的主观看法所需的精确性。然而，传声器或者其他物理仪器的响应确实取决于相位，处理这种情况时就需要我们这种完整的分析。

语音的“音色”也确定了我们在语言中辨认出的元音的声音。口腔的形状决定了口腔内空气固有振动模式的频率。由声带所发出的声波使其中的一些模式发生振动。这样就会使声音中某些谐波的振幅相对于其他的振幅有所增加。当我们改变口腔的形状时，又会有不同频率的谐波占优势。这些效应说明了“e-e-e”音和“a-a-a”音的区别。

我们都知道，无论是以高的还是低的音调来念（或唱）某个元音（例如“e-e-e”），“听起来”仍然“像”同一个元音。根据我们所描写的机制，可以认为在口腔中发“e-e-e”音时的形状会使某些特殊频率得到加强，而且这些频率不会随着我们音调的改变而改变。所以当我们改变音调时，重要的谐波与基波之间的关系——即“音色”——也随之而改变。显然，我们并不是凭着特定的谐波关系来辨别语言的。

现在我们应该怎样来评论毕达哥拉斯的发现呢？我们知道如果两根相似的弦的长度之比为2:3，则振动的基频之比为3:2。但是当它们一起发声时，为什么会听起来悦耳呢？或许我们应该从谐波的频率中寻找线索。那根短弦的二次谐波与长弦的三次谐波的频率相等（我们可以很容易证明或相信，一根被拨动的弦能产生一些很强的最低的谐波）。

也许我们应该作出如下的规定：当一些律音具有相同频率的谐波时，它们听起来是和谐的。当一些律音的较高次谐波的频率相近，但其差又足以产生快拍时，听起来就不那么和谐了。为什么拍音听起来不舒服而较高次谐波的同音却听起来悦耳？对这些我们还不知道怎样去解释或描述。我们不能根据这方面知识说什么声音好听或者气味应该好闻。换句话说，我们对这一问题的理解并不比它们是同音听起来就悦耳这一说法更全面。它不允许我们作出比音乐中的和谐性更多的推论。

我们可以很容易地利用钢琴作几个简单的实验来验证上述谐波关系。把靠近钢琴键盘中央的三个相继的C依次记作C、C'和C''，而把恰在其上方的G记作G、G'和G''。则它们的相对基频为

C-2

G-3

C'-4

G'-6

C''-8

G''-12

这些谐波关系可以用下列方法演示。假定我们缓慢地按下C'键——这样不会发出声音，但却能使消音器升起。然后使C发声，以便产生它本身的基谐波和一些二次谐波。C的二次谐波会使C'的弦振动。如果我们现在放开C键（C'键仍然按着），消音器就会使C弦停止振动，同时我们听到（隐约地）音调C'渐渐地消失。利用类似的方法，C的三次谐波能使G'弦振动。或者C的六次谐波（现在已经相当的弱了）能引起G''的基频振动。

如果不出声地按下G键，然后再使C'发声，得到的结果略有不同。C'的三次谐波和G的四次谐波相对应，因此只有 G的四次谐波被激发。如果我们靠近去听，就能听到G''的声音，它比我们按着的G音高出两个八度！我们可以很容易地想出许多种组合来玩这个游戏。

顺便提一下，我们可以用下述条件来确定大调音阶：大三和弦（F-A-C）、（C-E-G）和（G-B-D）各表示一系列频率比值为4:5:6的音。这些比值——加上一音阶（C-C'，B-B'等）的频率比值为1:2这个事实——决定了“理想”情况（或所谓“正确的音调”）的全部音阶。对于像钢琴等键盘乐器，一般都不按按照此法调音，而是有点“不老实”，以至于对于所有可能的起始音，其频率都近似于正确。这种调音方法称为“按平均律调音”，其做法是：把一音阶（频率之比仍是1:2）分为12个相等的音程，每个音程频率的比值是 $2^{1/12}$ 。五度音程频率的比值不再是 $3/2$ 而是 $2^{7/12}=1.499$ ，显然，对于多数人的耳朵，这两者是足够近的了。

我们已经叙述了用谐波的符合来表示谐和的规则。然而这个符合是否就是两个音调和谐的原因呢？有人已经断定，两个纯音——经过

精心调制而不带谐音的音——当它们的频率比值等于或者接近于预期的比值时，并不能给人以谐和或者不谐和的感觉（这种实验是很难进行的，因为很难产生纯音，在以后我们将会明白为什么）。我们至今仍不能确定，当我们判定某个声音好听时，我们的耳朵是在与谐波匹配还是在做算术？

§50-4 傅里叶系数

现在让我们回到这一概念，即任何律音——就是有周期性的声音——都能用谐波的适当组合来表示。我们想说明怎样才能求出每个谐波的需要量。如果我们已知所有的系数 a 和 b ，当然能很容易利用式（50.2）计算 $f(t)$ 。但现在的问题是，如果已知 $f(t)$ ，我们怎样才能求出各种谐波项的系数（按照食谱做蛋糕是容易的，但是如果给我们一个制好的蛋糕，我们能写出它的制法吗）？

傅里叶发现这个问题其实并不很难。 a_0 这一项当然是容易求得的。我们已经讲过，它就是 $f(t)$ 在一个周期内（从 $t=0$ 到 $t=T$ ）的平均值。我们很容易看出事实上确实如此。正弦和余弦函数在一个周期内的平均值为零。在两个、三个或者任何整数个周期内的平均值也为零。因此，除了 a_0 以外，式（50.2）右边各项的平均值全部为零（要记得，我们必须取 $\omega=2\pi/T$ ）。

由于和的平均值等于平均值的和，所以 $f(t)$ 的平均值就是 a_0 的平均值。然而 a_0 是常数，所以它的平均值就等于 a_0 。由平均值的定义，我们有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

其他系数的计算只是稍微难一些。我们可以用傅里叶发明的诀窍来求出它们。假若在式（50.2）的两边同时乘以某个谐波函数——例如 $\cos 7\omega t$ ，则有

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \cos 7\omega t &= a_0 \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \qquad \qquad \qquad + \dots \end{aligned}$$

现在 对上式两边求平均值。 $a_0 \cos 7\omega t$ 在时间 T 内的平均值与余弦在七个整周期内的平均值成比例。但是它正好是零。几乎 所有其他各项的平均值也都为零。我们来看一下 a_1 项。我们知道在一般情况下

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B). \quad (50.5)$$

a_1 项可写成

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

这样就有了两个余弦项，一项在时间 T 内有八个整周期，另一项有六个整周期。这两项的平均值均为零。 所以 a_1 项的平均值为零。

对 a_2 项，我们可以得到 $a_2 \cos 9\omega t$ 和 $a_2 \cos 5\omega t$ ，其中每一项的平均值也为零。对 a_9 项，我们可以得到 $\cos 16\omega t$ 和 $\cos(-2\omega t)$ 。但

$\cos(-2\omega t)$ 等于 $\cos 2\omega t$ ，所以这两项都以零为平均值。很清楚，除了 a_7 项之外，所有 a 项的平均值均为零。对 a_7 项有

$$\frac{1}{2}a_7(\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

零的余弦是1，它的平均值当然也是1。因此我们得到了这样的结果：即式(50.4)中所有的 a 项平均值为 $a_7/2$ 。

至于 b 项就更加容易了。当我们用任何一个余弦项，例如 $\cos n\omega t$ 去乘两边时，我们可以用同样的方法证明所有的 b 项其平均值均为零。

我们看到傅里叶的“诀窍”起着筛子的作用。当我们用 $\cos 7\omega t$ 去乘两边然后求平均值时，除了 a_7 项之外，所有其他各项都去掉了，并且得到

$$[f(t) \cdot \cos 7\omega t] \text{ 的平均值} = \frac{a_7}{2} \quad (50.8)$$

或

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt. \quad (50.9)$$

我们留给读者自己去证明，系数 b_7 可以通过将式(50.2)的两边同乘以 $\sin 7\omega t$ 后求平均值而求得。其结果是

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin 7\omega t dt. \quad (50.10)$$

我们预期对7是正确的，对一切整数也都正确。因此可以把我们的证明归纳为下面比较优美的数学公式。如果 m 和 n 都是不等于零的整数，而且 $\omega = 2\pi/T$ ，则

$$\text{I.} \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt = 0. \quad (50.11)$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \\ \text{III.} \quad & \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad (n \neq m). \\ T/2 \quad (n = m). \end{array} \right. \quad (50.12)$$

$$\text{IV.} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (50.13)$$

$$\text{V.} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt. \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt. \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt. \quad (50.16)$$

在前面几章中用指数符号来表示简谐运动是很方便的。我们用指数函数的实数部分 $\text{Re} e^{i\omega t}$ 来代替 $\cos \omega t$ 。在本章中我们已经应用了正弦和余弦函数，因为这样使证明也许较为清楚。然而式(50.13)的最终结果可以写成下面简洁的形式

$$f(t) = \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\omega t}, \quad (50.17)$$

式中 $\hat{a}_n$ 是复数 $a_n - ib_n$ （包括 $b_0=0$ ）。如果我们希望始终都用同样的符号，那么我们还可以写出

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

现在我们知道怎样把一个周期波“分解”成它的谐波分量。这个过程称为傅里叶分析，分解出来的各个独立项称为傅里叶分量。然而我们还没有证明，一旦找出所有的傅里叶分量，并把它们都加起来，的确就回复到 $f(t)$ 。数学家们已经证明，对于大多数类型的各种函数，也就是事实上对于物理学家感兴趣的所有函数，如果能够积分的话，就能回复到 $f(t)$ 。不过有一个小小的例外。如果函数 $f(t)$ 不连续，即 $f(t)$ 突然由一个值跳变到另一个值，那么傅里叶和就会在断点处得到一个介于高值与低值中间的值。因此，如果我们有一个奇异的函数 $f(t) = 0, 0 \leq t \leq t_0$ 及 $f(t) = 1, t_0 \leq t \leq T$ ，那么傅里叶和在各处的值都与原函数相同，但是 t_0 处除外，在该处傅里叶和是1/2而不是1。不管怎样，坚持说一个函数在直至趋近于 t_0 时应该是零，而在 t_0 时又应该是1，是很不符合物理学原则的。所以也许我们应该对物理学家作这样一个“规定”：任何不连续函数（这只能是真实的物理函数的一个简化）在不连续点的值应该定义为两个不连续值的中间值。这样任何这类函数——具有任何有限数目的这类跳变的函数——和所有其他物理上感兴趣的函数一样，都可以由傅里叶和正确地表示出来。

我们建议读者做一个练习，确定图50-3所示函数的傅里叶级数。因为这一函数无法用一个明显的代数形式来表示，因此不能照通常的方法从零到 T 范围进行积分。然而如果把积分分成两个部分：一部分从零到 $T/2$ （在这个范围中 $f(t) = 1$ ），另一部分从 $T/2$ 到 T （在这个范围中 $f(t) = -1$ ），那么积分就容易求了。其结果是

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \cdots \right), \quad (50.19)$$

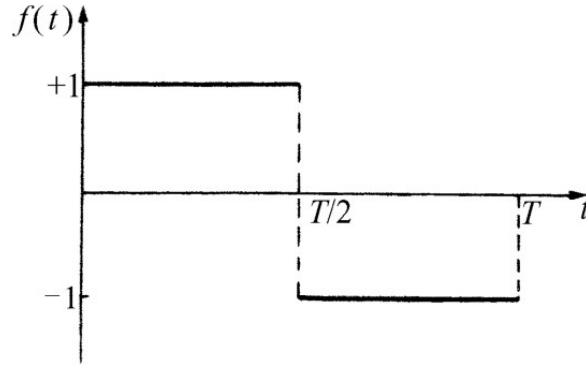


图50-3 方波函数

$$f(t) = +1 \quad (0 < t < T/2), \quad f(t) = -1 \quad (T/2 < t < T)$$

式中 $\omega = 2\pi/T$ 。于是我们发现这个具有特殊相位的方波只含有奇次谐波，而且它们的振幅和频率成反比。

现在我们来检验式(50.19)是否会回复到某个 t 值的 $f(t)$ 。我们选择 $t = T/4$ ，即 $\omega = \pi/2$ ，有

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \cdots \right) \quad (50.20)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right). \quad (50.21)$$

这个级数^[1]的值是 $\pi/4$ ，从而我们得到 $f(t) = 1$ 。

§50-5 能量定理

波中的能量与其振幅的平方成正比。对于一个形状复杂的波，在一个周期内的能量与 $\int_0^T f^2(t) dt$ 成正比。我们也可以把这个能量与傅里叶系数联系起来

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt. \quad (50.22)$$

当我们展开括号内各项的平方时，就会得到所有可能的交叉项，如 $a_5 \cos 5\omega t \cdot b_7 \sin 7\omega t$ 。但是，上面 [式 (50.11) 和 (50.12)] 我们已经证明，所有这些项在一个周期内的积分都为零，所以只剩下了像 $a_5^2 \cos^2 5\omega t$ 这种平方项。任何余弦平方或正弦平方在一个周期内的积分都等于 $T/2$ ，所以我们得到

$$\int_0^T f^2(t) dt = Ta_0^2 + \frac{T}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + b_1^2 + b_2^2 + \cdots) = Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (50.23)$$

我们把这个式子称为“能量定理”，它表明波中的总能量正好等于它的全部傅里叶分量的能量之和。例如，把这个定理应用到级数式 (50.19) 中，因为 $[f(t)]^2 = 1$ ，所以得到

$$T = \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \cdots \right).$$

由此我们知道奇数倒数的平方和等于 $\pi^2/8$ 。同样，采用首先得到一个函数 $f(t) = (t - T/2)^2$ 的傅里叶级数，再应用能量定理的方法，我们可以证明 $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots$ 等于 $\pi^4/90$ ，这一结论我们在第45章中曾经用到过。

§50-6 非线性响应

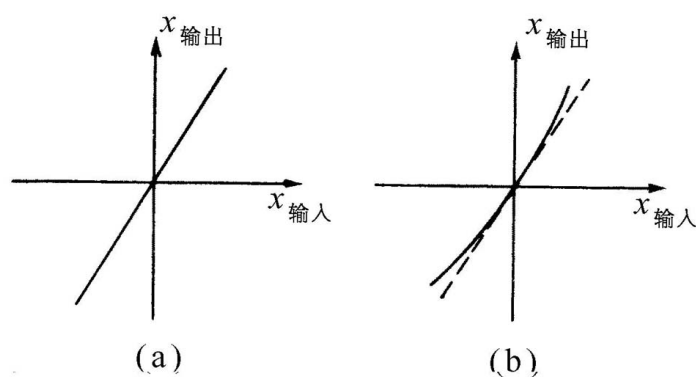
非线性效应是谐波理论中的一个重要现象。由于它在实践方面的重要作用，最后还得讲一讲。至今我们都是假定所讨论的系统是线性的，也就是假定力的响应，例如位移或加速度始终正比于力，或者假定电路中的电流正比于电压，等等。现在我们要讨论的是不存在严格成比例的情况。设想有一个装置，它的响应（我们称为 t 时刻的输出 $x_{\text{输出}}$ ）由 t 时刻的输入 $x_{\text{输入}}$ 来决定。例如，当 $x_{\text{输入}}$ 为力时， $x_{\text{输出}}$ 就是位移。或者当 $x_{\text{输入}}$ 为电流时， $x_{\text{输出}}$ 就是电压。如果该装置是线性的，则

$$x_{\text{输出}}(t) = Kx_{\text{输入}}(t), \quad (50.24)$$

式中 K 是常数，与 t 和 $x_{\text{输入}}$ 无关。但是，如果该装置并不是严格线性的，而只是近似于线性，那么可写成

$$x_{\text{输出}}(t) = K[x_{\text{输入}}(t) + \epsilon x_{\text{输入}}^2(t)], \quad (50.25)$$

式中 ϵ 与1相比是个小量。上述线性和非线性响应如图50-4所示。



$$x_{\text{输出}} = K x_{\text{输入}}$$

$$x_{\text{输出}} = K(x_{\text{输入}} + \epsilon x_{\text{输入}}^2)$$

图50-4 线性和非线性响应

非线性响应在实用上有几个重要的结果。现在来讨论其中的一部分。首先考虑当一个纯音输入时会发生什么现象。令 $x_{\text{输入}} = \cos \omega t$ 。若画出 $x_{\text{输出}}$ 与时间的函数曲线，则得到如图50-5所示的实线。图中的虚线表示线性系统的响应，以供比较。可以看到这个输出不再是余弦函数。这条曲线的顶部较为尖锐，底部则较为平坦。我们说这个输出畸变了。然而，我们知道这种波不再是一个纯音，它具有谐波。我们能够求出这些谐波是什么。把 $x_{\text{输入}} = \cos \omega t$ 代入式 (50.25)，得

$$x_{\text{输出}} = K (\cos \omega t + \epsilon \cos^2 \omega t) . \quad (50.26)$$

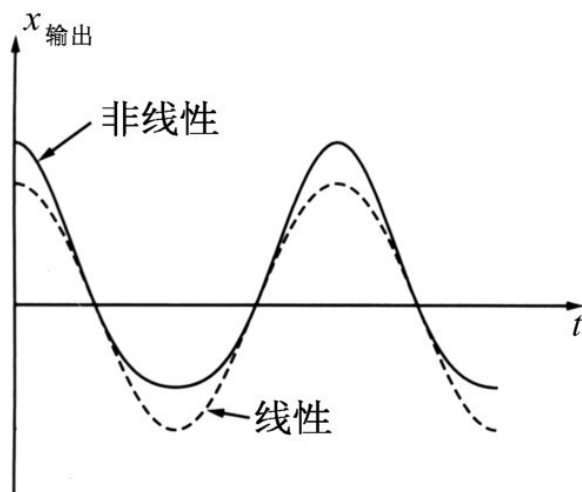


图50-5 一个非线性装置对输入 $\cos \omega t$ 的响应，图中虚线表示线性响应，以供比较

由等式 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ 得

$$x_{\text{输出}} = K \left(\cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (50.27)$$

这一输出不仅有一个基频的分量，即输入中出现的频率，而且还包含它的二次谐波。此外，还有一个常数项 $K (\varepsilon/2)$ ，它与图50-5所示的平均值的移动相符。产生平均值移动的过程叫做整流。

非线性响应能整流并且产生输入频率的谐波。虽然我们所假设的非线性只产生二次谐波，但是，高次非线性——即具有如 $x_{\text{输入}}^3$ 和 $x_{\text{输入}}^4$ 的项——会产生比二次谐波更高的谐波。

由非线性响应引起的另一个效应是调制。如果我们的输入函数包含两个（或更多个）纯音，那么输出将不仅包含它们的谐波，而且还包含其他频率的分量。令 $x_{\text{输入}} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$ ，其中 ω_1 和 ω_2 不成谐波关系。除去线性项（即 K 乘输入项）外，输出中还有下面的分量

$$x_{\text{输出}} = K\varepsilon (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t) \quad (50.28)$$

$$= K\varepsilon (A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \quad (50.29)$$

式(50.29)括号中的前两项恰好能化成我们在前面已经得到的常数项和二次谐波项。但括号中的最后一项则是新的。

我们可以用两种方法来考察这个新的“交叉项” $AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$ 。首先如果这两个频率相差很大(例如, ω_1 远大于 ω_2)，我们可以认为这个交叉项代表一个变振幅的余弦振动。这就是说我们可以这样来看待这个因式

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

其中

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

我们说 $\cos \omega_1 t$ 的振幅受到频率 ω_2 的调制。

另一种方法是，把交叉项写成下面的形式

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (50.32)$$

现在我们可以说产生了两个新的分量，其中一个分量的频率为和频($\omega_1 + \omega_2$)，另一个分量的频率为差频($\omega_1 - \omega_2$)。

我们有两种不同的但是等价的方法来观察同一结果。在 $\omega_1 \gg \omega_2$ 的特殊情况下，可以把这两种不同观点这样联系起来：因为 $(\omega_1 + \omega_2)$ 与 $(\omega_1 - \omega_2)$ 非常接近，我们预期在它们中间会观察到拍。但这些拍的效果就是以差额 $2\omega_2$ 的二分之一对平均频率 ω_1 的振幅进行调制。由此可见，这两种描述是等价的。

归纳起来，我们知道非线性响应会产生这样一些效应：整流，产生谐波，以及调制或产生和频与差频分量。

我们应该注意到所有这些效应（式50.29）不仅正比于非线性系数 ε ，而且还正比于两个振幅之乘积—— A^2 、 B^2 或 AB 。因此可以预期这些效应对于强信号来说比对弱信号更为重要。

我们所描述的这些效应有许多实际应用。首先，相信耳朵对于声音是非线性的。即相信这可以说明下面的事实，对于强音，即使声波中仅包含纯音，我们却有着既听到它们的谐音，还听到它们的和频和差频的感觉。

用于放声设备——放大器、扩音器等的组件总具有一些非线性。它们会使声音畸变——产生在原来的声音中不存在的谐波等等。当我们的耳朵听到这些新的分量时就会感到不愉快。正因为如此，所以要把“高保真度”的设备设计得尽量线性（为什么我们对于耳朵的非线性并不同样地感到不愉快？或者我们怎么会知道非线性是来自扩音器中而不是来自耳朵中？这些至今还不清楚）。

非线性是非常必需的。事实上，在无线电发射和无线电接收设备的某些部分，我们有意使它们具有很大的非线性。在调幅发射器中，

“声音”信号（频率为每秒若干千周）和“载波”信号（频率为每秒若干兆周）在一个叫做调制器的非线性电路中结合起来产生调制的振荡，被发射出去。在接收器中，接收信号的各分量被馈送到一个非线性电路中，该电路把调制载波的差频与和频结合起来，重新产生声音信号。

在讨论光的传送时，我们假设电荷的感应振荡正比于光的电场——即线性响应。这确实是一个很好的近似。只是在最近几年，人们设计出能产生足够强度的光的光源（激光器）后，才能观察到光的非线性效应。产生光频谐波现已成为可能。当一束强的红光通过一块玻璃时，微弱的蓝光——红光的二次谐波——出现了。

[1] 这个级数可以用下述方法进行计算。首先我们注意到 $\int_0^x [dx/(1+x^2)] = \tan^{-1} x$ 。然后把被积函数展开为级数 $1/(1+x^2) = 1-x^2+x^4-x^6+\dots$ 。对这个级数逐项积分（从0到x）得 $\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$ 。取 $x=1$ ，鉴于 $\tan^{-1} 1 = \pi/4$ ，我们就得到了上述结果。

第51章 波

§51-1 舷波

虽然我们已经完成了关于波的定量分析，但是为了对与波有关的种种现象作一些定性的介绍，我们增添了这一章。由于这些现象太复杂，在这里不能作详细的分析。既然我们已经用了好几章篇幅来讨论波，这一章的标题应该叫做“与波有关的一些较为复杂的现象”才更为恰当。

我们所讨论的第一个题目，是关于波源比波速或相速度运动得更快时所产生的效应。我们首先考虑具有一定速度的波，如声波和光波。如果有一个声源比声速运动得快，那么就会发生如下的情况：假定在某一瞬间，位于图51-1中 x_1 处的声源发出一个声波，则在下一瞬间，当源移动到 x_2 时，原先发出的波从 x_1 扩展到以 r_1 为半径的圆上和 r_1 小于源运动的距离；当然，另一个波又从 x_2 开始向外传播。当声源继续向前运动到 x_3 时，又从那里发出声波，而现在从 x_2 发出的声波则扩展到以 r_2 为半径的圆上，从 x_1 发出的声波扩展到以 r_3 为半径的圆上。当然，这一系列事情是连续发生的，而不是一步一步来的。因此，我们有一连串的波圆，其公切线通过该时刻声源的中心。我们看到，声源不是像静止时那样产生球面波前，此时它所产生的波前在三维空间中形成一个圆锥面，在二维空间中形成两条相交的直线。很容易算出此圆锥面的角度。例如，在一定的时间间隔内，源移

动了一段距离，比如说 $x_3 - x_1$ ，此距离与源的速度 v 成正比。在此期间，波前已向外扩展了距离 r_3 ，它与波的速率 c_w 成正比。因此，很清楚，所张半顶角的正弦等于波的速率除以源的速率。此正弦只有当 c_w 小于 v ，即物体（源）的速率比波的速率快时，才有解

$$\sin \theta = \frac{c_w}{v}. \quad (51.1)$$

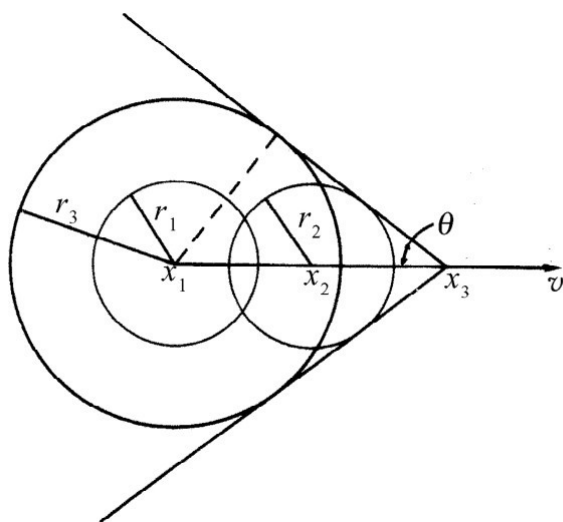


图51-1 冲击波的波前位于以源为顶点、半顶角 $\theta = \sin^{-1} (c_w / v)$ 的锥面上

顺便提一下，虽然我们认为要发声就必须有一个声源，但非常有趣的是，在介质中一旦物体运动得比声速快，就会发出声音。也就是说，声音不一定具有某种纯音的振动特征。任何一个穿过介质而运动的物体，当它的速率大于波在介质中传播的速率时，将自动地从运动本身向各个方向发出波。这一现象对声音来讲很简单，但是对光来说也会发生这种现象。最初人们认为或许没有什么东西能够运动得比光速更快。然而，在玻璃内光的相速度比真空中的光速小，而且我们有可能发射一个具有很高能量的带电粒子，使它以接近于真空中光速的

速率通过一块玻璃，而光在玻璃中的速率仅为真空中光速的 $\frac{2}{3}$ 。正在运动的比媒质中的光速快的粒子，将产生一个以源为顶点的锥形光波，就像汽艇前进时所形成的尾波（事实上，它来自同样的效应）。通过锥角的测量，我们能够确定粒子的速率。这种用来确定粒子速率的技术，在高能研究中已作为一种测定粒子能量的方法。所有要测量的只是光的方向。

这种光有时被称为切连科夫辐射，因为它是首先由切连科夫观测到的。弗兰克和塔姆在理论上分析过这种光应有的强度。由于这项工作，这三人一起获得了1958年度的诺贝尔物理学奖。

对声音来说，相应的情况如图51-2所示，该图是一张超音速物体穿过气体时的照片。压强的变化引起了折射率的变化，利用适当的光学系统就能使这种波的边缘显现出来。我们看到超音速物体确实产生了一个锥形波。但是更加仔细地观察却发现表面实际上是弯曲的。它逐渐趋近于直线，但在靠近顶点的地方是弯曲的。现在我们必须讨论为何会有这种现象，这也就是本章要讨论的第二个题目。

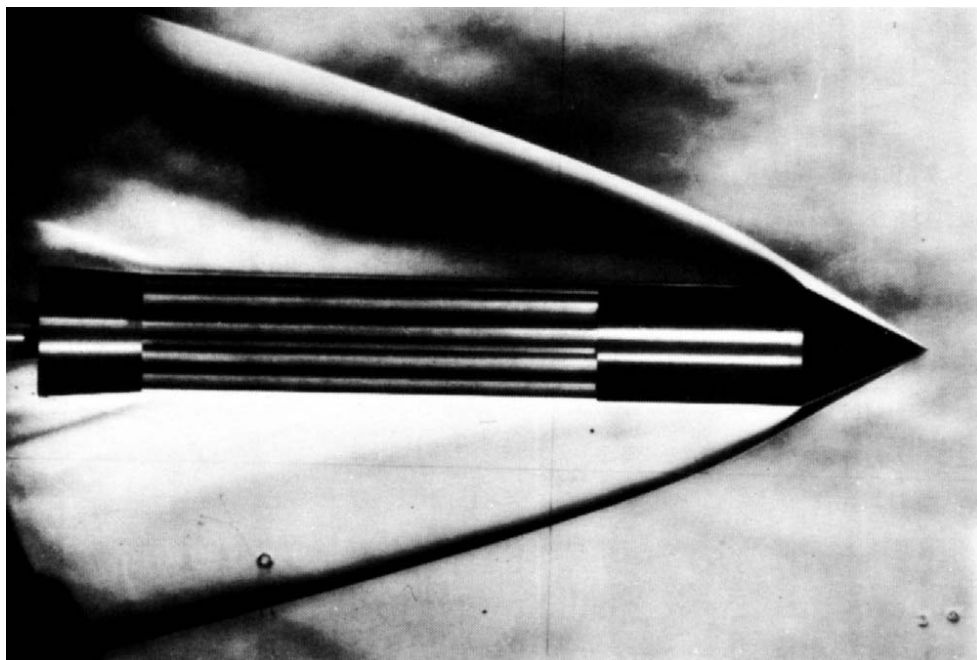


图51-2 超音速抛射体在气体中所产生的冲击波

§51-2 冲击波

波速常常与振幅有关。对声音来说，速率与振幅的关系如下。一个穿过空气运动的物体，必须把空气推开，所以在这种情况下，所产生的扰动是某种压力阶跃，波前后面空气的压强比波（以正常速率传播）还没有到达的未受扰动的区域内空气的压强大。但在波前通过后，留下的空气已被绝热地压缩，因此它的温度升高。由于声音的速率随着温度的增加而增加，所以在跳变后面区域内的速率比在前面空气中的速率大。这意味着在阶跃后面产生的任何其他扰动，例如由于物体不断地推压空气所产生的扰动，等等，将传播得比前面的快，而声速则随着压强的增大而增大。图51-3说明了这一情形，图中在压强线上加上一些小的凸起部分，以帮助我们想象这一情况。我们看到随着时间的过去，后面压力较高的区域追上前面压力较高的区域，直到最后压缩波产生一个陡峭的波前为止。如果强度非常大，就立即形成

陡峭的波前；如果强度相当弱，则需要很长的一段时间，事实上很可能在陡峭的波前形成以前声波已经散开和消失了。

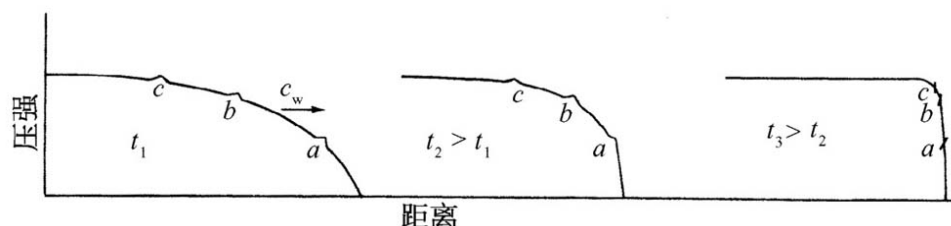


图 51-3 在相继的几个瞬间及时拍下的波前的“快照”

我们说话的声音所形成的压强，与大气压强相比是非常弱的——仅为百万分之一左右。但是当压强改变达一个大气压的数量级时，波的速度大约增加百分之二十，波前以相应的高速率变陡。在自然界中大概任何事件都不会以无限大的速率发生。同时，我们所谓的“陡峭”的波前实际上具有一个非常薄的厚度，而不是无限陡峭的。波前变化的距离约为一个平均自由程，在这个距离内，波动方程的理论开始不适用，因为我们并没有考虑气体的结构。

现在，再参看图51-2，如果我们知道了靠近顶点的压强比后面离顶点较远处的压强大，从而角 θ 较大，我们就能理解弯曲的原因。这就是说，弯曲是由于声速与波的强度有关所造成的。因此，原子弹刚爆炸时形成的波的传播速度比声波快得多，直到波传播到很远时，由于扩展而变弱，直到其压强的变化小于大气压强时为止。这时它的速率接近于空气中的声速（附带提一下，结果冲击波的速率总是比在前面的气体中的声速高，但比后面的气体中的声速低。这就是说，从后面来的脉冲将会到达波前，但是波前在媒质中行进的速率比信号的正常速率来得大，因此，一个人如果根据听到的声音来判断冲击波的到来已经太迟了。原子弹爆炸时所产生的光是最先到达的，但是由于没

有声音信号走在冲击波的前面，因此在冲击波到达之前我们不可能知道它的光临）。

这种波的堆积是一种非常有趣的现象，其所依据的主要之点是：在一个波出现之后，合成波的速率应该更高。下面是同一现象的另一个例子。试考察长度和宽度一定的长水槽中的流水。如果有一个活塞或者一个横在水槽中的屏状物以足够快的速度沿着水槽运动，则水就像雪犁前面的雪一样地堆积起来。现在假定情况如图51-4所示，在水槽内某处水的高度有一个突变。可以证明，水槽中的长波在深水区比在浅水区中传播得快。因此，由运动的活塞所造成的任何新的能量的起伏和不匀都将向前移动，并在前面堆积起来。另一方面，从理论上来说，我们最终得到的就是一个具有陡峭波前的水流。然而如图51-4所示，其中还有一些复杂的情况。照片上所拍摄的是一个冲过来的波，活塞在水槽的右方远处。起先正如我们所预料的那样，它看起来可能像是一个正常的波，但当它沿着水槽越走越远时，波就变得越来越陡，直到出现照片上的状态为止。当一部分水下落时，在水面上产生可怕的翻腾，但是实质上它是一个很陡的前沿，并不搅动前面的水。



图 51-4

实际上水比声音复杂得多。然而，正是为了阐明一个论点，我们将设法分析这种所谓“激浪”在水槽中的速率。这个论点对我们的目的来讲没有任何基本的重要性——它不是一个重要的结论——仅仅说明，利用我们已知的力学规律就能够解释这个现象。

想象现在有一高度为 h_2 的水以速度 v 运动，而它的波前以速度 u 进入高度为 h_1 的平稳的水中，如图51-5（a）所示。我们希望确定波前运动的速率。在时间 Δt 内，原先位于 x_1 的垂直平面，移动了距离 $v \Delta t$ 而到达 x_2 ，同时波前运动了 $u \Delta t$ 。

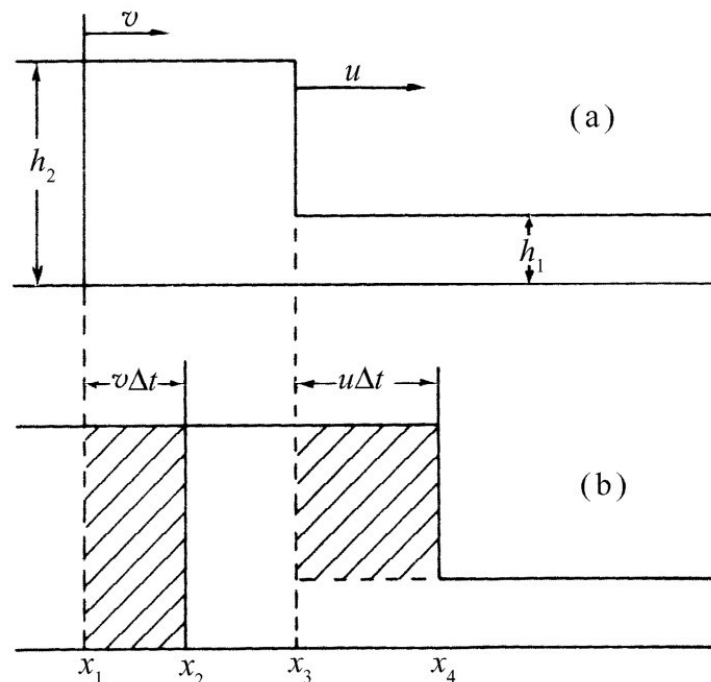


图51-5 水槽中一个激浪的两个横截面，其中（b）比（a）迟 Δt 时间

现在我们应用物质不灭和动量守恒的方程。首先应用物质不灭公式。我们知道：对于单位宽度的水槽，流过 x_1 处的物质数量 $h_2 v \Delta t$ （图中斜线部分），可用另一个其数量为 $(h_2 - h_1) u \Delta t$ 的斜线部分来补偿。因此，用 Δt 去除两者，得 $vh_2 = u(h_2 - h_1)$ 。但这还不够，因为我们虽然知道了 h_2 和 h_1 ，但还不知道 u 或 v ，我们要设法求出它们。

下一步是应用动量守恒。虽然我们还没有讨论过水的压强或在流体力学中的任何其他问题，但是无论如何，我们清楚地知道，在一定深度处水的压强恰好能支持它上面的水柱。因此，水的压强等于水的密度 ρ 乘 g ，再乘水面到该处的深度。既然压力随着深度而线性地增加，那么在 x_1 处的平面上的平均压强即 $\rho gh_2/2$ ，这也是把该平面推向 x_2 处时，作用在单位宽度和单位高度上的平均力。因此，我们再乘上

h_2 就得到从左面作用到水上的总的力。另一方面，水的右边也存在着压力，使该区受到一个相反的力。用上面同样的分析方法得到这个力为 $\rho g h_1^2 / 2$ 。现在我们必须使力和动量的变化率保持平衡。因而我们必须算出图51-5（b）情况中的动量比图51-5（a）的动量多了多少？我们看到具有速率 v 的物质所增加的质量恰好为 $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t$ （每单位宽度），用 v 去乘就得到所增加的动量，它应等于冲量 $F \Delta t$

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t) v = \left(\frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \right) \Delta t.$$

如果将已经得出的 $vh_2 = u(h_2 - h_1)$ 一式代入上式以消去 v ，并加以简化，最后就得到 $u^2 = gh_2(h_1 + h_2) / (2h_1)$ 。

假如高度差别很小，以致 h_1 和 h_2 近似相等，则速度等于 $\sqrt{gh}$ 。我们以后将会看到，只有在波长大于水槽深度时这个结果才是正确的。

对于声波我们也可以作类似的处理——包括内能守恒，但熵不守恒，因为冲击波是不可逆的。事实上，如果在激浪问题中检验能量守恒的话，我们发现能量是不守恒的。如果高度差别不大，能量几乎完全守恒。但是当高度差别一旦变得很明显，就有净的能量损失。如图51-4所示，水的下落和翻腾就显示了这一点。

在冲击波的情况下，从绝热反应的观点来看，存在着相应的表观能量损失。在冲击波经过后，其后面的声波中的能量转化为气体的热能，这相应于激浪中水的翻腾。对于声波来讲，解这个问题需要有三

个方程，而且正如我们已经看到的那样，冲击波后面的温度和它前面的温度是不相同的。

如果我们设法形成一个上下颠倒的激浪（ $h_2 < h_1$ ），那么我们发现每秒钟损失的能量是负的。因为它不能从任何地方得到能量，所以激浪不能维持自己，它是不稳定的。即使我们引起了这种类型的波，它也会变平而消失，因为对于我们所讨论的这种情况，导致波前陡峭的速度对高度的依赖关系有着相反的影响。

§51-3 固体中的波

我们接下去要讨论的一类波是固体中的更为复杂的波。我们已经讨论过气体和液体中的声波，在固体中存在一种与声波完全类似的波。如果突然推动一下固体，它就会被压缩。固体抵抗压缩就产生类似于声音的波。然而在固体中还可能存在另一类波，这类波在流体中是不可能存在的。如果从侧向推压固体使之畸变（称为剪切变），那么固体将力图把自己拉回来。如果我们（由内部）使液体畸变，维持一会儿，使它稳定下来，然后放开，则液体将保持这个样子。但是如果拿一块固体并推它，就像使一块“果胶”发生剪切变一样，那么当我们放开它时，它将恢复原来的样子并产生剪切波。从定义上来说，固体和液体的区别就在于此。剪切波的传播方式和压缩波相同。在所有的情况下，剪切波的速率小于纵波的速率。就它们的偏振而言，剪切波更类似于光波。声波没有偏振，它只是一种压力波。而光波则具有一个垂直于传播方向的特征取向。

在固体中有两类波。第一类为类似于声波的压力波，它以某一速率行进。如果固体是非晶状的，那么沿任何方向偏振的剪切波将以一个特征速率传播（当然所有固体都是晶状的，但是如果我们用一块由各种取向的微晶构成的固体，则晶体的各向异性最终得到了平衡）。

下面是另一个与声波相关的有趣的问题。如果固体中的波长变得较短，而且越来越短，那么将会发生什么现象？波长最终能达到多短？有趣的是它不能短于原子之间的空间距离，因为假如有一个波，其中的一个点上升，相邻的一个点下降，等等，显然可能存在的最短的波长就等于原子间距。从振动模式来看，我们说有纵向模式，横向模式，长波模式和短波模式。当我们考虑的波长能与原子间距相比拟时，速率不再是常数，在速度与波数有关的地方就有色散效应。但是，最终横波的最高模式将是各相邻原子有相反的运动方向。

现在从原子的观点来看，情况就像我们讨论过的两个单摆。对此存在两种模式，一种是两个摆一起运动，另一种是它们反向运动。我们可以采用另一种方法来分析固体波，即用耦合谐振系统的方法来分析，该系统是由大量单摆组成的，它的最高模式是这些单摆每相邻两个的振动方向相反，而较低的模式则具有不同的相位差。

由于最短的波长是如此之短，以至于在技术上通常无法利用。但是，它们是非常令人感兴趣的，因为在固体的热力学理论中，固体的热学性质，例如比热，可以根据短声波的性质来分析。当我们进一步研究波长更短的短声波极限时，必须归结为原子的个别运动，这两件事最终是一样的。

固体中的声波——纵波和横波的一个很有趣的例子是在固态地球里的波。我们不知道这些噪声的来源，但是在地球内部不时发生地震

——某些岩石滑过另外一些岩石，这很像小的噪声。所以从这种源发出像声波那样的波，其波长比我们通常所考虑的声波的波长要长得多，但是仍然是声波，它们在地球里到处传播。然而地球是不均匀的，而且压强、密度及压缩性等等性质随着深度而变化，因此速率也随着深度而改变。于是波就不沿直线行进——这里存在着一种折射率，它们沿着曲线行进。纵波和横波具有不同的速率，所以对于不同的速率就有不同的解。因此，如果我们在某个地方放置一个地震仪，并且在别的地方发生地震后注意观察仪器指针的跳动，那么我们不仅仅得到一个不规则的跳动。我们也许先得到一阵跳动，接着平静下来，然后又是另一阵跳动，所发生的情况取决于地震仪的位置。如果地震仪和震源靠得足够近，我们将先收到从扰动处传来的纵波，然后过一会儿，又收到横波，因为横波行进得较慢。如果我们对波的传播速率以及地球内部有关区域的成分有足够的了解，则通过测量收到这两个波的时间差，就能断定地震发生在多远的地方。

图51-6所示为在地球内部波的行为的一个例子。两种类型的波由不同的符号表示。如果在图上标为“源”的地方发生一个地震，横波和纵波将在不同时刻，经由最直接的路径到达地震台，同时也可能在不连续处发生反射，结果经过另外的不同路径在不同时间到达地震台。原来在地球内部存在一个核心，该核心不能传播横波。如果地震台在源的正对面，横波仍能到达，但是计时不正确。所发生的情况是横波到达核心处，并且每当横波到达两种介质之间的斜面上时，就会产生两个新的波，一个横波和一个纵波。但是在地球核心内部，横波不能传播（或至少没有证据表明它能传播，只有对纵波才有证据）。当波再度跑出核心时，又以纵波和横波这两种形式向地震台行进。

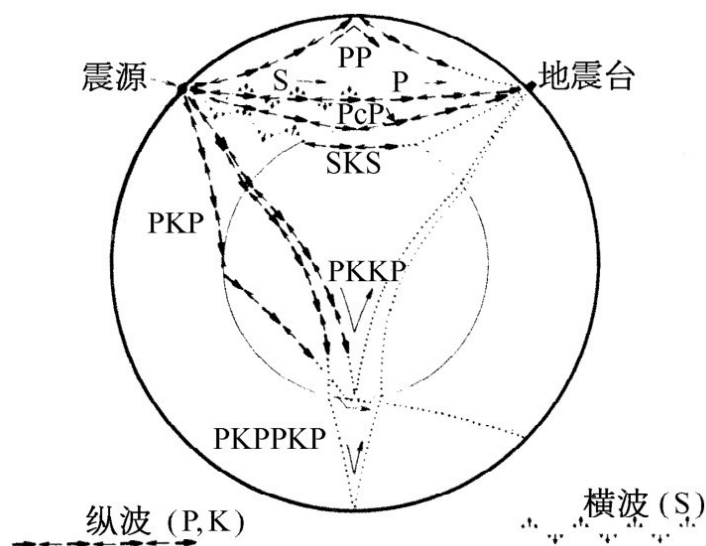


图51-6 地球的示意图，表示纵声波和横声波的路径

我们正是从这些地震波的行为断定横波不能在内核圆的里面传播。从不能传播横波这个意义上来说，这意味着地球的中心是液体。我们了解地球内部构造的唯一方法，就是研究地震。所以，利用在不同的地震站台对多次地震所作的大量观察，就可以知道地球内部的详细情况——速率、曲线等等。知道了不同类型的波在每一深度处的速率，我们就有可能计算出地球的简正模式。因为知道了声波的传播速率，也就知道了两种波在每一深度的弹性性质。假如使地球形变成一个椭球，再放开，只要把在椭球中到处传播的波叠加起来就能确定其自由模式的周期和形状。我们已经断定，如果有一个扰动，就会产生许多模式——从最低的椭球模式到结构比较复杂的较高的模式。

1960年5月发生在智利的地震产生了足够强的“噪声”，这个信号在地球内绕行了多次，同时一个非常精密的新的地震仪刚好制成，它及时地测出了地球基谐模式的频率，我们将这些数值与用声波理论从已知的速度计算出的理论值进行了比较，这些速度是从与该地震无关的其他地震中测得的。实验的结果如图51-7所示，这是信号强度与其振

动频率的关系曲线（傅里叶分析）。注意，在某些特殊频率所接收到的信号比在其他频率所接收到的信号强得多，即存在着非常确定的极大值。这些频率就是地球的固有频率，因为它们是地球能够振动的主要频率。换句话说，如果地球的总体运动是由许多不同的模式组成，那么可以预期，对于每个地震台，都能得到表示许多频率叠加的不规则跳动。如果我们按照频率来进行分析，应该能够找到地球的特征频率。图中的垂直黑线是计算出来的频率值，我们发现理论值与实验值非常一致，这种一致性是由于这样的事实，即对于地球内部来讲声学理论是正确的。

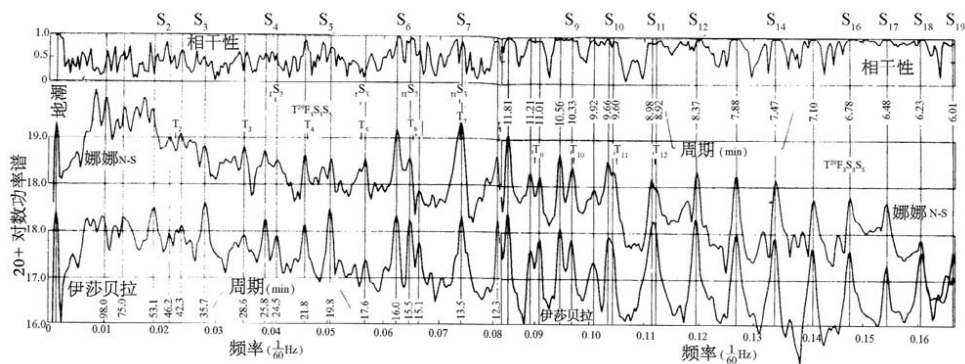


图51-7 在秘鲁的娜娜（ $\tilde{N}a\tilde{n}a$ ）和加利福尼亚的伊莎贝拉（Isabella）的地震仪上所探测到的功率与频率的函数关系。图中所示的相干性可作为这两个地震台之间的耦合程度的量度

图51-8表示一个非常细致的测量，它对最低模式（地球椭球模式）有较好的分辨能力。它揭示了令人非常惊奇的一点，这就是极大值不是单一的，而是双重的，一个极大值在周期54.7 min处，另一个极大值在周期53.1 min处，两者略有差异。所以存在两个不同频率的原因，我们在测量的时候并不知道，虽然在当时或许能够找到其原因。现在至少有两种可能的解释：一种是在地球的分布中可能存在着不对称性，结果导致两个相似的模式。另一种可能更令人感兴趣，这就是

设想从源发出的波沿两个方向绕地球传播。由于运动方程中存在地球的自转效应，它们的速率将不相等，而这种效应在进行上述分析时并没有考虑进去。在转动体系中物体的运动因科里奥利力而受到修正，这些因素可能引起所观察值的分裂。

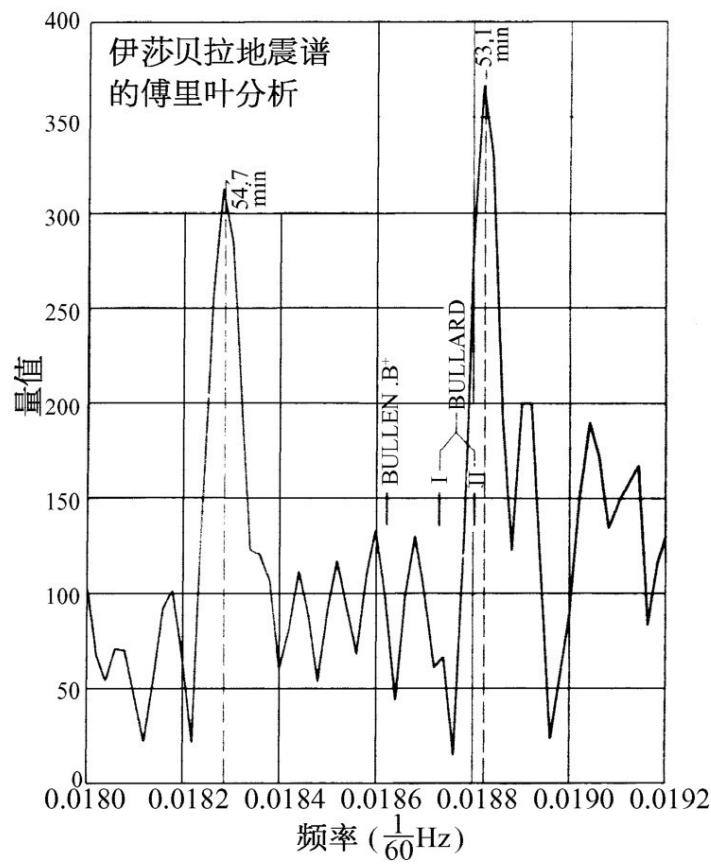


图51-8 某一地震仪记录的高分辨分析，其中显示出双重谱线

关于用来分析这些地震的方法，在地震仪上得到的曲线并不是振幅对频率的函数曲线，而是位移对时间的函数曲线，所以总是一条非常不规则的示踪曲线。为了找出所有不同频率所对应的不同正弦波各占多少，其窍门是用某个确定频率的正弦波去乘这些数据，再进行积分，也就是对其求平均，在求平均的过程中，所有其他频率都消失

了。我们所引用的这些图就是将数据乘以每分钟不同周数的正弦波后进行积分所得出的积分图。

§51-4 表面波

下一个令人感兴趣的波是水波，每个人都很容易看到这种波，而且在基本教程中常常用它来作为波的例子。我们立即就会知道，这可能是最糟糕的例子，因为它们没有一个方面像声波或光波；它们具有波所具有的全部复杂性。我们从深水中的长水波开始讲起。如果我们认为海洋是无限深的，并且在海面上有一个扰动，那么就会产生波。各种各样的无规则运动都会出现，但是由非常轻微的扰动所形成的正弦型运动，可能看上去很像普通向岸边移动的平滑的海浪。当然具有这种波的水平均地讲，仍是不流动的，而是波的移动。这是一种什么运动？是横波还是纵波？它应当都不是，既不是横波，也不是纵波。虽然在某个给定位置处水交替地成为波谷和波峰，但由于水的守恒，它不可能只是简单地上下运动。也就是说，如果水向下降落，那么水将跑到哪里去呢？水基本上是不可压缩的。波的压缩速率，即水中声波的压缩速率是非常非常高的，我们现在不去考虑它。因为在目前的这种尺度上，水是不可压缩的，所以当波峰下降时，水必然离开原来的区域。实际发生的情况是靠近表面的水的粒子近似地作圆周运动。当平滑的海浪移过来时，漂浮着的救生圈里的人可以注视近旁的物体，并且看到它是在作圆周运动。因此水波是纵波和横波的混合物，比一般的波更为复杂。在水中越深的地方，所作的圆周运动的圆就越小，直到在适当深处这种运动消失为止（图51-9）。

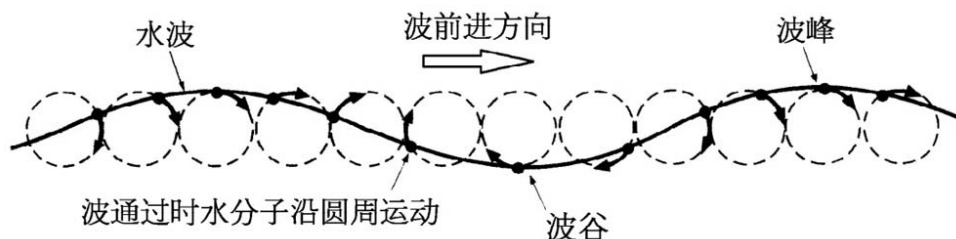


图51-9 深水水波是由水的粒子作圆周运动而形成的。注意，圆与圆之间的对称性相移。漂浮物体将怎样运动呢？

求出这种波的速度是一个有趣的问题：波速必定是水的密度、重力加速度（重力是形成波的恢复力），或许还有波长和水的深度的某种组合。如果我们选取水的深度趋于无限的情况，则波速不再与深度有关。关于波的相速度，不论我们将得到什么样的公式，都必须把各种不同的因子组合起来，以构成正确的量纲。如果我们试图用各种方法来进行这种组合，我们发现要构成速度，只有一种方法，即将密度、 g 和 λ 组合起来，即 $\sqrt{g\lambda}$ ，其中根本不包含密度。实际上，关于相速度的这个公式不是严格正确的，但动力学的完整分析（这个我们将不去探究）表明，上面我们得到的相速度公式只差一个 $\sqrt{2\pi}$ 的因子，即

$$v_{\text{相}} = \sqrt{g\lambda/(2\pi)} \quad (\text{对于重力波}).$$

有趣的是长波比短波跑得快。因此，如果一只小船激起了传播得很远的波浪（因为有一个赛车驾驶员开着摩托艇飞驶而过），那么过了一会儿，波到达岸边，起先缓慢地拍溅海岸，然后越来越快地拍溅海岸，因为先到达的波是长波。随着时间的推移，到达的波变得越来越短，因为波的速度按波长的平方根变化。

有人也许会表示异议，认为“这是不对的，为了解决这个问题，我们必须着眼于群速度”！这当然是正确的。相速度的公式并不能告诉

我们什么样的波首先到达，能告诉我们这些的是群速度。因此我们不得不求出群速度。只需假定速度随波长的平方根而变化（这是问题的全部要求），就可证明群速度是相速度的一半，我们把这个证明留作习题。群速度也随波长的平方根变化。群速度怎么会只有相速度的一半呢？如果有人注视由行进的小船所造成的一群波，并盯住一个特定的波峰，他会发现这个波峰在波群中向前运动，逐渐变弱，最后在前端消失。奇怪而不可思议的是，在后面的较弱的波却挤着向前行进，并且变得越来越大。简单地说，波穿过波群运动，而波群的速度仅为波速的一半。

由于群速度和相速度不相等，所以运动物体通过时所产生的波不再只是简单的锥形，而是有趣得多。我们可以在图51-10中看到这个现象，该图显示了在水中运动的物体所产生的波。注意，这种波和声波大不相同。在声波中，速度与波长无关，我们将只有一个沿着锥面向外行进的波前，但这里的情况不同，波在小船的后面，其波前的运动方向与小船的前进方向平行，而且在边上还有小波，其波前的运动方向与小船前进方向成别的角度。我们只要知道相速度正比于波长的平方根，就能够巧妙地对整个波的图样进行分析。奥妙在于这个波的图样相对于小船（以恒定速度前进）是静止不动的，而任何其他波形都将从小船处消失。

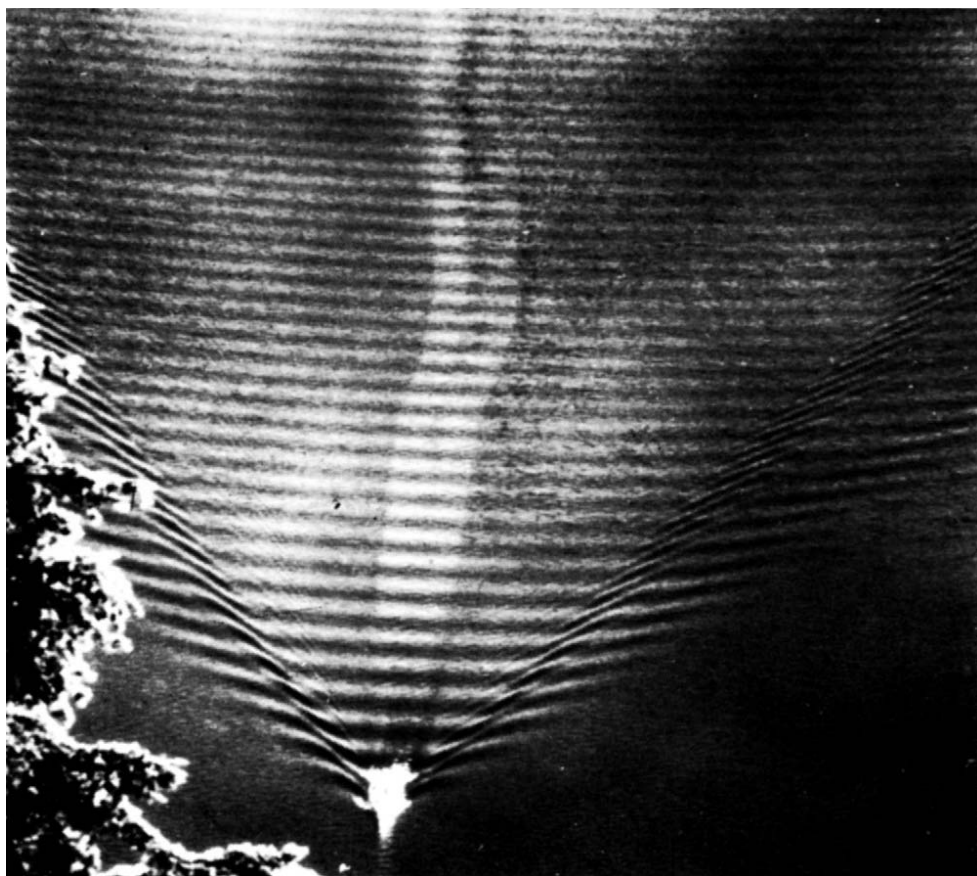


图51-10 小船的尾流

迄今为止，我们所讨论的是长水波，在这种情况下恢复力是由重力引起的。但是当波在水中变得很短时，主要的恢复力则是毛细引力，亦即表面能和表面张力。对于表面张力波，可以证明其相速度为

$$v_{\text{相}} = \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda \rho}} \quad (\text{对于涟波}),$$

其中 T 是表面张力， ρ 是密度。它与重力所形成的波正好相反，在波长变得很短时，波长越短，相速度越大。当同时存在重力和毛细作用时，按照通常的做法，我们得到两者的组合

$$v_{\text{相}} = \sqrt{\frac{Tk}{\rho} + \frac{g}{k}},$$

其中 $k=2\pi/\lambda$ 是波数。所以水波的速度确实是非常复杂的。图51-11表示相速度作为波长的函数，对于很短的波，其速度很快；对于很长的波，其速度也很快，这两者之间存在一个波能够行进的极小速率。群速度可以通过公式来计算：对于涟波，它为相速度的 $3/2$ ，对于重力波则为相速度的 $1/2$ 。在极小值的左面群速度大于相速度；在极小值的右面群速度小于相速度。有许多有趣的现象与这些事实有联系。首先，由于群速度随着波长的减小而急剧地增加，因此如果我们造成一个扰动，则此扰动将有一个最慢的末端，以相应波长的最小速率行进，而在前面的以较高的速率行进的波将是短波和非常长的波。在水槽中很难看到长波，但很容易看到短波。

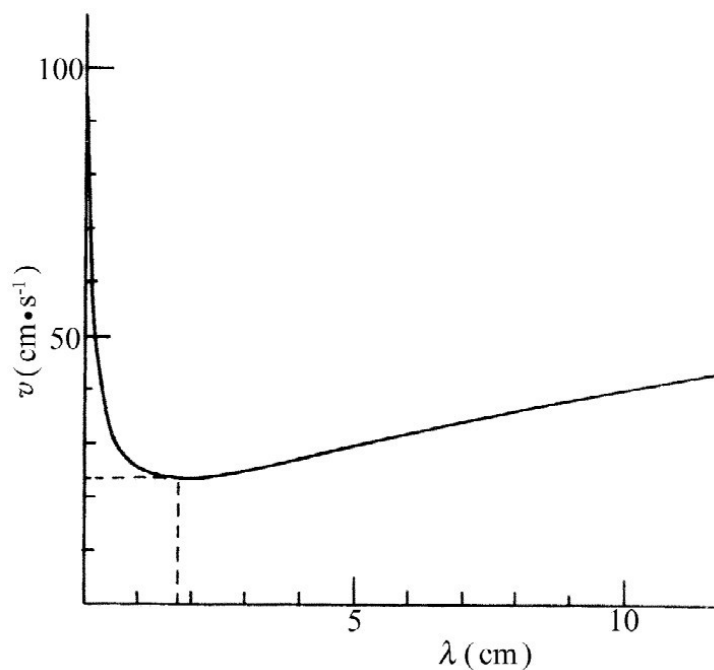


图51-11 水波的相速度对波长的曲线

所以我们看到，经常被用来作为波的简单例子的涟漪是很有趣和复杂的，它不像简单的声波和光波，事实上几乎没有陡峭的波前。主波的前面有从后面跑出的小波。因为水有色散，所以在水中的剧烈的扰动并不能产生具有陡峭波前的波。首先到达的是非常细小的波。顺便讲一下，如果一个物体以一定的速率在水中运动，由于所有不同的波以不同的速率行进，所以产生了一个相当复杂的图样。我们可以用盛水的浅盘来演示这一现象，以便能够看到跑得最快的那些波是细小的表面张力波。在后面则有某种类型的跑得最慢的波。若使盘底倾斜，可以看到水浅的地方波的速率较低。如果波的前进方向与最大斜线成一角度，那么这个波就会弯曲，并有沿着那条线行进的趋势。用这种方法我们能够说明各种不同的情况，并得出结论：水中的波比空气中的波要复杂得多。

在作循环运动的水中，长波在水浅的地方的速率较慢，在水深的地方的速率较快。这样，当水来到较浅的海滩时，波跑得慢了。但是在水较深的地方，波跑得比较快，所以我们得到冲击波的效应。这次由于波并非如此简单，故冲击波会大大变形，并使自己向上弯曲成大家所熟悉的样子，如图51-12所示。这就是波冲上海岸时所发生的情况，在这种情况下，自然界真正的复杂性被揭露无遗了。然而，现在还没有一个人能够弄清楚波在破裂时应具有怎样的形状。当波很小时，这是相当容易的，但当一个波变大和破裂时，情况就复杂得多了。



图 51-12 水波

在由水中运动的物体所造成的扰动中能够看到关于表面张力波的一个有趣的特征。从物体本身的观点来看，水在不停地向后流，而最终位于物体周围的波总是这样的波，它们恰好具有同水中的物体保持相对静止的适当速率。类似地，在小河中的物体周围，河水从物体旁边流过，波的图形是稳定不动的，这些波正好具有恰当的波长，使其以与河水相同的速率行进。但是，如果群速度小于相速度，则扰动在河流中向后传播，因为群速度赶不上水流的速度。如果群速度大于相速度，则波的图形将出现在物体的前面。如果我们仔细地注视河中的物体，可以看到在物体的前面有小的涟波，在物体的后面则有“咕咚咕咚”的长水波。

表面张力波的另一个有趣的特性，可以在倾倒液体时观察到。例如，如果牛奶以足够快的速度从瓶中倒入流水中，两者相交后可以看到在流水中有许多线条。它们是从边缘处的扰动出发向外传播的波，

这种波与河流中物体周围的波非常相似。在这种情况下存在着来自两侧的效应，这些效应产生了交叉的图形。

我们已经研究了波的一些有趣的性质以及相速度对波长的依赖关系，波速对水的深度的依赖关系等等各种复杂的情况，这一切展现了真正复杂的、因而也是有趣的自然现象。

第52章 物理定律的对称性

§52-1 对称操作

我们可以把本章的主题称为物理定律的对称性。在矢量分析（第11章），相对论（第16章）以及转动（第20章）等章节中，我们已经讨论过有关的物理定律中对称性的一些特点。

为什么我们要关心对称性呢？首先，在人们的心目中，对称性是非常吸引人的，我们都喜欢具有某种对称性的物体或图案。有趣的是，大自然常常在我们周围所遇到的物体中显示出某种对称性。或许可以想象的最对称的物体是球体，而在自然界中就充满了球体——恒星、行星、云层中的水滴等等。在岩石中找到的晶体也呈现出各种各样的对称性，对它们的研究使我们知道了有关固体结构的某些重要情况。即使动植物世界也显示出某种程度的对称，虽然，一朵花或一只蜜蜂的对称性不像晶体中的对称性那样完美或重要。

但是，我们在这里主要关心的不是自然界的物体往往是对称的这个事实。我们倒更希望考察宇宙中的一些更引人注目的对称性——即存在于支配物理世界运转的基本定律自身中的对称性。

首先我们要问，对称性是什么？一条物理定律怎么会是“对称的”？定义对称性的问题是一件有趣的事情，我们曾提到过外尔给出了一个很好的定义，其要点为，如果有一样东西，我们可以对它做某种事情，在做完之后，这个东西看起来仍旧和先前一样，那它就是对称

的。例如，一个对称的花瓶就是这类东西，如果我们使它反射或转动，结果看上去仍旧和先前一样。目前我们要考虑的是，可以对物理现象或实验中的物理状况做些什么事，而其结果却和未做前一样。表52-1列举了使种种物理现象得以保持不变的已知操作。

表52-1 对称操作

空间平移 时间平移 转过一定的角度 匀速直线运动变换(洛伦兹变换) 时间反演	空间反射 全同原子或全同粒子的交换 量子力学的相位 物质-反物质(电荷共轭)
--	---

§52-2 空间与时间的对称性

我们尝试做的第一件事情，比方说，就是使现象在空间中平移。如果我们在一定的位置上做一个实验，然后在空间的另一个位置上建立另一套仪器（或者把原来的仪器搬过去），那么凡是在前一套仪器中按一定的时间顺序发生的一切，在后一套仪器中也将以同样方式出现；只要我们安排好同样的条件，并且对前面讲过的一些约束予以应有的注意，即周围环境中所有使仪器不能同样工作的特征都要排除掉。关于在这些情形中怎样确定应包括的因素，我们已经谈过，这里就不再去考虑这些具体细节了。

在今天，我们也同样相信，时间的移动对物理定律也不会有影响（这是就我们迄今所知而言——所有这些事情都是就我们迄今所知而言）。这意味着，如果我们制造一套仪器，并且在某个时刻，比如星期四上午10:00使它开始工作，然后又制造同样一套仪器，并在（比方说）三天之后在同样的条件下使它开始工作，那么不管何时使这两套仪器工作的情形作为时间的函数是完全相同的。然而我们还是要假

设，环境中的有关特征也要及时作相应的变动。当然这个对称性意味着，如果某人三个月前曾买进通用汽车公司的股票，假如他现在买进这些股票，所遇到的情况将完全一样！

我们也必须注意到地理情况的差别，因为地球表面各处的特征显然是不同的。例如，假如我们在测量了某处的地磁场后将仪器移到另一处去，那么由于地磁场不同，仪器可能不再以完全相同的方式工作，但我们说这是由于磁场与地球有关。我们可以设想，如果使地球和仪器一起移动，那么仪器的工作情况就不会受到影响了。

我们曾相当详细地讨论过的另一件事是在空间的转动：如果把仪器转动一个角度，并且假定其他每件与它有关的物体也随之一齐转动，那么仪器将会同样地工作。事实上，在第11章中，我们曾比较具体地讨论过空间转动中的对称性，并且为了尽可能简洁地处理它，我们还创造了一种称为矢量分析的数学系统。

在较高级的水平上，有另一种对称性——匀速直线运动的对称性。这个相当不寻常的效应所说的是，如果我们有一件仪器按一定的方式工作，现将该仪器放到一辆汽车里，并使汽车以及与之有关的周围物体都沿直线匀速前进，那么汽车中所出现的物理现象并不会有什么不同：所有的物理定律都显得相同。我们甚至还知道怎样用比较专门性的方式来表示这一点，即在洛伦兹变换下，物理定律的数学方程式必须不变。事实上，正是在有关相对论问题的研究中，使得物理学家将注意力集中于物理定律的对称性方面。

上面所提的对称性都具有几何的性质，时间与空间多少是类似的，但是还有别的一类对称性。比如，有种对称性就描述了这样的事实：一个原子可以用同一类的另一个原子来替换；换句话说，存在着

同一类的原子。我们可以找到一群原子，如果把其中的一对交换一下，并不会造成什么差别——这些原子是全同的。无论某种类型的一个氧原子会做什么，这类氧的另一个原子也会这样做。有人会说：“真可笑！这正是同一类型的定义嘛！”这或许只是一个定义，但我们并不知道究竟存在不存在任何“同种类型的原子”，而事实则是，的确存在着许许多多同一类型的原子。因此，当我们说如果用同一类型的一个原子替换另一个而不会出现什么差别时，确实是有意义的。从上述意义来说，构成原子的那些所谓基本粒子也是些全同粒子——所有电子都相同，所有质子都相同，所有正 π 介子都相同，等等。

在列举了这么多使现象不改变的操作后，人们或许认为我们实际上能做任何事了；那么就让我们举一些反例，以便看出情况的差别。假设提出这样一个问题：“尺度改变了，物理定律是否对称？”设想我们先制造一台仪器，再制造一台每个部件都放大五倍的仪器，那么它们是否会同样精确地工作？在这种情况下，答案是，不会！例如，从一个装有钠原子的装置中发射出的钠原子光波的波长，与另一个体积为其五倍的装置所发射的钠原子光波波长相比，后者并非前者的五倍，而实际上完全相同。可见，波长与发射装置的大小之比值将会改变。

另一个例子是：在报纸上，有时我们看到由小火柴棒搭成的大教堂的照片，这些惊人的艺术作品是一些退休者用火柴棒粘成的，它比任何真实教堂都精致和奇特。如果我们设想这个用火柴棒制成的教堂果真按真正的尺寸建造起来，就会看到麻烦何在了，它不可能存在下去，整座教堂都会倒塌。因为按比例放大的火柴棒根本不够牢固。或许有人会说：“不错。但是，我们也知道，当存在一种外界的影响时，它也必须按比例改变！”这里谈的是物体承受万有引力的能力。因此我

们应先得取一个真正的用火柴棒制成的教堂模型以及真实的地球，我们知道在这种情况下，“教堂”是牢固的。然后，我们该有一个较大的教堂和一个较大的地球，但是这样一来情况变得更坏，因为万有引力增加得更快！

当然，今天我们是根据自然界中的物质由原子构成这一点出发来理解现象与尺度有关这个事实的，很明显，如果我们制造一个小到比方说其中只有五个原子的仪器，那么这种东西肯定不可以任意地放大或缩小。单个原子的尺寸根本不是任意的，而是完全确定的。

物理定律在尺度变化下并不保持不变这一事实是伽利略发现的。他认识到材料的强度并不恰好与其尺寸成比例，同时用表示两根骨骼的图画来说明那个我们刚刚提到的用火柴棒搭成的教堂的问题上讨论过的性质，图中有一根是通常的狗骨骼，它与支撑的狗的重量成适当的比例，而另一根是假想的“超级狗”——比方说大十倍或一百倍的狗的骨骼，这根骨骼按完全不同的比例画得又大又结实。伽利略是否曾把论证真正引申到这样一个结论：大自然的定律必须具有一定的尺度，我们不得而知。但是上述发现给他留下了深刻的印象，以致他认为这件事与发现运动定律同样重要，因为他把这两件事一起发表在同一本名为《论两种新科学》的书中。

另外一个物理定律不对称的例子是我们熟知的：当一个系统作均匀的角速度转动时，其中的表观物理定律与一个不转动的系统的物理定律显得不相同。如果我们安排好一个实验，然后把所有的东西放到一个宇宙飞船里，再在宇宙空间中让飞船本身以恒定的角速度自转，实验仪器将不会照原样那样工作，因为我们知道，在飞船里的东西会被甩出去，并且会发生其他一些情况。这是由于离心力或科里奥利力

等而造成的。事实上，我们不必向外看，只要利用傅科摆就可觉察到地球在旋转。

下面我们来叙述一个很有趣的对称性，即时间的可逆性。初看起来，这显然不成立。很明显，物理定律在时间上是不可逆的，因为我们知道，所有明显的现象在大尺度上都是不可逆的：“挥笔写字，写完再写，……”到现在为止我们所能说的是，这种不可逆性是由于所牵涉的粒子的数量极其巨大而产生的，倘若我们能够看到单个分子，就将无法辨别变化是往正方向发展还是往逆方向发展。更确切地说：我们先制造一台小小的仪器，就能知道其中所有原子的行为，也能观察到它们的运动。然后再制造一台类似的仪器，这台仪器开始工作时的状况与前一台仪器的最终状况相同，但所有的原子的速度正好相反。那么，这台仪器将经历完全相反的变化过程。换句话说，如果我们拍一部影片，详细地记录了一块材料的所有内部情况，然后再倒过来放，没有一个物理学家会说：“这是违反物理定律的，有些地方搞错了！”当然，如果我们没有去观察所有的细节，事情将是完全明确的，比如说，当我们看见一个鸡蛋落在人行道上，使蛋壳破碎时，肯定会说：“这是不可逆的，因为如果把这件事拍成影片，然后倒过来放时，破碎的蛋壳将会重新拼合，成为完整的鸡蛋，这显然是荒谬的！”但是，如果我们观察单个原子本身，定律看来完全是可逆的。当然，发现这一点要难得多，但很清楚，在微观的基本的水平上，物理学的基本定律在时间上确实是完全可逆的。

§52-3 对称性与守恒定律

至此，有关物理定律的对称性已显得十分有趣，但是结果发现，在量子力学中，这种对称性变得更为有趣和更令人兴奋。有这么一件事实：在量子力学中，对于每一个对称的规律都有一条守恒定律与之相对应。这个最深奥和最美妙的事实对许多物理学家来说简直令他们感到震惊。鉴于我们现在的讨论水平，我们无法对之作更多的说明。物理定律的对称性与守恒定律之间存在着一定的联系。在这里我们只加叙述而不打算作任何解释。

举例说，物理定律对空间平移是对称的。如果与量子力学的原则相结合，结果就意味着动量是守恒的。

物理定律对时间平移是对称的。在量子力学中就意味着能量是守恒的。

关于空间转动一定角度后的不变性与角动量守恒定律相对应。这些关系是非常有趣和非常美妙的！它们堪称物理学中无比优美和意义深远的东西。

顺便提一下，量子力学中出现的有一些对称性并没有经典的类比，无法以经典物理的方式描述。其中有一个就是：如果 ψ 是某个过程的概率波幅，我们知道 ψ 的绝对值的平方就是这个过程出现的概率。现在，如果有人进行计算时不用这个 ψ ，而是用另一个 ψ' ，它与 ψ 只是相差一个相位因子（令 Δ 为某个常数，把 $e^{i\Delta}$ 乘以原来的 ψ 即得 ψ' ），那么，作为该事件概率的 ψ' 的绝对值平方就等于 ψ 的绝对值平方

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}; \quad |\psi'|^2 = |\psi|^2.$$

因此，如果波函数的相位移动任意一个常数，物理定律仍然不变，这是另一种对称性。物理定律必须具有这样的性质，即量子力学相位的移动不会产生什么差别。我们刚才说过，在量子力学中，对每个对称性都存在着一个守恒定律。与量子力学相位相关联的守恒定律看来是电荷守恒定律。总之，这是一件非常有趣的事情！

§52-4 镜面反射

其次一个问题是在空间反射下的对称性。本章余下的大部分篇幅都将用来讨论这件事。我们要问：物理定律在反射下是否对称？可以用以下方式说得更具体一些：假定我们制造了一件东西，比方说一只钟，它带有许多齿轮，还有指针和数字。这只钟滴答滴答地走着，工作着，而钟里面有着卷紧的发条。我们从镜子里来看这个钟。问题并不是镜子里的钟像什么。但是让我们实际地制造出另一个正好同前一个钟在镜子中的映像一样的钟；每当原来的钟中有一个右旋的螺旋，我们就在另一个钟的对应位置上安装一个左旋的螺旋：前一个钟的钟面上刻着“2”字，就在后一个钟的钟面上对应地刻上一个“”字；如果前者的发条是这样卷紧的，那么后者就以正好相反的方式卷紧。当我们做完这一切之后，就有了两个物理上的钟，它们彼此之间的关系就是物体和它的镜像的关系，然而我们要强调一下，它们都是实际存在的、物质的钟。现在的问题是：如果发条上得一样紧，两个钟在同样的条件下开始走动，那么这两个钟是否会永远那样滴答走动，就像一对精确的物与像一样（这是一个物理问题，而不是哲学问题）？我们对物理定律的直觉将认为，它们会如此。

我们猜想，至少在这对钟的情况下，空间的反射体现了物理定律的一种对称性，如果我们把每件事情从“右”变到“左”，并保持其他条件不变，就不能说出有何差别。所以，我们暂时假定这是正确的。如果确是如此，那么就不可能用任何物理现象来区分“右”和“左”，就像例如不能用物理现象来定义物体的某一绝对速度一样。所以，用任何物理现象来绝对地定义我们所谓的与“左”相反的“右”是什么意思应当是不可能的，因为物理定律应该是对称的。

当然，自然界并不一定是对称的。比如，利用所谓的地理学无疑能够定义“右边”。例如假定我们站在新奥尔良看芝加哥，佛罗里达就在我们的右边（只要我们站在地面上），所以，我们能用地理学来定义“右”和“左”。当然，任何系统中的实际状况并不一定具有我们所谈到的对称性。这里的问题在于，物理定律是否对称。换句话说，如果有一个像地球那样的天体，但组成它的尘土是“左”旋的，而且有一个像我们这样的人站在像新奥尔良那样的位置观望像芝加哥那样的城市，但由于每件东西都正好反过来，所以佛罗里达就在左边了，那么这种情况是否违反物理定律呢？显然，每件事都左右互换的话，看来似乎并非不可能，这并不违反物理定律。

另一个要点是我们的“右”的定义不应当与传统有关。区分左和右的一个简易方法是到机械零件商店去随意取一个螺丝。那么多数是拿到一个右旋螺纹——也就是说，并不一定是右旋螺纹，但得到一个右旋螺纹的机会要比得到一个左旋螺纹的机会多得多。这是个传统或习惯的问题，或者是偶然的结果，所以并不是一个基本定律的问题。我们可以意识到，人人都能着手制造左旋螺丝！

所以，我们必须设法找到从根本上来说包含着“右旋”的某些现象。我们讨论的另一种可能性是偏振光经过比如糖水这种溶液时其偏

振面会发生旋转这一事实。正如我们在第33章中所看到的，比方说，在某种糖的溶液中，偏振面是向右旋转的。这就是定义“右旋”的一种方法，因为我们可以在水中溶解一些糖，于是偏振面就向右旋转。但是糖是从生物体——植物中取得的，如果我们用人造的糖试验时，我们会发现，偏振面并不旋转！但是假如先在这些不引起偏振面旋转的人造糖溶液中放进一些细菌（它们会吃去一些糖），然后再滤去细菌，我们就会发现仍有一些糖剩下来（差不多是先前的一半），这一回偏振面确实也转动了，但却以相反的方向转动！这看来颇令人迷惑，不过却很容易加以解释。

我们举另一个例子：有一种物质叫做蛋白质，在所有生物中都含有它，它对生命来说是十分重要的。蛋白质由氨基酸链组成。图52-1是一种从蛋白质中产生的氨基酸的模型，它称为丙氨酸。如果是从真实的生物体蛋白质中提取出来的丙氨酸，分子的排列就如图52-1（a）所示。另一方面，如果我们设法用二氧化碳、乙烷、氨等合成丙氨酸（我们能够合成它，这并不是一个复杂的分子），就会发现所制成的丙氨酸含有等量的如图52-1（a），（b）所示的两种结构的分子！前一种从生物体中得到的分子称作L - 丙氨酸，另一种化学成分相同（也就是有相同的原子，原子的关系也相同）的分子，与“左旋”L - 丙氨酸分子相比，是“右旋”的，它称为D - 丙氨酸。有趣的是当我们在实验室内由简单的气体合成丙氨酸时，得到的是两类分子的等量混合物。然而，生物所利用的只是L - 丙氨酸（这不完全正确，生物体中各处都有一些D - 丙氨酸的特殊应用，但很少见。所有的蛋白质都只利用L - 丙氨酸）。现在如果我们制备两类丙氨酸，并用这种混合物喂给某种喜欢“吃”或消耗丙氨酸的动物，那么它不能利用D - 丙氨酸，只能利用L - 丙氨酸。这就是我们在糖水中所碰到的事，细菌只吃有用的糖，

而留下了“错误”的一类糖（左旋糖也是甜的，但与右旋糖的味道不同）。

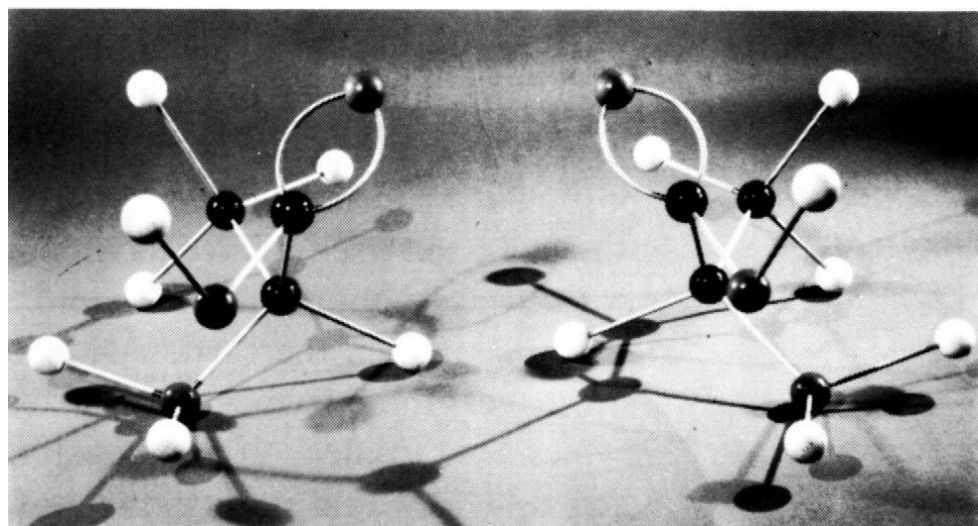


图 52-1

(a) *L*-丙氨酸（左）；(b) *D*-丙氨酸（右）

所以，看来生命现象似乎能区分出“左”与“右”，或者化学能够这样做，因为两种分子在化学上是不同的。但实际上并非如此！就所能进行的物理测量来说，例如，对能量和化学反应速度的测量，等等，如果我们使其他每件事都互为镜像，那么两类分子起同样的作用。一类分子将使光向右偏转，另一类分子则将使光在通过同样数量的溶液时往左偏转得正好一样多。这样，就物理学而言，这两类氨基酸同样符合要求。就我们今天对事物的理解来说，依照薛定谔方程的基本原理，两类分子所显示的特性应当完全对应，这样，一类有右旋作用，另一类则有左旋作用。但是，在生命过程中，却只有一种方式起作用。

人们推测其理由如下。比如，我们不妨假设在某个时刻生命不知怎么处在这样一种状况下：某些生物中的所有的蛋白质都包含有左旋

的氨基酸分子，所有的酶也是有倾向性的——生命体中的每种物质都是有倾向性的——因此也就是不对称的。这样，在消化酶将食物中的化合物变为另一种化合物时，有一类化合物对酶来说是“合适”的，另一类却是不合适的（就像灰姑娘和拖鞋的那个故事。只是现在我们所试的是“左脚”）。就我们所知道的来说，在原则上，比方说，我们可以造出这样一只青蛙，其中所有的分子都是反过来的，每件事都像是一只真实青蛙的左旋镜像，因而这也就是一个左旋蛙。这个左旋蛙可以很正常地活动一些时间，但是它会发现找不到东西吃，因为如果它吞下一只苍蝇，它的消化酶不能起作用，组成苍蝇的是一类“错误”的氨基酸分子（要么我们给青蛙一只左旋蝇）。就我们现在所知，如果每件事都反过来的话，化学与生命过程将照样进行下去。

如果生命完全是一种物理与化学的现象，那么蛋白质都由同样的螺旋状的分子所组成这件事情就只有这样来理解了：最初某一时刻，由于偶然的因素突然出现了某些生命分子，其中有的得到繁衍。在某个地方，一次有一个有机分子带有一定的倾向性，而从这一特殊事件出发，“右旋”就刚好在我们的特定环境下发展起来。一个个别的偶然历史事件是有倾向性的，但从这以后倾向性本身就传播开来。一旦达到今天的这种状态，当然它就将一直持续存在下去——所有的酶只消化“右旋”的东西，制造右旋的东西：当二氧化碳与水蒸气等等进入植物的叶中，制造糖的酶就把它们变成右旋的，因为酶本身就是右旋的。如果以后会产生什么新的病毒或活体的话，那么除非它们能“吃”已经存在的一类生命物质，不然就不能生存下去。因此它们也必须是同一类的东西。

这里不存在什么右旋分子数量上的守恒。右旋分子一旦突然出现，其数量就能保持继续增加。所以，人们推测，生命现象这种情况

本身并不表明物理定律的缺乏对称性，相反，只是表明了宇宙的本性以及在上述含义下的地球上一切生命本源的共同性。

§52-5 极矢量与轴矢量

现在我们进一步讨论下去。我们可以看到，物理学中许多地方都有着“右手”和“左手”规则。事实上，在学习矢量分析时，我们学到了必须用右手规则来正确地得出角动量、力矩、磁场等等的方向。例如，在磁场中运动的电荷所受的力就是 $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。在给定的情况下，我们知道了 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{B}$ ，这个方程是否足以定义右旋性？实际上，如果我们回过去考虑一下矢量的来源，就知道“右手规则”只是一种习惯而已，它只是一种巧妙的方法。其实像角动量、角速度之类的量本来根本不是矢量！它们都是以某种方式与一定的平面相联系，只是因为空间有三维，所以可把有关量与垂直于那个平面的方向联系起来，在两种可能的取向中，我们选取了“右旋”的方向。

所以，如果物理定律是对称的，我们将会发现，如果某个魔鬼偷偷溜进所有的实验室，在每本有右手规则的书里用“左”这个词来替换“右”，因而我们一概使用“左手规则”的话，那么在物理定律上不会造成任何差别。

我们来作一点说明。矢量可以分为两类，有一类是“真正”的矢量，比如空间中的位移 $\Delta \mathbf{r}$ 。如果在我们的仪器中，这里有一个零件，那里有另外一个零件，那么在一个镜像仪器里，有前一个零件的镜像物，也有后一个零件的镜像物。如果我们从“这个零件”到“那个零件”画出矢量，那么一个矢量就是另一个矢量的镜像（图52-2）。矢量

箭头变换了指向，就好像整个空间翻了个身一样，这一种矢量我们称为极矢量。



图52-2 空间的位移矢量与其镜像

但是，另一类与转动有关的矢量具有不同的性质。例如，在三维空间中有某个物体在作转动，如图52-3所示。如果在镜子中看它，将作如图右边所示的转动，也就是说作为原来那个转动的镜像而转动着。现在我们约定用同样的规则表示镜像的转动，它也是一个“矢量”，在反射后，并没有像极矢量那样改变，但是相对于极矢量以及空间的几何关系而言，则正好反过来；这种矢量称为轴矢量。

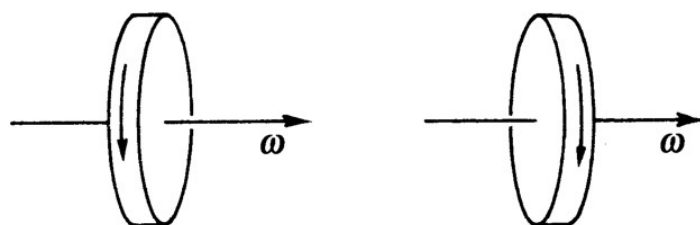


图52-3 转轮与其镜像。注意角速度“矢量”方向并没有反转

现在，如果反射对称定律在物理上是正确的，我们必须这样来设计方程，即当我们改变每个轴矢量的符号和每个矢积的符号时（它相当于反射），不应出现任何差别。比如，当我们写出一个公式表明角动量为 $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 时，这个方程是完全正确的，因为如果我们换成左手坐标系时， $\mathbf{L}$ 的符号改变了，而 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{r}$ 没有改变；但矢积的符号变化了，因为我们要从右手规则变到左手规则。再举个例子，我们知道作

用于在磁场中运动的电荷上的力为 $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，但当我们从右旋变到左旋系统时，由于 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{v}$ 都是极矢量，所以由矢积所要求的变号应当被 $\mathbf{B}$ 的变号所抵消，这就意味着 $\mathbf{B}$ 必须是轴矢量。换句话说，如果进行这样一种反射， $\mathbf{B}$ 必须成为 $-\mathbf{B}$ 。所以，在把坐标系从右手改为左手后，我们也必须使磁铁的两极互换。

我们用例子说明上述情况。假定我们有如图52-4所示的两块磁铁。一块磁铁上的线圈按某种方式缠绕，电流按一个确定的方向流过线圈。另一块磁铁就像前一块的镜像一样，线圈按相反的方式缠绕，在线圈内发生的每件事都正好反过来，电流方向如图所示。现在，按产生磁场的定律（这一点我们还没有正规地学习过，但多半在高中已知道一些），这里磁场的方向应如图中所示。若一块磁铁的一个磁极是南极，则在另一块磁铁中，电流按相反方向流动，这样磁场就反了过来，相应地出现一个北极。这样我们看到，从右旋改为左旋时，我们的确要把磁铁的南北极互换！

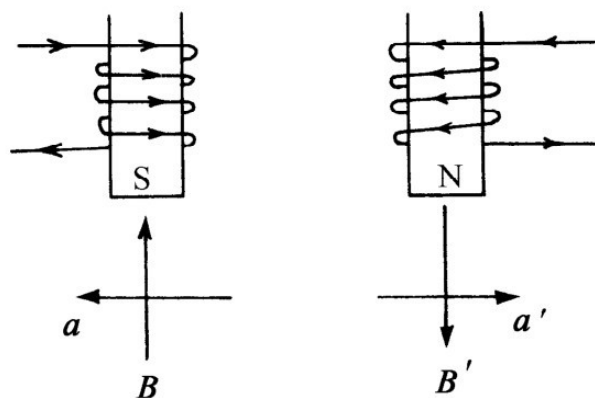


图52-4 磁铁与其镜像

我们对磁极的改变不必介意，这些也都只是习惯而已。让我们谈谈现象吧。假如现在有一个电子穿过一个磁场，进入纸面。于是，如果我们用公式 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 来求电子所受的力 $\mathbf{F}$ （记住电荷是负的），就可发

现，按照物理定律，电子将在确定的方向上发生偏转。这样物理现象就是，当一个线圈通以一定指向的电流时，电子的运动轨迹也按一种确定的方式弯曲——这就是物理内容——这里毋需考虑如何给每件事情贴上标记。

现在我们用一面镜子来做同样的实验：使电子通过与原来对应的方向，于是力的方向反了过来，如果我们按同样的规则计算它的话，结果是很好的，因为对应的运动 是一种镜像运动！

§52-6 哪一只是右手

实际的情况是，在研究任何现象时，总有两个或偶数个右手规则，而最后结果是：现象看起来总是对称的。因此，简言之，如果我们不能区别南极与北极，那么也无法分别左与右。然而看来我们好像可以 说出磁铁的北极。例如，罗盘指针的北极就是指向北方。但实际上这也是一种与地理学有关的局部特征，这正像有关芝加哥所在方向的谈论一样，是不算数的。如果我们见过罗盘指针，就会注意到，指北针是浅蓝色的。但这是人们涂到小磁针上去的颜色。这些都是局部性的、约定的判定标准。

但是，如果磁铁真的具有这种性质：当我们十分靠近地观察它时，就能看到在北极而不是在南极上长有细丝，如果这是一般的规律，或者如果存在着任何 其他独特的区分磁铁南北极的方法，我们就能说出实际情况是两种可能情况中的哪一种，而这就是反射对称定律的终结。

为了更清楚地说明整个问题，不妨设想我们同某个火星人，或某个极其遥远的理性生物通过无线电话进行交谈。我们不得发送给他任何实际的样品，以供观察，比如，假设我们能发送光信号给他，就可以送去右旋圆偏振光，并对他说：“这就是右旋光——你只要注意它的旋转方向就知道了。”但是，我们不能给他送去任何东西，只能和他交谈。他离这里太远，或者在某一个奇怪的地方，以致不能看到任何我们能见到的东西。比如，我们不能说：“看一看大熊星座；请注意这些星是如何排列的。我们所指的‘右’是……”我们只能通过无线电话交谈。

现在要告诉他有关我们的所有事情。当然，首先我们要从数的定义开始，于是说：“滴答、滴答，二，滴答、滴答、滴答，三，……”这样他渐渐地能够理解几个词，等等。不一会儿我们就可能跟这个伙伴变得十分熟悉，于是他说：“你这个家伙究竟是什么样子？”我就开始自我描写，并且告诉他说：“噢，我们有6 ft高。”他便说：“等一等，6 ft是什么意思？”有没有可能告诉他6 ft是多长吗？当然行！我们可以说：“你知道氢原子的直径吧！我们有17000000000个氢原子那么高！”这之所以可能，是因为物理定律在尺度变化时不是不变的，因而我们可以定义一个绝对长度。这样我们就解释了自己身材的尺寸，并且把我们的一般形状也向火星人作了描述——有四肢，在四肢上有五个手指或脚趾，等等，他也就顺着我们来进行想象。我们描述自己的外形时，料想不会遇到任何特殊的困难。在我们讲述的过程中，火星人甚至还做了一个有关我们的外形的模型。接着他就说：“哎呀！你真是个非常漂亮的家伙，但是在你的身体内有些什么呢？”于是我们就开始描写身体内的各种器官，随后，我们谈到心脏，在仔细地描写了心脏的形状之后，我们就说：“现在请把心脏的位置安排在左边。”他就问道：“慢着，什么是左边？”于是我们的问题就是向他描写心脏在哪

一边，而他既不能看到我们所见到的任何东西，我们也不能向他发送任何我们所谓的“右”的样品——没有一个标准的右旋的物体。我们能这样做吗？

§52-7 宇称不守恒

我们知道，万有引力定律、电磁定律、核力都符合反射对称原则，所以，这些定律以及任何由它们推得的东西都不能应用。但是，与自然界中发现的许多基本粒子相关联，存在着一种称为 β 衰变或弱衰变的现象。其中弱衰变的一个例子与大约在1954年发现的粒子有关，它使人们感到很难理解。有一种带电粒子蜕变为三个 π 介子，如图52-5所示。这个粒子一度称为 τ 介子。在图52-5中我们还看到另一个曾称为 θ 介子的粒子蜕变成两个介子。根据电荷守恒，其中一个必须是中性的。这样，一方面我们有一个称为 τ 的粒子蜕变成三个 π 介子，还有一种 θ 粒子则蜕变成两个 π 介子。不久人们发现 τ 与 θ 在质量上几乎相等。事实上，在实验误差之内，它们是相等的。其次，人们发现，它们分别蜕变为三个 π 介子与两个 π 介子所需的时间也几乎相等；并且具有相同的寿命。再有，无论何时生成这两种粒子时，它们总以同样的比例出现，比如说，14%是 τ 介子，86%是 θ 介子。

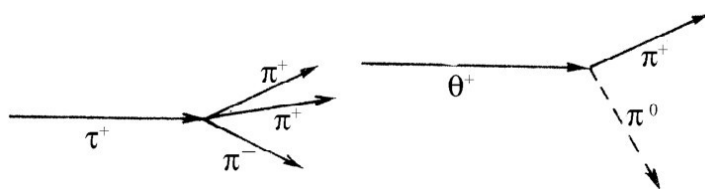


图52-5 τ^+ 粒子衰变和 θ^+ 粒子衰变的简图

任何头脑清楚的人都立即认识到：它们必定是相同的粒子，我们只是产生了一个有两种不同蜕变方式的东西，而不是两种不同的粒子。所以，这个可以按两种方式蜕变的东西具有同样的寿命和同样的产品比例（因为这就是粒子进行两类不同蜕变的可能性的比例）。

但是，可以证明（我们在这里完全无法说明如何证明），根据量子力学中的反射对称原理，不可能由同一种粒子得到这两种结果——同一个粒子不可能以两种这样的方式蜕变。与反射对称原理相对应的守恒定律没有经典的类比，这一类量子力学的守恒关系称作宇称守恒。这样，由于宇称守恒，或更确切地说，由于弱衰变的量子力学方程对反射的对称性，同一种粒子不可能按两种方式变化，所以这必定是某种质量、寿命等等方面的巧合。但是，人们越深入研究，这种巧合也愈加惊人，于是人们逐渐产生了疑问：也许，深奥的自然界反射对称定律可能并不正确。

由于出现了这种明显的失败，李政道和杨振宁建议做一些有关衰变的其他实验，试图检查一下定律在其他情况下是否正确。第一个这样的实验是由哥伦比亚大学的吴健雄女士做的，她的实验如下：人们知道，蜕变时发射一个电子的钴的某一同位素处于极低温度和极强的磁场中时是磁化的，如果温度低到使热振动不致过分扰动原子磁体的话，这些原子磁体就在磁场中排列起来。所以，钴原子在这个强磁场中就全都排列起来。随后它们发射一个电子而蜕变，人们发现，当原子排列在 ***B*** 矢量朝上的磁场中时，大多数的电子是在朝下的方向上发射出去的。

如果一个人不是真正地“熟悉”世界，那么这种议论似乎没有丝毫意义。但是如果他懂得世界上的问题和有趣事情的话，就会看出这是一个最为戏剧性的发现：当我们把钴原子放到极强的磁场中去时，向

下的蜕变电子比向上的蜕变电子要多。所以如果我们在“镜子”中进行对应的实验，钴原子将沿着相反的方向排列，此时它们就将往上而不是往下发射较多的电子，情况是非对称的。磁体长出细丝了！磁铁的南极成为这样一种磁极：在 β 衰变中电子趋向于离开它！于是，这就在物理上区别了南北极。

在这以后，人们还做了其他许多实验： π 介子蜕变为 μ 和 ν 介子； μ 介子蜕变为一个电子和两个中微子；近来， Λ 蜕变为质子和 π ， Σ 的蜕变以及许多其他的蜕变实验。事实上，在几乎所有可以预期的情况中，全都发现不遵从反射对称原则！从根本上说，在物理学的这一个阶梯上，反射对称定律是不正确的。

简言之，我们能够告诉火星人该把心脏放到哪一个部位了。我们可以这样说：“听着，自己制造一块磁铁，把线圈绕上去，让电流通过，随后取一些钴，并使温度降低，然后再这样来安排实验，使电子从脚部向头部运动，那么电流通过线圈时，流进的方向就是我们称之为右的方向，而流出的方向就是左的方向。”所以，现在只要做一个这样的实验，就能够确定右与左了。

人们还曾预言过许多其他特征。例如，已知钴核的自旋，即角动量在蜕变前是 $5\hbar$ ，在蜕变后是 $4\hbar$ 。电子带有自旋角动量，还牵涉到中微子。从这里很容易看出电子必须具有与其运动方向一致的自旋角动量，中微子也同样如此。所以看上去好像电子往左自旋，这也得到实验验证。事实上，博姆和瓦帕斯特拉就是在我们这里验证了电子大多数是向左旋转的（还有另一些实验给出了相反的结果，但它们是错误的）。

另一个问题当然就是要找出宇称守恒失败的规律。有没有什么法则能告诉我们这种不守恒的情况在多大的范围内成立？有。这个法则是，只有在非常慢的称为弱衰变的反应中，守恒才遭到破坏，而且在这种情况下发生时，有关的法则表明，带有自旋的粒子，例如电子、中微子等等，在出现时倾向于向左自旋。这是一条倾向一面的法则，它把速度极矢量与角动量轴矢量联系起来，并且指出角动量与速度方向相反的可能性比一致的可能性要来得大一些。

这条法则就是如此，但今天我们并不真正理解它的原因。为什么这条法则是正确的，它的基本原因是什么，它与其他事情有何联系？这件非对称的事实使我们感到如此的震惊，以致此刻还没有能从惊讶中充分地恢复过来去理解对于所有其他规则来说这将意味着什么。然而，这个课题是有趣和新颖的，也是仍未获得解决的，所以看来我们讨论一些与此有关的问题是可取的。

§52-8 反物质

当一种对称性丢失之后，我们要做的第一件事就是赶快查一下已知的或假定成立的对称性的表，看看是否还会失去什么别的对称性。在我们的表中没有提到一种对称操作，这就是物质与反物质的关系，它也必须受到质疑。狄拉克曾预言除电子外必定还有另一种称为正电子的粒子（由安德森在本学院发现），它必然与电子有关。这两种粒子的所有性质都服从一定的对应法则：能量相等；质量相等；电荷相反。但是，比所有其他都重要的是，当它们碰在一起时，就彼此湮没而把所有的质量转化为能量，例如，以 γ 射线的形式释放掉。正电子称为电子的反粒子，而这些就是粒子与它的反粒子的特征。从狄拉克的

论证可以清楚地看出，世界上所有其余的粒子也应有对应的反粒子。比如，对质子应有反质子，用符号 $\bar{p}$ 来表示。 $\bar{p}$ 应具有负电荷，它的质量和质子相同，等等。然而最重要的特点是，质子和反质子碰在一起彼此就会湮没。我们强调这件事的原因在于，人们对我们所说的有中子也有反中子这一点感到不好理解，他们说：“中子就是中性的，那么又怎么可能有相反的电荷呢？”“反”粒子的规则并不只是说它具有相反的电荷，它有一系列特征，所有这些特征都是相反的。反中子和中子的区别就在于，如果我们把两个中子放在一起，它们仍然是两个中子，但是如果把一个中子和一个反中子放在一起，它们彼此会湮没，并且释放出巨大的能量，发射出各种 π 介子、 γ 射线，等等。

现在，如果我们有了反中子、反质子和反电子，在原则上就可以造出反原子。虽然到现在还没有造出反原子，但在原则上这是可能的。例如，一个氢原子在中心有一个质子，在外面有一个电子绕着转动。现在设想在某个地方我们能产生一个反质子，而在外面带着一个正电子，正电子会不会绕着转动？会。首先，反质子带负电，而反电子带正电，这样它们就以相应的方式互相吸引——正负粒子的质量是一样的，每件事都一样。这是物理学的对称原理之一，方程式似乎表明，如果我们用某种物质制造出一个钟，然后又用反物质制造出一个同样的钟，它将同样走动（当然，如果把两个钟放在一起，它们就都会湮没，但那是另一回事了）。

这样就出现了一个问题。我们可以用物质制造出两个钟，一个是“左旋”的，另一个是“右旋”的。例如，我们可以不用简单的方式制造钟，而使用钴和磁铁以及电子探测器（它能检测出 β 衰变电子的存在，并对之计数）来制造钟。每计数一次，秒针就走动一下。那么另一个镜像钟由于接收到较少的电子，将不会走得一样快。所以，显然我们

可以制造两个钟：一个左旋，另一个右旋，它们走得不一样。那就让我们用物质制造一个可称为标准的或“右旋”的钟，另外还有这种物质制造一个左旋的钟。我们刚才已看出，一般说来，这两者不会走得一样快，而在那个著名的物理现象发现之前，人们曾认为它们会走得一样快。我们还假定正物质与反物质是等价的。那就是说，如果我们用反物质制造一个同样形状的右旋钟，那它将会走得和右旋正物质钟一样快，而如果制造同样的左旋钟，它也会走得一样快。换句话说，原先人们相信所有这四个钟都是相同的，现在我们当然已经知道右旋物质和左旋物质并不一样。因此，可以假设，右旋反物质和左旋反物质也并不一样。

一个明显的问题是，究竟哪两种钟是相同的，如果发生这种情况的话？换句话说，右旋物质钟与右旋反物质钟走得一样快吗？或者说，右旋物质钟与左旋反物质钟走得一样快吗？利用正电子衰变来代替电子衰变的 β 衰变实验指出了这里的相互关系是：右旋物质的行为与左旋反物质的行为一样。

于是，现在终于可以说右与左的对称性仍然保持着！如果我们用反物质代替正物质制造一个左旋钟，它将走得一样快。这样事情就变为，代替我们的对称性表中的两条独立规则的，是把这两者结合在一起变成一条新规则，即右旋的物质与左旋的反物质是对称的。

这样，如果火星人是由反物质造成的，而我们若指点他如何作一个类似于我们的“右旋”模型，当然，结果就刚好相反。在我们之间进行了许多交谈后，我们彼此互相教会对方制造一艘宇宙飞船，然后乘飞船在空间半途相遇，那么会发生什么事呢？我们会把彼此的传统和习惯等等告诉对方，并且大家会很快地跑过去情不自禁地伸出手来。要是他真的伸出的是左手，请千万小心！

§52-9 对称破缺

其次一个问题是，我们怎么来理解接近于 对称的定律？令人惊异的是，一方面，在物理学的很大范围内，包括核力的强作用现象，电磁现象，以及最弱的引力现象等重要领域中，关于这些现象的所有定律似乎都是对称的。另一方面，那个小小的例外部分则跑出来：“不，定律并不都是对称的！”自然界几乎对称，但又不完全对称，这究竟是怎么一回事？我们怎样来理解这一点？首先，我们是否还有什么别的例子？答案是，事实上我们确实有一些别的例子。比如，在质子与质子之间，中子与中子之间，中子与质子之间，相互作用的核力部分都完全相同，这里有着一种核力的对称性，一种新的对称性，所以，我们可以交换中子与质子——但很明显，这并不是普遍成立的对称性，因为两个相隔一定距离的质子间的电斥力对中子来说并不存在。所以，一般而言，并不总是 能用中子来代换质子，这种代换只是一个良好的近似。为什么是良好的 近似？因为核力远远比电力强，所以这也是一种“几乎”对称的情况。这样，我们在别的事情上确实也看到了例子。

在我们的心目中有一种倾向，认为对称是无比完美的。事实上，这与希腊人的一个古老观念相类似：圆是完美的，如果去相信行星的轨道不是圆形，而只是接近于圆形的话，这就太可怕了。是一个圆和近似于一个圆这两件事之间的差别不是一个很小的差别，对于我们的认识来说，这是一种根本性的改变。在圆上存在着对称性与完美性的迹象，一旦稍有偏离，就一切都完了，它就不再有对称性。于是，问题在于为什么行星的轨道只是接近于 圆——这是一个更加困难的问题。一般地说，行星的实际运动轨道应当是椭圆形的。但是在漫长的

岁月里，由于潮汐力的作用等等因素，这些轨道变得几乎对称了。现在的问题是，我们这里是否也存在着类似的事情。若从圆的观点出发来看，如果轨道都是精确的圆，这种情况显然很简单，也自然用不到去解释。但是既然轨道只是接近于圆，就需要作许多解释，结果表明这是一个很大的动力学问题，于是，我们就得考虑潮汐力等等的影晌来解释为什么轨道是近于对称的。

这样，我们的问题就是要解释对称性究竟从何而来。为什么自然界是如此近于对称？没有人能道出所以然。我们可能作出的唯一解释大致如此：日本的日光市有一座门，这座门有时被日本人称为全日本最美的城门，它是在深受中国艺术影响的时代建造的。这个城门非常精致，有许多山墙和美丽的雕刻图案，还有许多柱子以及刻有龙头及贵族雕像的圆柱，等等。但是当你挨近看时，在一根柱子上除了见到复杂精细的雕刻图案外，还可见到有个小小的图样刻得正好颠倒过来。要是没有这件事，情况就完全对称了。如果你要问为什么会那样，据说有这样一个传说：它是故意刻得颠倒的，为的是使上帝不致妒忌人的完美。人们故意在这里留下一个小小的错误，那样上帝就不会因为妒忌而对人类感到愤怒了。

我们愿意把这种看法反过来，并且相信自然界之所以接近于对称，其真正的解释是：上帝只将物理定律造得接近于对称，这样我们就不会妒忌上帝的完美了！

索引

二画

二维空间中的转动	rotation in two dimension
入射	incidence
入射角	angle of incidence
几何光学	geometrical optics
力矩	moment of force

三画

三角法	triangulation
三体问题	three-body problem
干涉仪	interferometer
干涉波	interfering waves
干涉，衍射	interference
大气的指数变化律	exponential atmosphere

门捷列夫

Mendeléev

矢积

vector product

四画

比热

specific heat

毛细管作用

capillary action

引力

gravitation

引力系数

gravitational coefficient

引力理论

theory of gravitation

引力能

gravitational energy

引力场

gravitational field

开普勒, J.

Kepler, J.

开普勒定律

Kepler's laws

瓦帕斯特拉

Wapstra

方均距离

mean square distance

方均根距离

root-mean-square distance

内摆线

hypocycloid

化学动力学

chemical kinetics

化学反应	chemical reaction
化学能	chemical energy
气体分子动理论	kinetic theory of gases
气体的热导率	thermal conductivity of a gas
气垫	air trough
无规行走	random walk
厄缶, R.	Eötvös, R.
分子力	molecular force
分子运动	molecular motion
分子动理论	kinetic theory
分子扩散	molecular diffusion
分子间的吸引 (力)	molecular attraction
分辨本领	resolving power
牛顿, I.	Newton, I.
牛顿定律	Newton's laws
切连科夫, P.A.	Cherenkov, P.A.
切连科夫辐射	Cherenkov radiation
双目视觉	binocular vision
双折射	birefringence

双星	double stars
反物质	antimatter
反射角	angle of reflection
反粒子	antiparticle
反常折射	anomalous refraction
贝克勒尔, A.H.	Becquerel, A.H.

五画

四维矢量	four-vectors
坐标轴的转动	rotation of axes
可感知的未来	affective future
永（恒运）动	perpetual motion
代数（学）	algebra
外尔, H.	Weyl, H.
弗兰克, I.	Frank, I.
对称性	symmetry
正弦波	sinusoidal waves
平行轴定理	parallel-axis theorem

平均自由程	mean free path
平面运动	planetary motion
平滑肌	smooth muscle
平衡	equilibrium
卡诺, S.	Carnot, S.
卡诺循环	Carnot cycle
卡文迪什	Cavendish, H.
卡文迪什实验	Cavendish's experiment
布里格斯, H.	Briggs, H.
布朗, R.	Brown, R.
布朗运动	Brownian motion
布儒斯特角	Brewster's angle
矢量代数	vector algebra
矢量分析	vector analysis
电力	electrical forces
电子云	electron cloud
电子半径	radius of electron
电子的电荷	charge on electron
电子射线管	electron-ray tube

电共振	electrical resonance
电场	electric field
电阻	resistance
电阻器	resistor
电容	capacitance
电容器	capacitor (condenser)
电荷	charge
电荷守恒	conservation of charge
电离能	ionization energy
电能	electrical energy
电感	inductance
电感器	inductor
电磁场	electromagnetic field
电磁波	electromagnetic wave
电磁辐射	electromagnetic radiation
电瞬变态	electrical transient
电共振	electrical resonance

六画

西岛	Nishijima
共振	resonance
多普勒效应	Doppler effect
迈克耳孙 莫雷实验	Michelson-Morley experiment
迈耶, J.R.	Mayer, J.R.
地震仪	seismograph
亥姆霍兹, H.	Helmholtz, H.
托勒玫, C.	Ptolemy, C.
扩散	diffusion
芝诺	Zeno
安德森, C.D.	Anderson, C.D.
同步加速器	synchrotron
同步（加速器）辐射	synchrotron radiation
同时性	simultaneity
回转仪	gyroscope
行星运动	planetary motion
自由度	degrees of freedom
自发发射	spontaneous emission
自然界中的共振	resonance in nature

自感	self-inductance
色〔视〕觉	color vision
色〔视〕觉的生理化学	physiochemistry of color vision
色品	chromaticity
色散	dispersion
红外辐射	infrared radiation
动力学	dynamics
动能	kinetic energy
动量	momentum
动量守恒	conservation of line momentum
汤川秀树	Yukawa, H.
汤姆孙散射截面	Thompson scattering cross section
压力	pressure
压缩	compression
刚体	rigid body
刚体的转动	rotation of rigid body
刚体的角动量	angular momentum of rigid body
光波	light (electromagnetic) waves

光学	optics
光子	photon
光的动量	momentum of light
光轴	optic axis
光散射	scattering of light
米勒, W.C.	Miller, W.C.
亚当斯, J.C.	Adams, J.C.
亚里士多德	Aristotle
亚稳态原子	metastable atom
导数 (微商)	derivative
约束运动	constrained motion
约翰逊噪声	Johnson noise
场方程	field equation
场的叠加	superposition of fields

七画

坐标轴平移	translation of axes
近轴光线	paraxial rays

圆周运动	circular motion
时间变换	transformation of time
时空	space-time
阻尼振动	damped oscillation
阻抗	impedance
陀螺仪	gyroscope
阿伏伽德罗	Avogadro
阿伏伽德罗常量	Avogadro's number
折射率	index of refraction
里兹组合原则	Ritz combination principle
克尔盒	Kerr cell
克劳修斯, R.	Clausius, R.
克劳修斯-克拉珀龙方程	Clausius-Clapeyron equation
库仑定律	Coulomb's law
麦克斯韦, J.C.	Maxwell, J.C.
麦克斯韦方程组	Maxwell's equations
角动量	angular momentum
角动量守恒	conservation of angular momentum
角频率	angular frequency

角膜	cornea
抛物形天线	parabolic antenna
抛物运动	parabolic motion
伽利略	Galileo
伽利略变换	Galilean transformation
伽利略相对性	Galilean relativity
狄拉克, P.	Dirac, P.
狄拉克方程	Dirac equation
闵可夫斯基	Minkowski

八画

帕斯卡三角形	Pascal's triangle
帕普斯定理	theorem of Pappus
罗默, O.	Roemer, O.
受迫谐振子	forced harmonic oscillator
倒易原理	reciprocity principle
物理定律的对称性	symmetry of physical laws
迪克, R.H.	Dicke, R.H.

庞加莱, H.	Poincaré.H.
非保守力	nonconservative force
经典电子半径	classical electron radius
放大率	magnification
放射性（材料）的钟	radioactive clock
单原子气体	monatomic gas
“奇异”数	“strangeness”number
拉姆齐, N.	Ramsey, N.
拉普拉斯, P.	Laplace, P.
拉什顿	Rushton
波节	wave nodes
波（动）方程	wave equation
波前	wavefront
波数	wave number
空间转动	rotation in space
视网膜	retina
视杆细胞	rods
视皮层	visual cortex
视神经	optic nerve

视锥细胞	cones
(线) 动量	linear momentum
(线) 动量守恒	conservation of linear momentum
线性系统	linear systems
线性变换	linear transformation
经屏的衍射	diffraction by screen
质心	center of mass
质能	mass energy
质能相当性	mass-energy equivalence
固(刚)体的角动量	angular momentum of solid (rigid) body
周期性的(时间)	periodic (time)
周期性振动	periodic oscillation
欧几里得	Euclid
欧几里得几何学	Euclidean geometry
欧姆定律	Ohm's law
转动动能	rotational kinetic energy
转动惯量	moment of inertia
转矩	torque

势能

potential energy

九画

保守力

conservative force

统计力学

statistical mechanics

统计涨落

statistical fluctuations

孪生子佯谬

twin paradox

香农, C.

Shannon, C.

胡克定律

Hooke's law

科里奥利力

Coriolis force

狭义相对论

special theory of relativity

轴矢量

axial vector

洛伦兹, H.A.

Lorentz, H.A.

洛伦兹收缩

Lorentz contraction

洛伦兹变换

Lorentz transformation

衍射

diffraction

衍射光栅

diffraction grating

玻尔, N.

Bohr, N.

玻尔半径	Bohr radius
玻尔兹曼, L.	Boltzmann, L.
玻尔兹曼定律	Boltzmann's law
玻意耳定律	Boyle's law
玻恩, M.	Born, M.
标准偏差	standard deviation
标量	scalar
相对论	theory of relativity
相对论性能量	relativistic energy
相对论性动力学	relativistic dynamics
相对论性动量	relativistic momentum
相对论性质量	relativistic mass
相速度	phase velocity
相移	phase shift
重力加速度	acceleration of gravity
复阻抗	complex impedance
复眼	compound eye
费马, P.	Fermat, P.
绝热压缩	adiabatic compression

绝热膨胀

adiabatic expansion

十画

调幅

amplitude modulation

哥白尼

Copernicus

莱布尼茨, G.W.

Leibnitz, G.W.

爱因斯坦, A.

Einstein, A.

衰减

attenuation

旁频带

side bands

格林函数

Green's function

海森伯, W.

Heisenberg, W.

透镜公式

lens formula

速度的变换

transformation of velocity

热力学

thermodynamics

热力学定律

laws of thermodynamics

热电离

thermal ionization

热平衡

thermal equilibrium

热机

heat engines

热导率	thermal conductivity
热能	heat energy
原子过程	atomic processes
原子的m（亚稳）态	atom metastable
原子的假设	atomic hypothesis
原子钟	atomic clock
原子的粒子	atomic particles
振荡器，振子	oscillator
振动相位	phase of oscillation
振动周期	period of oscillation
振动（荡）	oscillation
振荡（动）频率	frequency of oscillation
振幅	amplitudes of oscillation
核力	nuclear force
核的截面	nuclear cross section
核能	nuclear energy
核（原子核）	nucleus
能级	energy level
能量	energy

能量守恒	conservation of energy
能量定理	energy theorem
能斯特热定理	Nernst heat theorem
离子	ion
离子电导率	ionic conductivity
离心力	centrifugal force
载波信号	carrier signal
圆周运动	circular motion

十一画

焓	enthalpy
章动	nutation
推（延）迟时间	retarded time
斜面	inclined plane
菲涅耳反射公式	Fresnel's reflection formulas
轫致辐射	bremsstrahlung
谐波	harmonics
谐振子	harmonic oscillator

理想气体定律	ideal gas law
理想热机的效率	efficiency of ideal engine
液体的蒸发	evaporation of a liquid
惯性	inertia
惯性原理	principle of inertia
惯量	moment of inertia
偏导数	partial derivative
偏振	polarization
偏振光	polarized light
偶极辐射子	dipole radiator
密度	density
虚功	virtual work
虚功原理	principle of virtual work
盖尔曼, M.	Gell-Mann, M.
剪切波	shear wave
基尔霍夫定律	Kirchhoff's laws
第谷·布拉赫	Tycho Brahe
距离	distance
距离测量	distance measurement

勒威耶, U.

Leverrier, U.

弹性能

elastic energy

弹性碰撞

elastic collision

十二画

温度

temperature

塔姆, I.

Tamm, I.

椭圆

ellipse

金斯, J.

Jeans, J.

棘轮和掣爪的机制

ratchet and pawl machine

瞬变态

transient

瞬变响应

transient response

量子力学

quantum mechanics

量子电动力学

quantum electrodynamics

晶体衍射

crystal diffraction

晶胞

unit cell

等温大气层

isotherm atmosphere

等温压缩

isothermal compression

等温膨胀	isothermal expansion
傅里叶, J.	Fourier, J.
傅里叶级数	Fourier series
傅里叶分析	Fourier analysis
傅里叶变换	Fourier transform
博姆	Boehm
傍轴光线	paraxial rays
紫外	ultraviolet electromagnetic waves
紫外辐射	ultraviolet radiation
黑体辐射	blackbody radiation
焦点	focus
焦距	focal length
惠更斯, C.	Huygens, C.
焦耳热	Joule heating
普朗克, M.	Planck, M.
普朗克常量	Planck's constant
普尔基涅效应	Purkinje effect
斯莫卢霍夫斯基	Smoluchowski
斯涅耳, W.	Snell, W.

斯涅耳定律	Snell's law
斯蒂维纳斯, S.	Stevinus, S.
最短时间原理	principle of least time
散射截面	cross section for scattering

十三画

催化剂	catalyst
蒸发	evaporation
数值分析	numerical analysis
频率	frequency
碰撞	collision
零质量	zero mass
瑞利判据	Rayleigh's criterion
瑞利定律	Rayleigh's law
概率	probability
概率分布	probability distribution
概率密度	probability density
摆	pendulum

摆钟	pendulum clock
辐射电阻	radiation resistance
辐射阻尼	radiation damping
辐射的相对论性效应	radiation relativistic effects
辐射能	radiant energy
像差, 光行差	aberration
叠加原理	principle of superposition
微分学	differential calculus
微波激射 (器)	maser
微积分, 微商 (分)	calculus, differential
简谐运动	harmonic motion

十四画

模拟计算机	analog computer
磁场	magnetic field
磁学, 磁性	magnetism
磁感 (应) 强度	magnetic induction
收缩假设	contraction hypothesis

十五画

熵	entropy
潮汐	tides
颜色 亮度	color-brightness
横纹肌	striated muscle
摩擦	friction
摩擦系数	coefficient of friction

十六画

激活能	activation energy
激光	laser
噪声	noise
膨胀	expansion
薛定谔, E.	Schrödinger, E.
穆斯堡尔, R.	Mössbauer, R.
整流	rectification

十七画

赝力

pseudo force

螺旋起重器

screwjack

戴德金, R.

Dedekind, R.

X射线

X-rays electromagnetic waves

X射线

X-rays

γ 射线

gamma rays electromagnetic wave

附录

本书涉及的非法定计量单位换算关系表

单位符号	单位名称	物理量名称	换算系数
bar	巴	压强，压力	$1 \text{ bar}=10^5 \text{ Pa}$
Cal	大卡	热量	$1 \text{ Cal}=1 \text{ kcal}$
cal	卡 [路里]	热量	$1 \text{ cal}=4.186 \ 8 \text{ J}$
dyn	达因	力	$1 \text{ dyn}=10^{-5} \text{ N}$
f, fa, fathom	英寻	长度	$1 \text{ f}=2\text{yd}=1.8288\text{m}$
fermi (fm)	费米	(核距离) 长度	$1 \text{ fermi}=1 \text{ fm}=10^{-15} \text{ m}$
ft	英尺	长度	$1 \text{ ft}=3.048\times 10^{-1} \text{ m}$
G, Gs	高斯	磁通量密度，磁感应强度	$1 \text{ Gs}=10^{-4} \text{ T}$
gal	加仑	容积	$1 \text{ gal (US)}=3.785 \ 43 \text{ L}$
in	英寸	长度	$1 \text{ in}=2.54 \text{ cm}$
lb			$1 \text{ lb}=0.453 \ 592 \text{ kg}$

	磅	质量	
l.y.	光年	长度	1 l.y.=9.460 53×10 ¹⁵ m
mi	英里	长度	1 mi=1.609 34 km
Mx	麦克斯韦	磁通量	1 Mx=10 ⁻⁸ Wb
Oe	奥斯特	磁场强度	1 Oe=1 Gb·cm ⁻¹ = (1 000/4π) A·m ⁻¹ =79.577 5 A·m ⁻¹
oz	盎司	质量	1 oz=28.349 523 g
qt	夸脱	容积	1 qt=1.136 52 dm ³ =1.101 22 dm ³ (US dry qt) =0.946 353 dm ³ (US liq qt)

第2卷

THE
Feynman
LECTURES ON PHYSICS

Volume II

The New Millennium Edition

费曼

物理学讲义

· 新千年版 ·

[美] 费曼 (Richard Feynman) [美] 莱顿 (Robert Leighton) [美] 桑兹 (Matthew Sands) 著
李洪芳 王子轴 钟万衡 译



上海科学技术出版社

The Feynman Lectures on Physics (The New Millennium Edition, Volume II)

费曼物理学讲义

(新千年版)

第 2 卷

[美] 费曼 (Richard Feynman)
莱顿 (Robert Leighton) 著
桑兹 (Matthew Sands)

李洪芳 王子辅 钟万衡 译

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

费曼物理学讲义：新千年版．第2卷 / （美）费曼（Richard Feynman），（美）莱顿（Robert Leighton），（美）桑兹（Matthew Sands）著；李洪芳，王子辅，钟万衡译．—上海：上海科学技术出版社，2020.3

ISBN 978-7-5478-4718-3

I. ①费... II. ①费...②莱...③桑...④李...⑤王...⑥钟... III. ①物理学—教材②电磁学—教材 IV. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2020）第032330号

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS: The New Millennium Edition, Volume II

By Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands

© 1964, 2006, 2010 by California Institute of Technology. Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

Simplified Chinese translation copyright © 2013 by Shanghai Scientific&Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books Group

Through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司
ALL RIGHTS RESERVED

费曼物理学讲义（新千年版）第2卷

[美] 费曼 (Richard Feynman) 莱顿 (Robert Leighton) 桑兹
(Matthew Sands) 著 李洪芳 王子辅 钟万衡 译

上海世纪出版(集团)有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行

(上海钦州南路71号 邮政编码200235 www.sstp.cn)

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 39 字数 870千字

2020年3月第1版 2020年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-4718-3/O·84

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

译者序

20世纪60年代初，美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应，纷纷试行教学改革，加利福尼亚理工学院就是其中之一。该校于1961年9月至1963年5月特请著名物理学家费曼主讲一二年级的基础物理课，事后又根据讲课录音编辑出版了《费曼物理学讲义》。本讲义共分3卷，第1卷包括力学、相对论、光学、气体分子运动论、热力学、波等，第2卷主要是电磁学，此外还有弹性、流体的流动及弯曲空间等内容，第3卷是量子力学。全书内容十分丰富，在深度和广度上都超过了传统的普通物理教材。

当时美国大学物理教学改革试图解决的一个主要问题是，基础物理教学应尽可能反映近代物理的巨大成就。《费曼物理学讲义》在基础物理的水平上对20世纪物理学的两大重要成就——相对论和量子力学——作了系统的介绍，对于量子力学，费曼教授还特地准备了一套适合大学二年级水平的讲法。教学改革试图解决的另一个问题是按照当前物理学工作者在各个前沿研究领域所使用的方式来介绍物理学的内容。在《费曼物理学讲义》一书中对一些问题的分析和处理方法，反映了费曼自己以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。全书对基本概念、定理和定律的讲解不仅生动清晰、通俗易懂，而且特别注重从物理上做出深刻的叙述。为了扩大学生的知识面，全书还列举了许多基本物理原理在各个方面（诸如天体物理、地球物理、生物物理等）的应用，以及物理学的一些最新成就。由于全书是根据课堂讲授的录音整理编辑的，它在一定程度上保留了费曼讲课的生动活泼、引人入胜的独特风格。

《费曼物理学讲义》从普通物理水平出发，注重物理分析，深入浅出，避免运用高深繁琐的数学方程，因此具有高中以上物理水平和初等微积分知识的读者阅读起来不会感到十分困难。至于大学物理系的师生和物理工作者更能从此书中获得教益。为此我们特将此书译成中文，以飨读者。

原书第一版发行后，深受广大读者欢迎。1989年，为了纪念费曼教授逝世一周年，编者重新出版了本书，并加了新的序言及介绍费曼生平的短文。本卷在课程内容上则增加了弯曲空间一章，使得《费曼物理学讲义》这套书的内容更为完整。2010年，编者根据50多年来世界各国在阅读和使用本书过程中提出的意见，对全书（3卷）存在的错误和不当之处（885处）进行了订正，并使用新的电子版语言和现代作图软件对全书语言文字、符号、方程及插图进行重新编辑出版，称为新千年版。本书就是根据新千年版翻译的。

本书中的费曼自序由郑永令在吴子仪译稿的基础上重译，前言由李洪芳翻译，潘笃武校阅，关于费曼和《费曼物理学讲义》另序以及新千年版序言由潘笃武翻译。本卷正文由李洪芳、钟万衡在王子辅译稿的基础上重新翻译，第42章由郑永令校阅。由于译者水平所限，错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

译者

2012年11月

关于费曼

理查德·费曼（R.P.Feynman）1918年生于纽约市，1942年在普林斯顿大学获得博士学位。第二次世界大战期间，尽管当时他还很年轻，就已经在洛斯阿拉莫斯的曼哈顿计划中发挥了重要作用。以后，他在康奈尔大学和加利福尼亚理工学院任教。1965年，因在量子电动力学方面的工作和朝永振一郎（Sin-Itiro Tomonaga）及施温格尔（J.Schwinger）同获诺贝尔物理学奖。

费曼博士获得诺贝尔奖是由于成功地解决了量子电动力学的理论问题。他也创立了说明液氦中超流动性现象的数学理论。此后，他和盖尔曼（M.Gell-Mann）一起在 β 衰变等弱相互作用领域内做出了奠基性的工作。在以后的几年里，他在夸克理论的发展中起了关键性的作用，提出了高能质子碰撞过程的部分子模型。

除了这些成就之外，费曼博士将新的基本计算技术及记号法引进物理学，首先是无处不在的费曼图，在近代科学历史中，它比其他任何数学形式描述都更大地改变了对基本物理过程形成概念及进行计算的方法。

费曼是一位卓越的教育家。在他获得的所有奖项中，他对1972年获得的奥斯特教学奖章特别感到自豪。在1963年第一次出版的《费曼物理学讲义》被《科学美国人》杂志的一位评论员描写为“难啃的但却富于营养并且津津有味。25年后它仍是教师和最优秀的初学学生的指导书”。为了使外行的公众增加对物理学的了解，费曼博士写了《物理

定律和量子电动力学的性质：光和物质的奇特理论》。他还是许多高级出版物的作者，这些都成为研究人员和学生的经典参考书和教科书。

费曼是一个活跃的公众人物。他在挑战者号失事调查委员会里的工作是众所周知的，特别是他的著名的O型环对寒冷的敏感性的演示，这是一个优美的实验，除了一杯冰水和C形钳以外其他什么也不需要。费曼博士1960年在加利福尼亚州课程促进会中的工作却鲜为人知，他在会上指责教科书的平庸。

仅仅罗列费曼的科学和教育成就还没有充分抓住这个人物的本质。即使是他的最最技术性的出版物的读者都知道，费曼活跃的多面的人格在他所有的工作中都闪闪发光。除了作为物理学家，他还是无线电修理工，是锁具收藏家、艺术家、舞蹈家、邦戈（bongo）鼓手，甚至玛雅象形文字的破译者。他的世界永远充满了好奇，他是一个典型的经验主义者。

费曼于1988年2月15日在洛杉矶逝世。

新千年版前言

自理查德·费曼在加利福尼亚理工学院讲授物理学导论课程以来，已经过去快50年了。这次讲课产生了这3卷《费曼物理学讲义》。在这50年中，我们对物理世界的认识已经大大改变了，但是《费曼物理学讲义》的价值仍旧存在。由于费曼对物理学独到的领悟和教学方法，费曼的讲义今天仍像第一次出版时那样具有权威性。这些教本已在全世界范围内被初学者，也被成熟的物理学家研读；它们已被翻译成至少12种语言，仅仅英语的印刷就有150万册以上。或许至今为止还没有其他物理学书籍有这样广泛的影响。

新千年版迎来了《费曼物理学讲义（FLP）》的新时代：21世纪的电子出版物时代。FLP改变为eFLP，本文和方程式用 $\text{\LaTeX}$ 电子排字语言表示，所有的插图用现代绘图软件重画。

这一版的印刷本的效果并没有什么特别之处，它看上去几乎完全和学物理的学生都已熟悉并热爱的最初的红色书一样。主要的差别在于扩大并改进了的索引，以前的版本第一次印刷以来的50年内读者们发现的885处错误的改正，以及更方便改正未来的读者可能发现的错误。关于这一点我以后还要谈到。

这一版的电子书版本以及加强电子版不同于20世纪的大多数技术书籍的电子书，如果把这种书籍的方程式、插图、有时甚至包括课文，放大以后都成为多个像素。新千年版的 $\text{\LaTeX}$ 稿本有可能得到最高质量的电子书，书页上的所有的面貌特征（除了照片）都可以无限制

地放大而始终保持其精确的形状和细锐度。带有费曼原始讲课的声音和黑板照相，还带有和其他资源的联接的电子版本是新事物，（假如费曼还在世的话）这一定会使他极其高兴。[\[1\]](#)

费曼讲义的回忆

这3卷书是一套完备的教科书。它们也是费曼在1961—1964年给本科生上物理学课的历史记录，这是加利福尼亚理工学院的一年级和二年级学生，无论他们主修什么课程，都必须上的一门课。

读者们可能和我一样很想知道，费曼的讲课对听课的学生的影响如何。费曼在这几本书的前言中提供了多少有些负面的看法。他写道：“我不认为我对学生做得很好。”马修·桑兹（Matthew Sands）在他的《费曼物理学讲义补编》的回忆文章中给出了完全正面的观点。出于好奇，2005年春天，我和从费曼1961—1964班级（大约150个学生）中半随机地挑选一组17位学生通过电子邮件或面谈联系——这些学生中有些在课堂上有很大的困难，而有一些很容易掌握课程；他们主修生物学，化学，工程，地理学，数学及天文学，还包括物理学。

经过了这些年，可能已经在他们的记忆中抹上了欣快的色彩，但大约有80%回忆起费曼的讲课觉得是他们大学时光中精彩的事件。“就像上教堂。”听课是“一个变形改造的经历”，“一生的重要阅历，或许是我从加利福尼亚理工学院得到的最重要的东西。”“我是一个主修生物学的学生，但费曼的讲课在我的本科生经历中就像在最高点一样突出……虽然我必须承认当时我不会做家庭作业并且总是交不出作业。”“我当时是课堂上最没有希望的学生之一，但我从不缺一堂课……我记

得并仍旧感觉到费曼对于发现的快乐.....他的讲课具有一种.....感情上的冲击效果，这在印刷的讲义中可能失去了。”

相反，好些学生，主要由于以下两方面问题，而具有负面的记忆。（i）“你无法通过上课学会做家庭作业。费曼太灵活了——他熟知解题技巧和可作哪些近似，他还具有基于经验和天赋的直觉，这是初学的学生所不具备的。”费曼和同事们在讲课过程中知道这一缺陷，做了一些工作，部分材料已编入《费曼物理学讲义补编》：费曼的3次习题课以及罗伯特·莱顿（Robert Leighton）和罗各斯·沃格特（Rochus Vogt）选编的一组习题和答案。（ii）由于不知道下一节课可能会讨论什么内容而产生一种不安全感，缺少与讲课内容有任何关系的教科书或参考书，其结果是我们无法预习，这是十分令人沮丧的.....我发现在课堂上的演讲是令人激动但却是很难懂，但（当我重建这些细节的时候发现）它们只是外表上像梵文一样难懂。当然，有了这3本《费曼物理学讲义》，这些问题已经得到了解决。从那以后的许多年，它们就成了加州理工学院学生学习的教科书，直到今天它们作为费曼的伟大遗产还保持着活力。

改错的历史

《费曼物理学讲义》是费曼和他的合作者罗伯特·莱顿及马修·桑兹非常仓促之中创作出来的，根据费曼的讲课的录音带和黑板照相（这些都编入这新千年版的增强电子版）加工扩充而成^[2]。由于要求费曼、莱顿和桑兹高速度工作，不可避免地有许多错误隐藏在第一版中。在以后几年中，费曼收集了加州理工学院的学生和同事以及世界各地的读者发现的、长长的、确定的错误列表。在20世纪60年代和70

年代早期，费曼在他的紧张的生活中抽出时间来核实第1卷和第2卷中确认的大多数，不是全部错误，并在以后的印刷中加入了勘误表。但是费曼的责任感从来没有高到超过发现新事物的激情而促使他处理第3卷中的错误。^[3]在1988年他过早的逝世后，所有3卷的勘误表都存放到加州理工学院档案馆，它们躺在那里被遗忘了。

2002年，拉尔夫·莱顿（Ralph Leighton）（已故罗伯特·莱顿的儿子，费曼的同胞）告诉我，拉尔夫的朋友迈克尔·戈特里勃（Michael Gottlieb）汇编了老的和长长的新的勘误表。莱顿建议加州理工学院编纂一个改正所有错误的《费曼物理学讲义》的新版本，并将他和戈特里勃当时正在编写的新的辅助材料——《费曼物理学讲义补编》一同出版。

费曼是我心目中的英雄，也是亲密的朋友。当我看到勘误表和提交的新的一卷的内容时，我很快就代表加州理工学院（这是费曼长时期的学术之家，他、莱顿和桑兹已将《费曼物理学讲义》所有的出版权利和责任都委托给她了）同意了。一年半以后，经过戈特里勃细微工作和迈克尔·哈特尔（Michael Hartl）（一位优秀的加州理工学院博士后工作者，他审校了加上新的一卷的所有的错误）仔细的校阅，《费曼物理学讲义》的2005限定版诞生了，其中包括大约200处勘误。同时发行了费曼、戈特里勃和莱顿的《费曼物理学讲义补编》。

我原来以为这一版是“定本”了。出乎我意料的是全世界读者热情响应。戈特里勃呼吁大家鉴别出更多错误，并通过创建的费曼讲义网站 www.feynmanlectures.info 提交给他。从那时起的五年内，又提交了965处新发现的错误，这些都是从戈特里勃、哈特尔和纳特·博德（Nate Bode）（一位优秀的加州理工学院研究生，他是继哈特尔之后

的加州理工学院的错误检查员) 的仔细校对中遗漏的。这些965处被检查出来的错误中80处在《定本》的第四次印刷(2006年8月)中改正了, 余下的885处在这一个新千年版的第一次印刷中被改正(第1卷中332处, 第2卷中263处, 第3卷200处) [\[4\]](#), 这些错误的详情可参看 www.feynmanlectures.info。

显然, 使《费曼物理学讲义》没有错误已成为全世界的共同事业。我代表加州理工学院感谢2005年以来作了贡献的50位读者以及更多的在以后的年代里会作出贡献的读者。所有贡献者的名字都公示在 www.feynmanlectures.info/flp-errata.html 上。

几乎所有的错误都可分为三种类型: (i) 文字中的印刷错误; (ii) 公式和图表中的印刷和数学错误——符号错误, 错误的数字(例如, 应该是4的写成5), 缺失下标、求和符号、括号和方程式中一些项; (iii) 不正确的章节、表格和图的参见条目。这几种类型的错误虽然对成熟的物理学家来说并不特别严重, 但对于初识费曼的学生, 就可能造成困惑和混淆。

值得注意的是, 在我主持下改正的1 165处错误中只有不多几处我确实认为是真正物理上的错误。一个例子是第2卷, 5—9页上一句话, 现在是“.....接地 的封闭导体内部没有稳定的电荷分布不会在外部产生[电]场”(在以前的版本中漏掉了接地一词)。这一错误是好些读者都曾向费曼指出过的, 其中包括威廉和玛丽学院(The College of William and Mary) 学生比尤拉·伊丽莎白·柯克斯(Beulah Elizabeth Cox), 她在一次考试中依据的是费曼的错误的段落。费曼在1975年给柯克斯女士的信中写道: “你的导师不给你分数是对的, 因为正像他用高斯定律证明的那样, 你的答案错了。在科学中你应当相信逻辑和

论据、仔细推理而不是权威。你也正确阅读和理解了书本。我犯了一个错误，所以书错了。当时我或许正想着一个接地的导电球体，或别的；使电荷在（导体球）内部各处运动而不影响外部的东西。我不能确定当时是怎样做的。但我错了。你由于信任我也错了。”^[5]

这一新千年版是怎样产生的

2005年11月到2006年7月之间，340个错误被提交到费曼讲义网站 www.feynmanlectures.info。值得注意的是，其中大多数来自鲁道夫·普法伊弗（Rudolf Pfeiffer）博士一个人：当时是奥地利维也纳大学的物理学博士后工作者。出版商艾迪生·卫斯利（Addison Wesley），改正了80处错误，但由于费用的缘故而没有改正更多的错误：由于书是用照相胶印法印刷的，用1960年代版本书页的照相图出版印刷。改正一个错误就要将整个页面重新排字并要保证不产生新的错误，书页要两个不同的人分别各排一页，然后由另外几个人比较和校读。——如果有几百个错误要改正，这确是一项花费巨大的工作。

戈特里勃、普法伊弗和拉尔夫·莱顿对此非常不满意，于是他们制定了一个计划，目的是便于改正所有错误，另一目的是做成电子书的《费曼物理学讲义》的加强电子版。2007年，他们将他们的计划向作为加州理工学院的代理人的我提出，我热心而又谨慎。当我知道了更多的细节，包括《加强电子版本》中一章的示范以后，我建议加州理工学院和戈特里勃、普法伊弗及莱顿合作来实现他们的计划。这个计划得到了三位前后相继担任加州理工学院物理学、数学和天文学学部主任——汤姆·汤勃列罗（Tom Tomlrello）、安德鲁·兰格（Andrew Lange）和汤姆·索伊弗（Tom Saifer）——的支持；复杂的法律手续及

合同细节由加州理工学院的知识产权法律顾问亚当·柯奇伦（Adam Cochran）完成。《新千年版》的出版标示着该计划虽然很复杂但已成功地得到执行。尤其是：

普法伊弗和戈特里勃已将所有三卷《费曼物理学讲义》（以及来自费曼的课程并收入《费曼物理学讲义补编》的1 000多道习题）转换成 $\text{\LaTeX}$ 。《费曼物理学讲义》的图是在书的德文译者亨宁·海因策（Henning Heinze）的指导下，为用于德文版，在印度用现代的电子方法重画的。为了将海因策的插图的非独家使用于新千年英文版，戈特里勃和普法伊弗购买了德文版〔奥尔登博（Oldenbourg）出版〕的 $\text{\LaTeX}$ 方程式的非独家的使用权，普法伊弗和戈特里勃不厌其烦地校对了所有 $\text{\LaTeX}$ 文本和方程式以及所有重画的插图，并必要时作了改正。纳特·博德和我代表加州理工学院对课文、方程式和图曾作过抽样调查，值得注意的是，我们没有发现错误。普法伊勃和戈特里勃是惊人的细心和精确。戈特里勃和普法伊弗为约翰·沙利文（John Sullivan）在亨丁顿实验室安排了将费曼在1962—1964年黑板照相数字化，以及乔治·布卢迪·奥迪欧（George Blood Audio）将讲课录音磁带数字化——从加州理工学院教授卡弗·米德（Carver Mead）获得财政资助和鼓励，从加州理工学院档案保管员谢利·欧文（Shelly Erwin）处得到后勤支持，并从柯奇伦处得到法律支持。

法律问题是很严肃的。20世纪60年代，加州理工学院特许艾迪生·卫斯利发表印刷版的权利，20世纪90年代，给予分发费曼讲课录音和各种电子版的权利。在21世纪初，由于先后取得这些特许证，印刷物的权利转让给了培生（Pearson）出版集团，而录音和电子版转让给珀修斯（Perseus）出版集团。柯奇伦在一位专长于出版的律师艾克·威廉

姆斯（Ike Williams）的协助下，成功将所有这些权利和珀修斯结合在一起，使这一新千年版成为可能。

鸣谢

我代表加州理工学院感谢这许多使这一新千年版成为可能的人们。特别是，我感谢上面提到的关键人物：拉尔夫·莱顿、迈克尔·戈特里勃、汤姆·汤勃列罗、迈克尔·哈特尔、鲁道夫·普法伊弗、亨宁·海因策、亚当·柯奇伦、卡弗·米德、纳特·博德、谢利·欧文、安德鲁·兰格、汤姆·索伊弗、艾克·威廉姆斯以及提交错误的50位人士（在 www.feynmanlectures.info 中列出）。我也要感谢米歇尔·费曼（Michelle Feynman）（理查德·费曼的女儿）始终不断的支持和建议，加州理工学院的艾伦·赖斯（Alan Rice）的幕后帮助和建议，斯蒂芬·普奇吉（Stephan Puchegger）和卡尔文·杰克逊（Calvin Jackson）给普法伊弗从《费曼物理学讲义》转为 L^AT_EX 的帮助和建议。迈克尔·菲格尔（Michael Figl）、曼弗雷德·斯莫利克（Manfred Smolik）和安德列斯·斯坦格尔（Andreas Stangl）关于改错的讨论，以及珀修斯的工作人员和（以前版本）艾迪生·卫斯利的工作人员。

基普·S·索恩（Kip S. Thorne）

荣休费曼理论物理教授

加州理工学院

2010年10月

[1] 原文“What would have given Feynman great pleasure”是虚拟式的句子，中文没有相当于英语虚拟式的句法，所以加上括号内的句子。——译者注

[2] 费曼的讲课和这3本书的起源的说法请参阅这3本书每一本都有的《费曼自序》和《前言》，也可参看《费曼物理学讲义补编》中马修·桑兹的回忆以及1989年戴维·古德斯坦（David Goodstein）和格里·诺格鲍尔（Gerry Neugebauer）撰写的《费曼物理学讲义纪念版》特刊前言，它也刊载在2005年限定版中。

[3] 1975年，他开始审核第3卷中的错误，但被其他事情所分心，因而没有完成这项工作，所以没有作出勘误。

[4] 原版如此。——译者注

[5] 《与习俗完全合理的背离，理查德·P·费曼的信件》288～289页，米歇尔·费曼（Michelle Feynman）编，Basic Books，纽约，2005。

费曼自序



这是我前年与去年在加利福尼亚理工学院对一二年级学生讲授物理学的讲义。当然，这本讲义并不是课堂讲授的逐字逐句记录，而是已经经过了编辑加工，有的地方多一些，有的地方少一些。我们的课堂讲授只是整个课程的一部分。全班180个学生每周两次聚集在大教室里听课，然后分成15到20人的小组在助教辅导下进行复习巩固。此外，每周还有一次实验课。

在这些讲授中，我们想要抓住的特殊问题是，要使充满热情而又相当聪明的中学毕业生进入加利福尼亚理工学院后仍旧保持他们的兴趣。他们在进入学院前就听说过不少关于物理学是如何有趣以及如何

引人入胜——相对论、量子力学以及其他的新概念。但是，一旦他们学完两年我们以前的那种课程后，许多人就泄气了，因为教给他们意义重大、新颖的现代的物理概念实在太少。他们被安排去学习像斜面、静电学以及诸如此类的内容，两年过去，没什么收获。问题在于，我们是否有可能设置一门课程能够顾全那些比较优秀的、兴致勃勃的学生，使其保持求知热情。

我们所讲授的课程丝毫也不意味着是一门概况性的课程，而是极其严肃的。我想这些课程是对班级中最聪明的学生而讲的，并且可以肯定，这可能是对的，甚至最聪明的学生也无法完全消化讲课中的所有内容——其中加入了除主要讨论的内容之外的有关思想和概念多方面应用的建议。不过，为了这个缘故，我力图使所有的陈述尽可能准确，并在每种场合都指明有关的方程式和概念在物理学的主体中占有什么地位，以及——随着他们学习深入——应怎样作出修正。我还感到，重要的是要向这样的学生指出，他们应能理解——如果他们够聪明的话——哪些是从已学过的内容中推演出来的，哪些是作为新的概念而引进的。当出现新的概念时，假若这些概念是可推演的，我就尽量把它们推演出来，否则就直接说明这是一个新的概念，它根本不能用已学过的东西来阐明，也不可能予以证明，而是直接引进的。

在讲授开始时，我假定学生们在中学已学过一些内容，如几何光学、简单的化学概念，等等。我也看不出有任何理由要按一定的次序来讲授。就是说没有详细讨论某些内容之前，不可以提到这些内容。在讲授中，有许多当时还没有充分讨论过的内容出现。这些内容比较完整的讨论要到以后学生的预备知识更齐全时再进行。电感和能级的概念就是例子，起先，只是以非常定性的方式引入这些概念，后来再进行较全面的讨论。

在针对那些较积极的学生的同时，我也要照顾到另一些学生，对他们来说，这些外加的五彩缤纷的内容和不重要的应用只会使其感到头痛，也根本不能要求他们掌握讲授中的大部分内容。对这些学生而言，我要求他们至少能学到中心内容或材料的脉络。即使他不理解一堂课中的所有内容，我希望他也不要紧张不安。我并不要求他理解所有的内容，只要求他理解核心的和最确切的面貌。当然，对他来说也应当具有一定的理解能力，来领会哪些是主要定理和主要概念，哪些则是更高深的枝节问题和应用，这些要过几年他才会理解。

在讲课过程中有一个严重困难：在课程的讲授过程中一点也没有学生给教师的反馈来指示讲授的效果究竟如何。这的确是一个很严重的困难，我不知道讲课的实际效果的好坏。整个事件实质上是一种实验。假如要再讲一次的话，我将不会按同样的方式去讲——我希望我不再会再来一次！然而，我想就物理内容来说，第一年的情形看来还是十分满意的。

但在第二年，我就不那么满意了。课程的第一部分涉及电学和磁学，我想不出什么真正独特的或不同的处理方法，也想不出什么比通常的讲授方式格外引人入胜的方法。因此在讲授电磁学时，我并不认为自己做了很多事情。在第二年末，我原来打算在电磁学后再多讲一些物性方面的内容，主要讨论这样一些内容如基本模式、扩散方程的解、振动系统、正交函数等等，并且阐述通常称为“数学物理方法”的初等部分内容。回顾起来，我想假如再讲一次的话，我会回到原来的想法上去，但由于没有要我再讲这些课程的打算，有人就建议介绍一些量子力学——就是你们将在第3卷中见到的——或许是有益的。

显然，主修物理学的学生们可以等到第三年学量子力学。但是，另一方面，有一种说法认为许多听我们课的学生是把学习物理作为他

们对其他领域的主要兴趣的背景；而通常处理量子力学的方式对大多数学生来说这些内容几乎是无用的，因为他们必须花费相当长的时间来学习它。然而，在量子力学的实际应用中——特别是较复杂的应用中，如电机工程和化学领域内——微分方程处理方法的全部工具实际上是用不到的。所以，我试图这样来描述量子力学的原理，即不要求学生首先掌握有关偏微分方程的数学。我想，即使对一个物理学家来说，我想试着这样做——按照这种颠倒的方式来介绍量子力学——是一件有趣的事，由于种种理由，这从讲课本身或许会明白。不过我认为，在量子力学方面的尝试不是很成功，这主要是因为在最后我实际上已没有足够的时间（例如，我应该再多讲三四次来比较完整地讨论能带、概率幅的空间的依赖关系等这类问题）。而且，我过去从未以这种方式讲授过这部分课程，因此缺乏来自学生的反馈就尤其严重了。我现在相信，还是应当迟一些讲授量子力学。或许有一天我会有机会再来讲授这部分内容，到那时我将会讲好它。

在这本讲义中没有列入有关解题的内容，这是因为另有辅导课。虽然在第一年中，我的确讲授过三次关于怎样解题的内容，但没有将它们收在这里。此外，还讲过一次惯性导航，应该在转动系统后面，遗憾的是在这里也略去了。第五讲和第六讲实际上是桑兹讲授的，那时我正外出。

当然，问题在于我们这个尝试的效果究竟如何。我个人的看法是悲观的，虽然与学生接触的大部分教师似乎并不都有这种看法。我并不认为自己在对待学生方面做得很出色。当我看到大多数学生在考试中采取的处理问题的方法时，我认为这种方式是失败了。当然，朋友们提醒我，也有一二十个学生——非常出人意外地——几乎理解讲授的全部内容，并且非常积极地攻读有关材料，兴奋地、感兴趣地钻研

许多问题。我相信，这些学生现在已具备了一流的物理基础，他们毕竟是我想要培养的学生。但是，“教育之力量鲜见成效，除非施之于天资敏悟者，然若此又实为多余。”[吉本（Gibbon）^[1]]

但是，我并不想使任何一个学生完全落在后面，或许我曾经这样做的。我想，我们能够更好地帮助学生的一个办法是，多花一些精力去编纂一套能够阐明讲课中的某些概念的习题。习题能够充实课堂讲授，使讲过的概念更加实际，更加完整和更加易于牢记。

然而，我认为要解决这个教育问题就要认识到最佳的教学只有当学生和优秀的教师之间建立起个人的直接关系，在这种情况下，学生可以讨论概念、考虑问题、谈论问题，除此之外，别无他法。仅仅坐在课堂里听课或者只做指定的习题是不可能学到许多东西的。但是，现在我们有这么多学生要教育，因此我们必须尽量找出一种代替理想情况的办法。或许，我的讲义可以作出一些贡献；也许在某些小地方有个别教师和学生会从讲义中受到一些启示或获得某些观念，当他们彻底思考讲授内容，或者进一步发展其中的一些想法时，他们或许会得到乐趣。

理查德·费曼

1963年6月

[1] Edward Gibbon（1737—1794），英国历史学家。——译者注

前言

近40年来，费曼一直把他的好奇心集中在物理世界产生的奥秘上，而把他的聪明才智全部用于探寻物理世界的混乱中的秩序。现在，他花了两年的心血和精力为低年级的学生讲授物理课。为了他们，他把自己知识的精华提取出来，并创造条件使他们有望在听课期间能够了解物理学家关于宇宙的图像。他把他卓越而清晰的思想、独创性和生气勃勃的思想方法以及演讲中富有感染力的热情都带到了他的讲授中。看到这些非同寻常之处是令人高兴的。

第一年的讲授构成了这套书第1卷的基础。在这第2卷中我们尽力对第二年讲授的部分录音做了整理加工，这部分内容是供1962—1963学年中大学二年级学生用的。第二学年讲授的其余部分将编辑成第3卷。

在第二年的讲授中，前面三分之二的的内容致力于对物理学中的电学和磁学部分做相当完整的处理。讲授的这种形式想要达到两个目的。首先，我们希望就这个物理学中极为重要的章节——从富兰克林的早期摸索，到贯穿麦克斯韦的伟大综合；从关于物质性质的洛伦兹电子论，到最后仍不能解决的电磁自能的两难处境问题——给学生一个完整的观念。其次，我们希望通过一开始引进矢量场的微分运算，从而为场论数学提供一个坚实的可靠的导论。为了强调数学方法普遍的统一性，有时把物理学其他部分的内容与它在电学中相类似的内容放在一起进行分析。我们不断设法把数学的普遍性讲透彻（相同的方程

具有相同的解)。同时,通过本课程所提供的各类练习和测验来加强这个观点。

继电磁学之后是弹性和流体的流动^[1],这两部分各有两章。每个部分的前面一章处理基本而实际方面的情况,后一章试图对这部分内容所涉及现象的整个范围给出一个概述。这四章完全可以略去不讲而不会有严重的损失,因为它们对第3卷来说并不全是必备的。

第二学年后面大约四分之一的内容用于介绍量子力学。这些材料已经编入第3卷。

我们期望在编写这本费曼讲义中所记录的内容,要比仅提供他谈话录音做得更好一些。我们希望使得这个编写本尽可能清楚地阐述原始讲授中的根本思想。对于讲授的某些内容,可能仅对原始录音中的措辞做了较小的校正;对另外一些讲授内容,则需要对有关材料做较大的改编和重新安排。有时感到为了使保留的内容变得更清晰和协调,应该添加一些新材料。在这整个过程中,费曼教授不断地帮助和建议使我们受益良多。

在很紧的日程内要将一百多万字的口头语言转化成相互协调的课文,是一个非常艰巨的任务,尤其是随着新课程的采用,带来了其他繁重的负担——备课、会见和指导学生、设计练习和考试题目等等。许多人都被卷入到这个工作中来了。我相信,我们在某些场合已经能够描绘出原始作者费曼的真实形象——稍微修饰的肖像画;在另外的场合,还远没有达到这个理想情形。我们的成就应归功于所有帮助过我们的人。对于不足之处,我们表示抱歉。

正如在第1卷编者的话中所详细说明的那样，这套讲义仅是加州理工学院课程改革委员会的莱顿（R.B.Leighton）主席、内尔（H.V.Neher）及桑兹（M.Sands）拟订和支持的教学大纲的一个方面，这个大纲得到福特基金会的财政资助。另外，对第2卷正文材料准备工作的不同方面提供帮助的有下列人员：考伊（T.K.Caughey）、克莱顿（M.L.Clayton）、柯西奥（J.B.Curcio）、哈特尔（J.B.Hartle）、哈维（T.W.H.Harvey）、伊斯雷尔（M.S.Israel）、卡泽斯（W.J.Karzas）、卡瓦诺（R.W.Kavanagh）、R.B. 莱顿、马修斯（J.Mathews）、普莱西特（M.S.Plesset）、沃伦（F.L.Warren）、惠林（W.Whaling）、威尔茨（C.H.Wilts）及齐默尔曼（B.Zimmerman）。由于他们的工作而对本课程做出间接贡献的其他人员有：布卢（J.Blue）、查普林（G.F.Chapline）、克劳泽（M.J.Clauser）、多伦（R.Dolen）、希尔（H.H.Hill）及蒂特勒（A.M.Title）。诺伊格鲍尔（G.Neugebauer）教授以他的勤奋、热心和极端负责为我们这个任务的各个方面做出了贡献。

然而，要不是费曼的非凡才能和勤奋，物理学上的这个故事就不存在了。

M. 莱顿

1964年3月

[1] 在本书新版中，电磁学后面除弹性和流动的流体外，新增加了一章——弯曲空间。
——译者注

目 录

[译者序](#)

[关于费曼](#)

[新千年版前言](#)

[费曼自序](#)

[前言](#)

[第1章 电磁学](#)

[§1-1 电力](#)

[§1-2 电场和磁场](#)

[§1-3 矢量场的特征](#)

[§1-4 电磁学定律](#)

[§1-5 场是什么](#)

[§1-6 科学技术中的电磁学](#)

[第2章 矢量场的微分运算](#)

[§2-1 对物理学的理解](#)

[§2-2 标量场和矢量场—— \$T\$ 与 \$h\$](#)

[§2-3 场的微商——梯度](#)

[§2-4 算符 \$\nabla\$](#)

[§2-5 \$\nabla\$ 的运算](#)

[§2-6 热流的微分方程](#)

[§2-7 矢量场的二阶微商](#)

[§2-8 陷阱](#)

[第3章 矢量积分运算](#)

[§3-1 矢量积分： \$\nabla\psi\$ 的线积分](#)

§3-2 矢量场的通量

§3-3 来自小立方体的通量；高斯定理

§3-4 热传导；扩散方程

§3-5 矢量场的环流

§3-6 围绕一正方形的环流；斯托克斯定理

§3-7 无旋度场与无散度场

§3-8 总结

第4章 静电学

§4-1 静电

§4-2 库仑定律；叠加原理

§4-3 电势

§4-4 $E = -\nabla \phi$

§4-5 E 的通量

§4-6 高斯定理； E 的散度

§4-7 带电球体的场

§4-8 场线；等势面

第5章 高斯定律的应用

§5-1 静电学就是高斯定律加.....

§5-2 静电场中的平衡

§5-3 有导体时的平衡

§5-4 原子的稳定性

§5-5 线电荷的场

§5-6 面电荷；平行板

§5-7 带电球体；球壳

§5-8 点电荷的场是否精确为 $1/r^2$

§5-9 孤立导体的场

§5-10 导体空腔内的场

第6章 在各种情况下的电场

§6-1 静电势的方程组

§6-2 电偶极子

§6-3 矢量方程述评

§6-4 偶极子势的梯度表示

§6-5 任意电荷分布的偶极子近似

§6-6 带电导体的场

§6-7 镜像法

§6-8 导电平面附近的点电荷

§6-9 导电球体附近的点电荷

§6-10 电容器与平行极板

§6-11 高（电）压击穿

§6-12 场致发射显微镜

第7章 在各种情况下的电场（续）

§7-1 求静电场的各种方法

§7-2 二维场；复变函数

§7-3 等离子体振荡

§7-4 电解质内的胶态粒子

§7-5 栅极的静电场

第8章 静电能

§8-1 电荷的静电能；均匀带电球

§8-2 电容器的能量；作用于带电导体上的力

§8-3 离子晶体的静电能

§8-4 核内的静电能

§8-5 静电场中的能量

§8-6 点电荷的能量

第9章 大气中的电学

§9-1 大气的电势梯度

§9-2 大气中的电流

§9-3 大气电流的来源

§9-4 雷暴雨

§9-5 电荷分离的机制

§9-6 闪电

第10章 电介质

§10-1 介电常量

§10-2 极化矢量 P

§10-3 极化电荷

§10-4 有电介质时的静电方程组

§10-5 有电介质时的场和力

第11章 在电介质内部

§11-1 分子偶极子

§11-2 电子极化强度

§11-3 极性分子；取向极化

§11-4 电介质空腔里的电场

§11-5 液体的介电常量；克劳修斯-莫索提方程

§11-6 固态电介质

§11-7 铁电现象； BaTiO_3

第12章 静电模拟

§12-1 相同的方程组具有相同的解

§12-2 热流；无限大平面边界附近的点源

§12-3 绷紧的薄膜

§12-4 中子扩散；均匀媒质中的均匀球形源

§12-5 无旋流体的流动：从球旁经过的流动

§12-6 照度：对平面的均匀照明

§12-7 自然界的“基本统一性”

第13章 静磁学

§13-1 磁场

§13-2 电流：电荷守恒

§13-3 作用于电流上的磁力

§13-4 恒定电流的磁场：安培定律

§13-5 直导线与螺线管的磁场：原子电流

§13-6 磁场与电场的相对性

§13-7 电流与电荷的变换

§13-8 叠加原理：右手定则

第14章 在各种不同情况下的磁场

§14-1 矢势

§14-2 已知电流的矢势

§14-3 直导线

§14-4 长螺线管

§14-5 一个小电流回路的场：磁偶极子

§14-6 电路的矢势

§14-7 毕奥-萨伐尔定律

第15章 矢势

§15-1 作用于一电流回路上的力：偶极子能量

§15-2 机械能与电能

§15-3 恒定电流的能量

§15-4 B 与 A 的对比

§15-5 矢势与量子力学

§15-6 对静态是对的而对动态将是错的

第16章 感生电流

§16-1 电动机与发电机

§16-2 变压器与电感

§16-3 作用于感生电流上的力

§16-4 电工技术

第17章 感应定律

§17-1 感应的物理过程

§17-2 “通量法则”的一些例外

§17-3 感生电场使粒子加速：电子感应加速器

§17-4 一个佯谬

§17-5 交流发电机

§17-6 互感

§17-7 自感

§17-8 电感与磁能

第18章 麦克斯韦方程组

§18-1 麦克斯韦方程组

§18-2 新的项是如何起作用的

§18-3 全部经典物理学

§18-4 行移场

§18-5 光速

§18-6 求解麦克斯韦方程组：势和波动方程

第19章 最小作用量原理

§19-1 专题演讲（完全按演讲记录付印）

§19-2 演讲后补充的一段笔记

第20章 麦克斯韦方程组在自由空间中的解

§20-1 自由空间中的波：平面波

§20-2 三维波

[§20-3 科学的想象](#)

[§20-4 球面波](#)

[第21章 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解](#)

[§21-1 光与电磁波](#)

[§21-2 由点源产生的球面波](#)

[§21-3 麦克斯韦方程组的通解](#)

[§21-4 振荡偶极子的场](#)

[§21-5 运动电荷的势：李纳和维谢尔通解](#)

[§21-6 匀速运动电荷的势：洛伦兹公式](#)

[第22章 交流电路](#)

[§22-1 阻抗](#)

[§22-2 发电机](#)

[§22-3 理想元件网络：基尔霍夫法则](#)

[§22-4 等效电路](#)

[§22-5 能量](#)

[§22-6 梯形网络](#)

[§22-7 滤波器](#)

[§22-8 其他电路元件](#)

[第23章 空腔共振器](#)

[§23-1 实际电路元件](#)

[§23-2 在高频时的电容器](#)

[§23-3 共振空腔](#)

[§23-4 腔模](#)

[§23-5 空腔与共振电路](#)

[第24章 波导](#)

[§24-1 传输线](#)

[§24-2 矩形波导](#)

[§24-3 截止频率](#)

[§24-4 导波的速率](#)

[§24-5 导波的观测](#)

[§24-6 波导管](#)

[§24-7 波导模式](#)

[§24-8 另一种看待导波的方法](#)

[第25章 用相对论符号表示的电动力学](#)

[§25-1 四维矢量](#)

[§25-2 标积](#)

[§25-3 四维梯度](#)

[§25-4 用四维符号表示的电动力学](#)

[§25-5 运动电荷的四维势](#)

[§25-6 电动力学方程组的不变性](#)

[第26章 场的洛伦兹变换](#)

[§26-1 运动电荷的四维势](#)

[§26-2 匀速点电荷的场](#)

[§26-3 场的相对论变换](#)

[§26-4 用相对论符号表示的运动方程](#)

[第27章 场的能量和场的动量](#)

[§27-1 局域守恒](#)

[§27-2 能量守恒与电磁学](#)

[§27-3 电磁场中的能量密度和能流](#)

[§27-4 场能的不确定性](#)

[§27-5 能流实例](#)

[§27-6 场的动量](#)

[第28章 电磁质量](#)

[§28-1 点电荷场的能量](#)

[§28-2 运动电荷场的动量](#)

[§28-3 电磁质量](#)

[§28-4 电子作用于其自身上的力](#)

[§28-5 改进麦克斯韦理论的尝试](#)

[§28-6 核力场](#)

[第29章 电荷在电场和磁场中的运动](#)

[§29-1 在匀强电场或匀强磁场中的运动](#)

[§29-2 动量分析](#)

[§29-3 静电透镜](#)

[§29-4 磁透镜](#)

[§29-5 电子显微镜](#)

[§29-6 加速器中的导向场](#)

[§29-7 交变梯度聚焦法](#)

[§29-8 在交叉的电场和磁场中的运动](#)

[第30章 晶体的内禀几何](#)

[§30-1 晶体的内禀几何](#)

[§30-2 晶体中的化学键](#)

[§30-3 晶体生长](#)

[§30-4 晶格](#)

[§30-5 二维对称性](#)

[§30-6 三维对称性](#)

[§30-7 金属强度](#)

[§30-8 位错与晶体生长](#)

[§30-9 布拉格-奈晶体模型](#)

[第31章 张量](#)

[§31-1 极化张量](#)

[§31-2 张量分量的变换](#)

[§31-3 能量椭球](#)

[§31-4 其他张量；惯量张量](#)

[§31-5 叉积](#)

[§31-6 应力张量](#)

[§31-7 高阶张量](#)

[§31-8 电磁动量的四维张量](#)

[第32章 稠密材料的折射率](#)

[§32-1 物质的极化](#)

[§32-2 在电介质中的麦克斯韦方程组](#)

[§32-3 电介质中的波](#)

[§32-4 复折射率](#)

[§32-5 混合物的折射率](#)

[§32-6 金属中的波](#)

[§32-7 低频近似与高频近似；趋肤深度与等离子体频率](#)

[第33章 表面反射](#)

[§33-1 光的反射与折射](#)

[§33-2 稠密材料中的波](#)

[§33-3 边界条件](#)

[§33-4 反射波与透射波](#)

[§33-5 金属上的反射](#)

[§33-6 全内反射](#)

[第34章 物质的磁性](#)

[§34-1 抗磁性和顺磁性](#)

[§34-2 磁矩与角动量](#)

[§34-3 原子磁体的进动](#)

[§34-4 抗磁性](#)

[§34-5 拉莫尔定理](#)

[§34-6 经典物理不会提供抗磁性或顺磁性](#)

[§34-7 量子力学中的角动量](#)

[§34-8 原子的磁能](#)

[第35章 顺磁性](#)

[§35-1 量子化磁态](#)

[§35-2 斯特恩-格拉赫实验](#)

[§35-3 拉比分子束法](#)

[§35-4 大块材料的顺磁性](#)

[§35-5 绝热退磁冷却法](#)

[§35-6 核磁共振](#)

[第36章 铁磁性](#)

[§36-1 磁化电流](#)

[§36-2 \$H\$ 场](#)

[§36-3 磁化曲线](#)

[§36-4 铁芯电感](#)

[§36-5 电磁铁](#)

[§36-6 自发磁化](#)

[第37章 磁性材料](#)

[§37-1 已知的铁磁性](#)

[§37-2 热力学性质](#)

[§37-3 磁滞回线](#)

[§37-4 铁磁材料](#)

[§37-5 特殊磁性材料](#)

[第38章 弹性学](#)

[§38-1 胡克定律](#)

[§38-2 均匀应变](#)

[§38-3 扭转的棒；剪切波](#)

[§38-4 弯曲的梁](#)

[§38-5 弯折](#)

[第39章 弹性材料](#)

[§39-1 应变张量](#)

[§39-2 弹性张量](#)

[§39-3 在弹性体中的运动](#)

[§39-4 非弹性行为](#)

[§39-5 计算弹性常量](#)

[第40章 干水的流动](#)

[§40-1 流体静力学](#)

[§40-2 运动方程](#)

[§40-3 定常流——伯努利定理](#)

[§40-4 环流](#)

[§40-5 涡线](#)

[第41章 湿水的流动](#)

[§41-1 黏性](#)

[§41-2 黏性流动](#)

[§41-3 雷诺数](#)

[§41-4 经过一圆柱体的流动](#)

[§41-5 零黏性极限](#)

[§41-6 库埃特流动](#)

[第42章 弯曲空间](#)

[§42-1 二维弯曲空间](#)

[§42-2 三维空间的曲率](#)

[§42-3 我们的空间是弯曲的](#)

[§42-4 时空中的几何学](#)

[§42-5 引力与等效原理](#)

[§42-6 在引力场中钟的快慢](#)

[§42-7 时空的曲率](#)

[§42-8 在弯曲时空中的运动](#)

[§42-9 爱因斯坦的引力理论](#)

[索引](#)

[附录](#)

[返回总目录](#)

第1章 电磁学

§1-1 电力

现在来考虑一种力，它也像引力那样与距离平方成反比地变化，但比引力要强约一万亿亿亿倍。另外，还有一个区别，即存在两种我们可称之为正的和负的“物质”，种类相同的相斥，不同的相吸。这就不像引力，那里只存在吸引。这样，会出现什么情景呢？

一堆正的物质会以巨力互相排斥，并向四面八方散开，一堆负的物质亦是如此。但一堆正、负物质的均匀混合物就完全不同了。相反的物质会以巨大的吸引力互相拉挽着，净结果将把那些可怕的斥力差不多完全抵消了，这是通过形成紧密而精致的正、负物质的混合体而达到的，而这样两堆分开着的混合体之间实际上就不再存在任何引力或斥力了。

确实存在这样一种力——电力。世间万物都是由此种巨力互相吸引和排斥着的正的质子与负的电子所组成的混合物。然而，平衡竟是那么完善，以致当你站在别人旁边时也根本没有任何受力的感觉。这时，即使只有一点点不平衡，你都会觉察到。例如，要是你站在别人旁边相距只有一臂之遥，而且各自都具有比本身的质子仅多出百分之二的电子，那两人间的排斥力就会大得不得了！多大呢？足以举起那座帝国大厦^[1]？不！举起珠穆朗玛峰？不！这个斥力应足以举起相当于整个地球的“重量”！

由于在这种致密混合物中这些巨力完美地达到了平衡，所以我们就并不难理解：当物质试图保持其正、负电荷最细致的平衡时，它能具有多大的硬度与强度。例如，帝国大厦在风中之所以摇摆小于一英寸，是因为电力把每一个电子与质子或多或少地保持在其适当位置上。另一方面，如果我们在一个足够小的尺度范围内观察物质，使得只能看到几个原子，那么任一小部分就往往不会有相等数目的正电荷和负电荷，从而会存在强大的剩余电力。即使在相邻两小部分中两种电荷的数目相等，也仍然有可能拥有巨大的净电力，因为各电荷之间的力是与距离的平方成反比的。如果一部分中的负电荷，与另一部分中的正电荷靠得较近、而与负电荷离得较远，则净力就会产生。因此，吸引力可能大于排斥力，从而在两个不带额外电荷的小块中就有一个净吸引力存在。那种把各原子结合在一起的力，以及把各分子保持在一起的化学力，其实都是电力，它们在电荷的平衡不够完善、或在距离十分微小的那些区域里才起作用。

当然，你会知道，原子是由位于其核内的正的质子和核外的负电子所构成的。你也许会问：“如果这种电力那么厉害，为什么质子和电子不会正好一个紧挨着一个呢？如果它们想要形成一个紧密的混合体，为什么不会更紧密些呢？”这问题必须用量子效应来回答。要是试图把电子限制在一个很接近于质子的区域中，那么按照不确定性原理它们就得拥有一个均方动量，若我们把它们限制得越紧，这个均方动量就越大。正是这一种由量子力学规律所支配的运动，才使得电的吸引力不会把这两个电荷移得更接近些。

还有一个问题。在原子核内有若干个质子，它们全都带着正电荷，为什么它们不会互相推开呢？“是什么东西把它们结合在一起的呢？”事实是，在原子核内部，除了电力之外还存在一种称为核力的非

电力，它比电力还要大，因而尽管有电的排斥力，它仍然能够把那些质子维持在一起。然而，核力是短程力——该力下降得比 $1/r^2$ 急剧得多。这就产生了一个重要后果：如果一个核所含质子过多，则该核就变得太大，它便不会持久维持。铀就是这么一个例子，它含有92个质子。核力主要在每个质子（或中子）与其最近邻质子（或中子）之间起作用，而电力则在较大的距离范围内起作用，使每个质子与核内所有其他质子之间都具有排斥力。在一个核内质子的数目越多，这电的排斥作用就越强，直到铀那种情况，平衡是那么脆弱，以至于排斥性电力使得核几乎就要飞散了。这么一个核，如果稍微“轻轻敲”一下（就像曾经送进一个慢中子那样），则它就会破裂成各带有正电荷的两片，而这些裂片由于电的排斥力而飞散开去。释放出来的能量就是原子弹的能量。这种能量通常称为“核”能，但实际上却是当电力克服了吸引力核力时所释放出来的“电”能。

最后，我们还可能会问，是什么东西把带负电的电子保持在一起呢（因为它没有核力）？如果电子全都是由一种物质构成的，那它的每一部分理应排斥其他各部分，但又为什么不会飞散呢？不过，电子是否还含有“各部分”？也许，我们应该说电子只是一个点，而电力只是在不同的点电荷之间起作用，以致电子不会作用于其本身。或许是这样吧。关于电子由什么东西束缚在一起，我们只能说到这里。这个问题对于试图建立一套完整的电磁学理论产生了不少困难，而且至今没有做出解答。我们将在以后某些章节中对这一课题多做些讨论，以为我们大家助兴。

正如我们已经见到的那样，应该指望电力与量子力学效应相结合来确定整块材料的细致结构，从而确定它们的特性。有的材料硬，有的材料软。有的是电的“导体”——因为它们中的电子能够自由运动；

其他则是“绝缘体”——因为其中的电子被牢固地束缚在各个原子内。这些性质是如何得来的？那是一个十分复杂的课题，我们将在以后加以讨论。因而现在仅就一些简单情况下的电力进行考察，也就是说，现在着手处理电方面——也包括磁方面（那实际上是同一课题的另一个部分）——的规律。

我们曾经说过，和引力相似，电力与电荷间距离的平方成反比地减弱，这一关系叫作库仑定律。但当电荷运动时，这一定律就不完全准确——电力也以一种复杂的方式依赖于电荷的运动。运动电荷之间的作用力，有一部分我们称之为磁力，事实上，它是电效应的一个方面。这也是为什么要把这一课题叫作“电磁学”的缘故。

由于存在着一个重要的普遍原理，因而有可能以相对简单的方式来处理电磁力。我们从实验发现，作用于某一特定电荷上的力——不管其他电荷的数量和运动方式如何——只取决于该特定电荷的位置、速度以及所带的电荷量。我们可把作用于一个以速度 $\mathbf{v}$ 运动的电荷 q 上的力 $\mathbf{F}$ 写成：

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.1)$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别叫作电荷所在处的电场和磁场。重要的是，来自宇宙中所有其他电荷的力都可用刚才给出的这两个矢量叠加而成。它们的值将取决于这一电荷位于何处，并且可能随时间而改变。此外，如果我们用另一个电荷来代替该电荷，只要世界上所有其他电荷都不改变其位置和运动，则作用于这一新电荷上的力恰好与其电荷量成正比。当然，在实际情况中，每一电荷对邻近的所有其他电荷都产生力，从而可能引起这些电荷运动。所以在某些情况下，如果我们用另一个电荷来代替该特定电荷，则场可能改变。

我们从第1卷已经懂得若知道了作用在一个质点上的力，应怎样去求出该质点的运动。可以把式（1.1）和运动方程相结合而得出：

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

因此若 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 已知，则可以求得运动。现在我们需要弄清楚 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是怎样产生的。

关于电磁场产生方法最重要的简化原理之一是：假设若干个以某种方式运动的电荷产生一个场 $\mathbf{E}_1$ ，而另一组电荷产生场 $\mathbf{E}_2$ ，而这两组电荷同时被置于原来的位置（保持它们被分别考虑时具有的相同的位置和相同的运动），那么所产生的场恰好是两个场的和，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (1.3)$$

这一个事实称为场的叠加原理。这原理也适用于磁场。

这一原理意味着，如果知道了关于以任意方式运动的单个电荷所产生的电场和磁场的规律，那么所有电动力学的规律就告齐全了。如果我们想要知道作用于电荷 A 上的力，就只需算出由 B ， C ， D 等各电荷所产生的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，然后把所有电荷产生的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别相加而求得总场，再从这两个总场求得作用于电荷 A 的力。只要结果证明，由单个电荷产生的场很简单，那么这就是描写电动力学规律的最简洁方法。可惜，我们已给出了这一定律的描述（第1卷第28章），那是相当复杂的。

事实证明，电动力学规律在其中最为简单的那一种形式，并非人们可以期望的。要写出一个电荷对另一个电荷所产生的力的公式，并

非那么容易。的确，当电荷静止不动时，库仑力的定律是十分简单的。但当电荷运动时，由于时间上的延迟和加速度的影响以及其他一些缘故，关系就变得复杂了。因此，我们并不希望仅仅凭作用于各电荷间的力的规律来介绍电动力学；而发现更方便的是去考虑另一个观点——那是电动力学规律表现得最易于处理的一种观点。

§1-2 电场和磁场

首先，我们必须对电和磁矢量即 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的概念稍做推广。依据一个电荷所感受到的力，我们已对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 下了定义。现在我们想要谈谈即使没有电荷存在的某一点 的电场和磁场。实际上，既然有力“作用在”电荷上，则当电荷移去时，那里仍存在“某种东西”。如果位于点 (x, y, z) 上的电荷、在时刻 t 感受到由式 (1.1) 所给出的力 $\mathbf{F}$ ，则我们便可以把矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 与空间中该点 (x, y, z) 联系起来。可以认为 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 和 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 给出了力，即可被位于 (x, y, z) 点的电荷、在时刻 t 体验到那个力，同时满足这样一个条件：在那里放置该电荷，并不扰动 产生这场的的所有其他电荷的位置或运动。

根据这一概念，我们把空间中每一点 (x, y, z) 与两个矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 相联系，它们也可能会随时间而改变，于是，电场和磁场就可视为 x, y, z 和 t 的矢量函数。既然一个矢量由其各分量所确定，所以场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 就代表了 x, y, z 和 t 的三个数学函数。

正因为 $\mathbf{E}$ （或 $\mathbf{B}$ ）可以在空间每一点被规定下来，所以它才被称为“场”。所谓“场”，就是在空间不同点上会取不同值的一种物理量。

例如，温度就是一种场——在这一情况下是一标量场，我们把它写成 $T(x, y, z)$ 。温度也可能随时间变化，那么我们应称温度场与时间有关，从而把它写成 $T(x, y, z, t)$ 。另一例为流动液体的“速度场”，我们把时刻 t 空间每一点的液体速度写成 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ，它是一个矢量场。

回到电磁场方面来，虽然它们是按复杂公式由电荷所产生的，但却具有如下重要特性：在空间一点的场值与一邻近点的场值之间存在十分简单的关系。仅凭几个以微分方程表达的这种关系，我们就能把场完整地描述出来。正是依靠这样的方程式，电动力学规律才得以被最简洁地写出。

曾有过种种发明，试图帮助人们把场的行为形象化。其中最正确也最抽象的一种是：仅认为场是位置与时间的数学函数。我们可以尝试通过在空间的许多点各画出一些矢量来获得一个关于场的思维图像，其中每一矢量给出该点场的强度和方向。这一表达方式如图1-1所示。另外，我们还可以进一步画出处处都与那些矢量相切的一些线，比如，这些线沿着那些箭头并跟踪着场的方向。当我们这样做时，就已丧失了矢量长度的痕迹，但可通过如下办法来记录场的强度即对于弱场把场线画得较疏，而对于强场则把场线画得较密。我们按惯例使通过垂直于线的每单位面积的线数与场强成正比。当然，这只是一种近似，一般说来，有时还需要在某处画一些新线以保持线数与场强相配。这样，图1-1所示的场就可由图1-2所示的场线来表示。

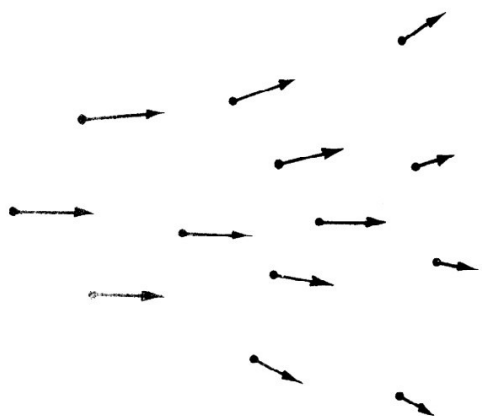


图1-1 矢量场可用一组箭头来表示。每支箭头的大小和方向为所画箭头的那一点的矢量场之值

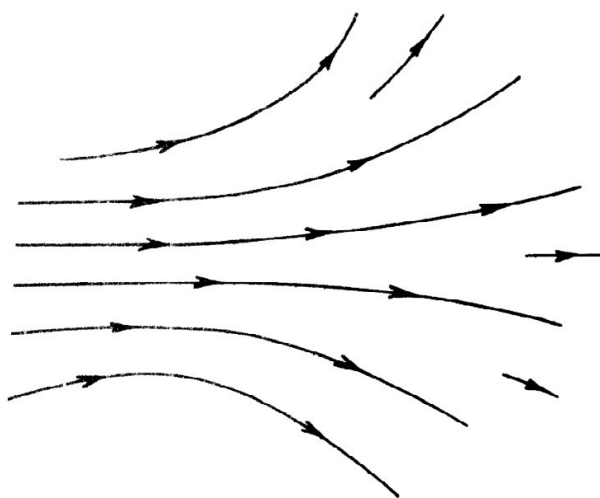


图1-2 矢量场可用一些线来表示，这些线在每一点与场矢量的方向相切，而线的密度则与场矢量的大小成正比

§1-3 矢量场的特征

矢量场在数学上有两个重要性质，我们将利用它们从场的观点来描述电学定律。若我们想象某种闭合面，并试问是否有“某种东西”从里面流失；这就是说，该场是否有一个“流出”的量？例如，对于速度

场，我们也许要问，该面上的速度是否总是向外，或更普遍地问，是否（每单位时间）流出的流体比流入的多。我们把单位时间流经该面的净流体量称为通过该面的“速度通量”。流经一个面积单元的流量恰好等于垂直该面积的速度分量乘以该面积。对于任一个闭合面，净流出量（或通量）等于速度向外的法向分量的平均值乘以该闭合曲面的面积：

$$\text{通量} = (\text{平均法向分量}) \cdot (\text{曲面的面积})。 \quad (1.4)$$

在电场的情况下，我们可以在数学上定义与流出量相类似的东西，又称作通量，但这当然不是任何物质的流动，因为电场并不是任何东西的速度。然而，事实证明，场法向分量的平均值这个数学上的量仍有其实用意义。于是，我们来谈谈电通量——这也是由式（1.4）定义的。最后，不仅谈论通过一个完全闭合曲面的通量，而且还谈论通过任一个有边界的曲面的通量，这也是很有用处的。综上所述，通过这样一个面的通量被定义为矢量的法向分量的平均值乘以该曲面的面积。这些概念如图1-3所示。

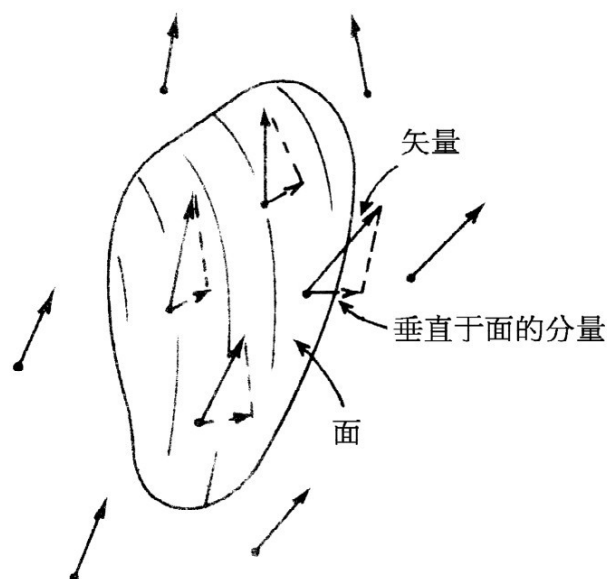


图1-3 矢量场通过一个曲面的通量，定义为矢量的法向分量的平均值乘以该曲面的面积

矢量场还有第二个性质，它必须用一条曲线而不是用一个面才能得出。让我们再来回顾一下描写液体流动的速度场，也许会提出这样一个有趣的问题：该液体是否存在环流？我们所说的环流，是指是否有围绕某个环路的净旋转运动？如图1-4所示，假定除在一条口径均匀的环状闭合管子里的液体外，液体突然处处都被冻结了。也就是说，管外的液体都停止了流动，但由于被禁锢的流体内存在着动量（这就是说，围绕管子沿一个方向的动量大于沿另一个方向的动量），所以管内的液体仍可继续流动。我们把管内液体的有效速率乘以该管周长这个量定义为环流。我们再把上述概念加以引申，而定义任一矢量场的“环流”（即使没有任何东西在流动亦然）。对于任一矢量场，绕任一想象中的闭合曲线的环流可以定义为矢量（沿一致向指）的平均切向分量乘以该回路的周长（图1-5），即

$$\text{环流} = (\text{平均切向分量}) \cdot (\text{绕行距离})。 \quad (1.5)$$

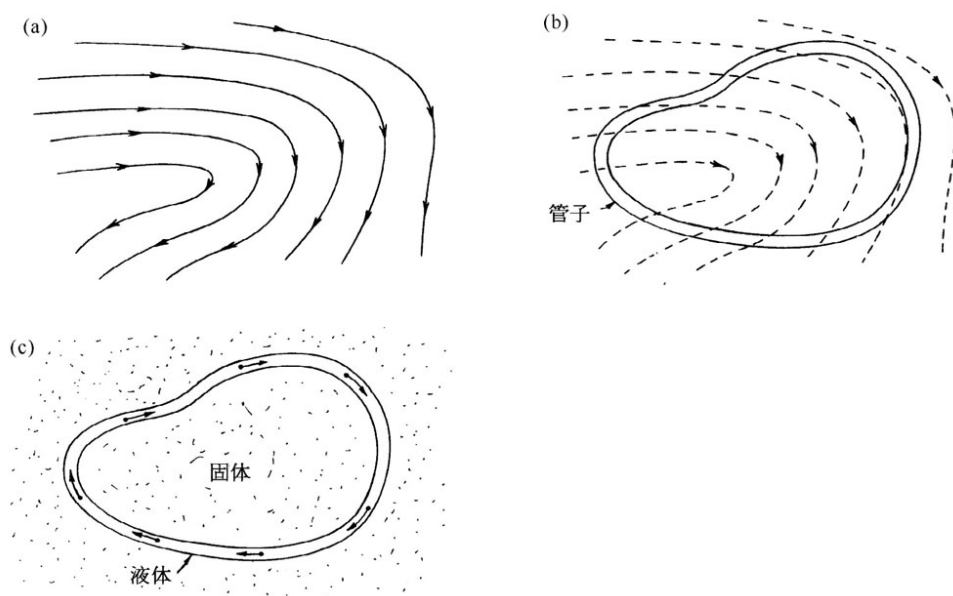


图1-4 (a) 液体中的速度场；设想有一截面均匀、按照图 (b) 所示的任一闭合曲线安放的管子；假如液体除管内的外，处处都被冻结，那么管里的液体便将按图 (c) 所示的那样循环流动

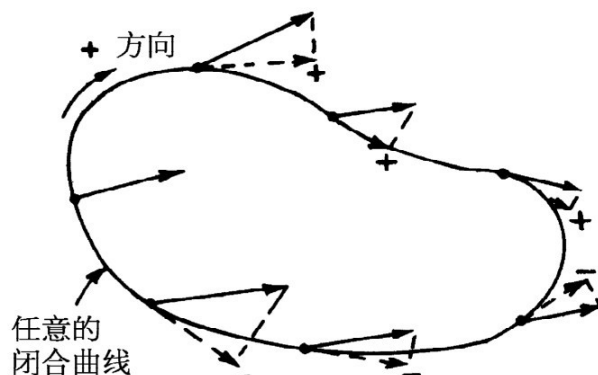


图1-5 矢量场的环流等于矢量（沿一致向指）的切向分量平均值乘以该回路的周长

你们将会看到，这一定义确实给出了一个正比于上述迅速被冻结的管子里的环流速度的数值。

只要利用这两个概念——通量与环流——我们就能立即描述电学和磁学的所有定律。你可能不会一下子就理解其意义，但它们将给出有关电磁方面物理学基本描述方法的一些概念。

§1-4 电磁学定律

电磁学第一个定律对电场通量是这样描述的：

$$E \text{ 通过任一闭合曲面的通量} = \frac{\text{曲面内的净电荷}}{\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

式中 ϵ_0 是一常数。如果在闭合曲面内没有电荷，即使在曲面外附近存在电荷， $\mathbf{E}$ 的法向分量的平均值仍然等于零，所以并没有净通量通过该曲面。为了证明这种表述是强有力的，只要再加上来自单个电荷的场是球对称的这个概念做准备，就可以证明式（1.6）与库仑定律是等同的。对于一个点电荷，我们做一个包围该电荷的球面，那么，平均法向分量就正好等于 $\mathbf{E}$ 在任一点的量值，因为这个场必定是径向的，并且在球面上的任一点具有相同的强度。现在法则讲，在球面上的电场乘以球面面积——即跑出去的通量——正比于球面内的电荷。要是使球的半径增大，则面积按半径的平方增加；电场的平均法向分量乘以该面积仍需等于球面内的电荷，因而该场必定随距离的平方减弱。这就得到了一个“负二次方的”场。

在空间如果我们有一条任意而不动的曲线，并测量电场绕该曲线的环流，那么将发现它一般不等于零（虽则对于库仑定律它为零）。更确切地说，对于电学还存在第二条定律，即对于任一以曲线 C 为边缘的（非闭合）曲面 S ，

$$\mathbf{E} \text{ 绕 } C \text{ 的环流} = \frac{d}{dt}(\text{通过 } S \text{ 的 } \mathbf{B} \text{ 的通量})。 \quad (1.7)$$

再写出下面两个有关磁场 $\mathbf{B}$ 的相应方程，我们就能完成电磁场的全部规律。

$$\mathbf{B} \text{ 通过任何闭合曲面的通量}=0。 \quad (1.8)$$

对于以曲线 C 为边界的曲面 S ，

$$c^2(\mathbf{B} \text{ 绕 } C \text{ 的环流}) = \frac{d}{dt}(\text{通过 } S \text{ 的 } \mathbf{E} \text{ 的通量}) + \frac{\text{通过 } S \text{ 的电流通量}}{\epsilon_0}。 \quad (1.9)$$

式（1.9）中出现的常数 c^2 为光速的平方，它之所以出现是由于磁实际上是电的一种相对论效应。至于插入常数 ϵ_0 ，则是为了方便地导出电流的单位。

式（1.6）～（1.9）以及式（1.1）都是电动力学的定律[2]。牛顿定律写起来虽然简单，但它会引出一大堆复杂的结果，而你要深入地学习就得花费很长时间。现在这些定律既然写起来就没有那么简单，那当然意味着其结果将更为复杂，所以我们将花大量时间才能把它们全部弄清楚。

通过做一系列小实验（这些实验在定性上表明电场和磁场的关系），我们就能验证某些电动力学定律。当你梳头时，将会对式（1.1）中的第一项有所体验，因而我们就不去证明这一项了。如图1-6所示，给悬挂在一条形磁铁上面的导线输入电流，式（1.1）中的第二项可得以演示。当电流接通时，导线由于受力 $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ 作用而发生了运动；当存在电流时，线里的电荷在运动，所以它们有一速度 $\mathbf{v}$ ，磁铁产生的磁场就会对它们施加作用力，结果把导线推向一旁。

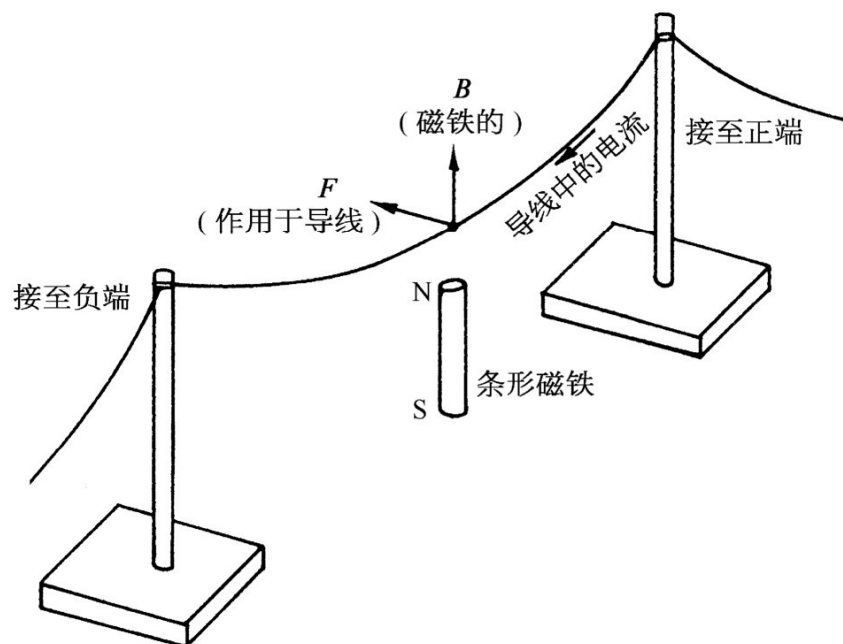


图1-6 一条形磁铁在导线处给出了磁场 B 。当有电流沿导线流动时，该导线由于受力 $F = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的作用而运动

当导线被推向左边时，我们会预料到磁铁必定感受到被推向右边。否则就可将整套设备装在一辆车子上而构成一个动量不守恒的推进系统！虽然这力太小、不足以使磁铁的运动看得见，但被更加灵敏地支撑着的一根磁铁，比如像指南针那样，就会显现出运动来。

导线为什么会推磁铁呢？导线里的电流会产生它自身的磁场，从而施力于磁铁上。按照式（1.9）中的第二项，电流必有一个 B 的环流——在这种情况下， B 线就是环绕该导线的回路，如图1-7所示。作用于磁铁上的力，就是由这 B 产生的。

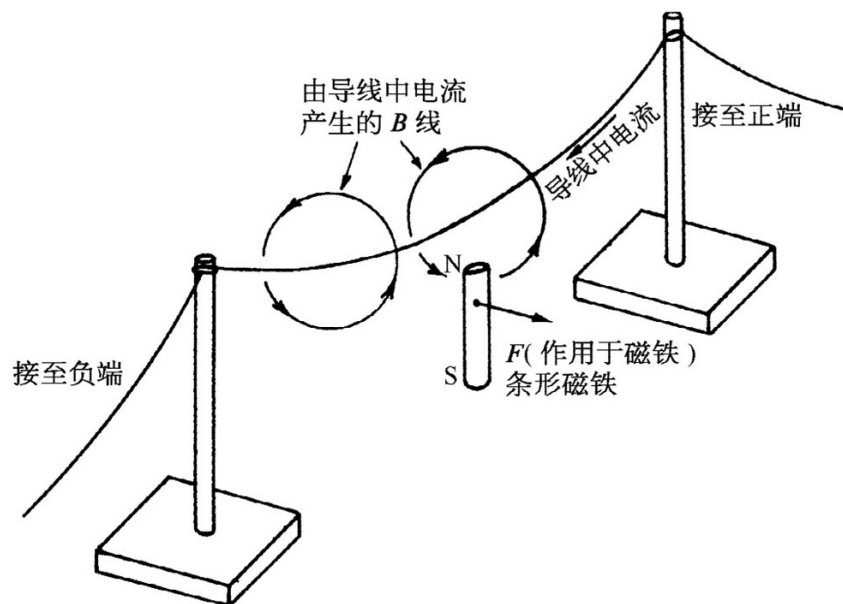


图1-7 导线的磁场施力于磁铁

式(1.9)还告诉我们，对于通过导线的一个恒定电流，对围绕导线的任何曲线 $\mathbf{B}$ 的环流都相同。由于曲线——比方说是一圆周——距离导线越远，则其周长越长， $\mathbf{B}$ 的切向分量就必然减小。你可以看到，事实上我们该期待 $\mathbf{B}$ 随着离开长直导线的距离线性地减弱。

现在，我们已经说过，流经导线的电流会产生磁场；而当有磁场存在时，就有一力作用于载有电流的导线上。于是我们也预料到，如果用导线中的电流来产生磁场，则它会对另一载流导线施一作用力。这可由采用如图1-8所示的两根悬挂导线来做演示。当两电流同向时，两导线相吸；但当两电流方向相反时，它们将相斥。

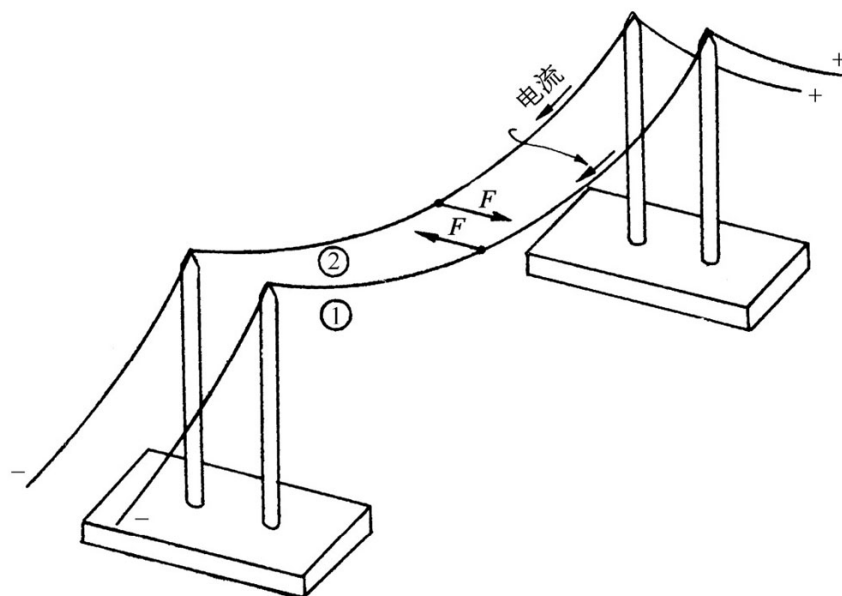


图1-8 两条通电流的导线互相有力作用着

简言之，电流和磁铁均会产生磁场。且慢！试问磁铁究竟是什么？如果磁场是由运动电荷产生的，那么，来自一块磁铁的磁场是否有可能也是由于电流的原因呢？看来确是这样。我们可以将实验中的条形磁铁用一个导电线圈来代替，如图1-9所示。当电流通过线圈——同时也有电流通过在线圈上面的那根直导线——时，我们便会观察到导线的运动与以前用磁铁而不用线圈时完全一样。换言之，线圈里的电流模仿了一块磁铁。因此，看来一块磁铁的作用就如同它含有一种永恒的环行电流一样。事实上，我们可以用铁原子中的恒定电流来理解磁铁。在图1-7中，作用在磁铁上的力就是由式（1.1）中的第二项引起的。

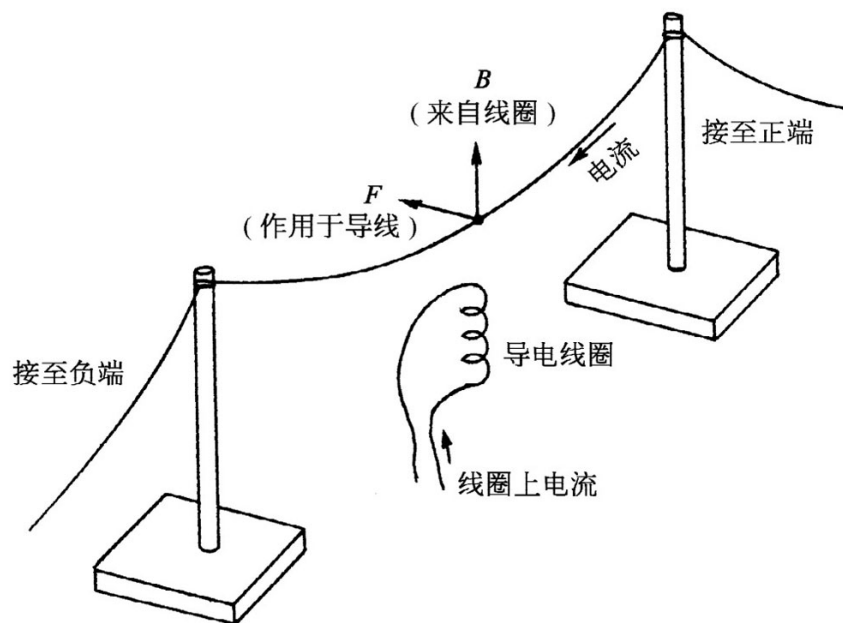


图1-9 图1-6中的磁铁可用一个载流线圈来代替，有一相似的力作用在导线上

究竟这些电流是从哪里来的呢？一种可能来自原子轨道中电子的运动。实际上虽然对于某些材料来说这是正确的，但对铁来说却是不正确的。一个电子，除了在原子中环行之外，还绕它本身的轴旋转——有些像地球的自转——正是由于自旋所产生的电流才为铁提供了磁场（我们说“有些像地球的自转”，是因为这一问题在量子力学中竟是那么奥妙，以致一些经典概念并不能真正恰当地描述这些事物）。在大多数物质中，有些电子这样自旋，另一些电子那样自旋，所以磁性互相抵消；可是在铁里——由于某个我们将在以后加以讨论的神秘原因——有许多电子却绕着它们的排列整齐的轴旋转着，这正是磁性的起源。

由于磁铁的场都是来自电流，所以我们无须因存在磁铁而在式（1.8）和（1.9）中引进任何额外的项。我们只要取所有的电流，包括自旋电子的环行电流，那么该定律就对了。但你亦应注意，式

(1.8) 说明不存在与出现在式 (1.6) 右边的电荷相类似的磁“荷”。没有人曾发现过磁荷。

式 (1.9) 右边的第一项是由麦克斯韦从理论上发现的，而且十分重要。它说明一个变化着的电场会产生磁场。事实上，若没有这一项，该方程便毫无意义。若无此项，则在一非完整的回路中便不会有电流。但正如我们在下述例子中将见到的这样的电流确实存在。设想一个由两块平行板构成的电容器，它正在充电，电流流向其中一极板而流出另一极板，如图1-10所示。若围绕着其中一条导线画一条曲线 C ，并用一个被该导线贯穿的、如图中所示的 S_1 面来盖满这条曲线，按照式 (1.9)， $\mathbf{B}$ 绕 C 的环流由导线中的电流乘以 c^2 给出。可是若我们用另一个形状像碗、并通过电容器两板间、始终保持在导线外面的一个不同的曲面 S_2 来盖满，那又将怎样呢？肯定不会有任何电流通过这一个曲面。然而，仅仅改变一下想象中的曲面位置，总绝不会改变一个实际的磁场吧！ $\mathbf{B}$ 的环流必然和以前一样。是的，对于 S_1 和 S_2 两个面，式 (1.9) 右边的第一项和第二项相结合，确实会给出相同的结果。对于 S_2 来说， $\mathbf{B}$ 的环流由电容器两板间 $\mathbf{E}$ 的通量的变化率给出。可以通过计算证明，正在变化着的 $\mathbf{E}$ 与电流之间是用那种使式 (1.9) 保持正确所必需的方式相联系的。麦克斯韦看到了它的必要性，因而首先写出了完整方程。

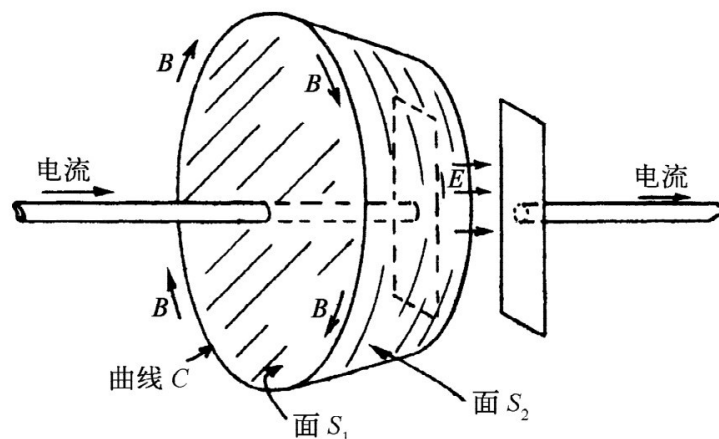


图1-10 B 绕曲线 C 的环流，既可以由通过面 S_1 的电流给出，也可以由通过面 S_2 的 E 的通量变化率给出

采用图1-6所示的那种装置，我们可以演示另一个电磁学定律。将悬挂导线两端从电池上断开，接在一个电流计上，它会告诉我们何时电流通过该导线。当在磁铁产生的磁场中向旁推动导线时，便会观察到电流。这样一个效应恰恰是式（1.1）的另一个结果——导线中的电子感受到了力 $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。电子之所以具有侧向速度，是因为它们随导线一起运动。这个 $\mathbf{v}$ 同来自磁铁的垂直方向的 $\mathbf{B}$ 一起产生了一个作用于电子上的、沿导线方向的力，此力引起电子向电流计运动。

然而，假定我们移动的不是导线而是磁铁，从相对性来讲，可猜测到这不应当产生任何差别。的确，我们在电流计中观察到一个相似电流。磁场怎么会产生作用于静止电荷上的力呢？按照式（1.1）一定存在一个电场。一根运动的磁铁必定产生电场。这过程怎样发生，可以由式（1.7）定量地给予说明。这个方程描述了许多具有巨大实际价值的现象，诸如那些出现在发电机和变压器中的现象。

我们的方程组最引人注目的一个结果是，式（1.7）和（1.9）包含着关于在很大距离范围内的电磁辐射效应的解释。解释大致如下：假

设由于导线里电流突然接通，就使得某处的磁场增大；于是，根据式（1.7）就必然存在一个电场的环流；当这建立起来的电场产生环流时，根据式（1.9）又一个磁的环流将形成；可是，这个磁场的建立又将产生一个新的电场环流……依此类推。就这样，场在通过空间前进时，除了在它们的发源处外，并不需要电荷或电流。这就是我们都能够互相看见的关键所在！这一切都存在于电磁场的方程组中。

§1-5 场是什么

现在就我们对这一课题的看法讲几点意见。你也许会说：“所有这种关于通量和环流的概念太抽象了。由于空间每一点存在电场，所以才有这些‘定律’。但实际发生的情况是什么？为什么你不能（例如）直什么东西在电荷之间起作用来加以解释呢？”唔，这与你的偏见有关。许多物理学家经常说，中间没有任何东西的那种直接作用是不可思议的。（既然某一概念已经被想象出来，他们怎么能断定它是不可思议的呢？）他们会说：“看！我们现在知道这种单独的力就是一个物体对另一个物体的直接作用。不可能存在一种无须由媒质来传递的力。”但当我们研究一个物体紧靠着另一个物体的“直接作用”时，真正发生的是什么呢？我们发现，并不是一个物体紧靠着另一个物体，而是彼此稍微有点分开，而在微小尺度内有电力起着作用。这样，我们知道将要用电力的图像来解释所谓的直接接触作用。既然肌肉的推拉力将要用电力来加以说明，那么还试图坚持认为得把电力看成像那种古老的、大家所熟悉的肌肉推拉力，那肯定是不合理的！唯一通情达理的问题是，什么才是看待电效应的最方便途径？有些人宁可把这些效应表达成在电荷间距的互作用，从而采用一个复杂定律。另外一些人则喜欢利用场线。他们老是画场线，而感到写出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 则是太抽

象了。然而，场线只不过是描写场的一种粗略的办法，要用场线直接给出那些正确而又定量的定律是很困难的。而且，场线概念并不含有电动力学最深刻的原理，即叠加原理。即使我们已知道了一组电荷的场线看起来是怎么回事，而另一组电荷的场线看来像什么，但当两组电荷同时存在时场线的图样究竟会怎么样，我们就毫无概念了。另一方面，从数学的观点看，叠加很容易——我们只需把两矢量相加起来。场线对于提供一个生动图像具有某种优点，可是也有一些缺点。当认为电荷处于静止状态时直接相互作用的想想法固然有极大优点，但当涉及迅速运动的电荷时就具有一些重大缺点。

最好的办法是采用抽象的场概念。抽象虽然可惜，但却是必要的。尝试把电场用某种齿轮的运动、或用线、或用某种材料的张力来表示的企图所耗费的物理学家们的精力，比起仅仅获得电动力学的正确答案所必需的大概要得多得多。有趣的是，关于晶体中的光的行为的正确方程已由麦卡洛于1839年得出。可是人们却对他说：“是的，但没有任何实际物质其机械性能满足那些方程，而且由于光应当是在某种东西中的一种振动，所以我们不可能相信这个抽象的方程式。”要是人们稍微虚心一点，他们也许在早得多的时候就相信关于光的行为的正确方程了。

对于磁场的情况，我们可提出如下要点：假定你最后已能够成功地用某种线或某种通过空间运转的齿轮构成一幅关于磁场的图像；然后，你尝试说明两个以相同速率互相平行地在空间运动的电荷所发生的情况。既然它们在运动，那么它们就将起两个电流一样的作用，并会有磁场和它们联系在一起（就像图1-8中导线里的电流那样）。可是，一个跟随这两个电荷做曲线运动的观察者将会把它们看作是静止不动的，从而会说那里没有磁场。当你随同物体一道运动时，就连

“齿轮”或“线”也都消失不见了！上面我们所做的只是为了想出一个新问题。那些齿轮怎么能消失呢？那些画场线的人们也陷入了同样的困境。不仅不能说明场线是否随着电荷一起运动，而且在某些参照系中这些场线可能完全消失。

于是，我们讲，磁性实际上是一种相对论效应。就我们刚才所考虑的两个做平行运动的电荷的情况来说，我们应期望对于它们的运动得用数量级为 v^2/c^2 的项来做相对论修正。这些修正应当与磁力相一致。但在我们的实验（图1-8）中，出现于两根导线间的力是怎么回事呢？那里的磁力是全部 磁力。这看来似乎不像是一种“相对论修正”。而且，倘若我们估计一下导线里电子的速度（你们可自行算出来），则我们求得它们沿导线的平均速率约为 0.01 cms^{-1} 。所以 v^2/c^2 约等于 10^{-25} ，这肯定是一个可以忽略的“修正”。可是不对！尽管在这一情况下，磁力仅等于两运动电荷的“正常”电力的 10^{-25} 倍，但应当记住，由于几乎完全中和——即由于导线里存在相同数目的质子和电子，“正常”电力已经完全消失了。由于中和的程度远较 $1/10^{25}$ 来得准确，从而那个我们称之为磁力的小小相对论项就是唯一剩下来的项，所以它变成了主要的项。

正是由于电效应几乎完全抵消，才使得相对论效应（即磁现象）受到研究，而其正确方程组——准确至 v^2/c^2 ——才被发现，虽则当时物理学家还不懂得 发生的是什么事情。而这就是为什么当相对论被发现时，电磁学定律并不需要改变。它们——不像力学——已准确至 v^2/c^2 的精度了。

§1-6 科学技术中的电磁学

让我们指出下述事件来结束本章。希腊人所研究的许多种现象中有两种是十分奇特的：如果你擦擦琥珀，你就可用它来吸起一些小纸片；又有一种来自麦尼西亚（Magnesia）岛的奇怪石头会吸铁。这是为希腊人所知道的、电磁效应表现得很明显的、仅有的现象，想起就令人惊奇。之所以仅仅出现这两种现象，其原因主要在于早先提到的电荷间异常精确的中和作用。通过希腊人之后的科学家的研究，发现了一个又一个的新现象，而这些实际上都不过是这些琥珀和（或）磁石效应的某些方面而已。现在我们认识到，化学作用的现象、以及最终生命本身的现象都要用电磁学来加以理解。

在人们对电磁学这一课题的认识正在提高的同时，以往不敢去想象的一些技术上可能发生的事出现了，从而，下述这些事就成为可能：在超长距离之间通讯；同几英里外中间没有任何联线的另一个人说话；以及开动巨大的电力系统——一个巨大的水轮，用数百英里以上的细线与别的发动机相连接，该发动机随主轮而转动——无数支线在上万的地方与成万台发动机相连，开动着工厂和家庭中的机器——所有这些，都是由于电磁学定律的知识而运转起来的。

今天我们应用着更为精细的效应。电力既可巨大，也可以十分微小，而我们都能够控制它们，并在许多方面加以利用。我们的仪器是如此精密，以致某人对数百英里外的一根细小金属棒中的电子施以影响的同时，你就能说出他正在干什么。我们只要把该金属棒作为电视机的天线就可！

从人类历史的长远观点来看——例如过一万年之后回头来看——毫无疑问，在19世纪中发生的最有意义事件将被认为是麦克斯韦对电

磁学定律的发现。与这一重大科学事件相比，同一个十年中发生的美国内战^[3]，将降为一个地区性琐事而黯然失色。

^[1] 帝国大厦指美国纽约市第五大街上的一座建筑物，地面上共102层，高1 454英尺。
——译者注

^[2] 我们仅需加上关于环流符号 某些规定的说明。

^[3] 美国内战也叫美国南北战争，1861年开始至1865年结束。——译者注

第2章 矢量场的微分运算

§2-1 对物理学的理解

对物理学家来说，要有从不同观点去观察问题的能力。因为对实际物理问题的准确分析往往非常复杂，任何特定的物理情况都可能因过于复杂，以致不能直接通过解微分方程来进行分析。然而如果人们对于在不同情况下方程解的特性有某些了解，则对于一个系统的行为仍可以获得良好的概念。如场线、电容、电阻以及电感等概念，对此目的来说都是十分有用的。因此，我们将花不少时间对它们进行分析。通过分析，对于在不同电磁情况下会发生什么事情我们就会获得一种感觉。另一方面，例如像场线这类启发式模型，没有一种会对所有情况都是真正适用和准确的。只有一种表达定律的准确方式，那就是表示成微分方程。就我们所知微分方程具有两个优点，即它既是基本的，又是准确的。如果你已学习过那些微分方程，便可以经常复习查对，就不必重新学习了。

要了解在不同情况下会发生什么事情，将花费你一些时间。你不得不去求解方程。你每次解方程，都将对解的性质有所体会。为了把这些解牢记在心，利用场线及其他概念来研究解的意义也是有益的。这就是你将真正“理解”方程式的途径，也是数学和物理学的区别所在。数学家，或者很有数学头脑的人，在“研究”物理学的过程中往往由于看不见物理而误入歧途。他们说：“看，这些微分方程——麦克斯韦方程组——就是电动力学的一切；物理学家已经承认，没有什么东

西不包含在这些方程式之内。这些方程尽管复杂，但毕竟仅是一些数学方程式，要是我能在数学上对它们彻底理解，那我对物理学也就理解透彻了。”事实却并非如此。大凡抱着这种观点研究物理的数学家——也有过不少这样的人——往往对物理学的贡献不大，而实际上对数学的贡献也很可怜。他们之所以失败，是由于在现实世界里实际的物理情况是如此复杂，需要对方程式具有更为充分的理解。

真正理解一个方程式——即不仅在严格的数学意义上——意味着什么，狄拉克对此早就有所评述。他说：“如果我没有实际解一个方程而对其解的特性已有一种估计办法，那我就懂得了该方程的意义。”因此，若我们无须实际解那个方程而对在给定情况下会发生什么便已有一种了解的办法，则我们便算“理解”了应用到这些情况上去的那个方程了。物理上的理解乃是一种完全非数学性、不精确和不严格的事，但对于一个物理学家来说却是绝对必需的。

通常，像这样一种课程是按照逐步阐明物理概念的方式——即从简单的情况开始逐渐过渡到越来越复杂的情况——来编排的。这就要求读者要不断忘记以前学过的东西——忘记在某些情况下正确、而在一般情况下却不正确的那些东西。例如，电力取决于距离的平方那一条“定律”就不是一贯正确的。所以我们在本书中更喜欢相反的途径。我们宁愿一开始就采用那些完整定律，然后回过头来把它们应用于一些简单情况，从而在前进过程中发展物理概念。这就是我们将要做的事情。

我们所采取的途径与历史的途径完全相反，人们在后一途径中通过实验获得知识，依靠实验来发展学科。但物理学这一学科在过去二百多年中是由一些非常有创造才能的人发展起来的，而当我们仅以有限时间去获得知识时，就不可能涉及他们曾经做过的每件事情。可

惜，在这些讲课中可能会丢失的东西之一就是有关事件的历史及实验发展。希望某些不足在实验室中能够得到补偿。你也可以通过阅读《大英百科全书》来补充我们所不得不割爱的东西，那里载有很好关于电学及物理学其他部分历史的条目。你也会在有关电磁学的许多教科书中找到一些历史知识。

§2-2 标量场和矢量场—— T 与 h

现在我们从电磁理论抽象的、数学的观点开始。目的是解释第1章中所给出的那些定律的意义。而为了做到这一点，必须首先对一种将要用到的、新的特殊符号加以解释。所以就让我们暂时忘却电磁学而讨论矢量场的数学。这不但对于电磁学而且对于所有物理情况都是十分重要的。正如通常微积分学对于所有物理部门都那么重要一样，矢量的微分学也是如此。我们就转到这么一个科目上来吧。

下面列举一些来自矢量代数的等式，并假定你们都已知道了。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{标量} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{矢量} \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.6)$$

我们也要用到从微分学方面得来的下列两个等式：

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (2.8)$$

当然，第一个等式（2.7）只有在 Δx ， Δy ， Δz 都趋于零的极限时才正确。

可能存在的最简单的物理场是标量场。你应当记得，我们所说的场是指取决于空间位置的一个量。所谓标量场，仅指每点由单一的数值——一个标量——标志的场。当然这个数值可随时间而变，但眼前我们还无须为此操心。我们将只谈论在某一给定时刻场看来是个什么样子。作为标量场的一个例子，试考虑一块固体材料，其中某些地方加热而另一些地方受冷，使得该物体的温度以一种复杂的方式逐点改变。于是温度将是在某直角坐标系中测得的空间位置 (x, y, z) 的函数，所以温度是一标量场。

考虑标量场的一种办法是去设想一些“等值面”，即通过所有相同值的场点画成的想象中的面，正如在地图上那些由等高点连成的等高线一样。对于一个温度场来说，这些等值面被称为“等温面”或等温线。图2-1表示一温度场，并表明在 $z=0$ 处 T 对 x 和 y 的关系。在该图上画出了几条等温线。

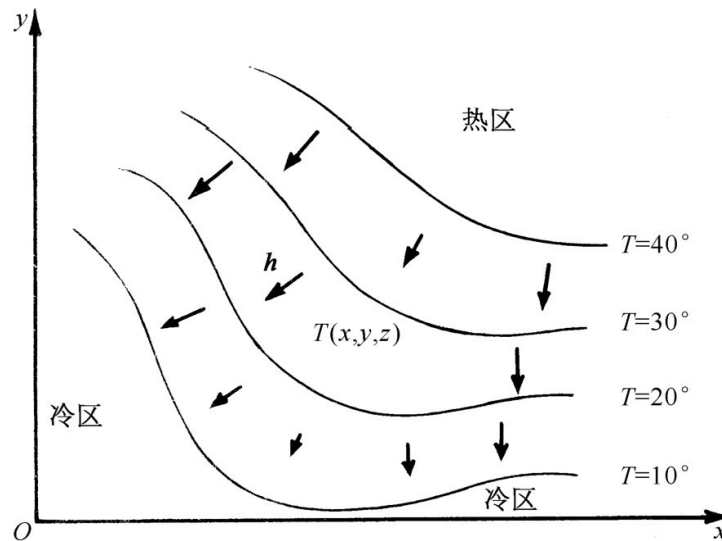


图2-1 温度 T 是标量场的一个例子。与空间每一点 (x, y, z) 相联系的是一个数值 $T(x, y, z)$ 。处于标记着 $T=20^\circ$ 的曲面（图中所示为 $z=0$ 处的一条曲线）上所有的点都有相同温度。箭头是热流矢量 h 的一些样品

还存在一种矢量场，概念也十分简单，就是在空间的每一点给出一个矢量，这个矢量逐点变化。作为一个例子，可考虑一个旋转物体。在任意点物体中物质的速度便是一个矢量，它是位置的函数（图2-2）。作为第二个例子，考虑在一块材料里的热流。如果在材料中某处的温度较高另一处的温度较低，则热量就会从较热处流至较冷处。在材料中的不同位置热量将朝不同的方向流动。这一热流就是一个有方向的量，我们称其为 h 。它的大小是多少热量在流动的量度。关于热流矢量的例子也如图2-1所示。

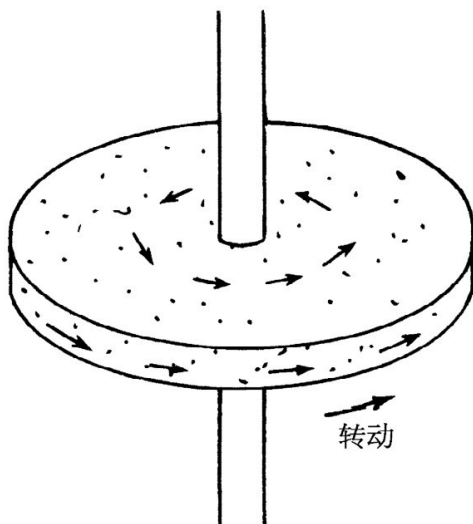


图2-2 旋转物体中原子的速度是矢量场的一个例子

让我们对 $\mathbf{h}$ 下一个更准确的定义：热流矢量在一点的大小就是在单位时间内通过垂直于流动方向的无限小面积元上单位面积的热能。这个矢量指向热量流动的方向（见图2-3）。用符号表示为：若 ΔJ 为单位时间内通过面积元 Δa 的热能，则

$$\mathbf{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a} \mathbf{e}_f, \quad (2.9)$$

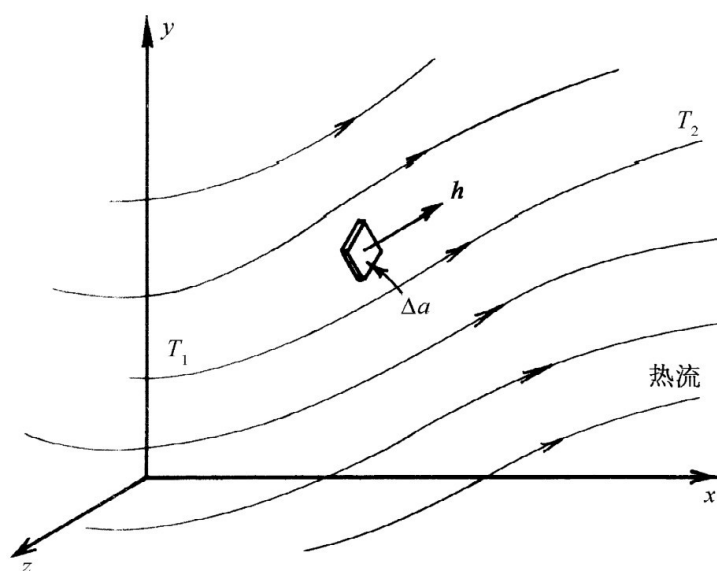


图2-3 热流是一种矢量场。矢量 $\mathbf{h}$ 指向热量流动的方向。它的大小则是单位时间内流过垂直于流动方向的面积元的能量除以该面元的面积

式中 $\mathbf{e}_f$ 是沿流动方向的单位矢量。

矢量 $\mathbf{h}$ 也可按另一种方式——用它的分量——来下定义。我们试问，有多少热量会通过一个与流动方向成任意角度的小面积。在图2-4中，我们表示一个小面积元 Δa_2 与垂直于热流的另一个小面积元 Δa_1 相倾斜。单位矢量 $\mathbf{n}$ 与面积元 Δa_2 垂直。 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{h}$ 之间的夹角就等于两个面积元之间的角度（因为 $\mathbf{h}$ 垂直于 Δa_1 ）。那么，每单位时间内 通过 Δa_2 的热量有多少呢？通过 Δa_2 的热量就等于通过 Δa_1 的，只不过面积不同罢了。事实上， $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos \theta$ 。因此，通过 Δa_2 的热流为

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1} \cos \theta = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

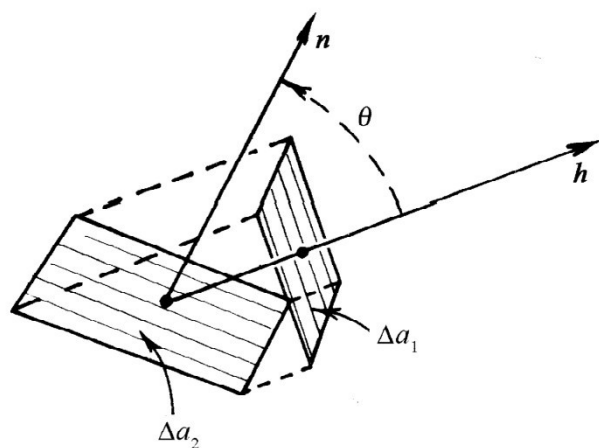


图2-4 流经 Δa_2 的热量与流经 Δa_1 的相同

我们对此式加以说明：通过单位法线为 $\mathbf{n}$ 的任何 面积元的热流（单位时间、单位面积）为 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ 。同样可以说：垂直于面积元 Δa_2 的热流分量为 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ 。如果愿意，也可以认为这些说法定义了 $\mathbf{h}$ 。我们也将把这些相同概念应用于其他矢量场。

§2-3 场的微商——梯度

当场随时间变化时，可通过给出场对时间的微商加以描述。我们希望用同样办法来描述场对位置的变化，因为对于例如在一点的温度与在邻近一点的温度间的关系，我们是感兴趣的。怎样求温度对位置的微商呢？我们求温度对 x 的微商吗？还是对 y ，或是对 z ？

有用的物理定律应当不依赖于坐标系的取向。因此，它们应被写成两边都是标量或两边都是矢量的一种形式。一个标量场的微商，比如说 $\partial T / \partial x$ ，究竟是什么呢？是标量、矢量，还是其他什么东西？它既不是标量，也不是矢量，因为正如你能容易领会的，假如我们取不同的 x 轴， $\partial T / \partial x$ 肯定会不同。可是要注意，微商可能有三个： $\partial T / \partial x$ ， $\partial T / \partial y$ 和 $\partial T / \partial z$ 。由于有这三个微商，而我们又知道要形成一矢量需要三个数，也许这三个微商就是一个矢量的分量：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{矢量。} \quad (2.11)$$

当然，一般并非任何 三个数都能构成一矢量。只有当我们旋转坐标系，矢量的各个分量按照正确的方式变换时，这才成立。所以需要分析坐标系旋转时，这些微商究竟是如何变换的。我们将证明式

(2.11) 确实是一个矢量。当坐标系转动时，这些微商的确按正确的方式变换。

我们可用几种方法来看这个问题。一个方法是，提一个答案与坐标系无关的问题，并尝试用“不变量”的形式来表示这一答案。例如，若 $S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ，而且若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是矢量，则我们知道——因为我们已在第1卷第11章中加以证明—— S 是一个标量。无须研究它是否会随坐标系改变而改变，我们就已知道 S 是一个标量，因为它是两个矢量的标积，所以它不可能 改变。与此相仿，如果我们有三个数 B_1, B_2, B_3 ，并且对每一个 矢量 $\mathbf{A}$ 都能找出

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S, \quad (2.12)$$

式中 S 对于任何坐标系都相同。那么，这三个数 B_1, B_2, B_3 必定 是某一矢量 $\mathbf{B}$ 的分量 B_x, B_y, B_z 。

现在让我们考虑温度场。假设取 P_1 和 P_2 两点，它们分开一小间距 $\Delta \mathbf{R}$ 。 P_1 处的温度为 T_1 而 P_2 处的为 T_2 ，彼此间的差 $\Delta T = T_2 - T_1$ 。在这些实际的物理点，温度肯定与为测量其坐标而选取的各坐标轴无关。尤其是， ΔT 为一个与坐标系无关的数值。所以它是一个标量。

如果我们选取一组方便的坐标轴，则能写出 $T_1 = T(x, y, z)$ 和 $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ，其中 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 是矢量 $\Delta \mathbf{R}$ 的分量（图2-5）。记住式（2.7），我们便可以写出：

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.13)$$

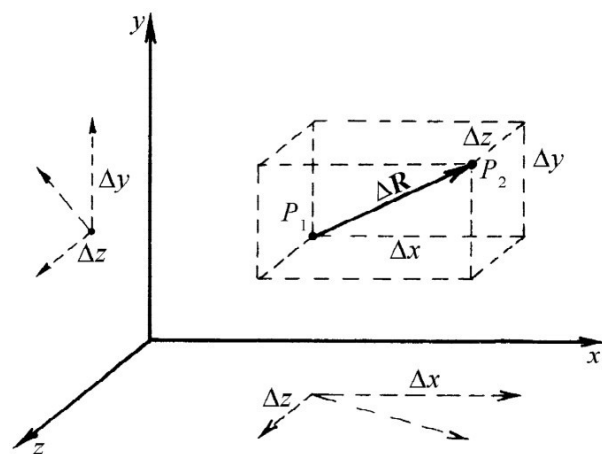


图2-5 矢量 ΔR ，其分量为 Δx ， Δy 和 Δz

式 (2.13) 的左边是一个标量。右边是各含有 Δx ， Δy 和 Δz （一个矢量的分量）的三个乘积之和。这样我们得出结论，这三个数值

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

也是一矢量的 x ， y 和 z 分量。我们用符号 ∇T 描写这个新矢量。这个符号 ∇ 是 Δ 的颠倒，这会使我们回忆起微分来。人们用各种不同方式来读 ∇T ：“del- T ”，或“ T 的梯度”，或“grad T ”，

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^* . \quad (2.14)$$

*在我们的符号中，表示式 (a, b, c) 代表一个具有分量 a ， b 和 c 的矢量。如果你喜欢用单位矢量 i ， j 和 k 的话，那么可以写成：

$$\nabla T = i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

利用这个符号，可以把式 (2.13) 重写成更简洁的形式：

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta \mathbf{R}. \quad (2.15)$$

口头上这个式子说，两邻近点之间的温度差等于 T 的梯度与两点间位移矢量的点积。式 (2.15) 的形式也清楚地说明了上面我们关于 ∇T 确是一个矢量的证明。

也许你还未相信吧！让我们用另一种办法来证明它（不过，如果你仔细加以考察，你可能会看到这实际上是兜一个更大圈子的同一种证法）。我们将证明， ∇T 的分量会按照与 $\mathbf{R}$ 的分量完全相同的方式变换。如果它们的确是如此，则按照第1卷第11章里我们关于矢量的原来定义， ∇T 就是一矢量。试取一个新坐标系 x' ， y' ， z' ，并用这一新系统算出 $\partial T / \partial x'$ ， $\partial T / \partial y'$ 和 $\partial T / \partial z'$ 。为了使事情稍微简单些，我们令 $z = z'$ ，以便可以忘记 z 坐标。你尽可以自己检验更普遍的情况。

我们取一个相对于 xy 系转过角度 θ 的 $x'y'$ 系，如图2-6 (a) 所示。对于点 (x, y) ，在加撇系统中其坐标为：

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; \quad (2.16)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (2.17)$$

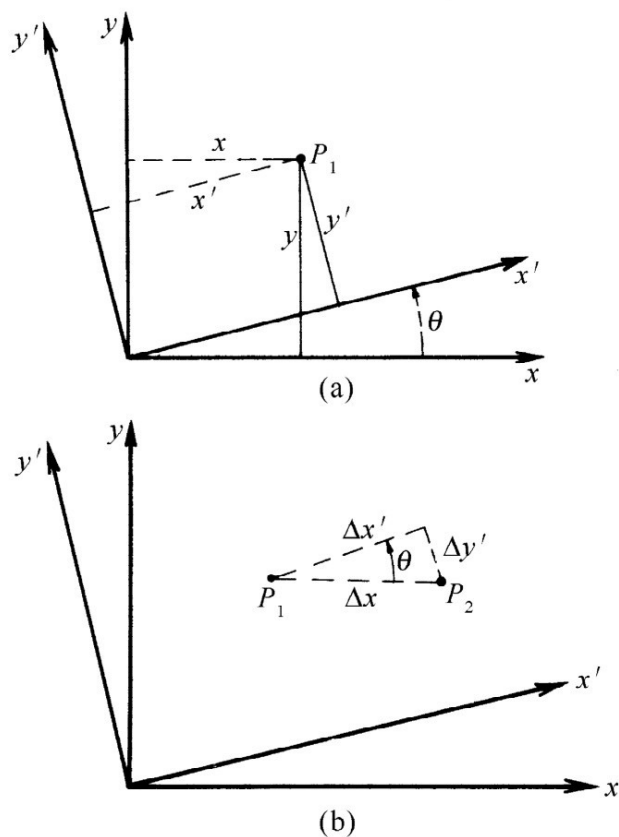


图2-6 (a) 变换到一个已转动了的坐标系上去； (b) 间距 ΔR 与 x 轴平行的一个特殊情况

或者，解出 x 和 y ，则得：

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta ; \quad (2.18)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta . \quad (2.19)$$

如果任何一对数字在用这些方程进行变换时，其方式与 x 和 y 的变换方式一样，那么它们便是一个矢量的分量。

现在让我们来看看如图2-6 (b) 所选取的两个邻近点 P_1 和 P_2 的温度差。若我们用 x 和 y 坐标来计算，则可以写成

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (2.20)$$

因为 Δy 等于零。

在那个加撇的系统里进行计算，会得出个什么呢？我们应写成

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (2.21)$$

看一看图2-6（b），即可知道

$$\Delta x' = \Delta x \cos \theta \quad (2.22)$$

和

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \theta, \quad (2.23)$$

因为 Δx 为正时 $\Delta y'$ 为负。把这些代入式（2.21），得：

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \theta \quad (2.24)$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \right) \Delta x. \quad (2.25)$$

比较式（2.25）和式（2.20），我们看到

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.26)$$

这个式说明： $\partial T / \partial x$ 可从 $\partial T / \partial x'$ 和 $\partial T / \partial y'$ 获得，正如同式（2.18）中的 x 可以从 x' 和 y' 获得那样。因此 $\partial T / \partial x$ 就是一个矢量的 x

分量。同样的论据也可以证明， $\partial T/\partial y$ 和 $\partial T/\partial z$ 分别为一个矢量的 y 和 z 分量。所以 ∇T 肯定是一个矢量，它是从标量场 T 导出的一个矢量场。

§2-4 算符 ∇

现在我们就能够做一件非常有趣而巧妙的事情——并且是使数学绚丽多彩的一些事物的标志。前面对 T 的梯度或 ∇T 是一个矢量的论证，与我们究竟对哪一个 标量场进行微分无关。假若 T 被任一标量场 代替，所有论证可以同样进行。既然不管我们对什么求导，那些变换公式都相同，那么就可以略去 T 而由一个算符方程

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \theta \quad (2.27)$$

来代替式 (2.26)，正如金斯 (Jeans) 曾经说过的那样，我们让算符“忙于对某事物求导”。

由于这些微分算符本身就已如同一个矢量的分量那样进行变换，所以我们可以称它们为一个矢量算符 的分量，即可以写成：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.28)$$

当然，它意味着

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.29)$$

我们已经把 T 去掉而使梯度抽象化了——这是一个绝妙的想法。

当然，你必须始终记住 ∇ 是个算符。它单独没有什么意义。如果 ∇ 本身没有什么意义，那么要是乘以一标量——比如 T ——那乘积 $T\nabla$ 又会有什么意义呢（我们总可以用一标量乘一矢量）？它仍然不有什么意义。它的 x 分量是

$$T \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.30)$$

它不是一个数，而仍然是某种算符。然而，按照矢量代数，我们仍可以把 $T\nabla$ 称为一个矢量。

现在让我们在 ∇ 的另一边乘上一标量，使之形成乘积 (∇T) 。在普通代数中

$$TA = AT, \quad (2.31)$$

但我们得记住，算符代数稍有别于普通的矢量代数。用算符时，必须时刻保持正确顺序，以便使运算构成适当的意义。如果你真正记住了算符 ∇ 遵循与微商符号相同的惯例，那你就不会有任何困难。凡要求导的东西一定要放在 ∇ 的右边。这里，先后次序是重要的。

记牢了这个次序问题，我们就懂得 $T\nabla$ 是一个算符，但 ∇T 却不再是一个饥饿的算符，该算符已完全被满足了。并且它确实是一个有意义的物理矢量，代表 T 的空间变化率。 ∇T 的 x 分量就是 T 在 x 方向上变化得多快。矢量 ∇T 的方向是什么？我们知道， T 在任一方向上的变化率等于 ∇T 在该方向的分量，参见式（2.15），由此可以推知， ∇T 的方向是它最大而可能存在的分量的方向——换句话说，是 T 变化得最快的方向。 T 的梯度具有（在 T 处）最急剧上升的斜率的方向。

§2-5 ∇ 的运算

矢量算符 ∇ ，能否用作其他方面的代数运算？让我们尝试把它同一个矢量组合起来。可以通过点积来组合两个矢量，这可构成这样两种点积：

(矢量) $\nabla \cdot$ ；或 $\nabla \cdot$ (矢量)。

第一种还没有什么意义，因为它仍然是一个算符。最终的含意取决于它所运算的对象如何。第二种乘积则是某个标量场（ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 总是一个标量）。

让我们就用一个已知的矢量场、比如 $\mathbf{h}$ ，来试试它与 ∇ 的点积吧。把它写成分量为：

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \quad (2.32)$$

或

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (2.33)$$

这个和式在坐标变换之下是不变的。假如我们选择一个不同的坐标系（通过加撇来表明），则我们会有^[1]

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \quad (2.34)$$

上式与式（2.33）尽管看起来不同，但所得的值相同。这就是说，对于在空间每一点，

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (2.35)$$

因此， $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 是一个标量场，它必定代表某个物理量。你会认识到，在 $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 中，各微商的组合方式相当特殊。此外，还有许多像 $\partial h_y / \partial x$ 的其他各种组合，它们既不是标量，也不是矢量的分量。

标量 $\nabla \cdot (\text{矢量})$ 在物理学中非常有用。它的名称叫作散度。例如，

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{“} \mathbf{h} \text{ 的散度”} . \quad (2.36)$$

就像在上面对 ∇T 所做的那样，也可以赋予 $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 一个物理意义。然而，我们将把这项工作推迟到以后。

首先，我们希望看看，由矢量算符 ∇ 是否还能设计些别的什么。我们必然指望

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{一个矢量}. \quad (2.37)$$

它是一个矢量，其分量可按照有关叉积的通常规则 [参见式 (2.2)] 写出：

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (2.38)$$

同理，

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}, \quad (2.39)$$

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (2.40)$$

组合 $\nabla \times \mathbf{h}$ 称为“ $\mathbf{h}$ 的旋度”，其命名原因及物理意义都将在以后讨论。综上所述，同 ∇ 的组合有三种：

$$\nabla T = \text{grad} T = \text{矢量};$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{标量};$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{curl } \mathbf{h} = \text{矢量}.$$

利用这些组合，我们可以用一种常规的方法——一种并不依赖于任何特定坐标系的普遍方法——来写出关于场的空间变化。

作为对矢量微分算符 ∇ 应用的一个例子，我们写出一组矢量方程，它们包含着我们在第1章中口头上给出的相同的电磁学定律，它们被称为麦克斯韦方程组。

麦克斯韦方程组：

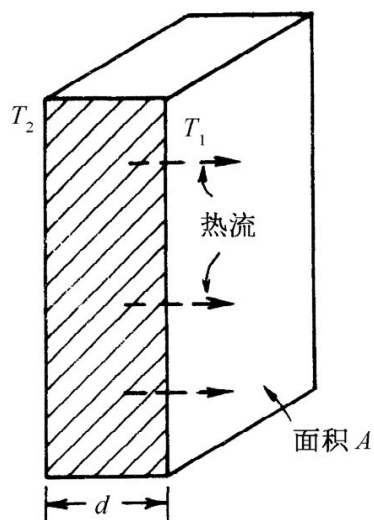
$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ (2) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ (3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0; \\ (4) \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

式中， ρ 为“电荷密度”，即单位体积的电量； $\mathbf{j}$ 为“电流密度”，即每秒通过单位面积的电荷流。这四个方程式包含了电磁场完整的经典理论。你们看到，采用这种新符号，我们可能得到多么优美而又简洁的形式！

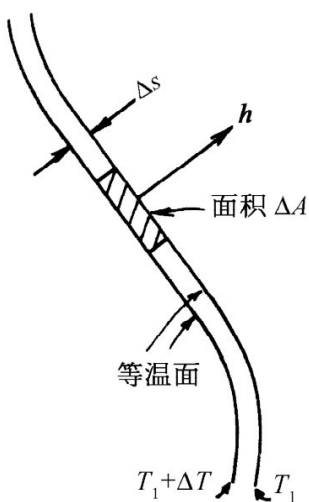
§2-6 热流的微分方程

让我们举出用矢量符号描写物理定律的另一个例子。这一定律虽不十分精确，但对于金属和若干种导热的其他物质来说还是很准确的。你知道，如果取一厚片材料，将其一面加热至温度 T_2 ，而另一面冷却至温度 T_1 ，那么热量将通过材料从 T_2 流向 T_1 [图2-7 (a)]。热流将与板的面积成正比，也与温差成正比，而与板的厚度 d 成反比（对于给定的温差，板越薄热流就越大）。令 J 为单位时间通过那块板的热能，我们可以写成

$$J = \kappa(T_2 - T_1) \frac{A}{d}, \quad (2.42)$$



(a)



(b)

图2-7 (a) 通过一块板的热流； (b) 在一大块材料中平行于等温面的一个无限小薄片

比例常数 κ 称为热导率。

在一较复杂的情况中将会发生什么呢？比方说，在一块奇形怪状的材料中，温度以独特的方式变化。假设我们注意这块材料中的一小部分，并设想有一块在微小尺度上像图2-7 (a) 那样的薄片。把这薄

片旋转至与等温面平行的方向，像在图2-7（b）中的情形，使得式（2.42）对于这一小片是正确的。

若这一薄片的面积为 ΔA ，则每单位时间所流过的热量为

$$\Delta J = \kappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \quad (2.43)$$

式中 Δs 是该薄片的厚度。我们已在前面把 $\Delta J / \Delta A$ 定义为 $\mathbf{h}$ 的大小，其方向则为热流方向。热流将从 $T_1 + \Delta T$ 流向 T_1 ，所以热流就应当垂直于如图2-7（b）所画出的那些等温面。并且， $\Delta T / \Delta s$ 恰好就是 T 对位置的变化率。又由于位置变化垂直于等温面，所以这个 $\Delta T / \Delta s$ 便是最大变化率。因此，它恰好就是 ∇T 的大小。现在既然 ∇T 与 $\mathbf{h}$ 反向，所以可将式（2.43）写成一个矢量方程：

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T, \quad (2.44)$$

负号是必需的，因为热量流向温度“下降”方向。式（2.44）是大块材料中热传导的微分方程。你看到，这是一个真正的矢量方程。如果 κ 仅仅是一个数，上式两边都是矢量。这是由矩形板的特殊关系〔式（2.42）〕推广至一任意情况的普遍化过程。我们以后还应该学习把所有像式（2.42）那样的基本物理关系用更为高级的矢量符号写出来。这种符号之所以有用，不仅是由于它会使方程看起来比较简单，而且它也无须参考任何自主选取的坐标系而最清楚地表明方程的物理内容。

§2-7 矢量场的二阶微商

迄今我们只有一阶微商。为什么就没有二阶微商呢？我们可以有下列几种组合：

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \nabla \cdot (\nabla T) ; \\
 & \text{(b)} \quad \nabla \times (\nabla T) ; \\
 & \text{(c)} \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) ; \\
 & \text{(d)} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) ; \\
 & \text{(e)} \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) .
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

你可以核实一下，这些全是可能的组合。

让我们首先看一看第二式（b）。与它相同的形式为

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) T = 0,$$

因为 $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ 恒为零。因此，我们就有：

$$\text{curl} (\text{grad} T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \tag{2.46}$$

如果用分量来计算一遍，便可以看出这个式是怎样产生的：

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x (\nabla T)_y - \nabla_y (\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \tag{2.47}$$

上式等于零〔根据式（2.8）〕。对于其他分量也是如此。因此，对任何一种温度分布（实际上，对于任何标量函数）， $\nabla \times (\nabla T) = 0$ 。

现在让我们举出另一个例子，看看能否找到别的等于零的等式。一个矢量与一个其中含有该矢量的矢积的点积为零，即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.48)$$

因为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 垂直于 $\mathbf{A}$ ，所以在 $\mathbf{A}$ 方向上就没有 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的分量。与此相同的一种组合出现在式 (2.45) 的 (d) 中，因而我们有：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \text{div} (\text{curl } \mathbf{h}) = 0. \quad (2.49)$$

此外，用分量进行运算来证明上式为零并不困难。

现在我们将不加证明地陈述两个数学定理。它们是物理学家已经知道的十分有趣而又有用的定理。

在一个物理问题中，我们经常发现某一个量——比如矢量场 $\mathbf{A}$ ——的旋度为零。如我们已由式 (2.46) 看到，一个梯度的旋度为零，这是很容易记住的，因为这种情形是矢量造成的。于是，有可能肯定 $\mathbf{A}$ 是某一个量的梯度，这样它的旋度才必然等于零。这个有趣的定理说明，如果 $\text{curl } \mathbf{A}$ 等于零，则 $\mathbf{A}$ 总是某种东西 的梯度——存在某一标量场 ψ 使得 $\mathbf{A}$ 等于 $\text{grad } \psi$ 。换句话说，我们有

定理：

如果 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$,

就有一个 ψ

使得 $\mathbf{A} = \nabla \psi$. (2.50)

若 $\mathbf{A}$ 的散度为零，则有一个相似的定理。我们已从式 (2.49) 看到，某个矢量旋度的散度总是零。如果你遇到 $\text{div } \mathbf{D}$ 为零的一个矢量场 $\mathbf{D}$ ，那你就可以得出结论， $\mathbf{D}$ 是某个矢量场 $\mathbf{C}$ 的旋度。

定理：

如果 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$,

就有一个 $\mathbf{C}$

使得 $\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}$. (2.51)

在考察两个 ∇ 算符的可能组合中，我们已经找出其中有两种组合总是等于零。现在来看看那些不等于零的组合。取出表上所列的第一个组合 $\nabla \cdot (\nabla T)$ 。我们把它写成分量式：

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T).$$

于是

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_y(\nabla_y T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.52)$$

上式一般应给出某个数，它是一个标量场。

你看到，上式无须保留那个括号，因而在不会引起混乱的情况下它可以写成：

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (2.53)$$

这里我们把 ∇^2 看成一个新的算符。这是一个标量算符。由于它经常出现在物理学中，因而已被赋予一个专用名称，即拉普拉斯算符。

$$\text{拉普拉斯算符} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.54)$$

由于拉普拉斯算符是一个标量算符，就可以用它来对一矢量进行运算——这意味着对在直角坐标系的每一个分量进行同一种运算：

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

让我们再来看另一个可能性： $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$ ，那是表(2.45)中的(e)。现在如果我们应用矢量等式(2.6)：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.55)$$

便可以把一个旋度的旋度写成不同的形式。为了使用这一公式，我们应当用算符 ∇ 来代替其中的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ ，并令 $\mathbf{C} = \mathbf{h}$ 。这样就得到：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h} (\nabla \cdot \nabla) \dots$$

但请等一等！有点不对了。前两项不错，那都是矢量（算符被满足了），可是末项就不知会产生出什么东西来。它仍然是一个算符。麻烦在于我们曾经不够小心，以致不能保持各项的前后次序。然而，若你再看一看式(2.55)，就会见到我们同样可以把它写成：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (2.56)$$

这几项的次序看来要好些。现在在式(2.56)中做代换，便得：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h}. \quad (2.57)$$

这个形式看来不错。事实上，它是正确的，例如你可以通过计算分量给以证明。末项就是拉普拉斯算符，因而我们同样可以写成：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (2.58)$$

除了(c) $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{h})$ 以外，我们对于表中的双 ∇ 的组合全都谈过一些了。它可能是一个矢量场，但却没有什么特殊情况可说的。那不过是偶尔会出现的一种矢量场罢了。

把我们的结论列成一表将很方便：

- (a) $\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{标量场};$
- (b) $\nabla \times (\nabla T) = 0;$
- (c) $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) = \text{矢量场};$
- (d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0; \quad (2.59)$
- (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h};$
- (f) $(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} = \text{矢量场}.$

你可能会注意到，我们从未试图发明一个新的矢量算符 $(\nabla \times \nabla)$ 。你看这是为什么？

§2-8 陷阱

我们正在把关于一般矢量代数的知识应用到算符 ∇ 的代数上来，可是必须当心，因为有可能误入歧途。存在两个即将提到的陷阱，虽然它们并不会出现于本课程中。对于含有两个标量函数 ψ 和 ϕ 的下列表示式：

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \phi),$$

你该说些什么呢？你也许会说：它必然等于零，因为它恰巧像

$$(\mathbf{A} \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \mathbf{b}),$$

而两个相同矢量的叉积始终为零。但是在这个例子中两个算符 ∇ 却不相同！前一个算符作用于函数 ψ 上；而另一个则作用于一个不同的函数 ϕ 上。所以尽管所用的是同一个符号 ∇ ，但它们仍应被认为是不同的算符。很明显， $\nabla \psi$ 的方向取决于函数 ψ ，因而它不大可能平行于 $\nabla \phi$ 。因此，

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \phi) \neq 0 \text{ (一般地) }.$$

幸而，我们今后无须用到这些表示式（刚才所说的不会改变这么一个事实，即对于任一标量场 ψ ， $\nabla \times \nabla \psi = 0$ ，因为这里两个 ∇ 是对同一函数的作用）。

第二号陷阱（在这门课程中我们没有必要去研究它）如下：当应用直角坐标系时这里提出的法则既简单而又美妙。比方，若有了 $\nabla^2 \mathbf{h}$ ，而希望获得它的 x 分量，那便是

$$(\nabla^2 \mathbf{h})_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_x = \nabla^2 h_x. \quad (2.60)$$

但如果我们所要求的是 $\nabla^2 h$ 的径向分量，则这同一个表式就不行了。 $\nabla^2 h$ 的径向分量并不等于 $\nabla^2 h_r$ 。原因是，如果我们同矢量代数打交道，矢量的方向就都是十分确定的。但当我们与矢量场打交道时，它们的方向则处处不同。如果我们试图用（比如说）极坐标来描述一个矢量场，则称为“径向”的那个方向便会逐点不同。因此，当我们开始对它的分量进行微分时，就会陷入一大堆麻烦之中。例如，甚至对一恒定不变的矢量场，它的径向分量仍然逐点变化。

坚持只用直角坐标系往往是最保险和最简单的做法，而且避免了麻烦，但有一个例外值得一提：由于拉普拉斯算符 ∇^2 是一个标量，所以我们就可能在我们想要的任意坐标系（例如在极坐标系）中把它写出来；但由于它是一个微分算符，所以只可以把它用到其分量各保持在固定方向上——即在直角坐标上——的那些矢量。因此，当我们用分量来写出矢量微分方程时，就必须把矢量场全部用它们的 x ， y ， z 分量来表达。

[1] 我们把 h 设想成一个取决于空间位置的物理量，而不是把它设想成一个严格的含有三个变量的数学函数。当 h 对于 x ， y ， z 或对于 x' ， y' ， z' 求微商时， h 的数学表达式就必须先表示为合适的变量的函数。

第3章 矢量积分运算

§3-1 矢量积分； $\nabla \psi$ 的线积分

在第2章中，我们已找到对场进行微商的各种方法，结果有的得出矢量场，有的得出标量场。虽然我们曾导出许多不同公式，但从第2章所得的一切中可以归纳成一个法则：算符 $\partial/\partial x$ ， $\partial/\partial y$ 和 $\partial/\partial z$ 就是一个矢量算符 ∇ 的三个分量。现在我们对场的微商的意义获得某种理解，然后才会对矢量场方程的含义有更深的体会。

我们已讨论过梯度运算（ ∇ 作用于标量上）的意义，现在将转到散度和旋度运算的意义上来。对于这些量的解释最好用某些矢量积分及与这些积分有关的方程来进行。可惜这些方程并不能通过某种简单的代入法从矢量代数中求得，因而只得将其当作新的东西来学习。在这些积分公式中，有一个实际上是不重要的，但其他两个则不是这样，我们将导出它们并解释其涵义。下面将要研究的方程其实都是数学定理，它们不但对于解释散度与旋度的意义及其内容将会有用，而且对从事一般的物理理论工作也同样有用。这些数学定理对于场的理论的作用，正如能量守恒定理对于质点力学的作用一样。像这类普遍定理对更深刻地理解物理学是很重要的。然而，你将发现，它们对于求解问题——除去那些最简单情况——用处并不很大。但令人高兴的是，在我们这一课程的开头，就有许多简单问题可用我们即将处理的三个积分公式来求解。可是，我们也将看到，当问题变得较困难时，就不能再用这些简单方法了。

首先着手处理涉及梯度的一个积分公式，这个关系式含有一个非常简单的概念。既然梯度代表一个场量的变化率，如果我们对这一变化率进行积分，则可能获得总的变化。假设有标量场 $\psi(x, y, z)$ ，在任意两点(1)和(2)处，函数 ψ 将分别取值 $\psi(1)$ 和 $\psi(2)$ [我们采用一种方便的符号，用(2)代表点 (x_2, y_2, z_2) ，而 $\psi(2)$ 意味着和 $\psi(x_2, y_2, z_2)$ 相同]。如果 Γ 是连接(1)和(2)两点间的任意曲线，如图3-1所示，则下述关系就是正确的。

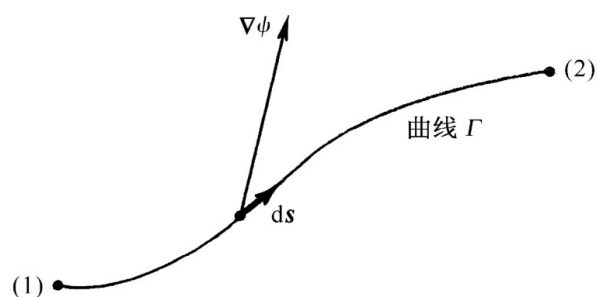


图3-1 式(3.1)中的各项。矢量 $\nabla\psi$ 是在线元 ds 处计算出来的

定理1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot ds. \quad (3.1)$$

这个积分是一线积分，它是对矢量 $\nabla\psi$ 和另一个代表沿曲线 Γ 的无限小线元的矢量 ds [从点(1)指向点(2)]点积的积分，积分沿着由点(1)至点(2)的曲线 Γ 进行。

首先，我们应该复习一下线积分的含义是什么。试考虑一个标量函数 $f(x, y, z)$ 和一条连结(1)和(2)两点间的曲线 Γ 。在曲线

上划分出许多点，再用直线段连接这些点，如图3-2所示。每段具有长度 Δs_i ，其中 i 是依次取1, 2, 3等值的下脚标。所谓线积分

$$\int_{(1)}^{(2)} f ds, \\ \text{沿}\Gamma$$

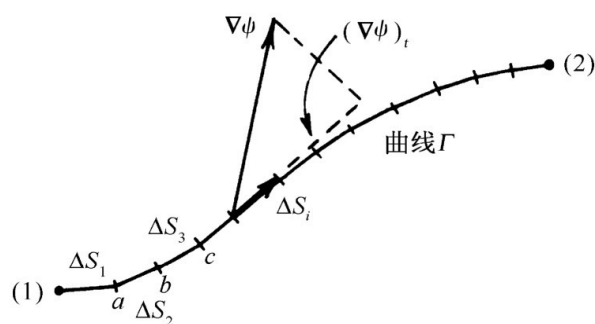


图3-2 线积分是和的极限

是指这么一个和的极限：

$$\sum i f_i \Delta s_i,$$

其中 f_i 是在第 i 段上的函数值。极限值就是当所分的段数越来越增加时（说得明显些，就是使最大的 $\Delta s_i \rightarrow 0$ ）这个和所趋近的数值。

在上述定理中的积分，即式（3.1），也是指同样的事，虽然看起来稍有不同。我们不用 f ，而用另一个标量—— $\nabla \psi$ 在 Δs 方向上的分量。如果我们把这一分量写成 $(\nabla \psi)_t$ ，则很清楚，

$$(\nabla \psi)_i \Delta s_i = (\nabla \psi) \cdot \Delta \mathbf{s}. \quad (3.2)$$

式(3.1)中的积分就意味着对这种项求和。

现在让我们看看为什么式(3.1)是正确的。在第2章中，我们曾证明， $\nabla \psi$ 沿一小位移 $\Delta \mathbf{R}$ 的分量乃是 ψ 在 $\Delta \mathbf{R}$ 方向上的变化率。考虑图3-2中由点(1)至点(a)间的线段 $\Delta \mathbf{s}_1$ ，按照我们的定义，

$$\Delta \psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla \psi)_1 \cdot \Delta \mathbf{s}_1. \quad (3.3)$$

同样，我们有

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla \psi)_2 \cdot \Delta \mathbf{s}_2. \quad (3.4)$$

当然，上式中的 $(\nabla \psi)_1$ 是指在线段 $\Delta \mathbf{s}_1$ 处计算出来的梯度，而 $(\nabla \psi)_2$ 则是在 $\Delta \mathbf{s}_2$ 上计算出来的梯度。如果我们把式(3.3)和(3.4)相加，便得：

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla \psi)_1 \cdot \Delta \mathbf{s}_1 + (\nabla \psi)_2 \cdot \Delta \mathbf{s}_2. \quad (3.5)$$

你可以看到，若继续加进这样的项，就能获得结果：

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum_i (\nabla \psi)_i \cdot \Delta \mathbf{s}_i. \quad (3.6)$$

左边并不与我们所选取的间隔有关——如果(1)和(2)两点始终保持固定不变的话——所以我们可以取右边的极限。这样，我们就已经证明了式(3.1)。

你可从上述的证明中看到，正如该等式并不依赖于点 $a, b, c \dots$ 如何选取，同样它也不依赖于我们所选取的用以连接（1）和（2）间的曲线 Γ 。对于由点（1）至点（2）间的任何曲线，我们的定理都是正确的。

关于符号的一点说明：你将会看到，如果为了方便而将上式写成

$$\nabla (\psi) \cdot d\mathbf{s} = \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}, \quad (3.7)$$

将不致引起混乱。利用这一符号，上述定理为

定理1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1) \\ \text{从(1)至(2)} \\ \text{的任何曲线}}}^{(2)} \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.8)$$

§3-2 矢量场的通量

在讨论下一个积分定理——关于散度方面的定理——之前，我们想学习一下物理意义较明显的关于热流的某种概念。我们曾定义过矢量 $\mathbf{h}$ ，它代表单位时间内通过单位面积的热量。假设在一块材料内部，有一个包围着体积 V 的某闭合曲面 S （图3-3）。我们希望求出从这个体积里流出去的热量有多少。当然，我们可以通过计算流出表面 S 的总热量来求得它。

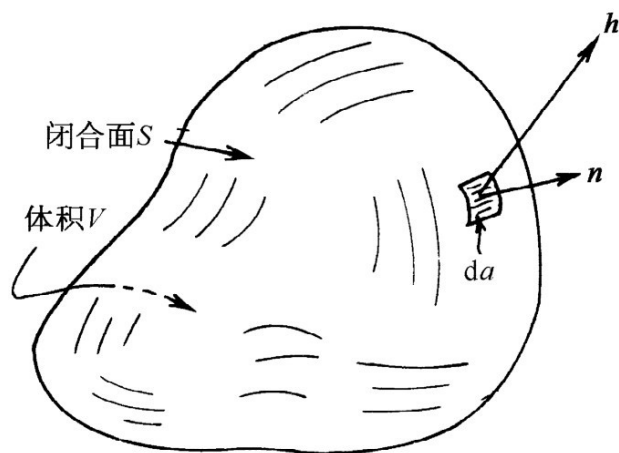


图3-3 闭合面 S 规定了体积 V 。单位矢量 n 是面积元 da 的外法线，而 h 则是该面积元处的热流矢量

我们用 da 记为一个面积元的面积，这符号代表一个二维微分，例如，若该面积碰巧处在 xy 面上，则应有

$$da = dx \, dy .$$

由于以后还将对体积进行积分，所以，为方便起见，考虑一个小立方体的微分体积。这样，当我们写出 dV 时，指的就是

$$dV = dx \, dy \, dz .$$

有些人不喜欢写成 da ，而喜欢写成 $d^2 a$ 以提醒人们注意那是一个二级量。他们同样不想用 dV 而要用 $d^3 V$ 。我们则将采用那种较简单的符号，并假定你确能记住面积具有二维，而体积具有三维。

通过面积元 da 流出的热量等于该面积乘以垂直于 da 的 h 分量。我们已把 n 定义为与表面成直角而指向外的单位矢量（图3-3）。希望得到的 h 分量为：

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} . \quad (3.9)$$

于是，通过 da 流出的热量为

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da . \quad (3.10)$$

为了得到通过任意表面的总热量，我们对来自所有面积元的贡献求和。换句话说，将在整个表面对式（3.10）进行积分：

$$\text{通过} S \text{向外流出的总热量} = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da . \quad (3.11)$$

我们将把这个面积分称为“ $\mathbf{h}$ 通过该表面的通量”。通量这个词的原有意义是流量，因而面积分恰好意味着 $\mathbf{h}$ 通过该表面的流量。可以认为： $\mathbf{h}$ 是热量流动的“流密度”，而它的面积分则是指向表面外的总热量流，也就是单位时间流出的热能（每秒的焦耳数）。

我们希望把这一概念推广到矢量并不代表任何流动的东西那种情况。例如，它或许是电场。如果我们乐意的话，肯定也能对电场的法向分量在一个面上积分。尽管这并不是什么东西的流动，但我们仍称之为“通量”。我们说，

$$\mathbf{E} \text{ 通过曲面} S \text{ 的通量} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da . \quad (3.12)$$

这就把“通量”这一词推广到指一矢量的“法向分量的面积分”了。即使所考虑的表面不是闭合的情况，我们也将使用同样的定义，就像这里讨论闭合面那样。

回到热流的特殊情况，让我们以热量守恒的情况为例。例如，设想有某件材料初始加热以后就不再有热量产生或吸收。于是，如有净

热量从闭合表面流出去，则该体积内热的含量就一定会减少。所以，在这种情况下热量应该守恒，我们说：

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.13)$$

式中 Q 是表面 S 内的热量。从 S 面出来的热通量等于 S 面内总热量 Q 对于时间变化率的负值。这种解释是可行的，因为我们正在谈论热流，而且已假定热量是守恒的。当然，假如那时热量正在产生，则我们也许就不能谈论该体积内的总热量了。

现在我们要指出一个关于任意矢量的通量的有意义的事实。如果愿意，你可以认为这矢量是热流矢量，但我们所要讲的内容对任一矢量场 $\mathbf{C}$ 都将是正确的。设想有一包围体积 V 的闭合曲面 S ，现用如图3-4所示的某种“截面”将体积分成两部分，我们就有两个闭合曲面和体积。体积 V_1 被曲面 S_1 包围，由原来表面的一部分 S_a 和截面 S_{ab} 构成。体积 V_2 被曲面 S_2 包围，由原来表面的其余部分 S_b 再加上截面 S_{ab} 构成。现在考虑下述问题：假设要计算通过曲面 S_1 的向外通量，再加上通过曲面 S_2 的向外通量。这个总和是否会等于通过开始时那个完整表面的通量呢？答案是肯定的。通过 S_1 和 S_2 所共有的 S_{ab} 面部分的通量恰好互相抵消。关于从 V_1 出来的矢量 $\mathbf{C}$ 的通量，我们可以写成：

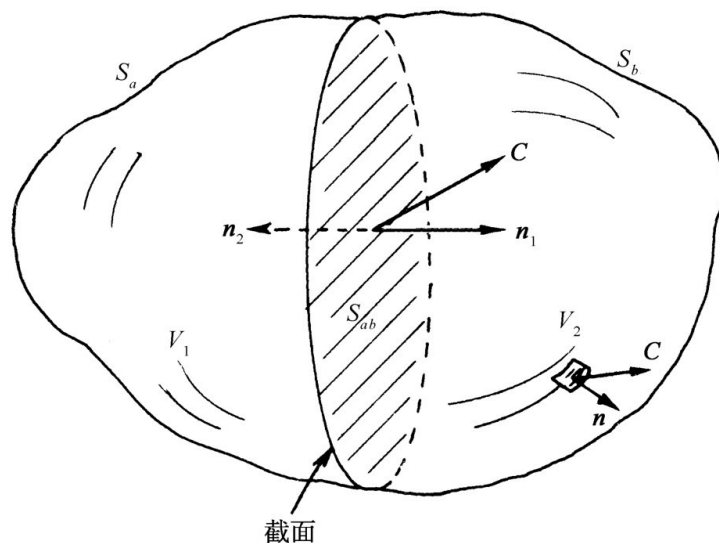


图3-4 包围在 S 面内的体积 V 被一“截面” S_{ab} 分成两半。现在就有了包围在 $S_1 = S_a + S_{ab}$ 面内的体积 V_1 和包围在 $S_2 = S_b + S_{ab}$ 面内的体积 V_2

$$\text{通过 } S_1 \text{ 的流量} = \int_{S_a} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da. \quad (3.14)$$

而从 V_2 流出的流量，则是：

$$\text{通过 } S_2 \text{ 的流量} = \int_{S_b} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.15)$$

注意！在这两个积分中， $\mathbf{n}_1$ 表示 S_{ab} 属于 S_1 时的外法线，而 $\mathbf{n}_2$ 则表示 S_{ab} 属于 S_2 时的外法线，分别如图3-4所示。显然， $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ ，因而

$$\int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.16)$$

现在若把式 (3.14) 和 (3.15) 相加，则通过 S_1 和 S_2 两通量之和恰好等于那两个积分之和，而把这两个积分合在一起，就给出通过原来的曲面 $S = S_a + S_b$ 的通量。

我们看到，通过整个外表面 S 的通量，总可以认为是该体积分成两部分后所得到的通量之和。还可以照样再分割下去——例如把 V_1 再分成两块，你会看到同样的论证仍然适用。因此，不管将原来体积按何种方式分割，普遍正确的结果应该是：由原来积分表示的、通过外表面的通量，等于出自内部所有各小块的通量之和。

§3-3 来自小立方体的通量；高斯定理

现在考虑一个小立方体^[1]的特殊情况，并求出其通量的一个令人感兴趣的公式。设想各边与坐标轴平行而构成的一个立方体，如图3-5所示。假设最接近于原点的那个角点的坐标为 (x, y, z) 。令 Δx 为该立方体在 x 方向上的长度， Δy 为 y 方向的长度，而 Δz 为在 z 方向的长度。希望求出矢量场 $\mathbf{C}$ 通过该立方体表面的通量，这将由算出通过小立方体每个面的通量之和而获得。首先，考虑图中标明为1的面。在这个面上，向外的通量等于 $\mathbf{C}$ 的 x 分量的负值对该面面积的积分。这个通量为

$$-\int C_x \, dy \, dz .$$

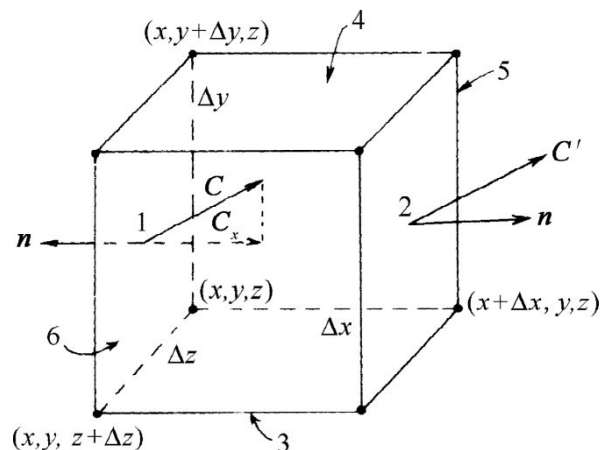


图3-5 来自一小立方体的通量的计算

由于我们考虑的是一个小立方体，所以可用该面中心——我们称之为点（1）——的 C_x 值乘以该面面积 $\Delta y \Delta z$ 作为这一积分的近似：

$$\text{出自面1的通量} = -C_x(1) \Delta y \Delta z.$$

同理，出自面2的通量，也可以表达为：

$$\text{出自面2的通量} = C_x(2) \Delta y \Delta z.$$

以上两式中的 $C_x(1)$ 和 $C_x(2)$ ，一般说来，是有点差别的。如果 Δx 足够小，则可以写成：

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

当然，还有更多的项，不过它们将包含 $(\Delta x)^2$ 和更高幂次的项，因而如果只考虑小量 Δx 的极限情况，则它们都可以被忽略。所以，通过面2的通量就是：

$$\text{出自面 2 的通量} = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z.$$

把通过面1和面2的通量相加，得：

$$\text{出自面 1 和面 2 的通量} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

上式中的微商，实在应在面1的中心处、即在点 $[x, y + (\Delta y / 2), z + (\Delta z / 2)]$ 处计算。但在一个无限小立方体的极限情况下，即使在角点 (x, y, z) 处计算，所造成的误差也是可以忽略的。

依此类推，对其他每一对面，我们也会得到：

$$\text{出自面 3 与面 4 的通量} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z;$$

$$\text{出自面 5 与面 6 的通量} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

通过所有面的总通量是这些项之和。我们得出：

$$\int_{\text{立方体}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

而式中微商之和恰好就是 $\nabla \cdot \mathbf{C}$ 。并且， $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ ，即该立方体的体积。所以对于一个无限小立方体，可以讲

$$\int_{\text{表面}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \quad (3.17)$$

这就证明，一无限小立方体表面向外的通量等于该矢量的散度乘以该立方体的体积。现在我们看到了一个矢量的散度的“意义”。一个矢量

在 P 点的散度就是 P 点附近单位体积的通量—— $\mathbf{C}$ 的向外“流量”。

我们已把 $\mathbf{C}$ 的散度与每个无限小体积向外的 $\mathbf{C}$ 通量联系起来了。对于任何有限体积来说，我们可用上面证明过的事实——来自一体积的总通量等于从其中每一部分出来的通量之和。这就是说，我们可遍及整个体积对散度进行积分。它向我们提供了这样一个定理：任何矢量的法向分量对任何闭合曲面的积分，也可以写成该矢量的散度对该曲面所包围的体积的积分。这个定理以高斯命名。

高斯定理：

$$\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} \, dV, \quad (3.18)$$

式中 S 是任一闭合曲面，而 V 是这个曲面内的体积。

§3-4 热传导；扩散方程

仅仅为了熟悉高斯定理，让我们考虑应用该定理的一个例子。仍然举金属中的热流为例，假定其中所有热量都已预先输入、而此刻正在冷却的那种简单情况。这里没有热源，所以热量是守恒的。那么，在任意时刻存在于某个特定体积里的热量到底有多少呢？它所减少的量必须恰好等于从该体积表面流出的量。如果我们的体积是一个小立方体，则根据式（3.17）就应该写成：

$$\text{流出的热量} = \int_{\text{表面}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = \nabla \cdot \mathbf{h} \, \Delta V. \quad (3.19)$$

这必然要等于小立方体内部热量的损失率。设 q 为单位体积内的热量，则在该立方体内的热量为 $q \, \Delta V$ ，其损失率则为：

$$-\frac{\partial}{\partial t}(q\Delta V) = -\frac{\partial q}{\partial t}\Delta V. \quad (3.20)$$

比较式 (3.19) 和 (3.20)，我们见到：

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

仔细注意这个方程的形式，它是物理学中经常出现的形式，即表达了一个守恒定律——这里是热量守恒。我们曾经在式 (3.13) 中以另一种方式表示过相同的物理事实。这里是守恒方程的微分形式，而式 (3.13) 则是一种积分形式。

我们通过把式 (3.13) 应用于一无限小立方体而获得了式 (3.21)。我们也可用别的方法去做。对于一个以 S 面为边界的大体积 V ，高斯定理表达为：

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{h} \, dV. \quad (3.22)$$

应用式 (3.21)，得出右边的积分恰是 $-dQ/dt$ ，因而我们又一次得到了式 (3.13)。

现在让我们考虑一个不同的情况。想象在一大块材料中有一个很小的洞，里面正在进行某种产生热量的化学反应。我们也可以这样设想，用导线连接一个小小的电阻器，然后通电使之发热。我们将假设热量实际上是在一点上产生的，并令 $\mathcal{W}$ 代表在该点每秒释放出来的能量。我们还假定在材料的其余部分热量始终守恒，而且该热量的产生也已持续了足够长的时间——使得现在任何一处的温度都不再发生变化了。问题是：金属里各处的热流矢量 $\mathbf{h}$ 是什么样子？在每一点有多少热量流过？

我们知道，如果在包围着该热源的闭合曲面上对 $\mathbf{h}$ 的法向分量进行积分，则总会得到 W 。所有在该点源处陆续产生的所有热量都必定通过该表面流出，因为我们已假定其流动是稳定的。这里有一个困难问题，即要找出一个矢量场，在包围源的任意曲面上积分时该矢量场总给出 W 。然而，我们可以取一个稍微有点特殊的曲面而使场相当容易地求出。比如取一个半径为 R 而其中心在源处的球面，并设想热流是沿着径向的（图3-6）。直觉告诉我们，如果该块材料足够大，而我们又不令所取的球面太接近边缘，则 $\mathbf{h}$ 应该是径向的，而且，在球面上所有点其值的大小均应相同。你看，我们正在加入一些猜测工作——常称为“物理直觉”——于数学方面来说，是为了获得答案。

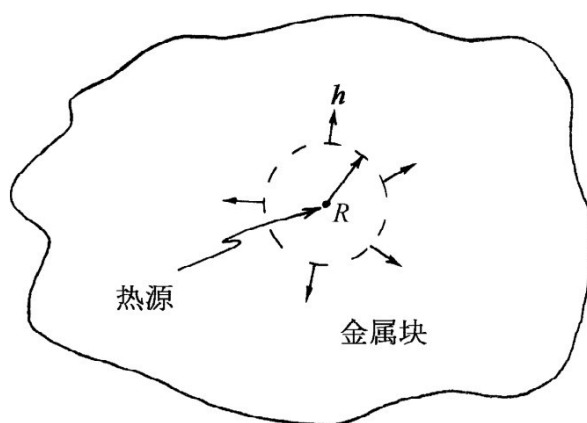


图3-6 在临近一个点热源的区域中，热流沿径向朝外

当 $\mathbf{h}$ 沿着径向而又具有球对称性时， $\mathbf{h}$ 的法向分量对整个球面的积分将会十分简单，因为法向分量恰好就是 $\mathbf{h}$ 的大小而且是不变的。因积分时所取的面积为 $4\pi R^2$ ，于是就有

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = h \cdot 4\pi R^2 \quad (3.23)$$

（式中 h 是 $\mathbf{h}$ 的大小）。这积分应等于 W ，即为源处热量的产生率。因而得：

$$h = \frac{W}{4\pi R^2},$$

或

$$\mathbf{h} = \frac{W}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r, \quad (3.24)$$

式中 $\mathbf{e}_r$ 照例代表沿径向的单位矢量。我们的结果说明， $\mathbf{h}$ 与 W 成正比而与离源的距离的平方成反比。

刚才所得到的结果，仅适用于点热源附近的热流。现在让我们尝试寻求那种仅在热量守恒的条件下，对最普遍的热流类型也能适用的方程式。这样，我们将只与在任何热源或热吸收体之外的那些地方所发生的情况打交道。

关于热传导的微分方程，曾在第2章中推导过了。根据式（2.44）

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T. \quad (3.25)$$

应记住这一关系式是近似的，不过对于某些像金属之类的材料该近似相当好。当然，它只在材料里那些没有热量产生或吸收的区域内才适用。我们已在上面导出了另一个关系，即式（3.21），它在热量守恒情况下成立。如果把该方程与式（3.25）相结合，则可得：

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{h} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

若 κ 是一常数，则

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T. \quad (3.26)$$

你会记得， q 是单位体积内的热量，而 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ 是拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

如果我们另外做一个假定，便可得到一个十分有趣的方程式。假定材料中的温度与单位体积的热容成正比——即该材料有确定的比热。当这一假定有效时（往往如此），就可以写成：

$$\Delta q = c_v \Delta T,$$

或

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_v \frac{dT}{dt}. \quad (3.27)$$

热量的变化率正比于温度的变化率。这里的比例常数 c_v 就是单位体积材料的比热。应用式（3.27）和（3.26），得：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T. \quad (3.28)$$

我们已求得，每一点上 T 的时间变化率与 T 的拉普拉斯算符成正比，即与 T 的空间关系的二阶微商成正比。这样，我们就有一个以 $x, y,$

z 和 t 为变量的关于温度 T 的微分方程。

微分方程式 (3.28) 称为热扩散方程。它经常被写成：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T, \quad (3.29)$$

式中 D 叫扩散 常数，在这里等于 κ / c_v 。

这个扩散方程在许多物理问题中都会出现——气体扩散、中子扩散以及其他各种扩散，我们曾在第1卷第43章中讨论过这类现象的物理性质。现在你们有了一个在最普遍合理的情况下描述扩散的完整方程。往后某个时候我们还将学习一些求解该微分方程的方法，以便找出在特定条件下温度是怎样变化的。现在我们回来考虑有关矢量场的其他一些定理。

§3-5 矢量场的环流

现在，我们想用某些考虑散度的同样方法来看待旋度。通过考虑在一个曲面上的积分，我们得到了高斯定理，尽管当初我们打算处理散度时这事还不太明显。我们当时怎么会知道为了得到散度必须在曲面上进行积分呢？根本不清楚会是这个结果。而现在由于显然同样缺乏正当的理由，所以我们还将对矢量做某些计算并证明它与旋度有关。这次计算的将是所谓矢量场的环流。如果 $\mathbf{C}$ 是任意矢量场，取其沿一曲线的分量，并对这一分量自始至终绕整个回路进行积分。这一积分被称为该矢量场绕该回路的环流。在本章的开头，我们曾经讨论过 $\nabla \psi$ 的线积分，现在我们将对任一 种矢量场 $\mathbf{C}$ 求线积分。

设 Γ 为空间中的任意闭合回路——当然是在想象中的。有一个例子如图3-7所示。 $\mathbf{C}$ 的切向分量绕该回路的线积分可写成：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C}_t ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} . \quad (3.30)$$

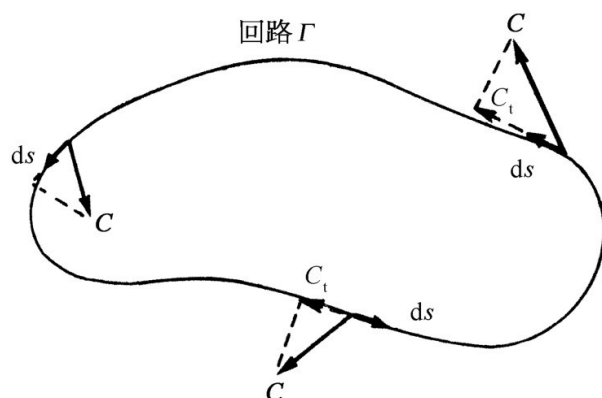


图3-7 $\mathbf{C}$ 绕曲线 Γ 的环流为 $\mathbf{C}_t$ (即 $\mathbf{C}$ 的切向分量) 的线积分

你应该注意，这积分是始终绕回路取的，并不像以前那样从一点至另一点。在积分符号上的那个小圈圈便是为了提醒人们，该积分是始终绕回路进行的。这一积分叫作该矢量场绕曲线 Γ 的环流。这个名称原本是从考虑液体的环流来的。但这一名字——正如通量一样——已被推广应用于即使没有物质做“环流”的任何场了。

用对待通量同样的手法，我们可以证明，绕一个回路的环流等于绕两个分回路的环流之和。假设我们在原来曲线上的(1)和(2)两点间用如图3-8所示的割线来连结，就可以将图3-7所示的曲线分成两个回路。现在存在两个回路 Γ_1 和 Γ_2 。 Γ_1 是由处在(1)和(2)左边部分的原有曲线 Γ_a 再加上“捷径” Γ_{ab} 而构成的。 Γ_2 则是由原有曲线的其余部分加上该捷径而构成的。

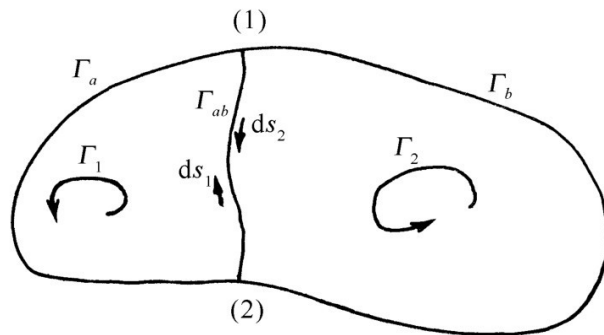


图3-8 绕整个回路的环流等于绕两个回路 ($\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ 和 $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$) 的环流之和

绕 Γ_1 的环流等于沿 Γ_a 和沿 Γ_{ab} 两个积分之和。同理，绕 Γ_2 的环流也是两部分之和，其一沿 Γ_b 而另一沿 Γ_{ab} 。对于曲线 Γ_2 来说，沿 Γ_{ab} 的积分具有与对曲线 Γ_1 中沿 Γ_{ab} 的积分相反的符号，因为它们的绕行方向相反——必须按相同的旋转“指向”来进行这两项线积分。

按照我们以前使用过的同样类型的论据，你们可以看到，这两个环流之和将恰好给出绕原来曲线 Γ 的线积分。那来自 Γ_{ab} 的部分互相抵消了。绕其中一部分的环流再加上绕第二部分的环流等于绕整条外环线的环流。我们可以重复这一过程，把原有回路分割成任意数目的小回路。当将这些小回路的环流相加时，在它们的相邻部分总会互相抵消，从而使其总和相当于绕原来单个回路的环流。

现在让我们假设该原有回路就是某一个曲面的边界。当然，会有无限多个曲面全都以该原有回路为边界。然而，我们的结果将与所选取的曲面无关。首先，将原有回路分割成若干条全都落在所选取的曲面上的小回线，如图3-9所示。不管该曲面形状如何，如果我们选取的小回路足够小，则可以假定每一小回路包围的面基本上是平面。并且，我们也能选取那些小回路使得每个都非常接近正方形。现在就可

以通过求绕所有小回路的环流，再取其和，从而算出绕回路 Γ 的环流。

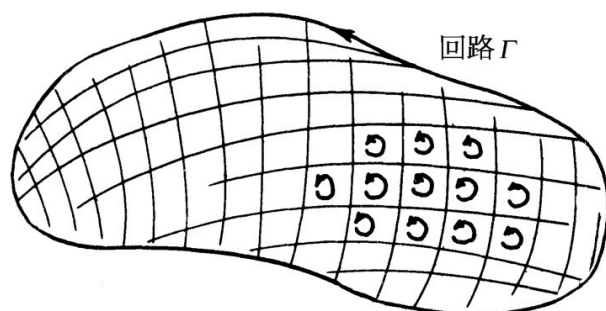


图3-9 选取某一被回路 Γ 包围着的表面。这个面被分割成若干个小面积，每个近似于一正方形。绕行 Γ 的环流就等于绕行各小回路的环流之和

§3-6 围绕一正方形的环流；斯托克斯定理

我们将怎样求得沿每一小正方形的环流呢？首先就要问，这一正方形在空间中的取向如何？要是它有一个特殊取向，那计算起来就会方便得多。例如，假使它位于一个坐标平面内。由于对坐标轴的取向我们还未做过任何假设，因此就可以这样选取坐标轴，使此刻我们正专注的那个小正方形正好落在 xy 面内，如图3-10所示。若该结果用矢量符号来表示，那就可以说，不管该面的特殊取向如何，结果都是一样的。

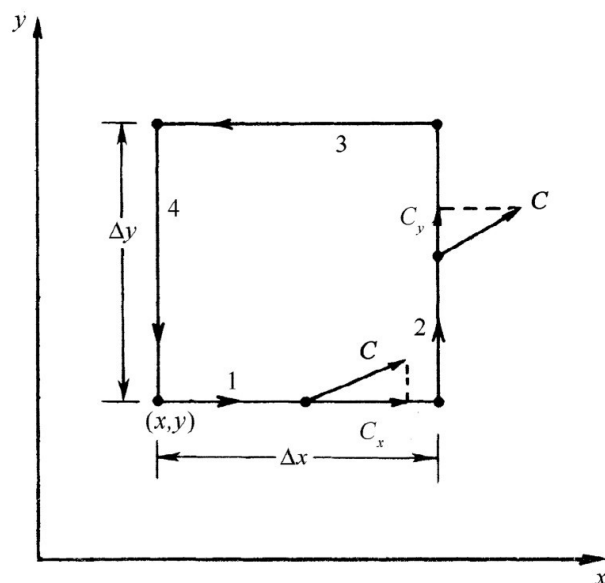


图3-10 计算绕行一个小正方形的 $\mathbf{C}$ 的环流

现在我们希望求出场 $\mathbf{C}$ 绕该小正方形的环流。如果令该正方形足够小，使得矢量 $\mathbf{C}$ 沿它的任一边都不会改变很多，进行线积分就较容易（正方形越小，这个假定就越好，而实际所谈的正是无限小的正方形）。从位于图的左下角那一点 (x, y) 出发，按照箭头所指的方向绕行一周。沿标记为（1）的第一条边，其切向分量为 C_x （1）而长度为 Δx 。该积分的第一部分就是 C_x （1） Δx 。沿第二条边，我们获得 C_y （2） Δy 。沿第三条边得 $-C_x$ （3） Δx ，而沿第四条边得 $-C_y$ （4） Δy 。这些负号是需要的，因为这里要求的是沿绕行方向的切向分量。因此，整个线积分就是：

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = C_x \text{ (1) } \Delta x + C_y \text{ (2) } \Delta y - C_x \text{ (3) } \Delta x - C_y \text{ (4) } \Delta y. \quad (3.31)$$

现在让我们注意第一和第三部分。它们合起来就是：

$$[C_x \text{ (1) } - C_x \text{ (3) }] \Delta x. \quad (3.32)$$

你也许认为，对我们的近似程度来说这个差值为零。这对于一级近似是对的。然而可以更精确一些，计及 C_x 的变化率。如果这样便可以写出：

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y. \quad (3.33)$$

假如把次级近似也包括进去，则会涉及 $(\Delta y)^2$ 等项，但由于我们最终将取 $\Delta y \rightarrow 0$ 时的极限，所以这样的项都可以忽略。将式(3.33)和式(3.32)结合起来，会得出

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (3.34)$$

对于我们的近似，上式中的微商可以在 (x, y) 处计算出来。

同理，环流中的其他两项，也可以写成：

$$C_y(2)\Delta y - C_y(4)\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (3.35)$$

于是，绕上述那个小正方形的环流为：

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (3.36)$$

这很有趣，因为括号内两项恰好就是旋度的 z 分量。并且，我们还注意到， $\Delta x \Delta y$ 就是该正方形的面积。因此，可以将环流式(3.36)写为：

$$(\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta a.$$

这个 z 分量实际上就是沿该表面元法向的分量。因此，还可以将绕一个微分正方形的环流写成一种不变的矢量形式：

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_n \Delta a = (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \Delta a. \quad (3.37)$$

我们的结果是：任一矢量 $\mathbf{C}$ 绕一个无限小正方形的环流，等于 $\mathbf{C}$ 的旋度垂直于表面的分量乘以该正方形面积。

现在，绕任一条回路 Γ 的环流，可以轻而易举地同矢量场的旋度联系起来了。用任意合适的曲面 S 将回路填满，如图3-11所示，并把绕这个面上一系列无限小正方形的环流加起来。这个和可以写成一个积分。其结果是以斯托克斯命名（为纪念斯托克斯先生）的一个十分有用的定理。

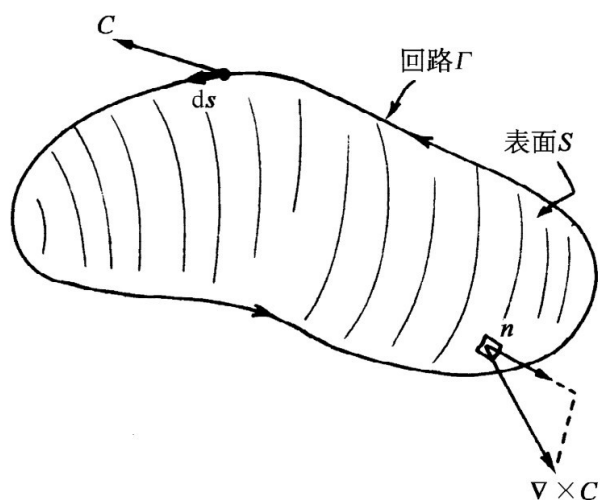


图3-11 $\mathbf{C}$ 绕 Γ 的环流等于 $\nabla \times \mathbf{C}$ 的法向分量的面积分

斯托克斯定理：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} da, \quad (3.38)$$

式中 S 是以 Γ 为边界的任意曲面。

现在必须谈谈关于符号的一个惯例。在图3-10中，采用“常用”的——也即“右手”的——坐标系统， z 轴将指向 你们。当按照旋转的“正”指向进行线积分时，我们发现环流等于 $\nabla \times \mathbf{C}$ 的 z 分量。要是我们绕行的方向相反，即会获得一个相反的符号。那么，一般说来，我们怎么会知道应选取哪个方向作为 $\nabla \times \mathbf{C}$ 的法向分量的正向呢？正法线始终必须与旋转的指向联系起来，如图3-10所示的。对于普遍情况，则如图3-11所示。

“右手法则”是记住这个关系的一种办法。如果你用左 手指围绕曲线 Γ ，指尖指向 $d\mathbf{s}$ 的正方向，那么你的大拇指就指向 S 面的正 法线方向。

§3-7 无旋度场与无散度场

现在我们要来讨论上述新定理的某些结果。首先，考虑一个矢量其旋度处处 为零的情况。这时斯托克斯定理说，绕任何回路的环流等于零。现在若在一闭合曲线上选取两点（1）和（2）（图3-12），则从（1）至（2）的切向分量的线积分将与这两条可能路线中选取哪一条无关。我们可以断定，从（1）至（2）的积分只取决于这两点的位置——也就是说，它仅是位置的函数。同样的推理方法也曾在第1卷第14章中使用过，在那里我们曾证明如果某量绕一闭合回路的积分总是零，则该量对任一曲线的积分可以表达为两端点位置的某一函数之差。这一事实使我们创立了势的概念。而且，我们证明该矢量场就是这一势函数的梯度〔见第1卷式（14.13）〕。

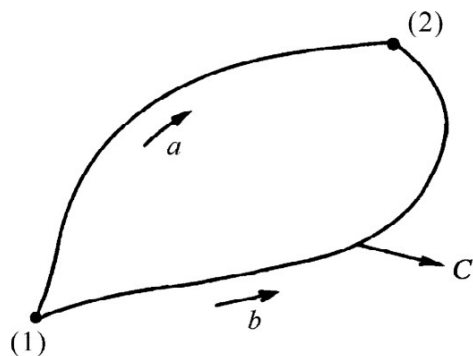


图3-12 如果 $\nabla \times \mathbf{C}$ 为零，则绕一闭合曲线 Γ 的环流等于零。从 (1) 至 (2)， $\mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$ 沿 a 的线积分与沿 b 的线积分必相同

由此可见，任一旋度为零的矢量场等于某个标量函数的梯度。这就是说，如果处处 $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ ，则存在某个 ψ ，使得 $\mathbf{C} = \nabla \psi$ ，这是一个有用的概念。如果愿意，我们可以用一个标量场来描述这一特殊类型的矢量场。

让我们再来证明另一件事。假设有任意的标量场 ϕ 。如果取它的梯度即 $\nabla \phi$ ，那么这个矢量绕任意闭合回路的积分就必然为零。这矢量从点 (1) 至点 (2) 的线积分为 $[\phi(2) - \phi(1)]$ 。如果 (1) 和 (2) 是同一点，那么定理1、即式 (3.8) 告诉我们，该线积分等于零：

$$\oint_{\text{回路}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

应用斯托克斯定理，我们可以得出结论：在任何曲面上

$$\int (\nabla \times (\nabla \phi))_n da = 0.$$

但如果在任何曲面上的积分都等于零，则该被积函数必定为零。所以，总有

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0.$$

这个结果与我们在§2-7中应用矢量代数证明过的结果相同。

现在让我们考虑一种特殊情况，即用一个大曲面 S 来填满一个小回路 Γ ，如图3-13所示。实际上我们希望看看，当该回路缩小至一点、使得曲面的边缘消失不见而成为一闭合曲面时，究竟会发生什么情况。现在，如果矢量 $\mathbf{C}$ 处处有限，则当我们缩小该回路时，绕 Γ 的线积分应该趋于零——该积分大体上正比于 Γ 的周长，而周长趋于零。按照斯托克斯定理， $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ 的面积分也必为零。不知为什么，当我们把曲面关闭时，就会加进一些贡献将以前那里存在的東西抵消掉。因而我们得到一个新的定理：

$$\int_{\text{任意闭合曲面}} (\nabla \times \mathbf{C})_n \, da = 0. \quad (3.39)$$

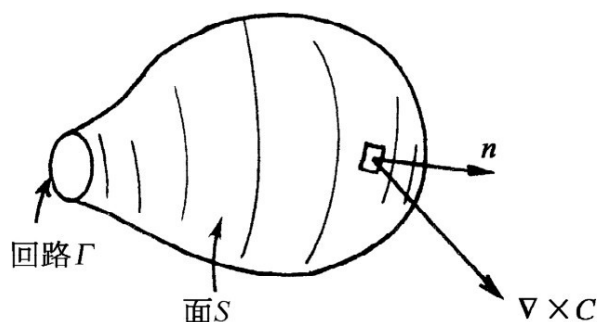


图3-13 在趋向于一个闭合曲面的极限上，我们发现 $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ 的面积分必为零

这看来很有意思，因为我们已经有一个关于矢量场曲面积分的定理。按照高斯定理，即式(3.18)，这样的面积分等于该矢量的散度的体积分。当应用于 $\nabla \times \mathbf{C}$ 上时，高斯定理表明：

$$\int_{\text{闭合曲面}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\text{曲面内体积}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) \, dV. \quad (3.40)$$

所以我们得出结论，第二个积分也应等于零，即

$$\int_{\text{任意体积}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) \, dV = 0, \quad (3.41)$$

这对于任何矢量场 $\mathbf{C}$ 都正确。由于式 (3.41) 对于任何体积 都正确，所以在空间每一点 该被积函数为零就必然正确。因此，我们就恒有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = 0,$$

但这是§2-7中我们曾从矢量代数方面得到过的相同结果。现在我们开始来看看如何把每样东西配合起来。

§3-8 总结

让我们把所得到的关于矢量微积分的结果做个总结。这些结果，实际上是第2章和第3章的要点：

1. 算符 $\partial/\partial x$ ， $\partial/\partial y$ ， $\partial/\partial z$ 可以认为是矢量算符 ∇ 的三个分量，而把这一算符

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

作为矢量处理后，从矢量代数所获得的那些公式都是正确的。

2. 标量场在两点的差值等于该标量梯度的切向分量沿连接（1）和（2）这两点间任意曲线的线积分：

$$\phi(2) - \phi(1) = \int_{\substack{(1) \\ \text{任意曲线}}}^{(2)} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.42)$$

3. 任意矢量的法向分量在一个闭合曲面上的面积分等于该矢量的散度对该闭合曲面内体积的积分：

$$\int_{\text{闭合曲面}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a} = \int_{\text{曲面内体积}} \nabla \cdot \mathbf{C} \, dV. \quad (3.43)$$

4. 任意矢量的切向分量绕一闭合回路的线积分，等于该矢量旋度的法向分量对以该回路为边界的任意曲面的面积分，即

$$\int_{\text{边界}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{曲面}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a}. \quad (3.44)$$

[1] 下面的推导也同样适用于任何一个直角平行六面体。

第4章 静电学

§4-1 静电

现在我们开始对电磁学理论做详细的研究。全部电磁学都包含在麦克斯韦方程组中。

麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}; \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

由这些方程所描述的情况可能十分复杂。我们将首先考虑那些相对简单的情况，以便在研究更复杂的问题以前，学会如何去处理这些简单情况。其中最容易处理的是任何事物都与时间无关——叫作静态——的情况。所有电荷都永远固定在空间里，即使它们确实在运动，也只是作为电路中的恒定电流而运动（使得 ρ 和 $\mathbf{j}$ 都不随时间而变）。在这种情况下，麦克斯韦方程组中所有场对时间微商的项都等于零。这样，麦克斯韦方程组变成：

静电学

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.6)$$

静磁学

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}; \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

关于这四个方程组，你将会注意到一个有趣情节。这组方程可以分成两对，电场 $\mathbf{E}$ 仅出现在前两个方程中，而磁场 $\mathbf{B}$ 仅出现在后两个方程中，电场和磁场并不互相关联。这意味着，只要电荷和电流是静止的，则电和磁就是两个性质不同的现象。直到诸如电容器充电或移动磁铁引起电荷或电流的变化， $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 的相关性仍不会显露出来。只有变化足够迅速，使得麦克斯韦方程组中那些时间微商变得显著时， $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 才会相互关联起来。

现在，如果你注意那些静止情况的方程，你将会看到，从弄清楚关于矢量场的数学特性的观点来看，学习这两门称为静电学与静磁学的学科是理想的。因为静电学是矢量场具有零旋度和某一给定散度的一个极佳例子；而静磁学则是矢量场具有零散度和某一给定旋度的极佳例子。更规范的——而你可能认为是更满意的——表达电磁学理论的方法是先从静电学出发，于是学习有关散度方面的知识；稍后再处理静磁学和旋度；最后，才把电学和磁学结合起来。我们已决意从矢量运算的完整理论开始。现在就把这种理论应用于静电学的特殊情况，场 $\mathbf{E}$ 由第一对方程给出。

我们将从最简单的情况——即所有各电荷的位置都已被规定的情况——开始。要是只需学这种水平的静电学（就像下面两章中所做的

那样)，那生活将显得多么简单，事实上，几乎毫无价值。正如你将会看到的，一切事情都可以从库仑定律和某个积分得出。但事实并非如此，在许多实际的静电学问题中，开始时我们并不知道电荷在哪里，只知道它是按照物性所规定的方式来分布的。电荷所占据的位置取决于场 $\mathbf{E}$ ，而这个场反过来又取决于电荷的位置。于是，事情可能变得很复杂。例如，如果把一个带电物体移近导体或绝缘体，导体或绝缘体中的电子和质子就会到处运动。式（4.5）中的电荷密度 ρ ，有一部分可能是我们原先就已知的带上去的电荷，另外一部分则是那些在导体中到处运动的电荷所引起的。要是所有这些电荷都必须考虑进去的话，将会把人们引入到一些相当微妙而又有趣的问题中去。所以尽管这一章是关于静电学方面的，但它仍将不会包括这一课题中的那些更瑰丽而微妙的部分，而只是处理我们能够假定一切电荷位置均已知的那种情况。自然，你应当在试图处理其他问题之前就能对付这一情况。

§4-2 库仑定律；叠加原理

把式（4.5）和（4.6）作为我们的起点，照理应该是合乎逻辑的。然而，如从另外的某处出发再回到这些方程式上来，将会容易一些，而所得的结果是相同的。我们就从已谈及的那个被称为库仑定律的定律着手，它表明在两静止不动的电荷间有一个与这两个电荷之积成正比而与它们之间距离的平方成反比的力，这个力沿着从一电荷至另一电荷的直线。

库仑定律

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2. \quad (4.9)$$

$\mathbf{F}_1$ 是作用于电荷 q_1 上的力； $\mathbf{e}_{12}$ 是从 q_2 至 q_1 的方向上的单位矢量；而 r_{12} 则是 q_1 与 q_2 间的距离。作用于 q_2 上的力 $\mathbf{F}_2$ 与 $\mathbf{F}_1$ 大小相等而方向相反。

基于历史原因，比例常数写成 $1/4\pi\epsilon_0$ 。在我们采用的单位制——米·千克·秒（mks）制——中，它被定义为精确地等于 10^{-7} 乘光速平方。光速近似地等于 $3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ，因此这个常数近似地为 9×10^9 ，而其单位则可证明为 $\text{Nm}^2 \text{ C}^{-2}$ ，或者是 VmC^{-1} 。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7} c^2 \text{ (根据定义)} \\ &= 9.0 \times 10^9 \text{ (通过实验)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

单位： $\text{Nm}^2 \text{ C}^{-2}$ 或 VmC^{-1} 。

当存在两个以上的电荷时——唯一真正有意义的时候——我们就必须用自然界的另一事实来补充库仑定律。这个事实是：作用于任一电荷上的力等于其他每一电荷对它所施库仑力的矢量和。这个事实叫作“叠加原理”。这就是静电学所包含的全部内容了。如果把库仑定律和叠加原理结合起来，就不再有别的东西了。式（4.5）和式（4.6）——静电学方程——正好包含这些。

应用库仑定律能很方便地引进电场的概念。我们说，场 $\mathbf{E}$ （1）是作用于 q_1 上单位电荷的力（由所有其他电荷所施）。对于除 q_1 外存在另一个电荷的情况，我们对式（4.9）除以 q_1 ，便得

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (4.11)$$

此外我们还认为，即使 q_1 不存在， $\mathbf{E}(1)$ 仍描述了有关点(1)的某些情况——假设所有其他电荷都保持其原有位置。我们讲： $\mathbf{E}(1)$ 是点(1)处的电场。

电场 $\mathbf{E}$ 是一个矢量，因而式(4.11)实际指的是三个方程式——对于每一分量就是一个方程。把其中的 x 分量清楚地写出时，式(4.11)便意味着

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \quad (4.12)$$

其他分量均与此相仿。

如果有许多电荷，则在任意一点(1)处的场 $\mathbf{E}$ 就是其他每个电荷的贡献之和。这个总和中的每一项，看来都像式(4.11)或(4.12)。令 q_j 为第 j 个电荷的大小，而 $\mathbf{r}_{1j}$ 为从 q_j 至点(1)的位移，则可以写出

$$\mathbf{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \mathbf{e}_{1j}. \quad (4.13)$$

当然，该式意味着

$$E_x(x, y, z) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}}, \quad (4.14)$$

等等。

不把电荷看作像电子和质子那样的组成单元，而把它们想象成是铺展开的连续涂片或连续“分布”，往往会很方便。只要不去关注在尺度过小的范围内所发生的事情，这是可行的。这样，我们便可通过“电荷密度” $\rho(x, y, z)$ 来描述电荷分布。如果在点(2)处一个小体积 ΔV_2 内含有电量 Δq_2 ，则 ρ 便由下式定义

$$\Delta q_2 = \rho(2) \Delta V_2. \quad (4.15)$$

为了将这种描述方法用到库仑定律上去，我们将式(4.13)、(4.14)中的那些求和，用对包含电荷的全部体积的积分来代替。这样就得到

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}. \quad (4.16)$$

有些人却喜欢写成

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$

式中 $\mathbf{r}_{12}$ 是从(2)至(1)的位移矢量，如图4-1所示。因此，对于 $\mathbf{E}$ 的积分就可以写成

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(2) \mathbf{r}_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.17)$$

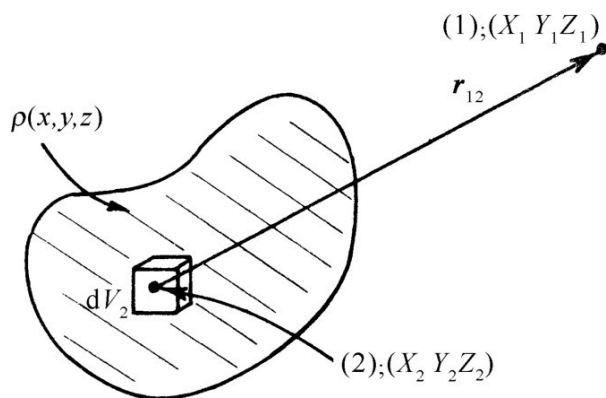


图4-1 分布电荷在点(1)处产生的电场 E ，可由对该分布的积分求得。点(1)也可以落在该分布区域之内

当我们要用这个积分进行具体计算时，通常还得详尽地把它写明白，对于式(4.16)或(4.17)的 x 分量，该写成

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{全部空间}} \frac{(x_1 - x_2)\rho(x_2, y_2, z_2)dx_2 dy_2 dz_2}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.18)$$

这个公式我们不会常用。之所以把它写在这里，只是为了强调，电荷位置都已知的所有静电学问题，我们已完全解决了。给定了电荷，场怎么样呢？答案：算出这一积分。因此，对于这一课题便再没有什么可说了，那只是一个复杂的三维积分工作——严格说来，是一项计算机的工作！

借助这些积分，我们就能够求出各种电荷产生的场：面电荷、线电荷、球面电荷或任何特殊分布的电荷。重要的是要知道：当我们画场线、谈论电势或计算散度时，我们所有的答案都已在这里了。不过问题在于，有时某些聪明的猜测工作，比直接计算这个积分还要容易。这种猜测工作要求人们学习各种奇妙的东西。实践中，比较容易做的也许还是忘记追求聪明、总是直接而不是灵巧地把那些积分算出

来。然而，我们打算尝试做得巧妙点。下面将继续讨论有关电场的某些其他特点。

§4-3 电势

首先，我们讲讲电势的概念，它与电荷从一点移至另一点所做的功有关。设有某种电荷分布，产生了一电场。我们要问：如把一个小电荷从一处移至另一处需做多少功？沿某一路径移动电荷反抗电力所做的功，等于这电力在运动方向分量的负值沿该路径的积分。如果我们把一电荷从点 a 移至点 b ，则

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

式中 $\mathbf{F}$ 是在每一点施于电荷上的电力，而 $d\mathbf{s}$ 则是沿路径的微分位移矢量（见图4-2）。

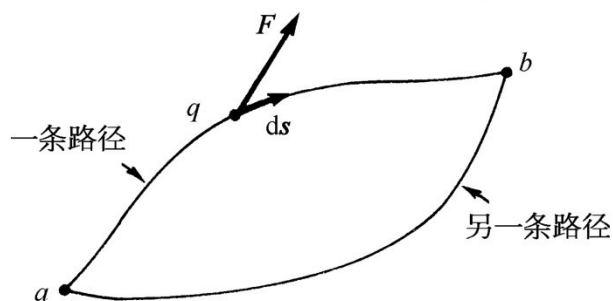


图4-2 把电荷从 a 移至 b 所做的功，等于 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 沿所取路径进行积分的负值

对于我们来说，考虑移动一个单位电荷所做的功会更有意义。因此，作用于电荷上的力在数值上就等于电场。在这种情况下反抗电力

所做的功称为 W （单位电荷），我们写为

$$W(\text{单位电荷}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

一般地说，用这类积分所得的结果与所取的路径有关。但是，假如式（4.19）的积分与从 a 至 b 的路径有关的话，那我们就可通过把电荷沿一条路径从 a 移至 b 、然后又沿另一条路径返回到 a 而从场中获得功。这样，可以沿 W 较小的那条路线达到 b ，而沿另一条路线返回来，这样我们得到的功就会大于所付出的功。

原则上说，从场中得到能量并不是不可能的。事实上，我们将遇到有这种可能的场。有可能当你移动电荷时，你就对这部“机器”的另一部分施加了力。若这部机器抵抗此力而运动，则它会损失能量，从而保持世界上的总能量不变。然而，对于静电学来说，并没有这样一种“机器”存在，我们对反作用于场源上的力也很清楚，它们是作用于产生该场的那些电荷上的库仑力。如果其他电荷都固定在其位置上——这是静电学中我们所做的唯一假设——这些反作用力就不能对它们做功，因而无法从它们那里获得能量——当然，这是以能量守恒原理对静电学的情况有效为条件的。我们相信它是有效的，请让我们证明，从力的库仑定律必然可以得出它来。

首先，考虑在一个起源于单个电荷 q 的场中所发生的情况。令点 a 与电荷 q 间的距离为 r_a ，而点 b 与 q 的距离为 r_b 。现在选择另一个大小为1个单位、称为“试验”电荷的电荷，从 a 移至 b ，我们开始用最简易的可能路径来计算。使试验电荷最初沿一圆弧、然后再沿某一半径移动，如图4-3（a）所示。求在这一条特殊路径所做之功，和小孩玩游戏一样简单（否则我们就不会选择这条路线了）。首先，在从 a 至 a

的路径上根本没有做功。场是沿径向的（根据库仑定律），因而它与移动的方向成直角。其次，在从 a' 至 b 的路径上，场与移动方向相同，大小随 $1/r^2$ 变化。于是，把试验电荷从 a 移至 b 所做之功应为

$$\begin{aligned} -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

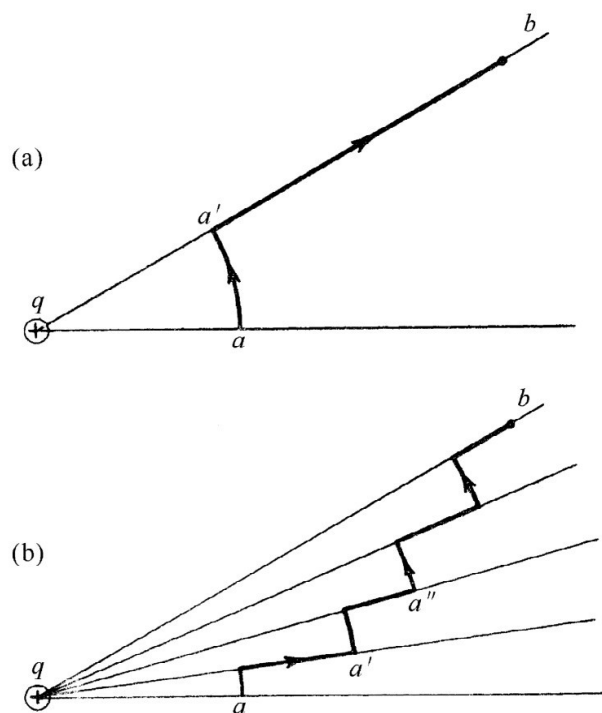


图4-3 把一试验电荷从 a 移至 b 时，无论沿哪一条路径所做的功都相等

现在，再让我们取另一条简易路径。例如，取图4-3（b）所示的那条路径。它一会儿沿一圆弧，一会儿沿某一半径，然后又沿一圆弧，又沿一半径，等等。每次当我们沿圆周部分移动时，并没有做功。而当沿径向部分移动时，就只需对 $1/r^2$ 积分。沿第一径向线段，我们从 r_a 积至 $r_{a'}$ ，然后沿第二径向线段，又从 $r_{a'}$ 积至 $r_{a''}$ ，

如此等等。所有这些积分之和与直接从 r_a 至 r_b 的单一积分相同。对于这一路径所得答案与上面对第一条路径所得的一样。很清楚，对于任一条由任意数目的同种线段构成的路径，我们将会得出相同答案。

若是一条光滑路径又将如何呢？会得出相同的答案来吗？在第1卷第13章中，我们就曾经讨论过这一点。应用与那里所用的相同论据，可以得出结论：把一单位电荷从 a 移至 b 所做的功应与所经历的路径无关，即

$$W(\text{单位电荷}) \Big|_{a \rightarrow b} = - \int_{\text{任意路径}}^b_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

由于该功只与端点有关，所以它就可以表示为两个数值之差。我们可按下述办法看到这一点。试选定一参考点 P_0 ，并约定用一条总会经过 P_0 点的路径来计算我们的积分。令 $\phi(a)$ 代表从 P_0 至点 a 反抗场力所做的功，并令 $\phi(b)$ 为从 P_0 至点 b 所做的功（图4-4）。这样，从 a 点（在去 b 的路上）至 P_0 点所做的功就会等于 $\phi(a)$ 的负值，所以我们有

$$- \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.21)$$

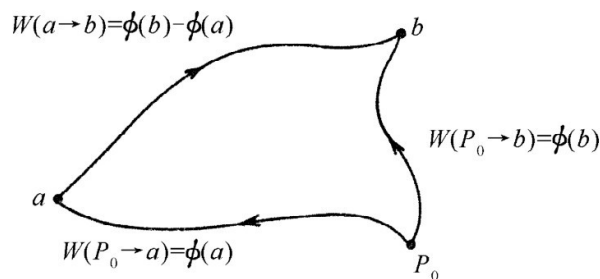


图4-4 沿任意路径从 a 至 b 所做的功，等于从某点 P_0 至 a 的功的负值加上从 P_0 点至 b 的功

由于所涉及的仅是函数 ϕ 在两点之差，所以我们实在没有必要去规定 P_0 的位置。然而，一旦我们选定了某个参考点，则就已确定了空间任一点的一个数目 ϕ 。于是， ϕ 就是一个标量场，它是 x, y, z 的函数。我们称这标量函数为在任一点的静电势。

静电势

$$\phi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.22)$$

为了方便，我们常把参考点选在无限远。于是，对于位于原点的单个电荷来说，应用式 (4.20)，任意点 (x, y, z) 处的势 ϕ 为

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (4.23)$$

若干个电荷所产生的电场，可写为第一个、第二个、第三个等等电荷所产生的电场之和。当对和进行积分以求电势时，我们便得到一些积分之和。其中每个积分就是一个电荷所产生的势的负值。我们断定，许多电荷所产生的势 ϕ 等于所有各个电荷所产生的势之和。这也

就是势的叠加原理，应用过去求一群电荷或分布电荷的电场的相同论据，就可得出称为点（1）处电势的完整公式：

$$\phi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}}, \quad (4.24)$$

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全空间}} \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}. \quad (4.25)$$

记住势 ϕ 的物理意义：它是单位电荷在空间从某个参考点被移至指定点时所具有的势能。

§4-4 $E = -\nabla \phi$

谁在乎 ϕ 呢？因为作用于电荷上的力都是由电场 $\mathbf{E}$ 提供的。关键在于， $\mathbf{E}$ 可以容易地由 ϕ 求得——事实上，这如同取微商那样容易。试考虑两个点，一点在 x 处，另一点在 $(x + \Delta x)$ 处，而这两点处于相同的 y 和 z 。试问把一单位电荷从一点移至另一点时做了多少功？该路径是沿 x 至 $x + \Delta x$ 的一条水平线，所做之功等于这两点的电势之差：

$$\Delta W = \phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x.$$

而对相同路径抵抗电场力所做的功为

$$\Delta W = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_x \Delta x.$$

可见

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (4.26)$$

同理, $E_y = -\partial \phi / \partial y$, $E_z = -\partial \phi / \partial z$ 。或者, 用矢量分析的符号把它们综合起来, 则

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (4.27)$$

这个方程是式 (4.22) 的微分形式。任何具有确定电荷的问题, 都可以通过式 (4.24) 或 (4.25) 算出电势, 再用式 (4.27) 求场加以解决。式 (4.27) 与我们从矢量微积分学所求得的式子相符, 即对于任一标量场 ϕ ,

$$\int_a^b \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.28)$$

根据式 (4.25), 标量势 ϕ 由一个三维积分给出, 它同我们以往对 $\mathbf{E}$ 的积分相似。算 ϕ 是否比算 $\mathbf{E}$ 有优点呢? 有的! 对于 ϕ 来说, 只用到一个积分, 而对于 $\mathbf{E}$ 则有三个积分——因为它是一个矢量。而且, 对 $1/r$ 的积分往往比对 x/r^3 的积分稍微方便。在许多实际情况中, 先算出 ϕ , 然后取其梯度以求得电场, 比计算 $\mathbf{E}$ 的三个积分较为容易。当然这仅仅是一个实际问题。

ϕ 这个势还有更深刻的物理意义。我们已经证明, 当 ϕ 由式 (4.22) 给出时, 库仑力中的 $\mathbf{E}$ 可以由 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 获得。但如果 $\mathbf{E}$ 等于一个标量场的梯度, 那么, 我们从矢量运算知道 $\mathbf{E}$ 的旋度必定等于零:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.29)$$

这恰好就是静电学中第二个基本方程, 即式 (4.6)。我们已经证明, 由库仑定律会给出一个满足该条件的 $\mathbf{E}$ 场。到目前为止, 事事都很顺

利。

我们在定义电势之前，实际上已经证明 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。我们曾经指出，绕一闭合路径所做的功为零。这就是说，对于任何路径，

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

在第3章中，我们曾见到对任何这类场， $\nabla \times \mathbf{E}$ 必定处处为零。静电学中的电场是无旋场的一个例子。

你可以用另一种方法——对于由式（4.11）所给出的点电荷的场，计算 $\nabla \times \mathbf{E}$ 的分量——证明 $\nabla \times \mathbf{E}$ 等于零，借以练习你们的矢量运算。如果你得到零，则叠加原理告诉说，对于任何电荷分布的场，其旋度你也会得到零。

应当指出一个重要事实：对于任何径向力，做的功与路径无关，因而存在着势。如果你想到这一点，上面为证明功的积分与路径无关的全部论据，仅有赖于来自单个电荷的力是径向和球对称的这个事实。它并不取决于与距离的关系为 $\frac{1}{r^2}$ 的事实——很可能存在与 r 的任何依赖关系。势的存在以及 $\mathbf{E}$ 的旋度等于零的事实，实际上只是由于静电力具有方向及对称性的缘故。基于此，式（4.28）或式（4.29）只可能包含了电学规律的一部分。

§4-5 $\mathbf{E}$ 的通量

我们现在要来导出一个场方程式，它明确而又直接地与力的平方反比规律这个事实有关。场随距离的平方反比地变化，这对于某些人

来说，似乎是“理所当然的”，因为“那是事情扩展的途径”。试考虑一个光源及正从它发射出的光：通过一个顶端位于源处的锥体所割出的面的光量，不管这个面所在处的半径大小如何，处处相等。只要光能守恒，这就是必然的。单位面积的光量——光强——必然与锥体所割出的面积成反比地变化，也就是与光源的距离的平方成反比。由于同样的理由，电场肯定会与距离的平方反比地变化！可是，这里并没有“同样的理由”这种东西。没有人能够讲，电场就像光那样，是某种守恒的东西流动的量度。假如有一个电场“模型”，其中电场矢量代表流或某种飞出去的小“子弹”的运动方向和速率，而且如果模型要求这些子弹守恒，即一旦被射出去就没有一颗子弹会丢失，那么也许我们能够“看到”该平方反比定律是必需的。另一方面，要求有某种能够表达这一物理概念的数学方式。假如电场像发射出去的守恒的子弹，那么它就将随距离的平方成反比地变化，而我们将可能用一个方程——那纯粹是一种数学形式——来描写那种行为了。现在不妨想想这个方法，只要我们不说电场是由子弹构成的，但要认识到，我们是在用一个模型协助求得正确的数学答案。

甚至假定，我们想象一下电场确实代表某种守恒东西的流——在除了电荷所在处外的一切地方（电场总得从某处开始产生！）。我们设想，不管什么东西，都是从电荷流出进入周围空间的。如果 $\mathbf{E}$ 就是这种流的矢量（正如热流中的 $\mathbf{h}$ ），那么在点源附近它将有一个 $1/r^2$ 的依赖关系。现在，我们要用这个模型找出如何用一种更深刻或更抽象的办法来陈述这一平方反比定律，而不仅仅是说“平方反比”（你也许觉得奇怪，我们为什么要避免对这么一个简单定律的直接陈述，而要用另一种方式隐蔽地暗示同样的事情。但请忍耐一点！它将会证明确实很有用）。

我们要问：从点电荷附近的任一个闭合曲面出来的 $\mathbf{E}$ “流”是什么？首先，让我们取一个简易闭合面——如图4-5所示的一个。如果 $\mathbf{E}$ 场像流，则从这一个箱子里出来的净流应该等于零。只要从这一个面跑出去的所谓“流量”指的是 $\mathbf{E}$ 的法向分量的面积分——即 $\mathbf{E}$ 的通量，则我们就得到上述结果。在那些侧向面上，法向分量为零。而在那些球面上，法向分量 E_n 恰好就是 $\mathbf{E}$ 的大小——对于那个较小的面为负，而对于那个较大的面为正。 $\mathbf{E}$ 的大小随 $1/r^2$ 而减少，但表面积却正比于 r^2 ，因而两者之积就与 r 无关了。进入 a 面的 $\mathbf{E}$ 的通量恰好被跑出 b 面的那个通量所抵消。从 S 出来的总流量为零，也就是说，对于这个曲面，

$$\oint_S \mathbf{E}_n da = 0. \quad (4.30)$$

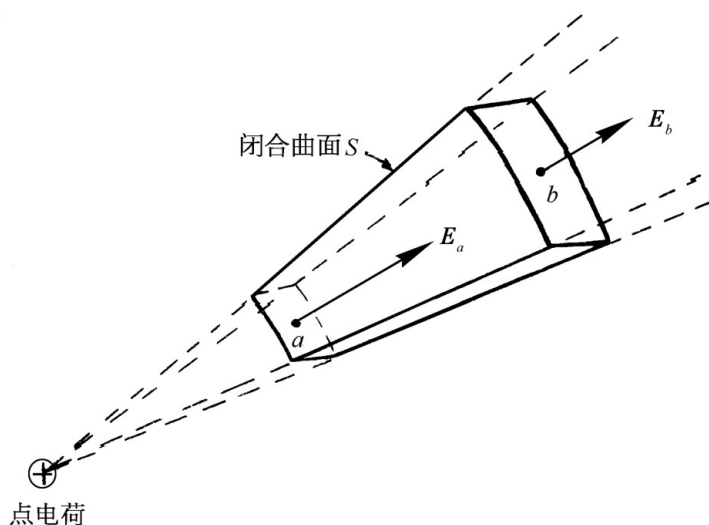


图4-5 从曲面 S 出来的 $\mathbf{E}$ 的通量为零

其次，我们将证明两个端面可以相对于径线倾斜而不会改变该积分式 (4.30)。尽管这是普遍正确的，但对于我们的目的来说，却只需证明当两个端面很小，以致它们对着来自源心的一个小角——实际

上是一个无限小角——时，它是对的就行了。在图4-6中，我们画出了一个其“侧面”为径向而其“端面”倾斜着的曲面 S 。在这图中的端面不小，但你仍想象端面非常小的情况。因此，在面上场 $\mathbf{E}$ 将足够均匀，以致我们可以只用它在曲面中心处的值。当我们把该面倾斜一个角度 θ 时，它的面积会增大一个因子 $1/\cos\theta$ 。但 $\mathbf{E}$ 垂直于该面的分量 E_n 则减少一个因子 $\cos\theta$ ，乘积 $E_n \Delta a$ 保持不变。这样，从整个曲面 S 出来的通量仍为零。

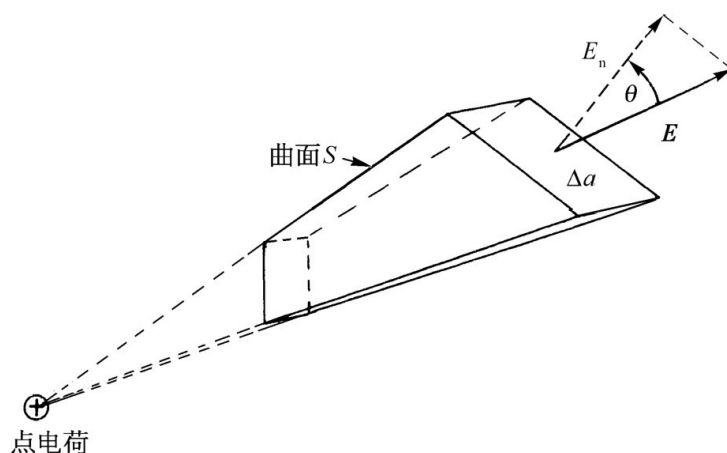


图4-6 从曲面 S 出来的 $\mathbf{E}$ 的通量为零

到此不难看出，从任何曲面 S 包围着的体积中出来的通量必为零。任何一个体积都可认为是由如图4-6所示的单元构成的。整个体积的表面完全可分割成一对一对的端面，而由于进出这些端面的通量成对地互相抵消，所以从整个曲面 S 出来的总通量就等于零。这个意思由图4-7说明。这样，我们就有了一个普适的结果。那就是，在一个点电荷的场中，从任何闭合曲面 S 出来的通量均为零。

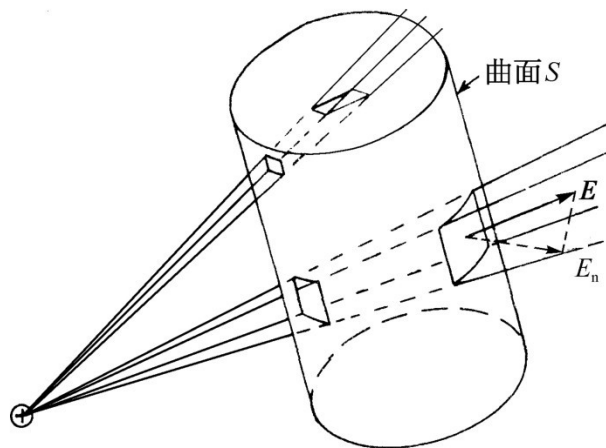


图4-7 任一个体积都可想象成完全由无限多个削去两头的锥体构成。从每一锥体断面一端的 E 的通量与从另一端的通量相等而相反。因此，从曲面 S 出来的总通量就是零

可是要注意！上述证明只是在曲面 S 不包围 电荷时做出的。假如有一个点电荷位于该曲面之内，那将会怎样呢？我们仍可将该曲面分割成由通过电荷 q 的各径向线所围成的各成对面积，如图4-8所示。通过这两个面的通量仍旧相等——用与上面同样的论证——只是现在这两个通量有了相同的符号，因此从包围一个电荷的曲面出来的通量并不等于零。那么，它等于什么呢？我们可用一点小小技巧把它求出来。假想一个完全在原来曲面 S 之内的小曲面 S' 包围该电荷，如图4-9所示。这样，就将此电荷从“内部”“移出”，从而在由 S 和 S' 两个曲面之间所包围的体积内就没有电荷了。应用与上面所给出的相同的论证，从这一个个体积出来的总通量（包括通过 S' 的）就是零。这些论证实际上告诉我们，通过 S' 面而进入该体积的通量与通过 S 面跑出去的通量彼此相等。

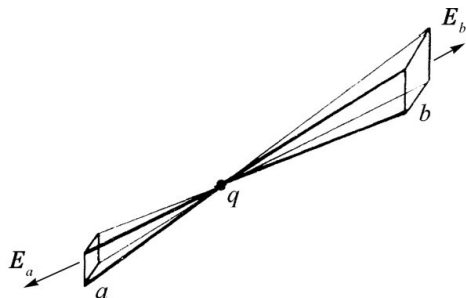


图4-8 如果曲面内存在电荷，则出来的通量不等于零

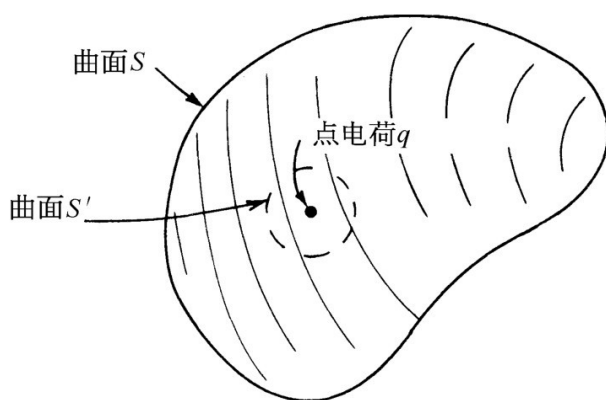


图4-9 通过 S 面的通量与通过 S' 面的通量相同

由于我们可以任意选取任何形状的 S' 面，所以就让我们使它成为一个以该电荷为中心的、如图4-10所示的那种球面吧。这样，便可以很容易地算出通过这个面的通量。如果该小球面的半径为 r ，则在球面上的 $\boldsymbol{E}$ 值处处都是

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

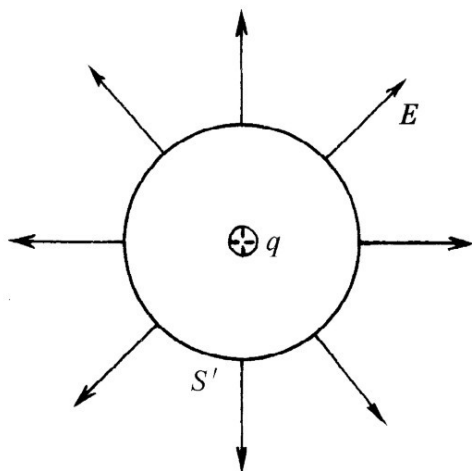


图4-10 通过一个含有点电荷 q 的球面的通量为 q / ϵ_0

其方向始终垂直于球面。如果把 $\mathbf{E}$ 的法向分量乘以该面面积，则可以求出通过 S' 面的总通量：

$$\text{通过 } S' \text{ 面的通量} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (4.31)$$

这是一个与球面半径无关的数值！因此，我们知道：通过 S 面出来的通量也为 q / ϵ_0 ——一个与 S 的形状无关的值，条件是电荷 q 必须处在该面之内。

可以把此结论写为：

$$\int_{\text{任何曲面 } S} \mathbf{E}_n da = \begin{cases} 0, & q \text{ 在 } S \text{ 之外;} \\ \frac{q}{\epsilon_0}, & q \text{ 在 } S \text{ 之内.} \end{cases} \quad (4.32)$$

让我们回到“子弹”的比拟上来，并看看它是否有意义。上述定理说明：如果闭合曲面内没有那支发射子弹的枪，则穿过该面的净子弹流为零；但若枪已包围在曲面之内，则无论该面的大小及形状如何，

穿出去的子弹数目相同——它由枪的子弹产生率给出。对于守恒的子弹来说，所有这一切似乎很合理。这个模型告诉我们的东西，是否比仅仅由式（4.32）得到的东西要多呢？迄今还没有谁能成功地使这些“子弹”除了产生这一定律以外，还能完成其他任务。此后，它们就只会产生错误。这就是今天我们宁愿完全抽象地去表达电磁场的原因。

§4-6 高斯定理： E 的散度

我们的优美结果——式（4.32），是为单个点电荷而证明的。现在，假设存在两个电荷，电荷 q_1 位于一点，而电荷 q_2 位于另一点，问题看来比较困难。为了求得通量，我们要对电场的法向分量取积分，而这电场是由两个电荷产生。这就是说，如果 $\mathbf{E}_1$ 代表由 q_1 单独产生的电场，而 $\mathbf{E}_2$ 代表由 q_2 单独产生的电场，则总电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 。通过任一闭合曲面 S 的通量为

$$\int_S (E_{1n} + E_{2n}) da = \int_S E_{1n} da + \int_S E_{2n} da. \quad (4.33)$$

两个电荷存在时的通量，等于单个电荷的通量加上另一个电荷的通量。如果两个电荷都在 S 面之外，则通过 S 面的通量为零。如果 q_1 在 S 面内而 q_2 在 S 面外，则第一个积分为 q_1/ϵ_0 ，而第二个积分为零。如果两电荷都包围在曲面内，则每一电荷都将做出自己的贡献，因而通量为 $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$ 。普遍的法则显然是，从一个闭合曲面出来的总通量等于在该曲面内的总电荷除以 ϵ_0 。

我们的结果是静电场一条重要而普遍定律，称为高斯定律。

高斯定律：

$$\int_{\substack{\text{任意闭合} \\ \text{曲面 } S}} E_n da = \frac{\text{曲面内电荷的总和}}{\epsilon_0}, \quad (4.34)$$

或

$$\int_{\substack{\text{任意闭合} \\ \text{曲面 } S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0}, \quad (4.35)$$

式中

$$Q_{\text{内}} = \sum_{\text{在 } S \text{ 内}} q_i. \quad (4.36)$$

如果我们用电荷密度 ρ 来描述电荷的位置，则可认为每个无限小体积 dV 内含有“点”电荷 ρdV 。这样，对所有电荷的和，就是积分

$$Q_{\text{内}} = \int_{S \text{ 内体积}} \rho dV. \quad (4.37)$$

从上述的推导可以看出，高斯定律乃起因于库仑力中的幂指数精确地等于2这个事实。 $\frac{1}{r^3}$ 或任何 $n \neq 2$ 的 $1/r^n$ 的场，不可能给出高斯定律。因此，高斯定律只不过是使用一种不同形式来表述两电荷间力的库仑定律而已。事实上，如果倒过来，你将会从高斯定律导出库仑定律。这两定律完全等价，只要我们记住电荷之间的作用力是径向的。

现在，我们想用微商来写出高斯定律。为此，把高斯定律应用于一个无限小的立方体表面。在第3章中，我们曾经证明过，从这样一个立方体表面出来的 $\mathbf{E}$ 的通量仍等于 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 乘以该立方的体积 dV 。按照 ρ 的定义，在 dV 内的电荷等于 ρdV ，所以高斯定律给出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0},$$

或

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

高斯定律的这个微分形式，是静电学的四个基本场方程式中的第一个，即式（4.5）。现在我们已经证明，静电学的两个方程式（4.5）和（4.6）与库仑定律等价。下面将要讨论应用高斯定律的一个例子（以后我们将碰到更多的例子）。

§4-7 带电球体的场

过去我们学习引力吸引理论时，遇到的困难问题之一就是要证明：一个实心球体物体所产生的力，与所有物质都集中在其中心或位于球面所产生的力是相同的。牛顿经过了许多年都没有把他的引力理论公诸于世，就是因为他当时还不敢肯定这个定理是正确的。我们在第1卷第13章中，曾经通过算出关于势的积分，然后利用梯度求得引力来证明这个定理。现在，我们能够用最简单的方式来证明它，只是这次将证明关于一个均匀带电球体的相应定理（由于静电学定律与引力定律相同，所以同样的证法也可用于引力场）。

我们要问，在一个充满均匀分布电荷的球体外面任一点 P 处的电场 $\mathbf{E}$ 是什么？既然不存在“特殊”的方向，我们便可以假定 $\mathbf{E}$ 处处都是

从球心向外。考虑一个与该带电球体同心的、并通过 P 点的球面（图4-11）。对于这个面，向外通量为

$$\int E_n da = E \cdot 4\pi R^2.$$

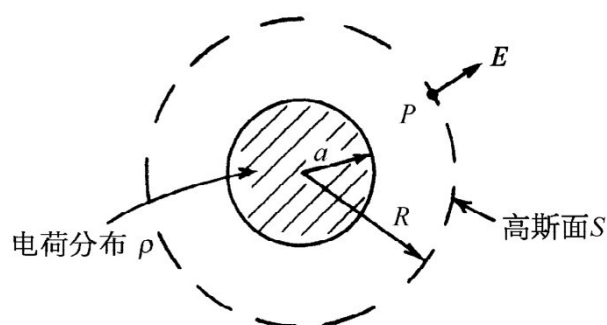


图4-11 应用高斯定律求一个均匀带电球体的场

高斯定律告诉我们，这一通量等于该带电球体的总电荷 Q （除以 ϵ_0 ）：

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

或

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}. \quad (4.39)$$

这与一个点电荷 Q 的公式相同。我们比求积分更容易地证明了牛顿的问题。当然，这种容易是不真实的——由于你已花了某些时间才能理解高斯定律，所以你也可以认为实际上没有节省时间。但是当你越来越多地应用这一定理以后，便会开始有所收获。这是一个效率问题。

§4-8 场线：等势面

现在，我们想要给出静电场的一种几何描述。静电学的两定律，一个为通量正比于内部电荷，另一个表明电场是势的梯度，它们也可以用几何方法来表示。下面用两个例子来说明。

首先，我们取一个点电荷的场为例。在场方向画线——总是与场相切的线，如图4-12所示。这些线称为场线，它们处处指明电矢量的方向。但我们还希望表达出该矢量的大小。为此，我们可以制定这样的规则：电场强度将由场线的“密度”表示。所谓场线的密度，是指通过与该线垂直的单位面积的线的数目。应用这两条规则就可以得出一幅电场图像。对于一个点电荷来说，场线的密度必须按 $1/r^2$ 减少。但在任何半径 r 处与线垂直的球面面积却会随 r^2 而增大，所以如果对于离电荷的一切距离处我们都保持线的数目相同，则密度将保持与场的大小成正比。只要我们坚持所画出来的线是连续的——即一旦线已从电荷发出，它就永远不会停止，那么，我们就能保证在每个距离处线的数目都相同。依赖场线，高斯定律说，这些线只应从正电荷出发而终止于负电荷。离开电荷 q 的线的数目一定等于 q/ϵ_0 。

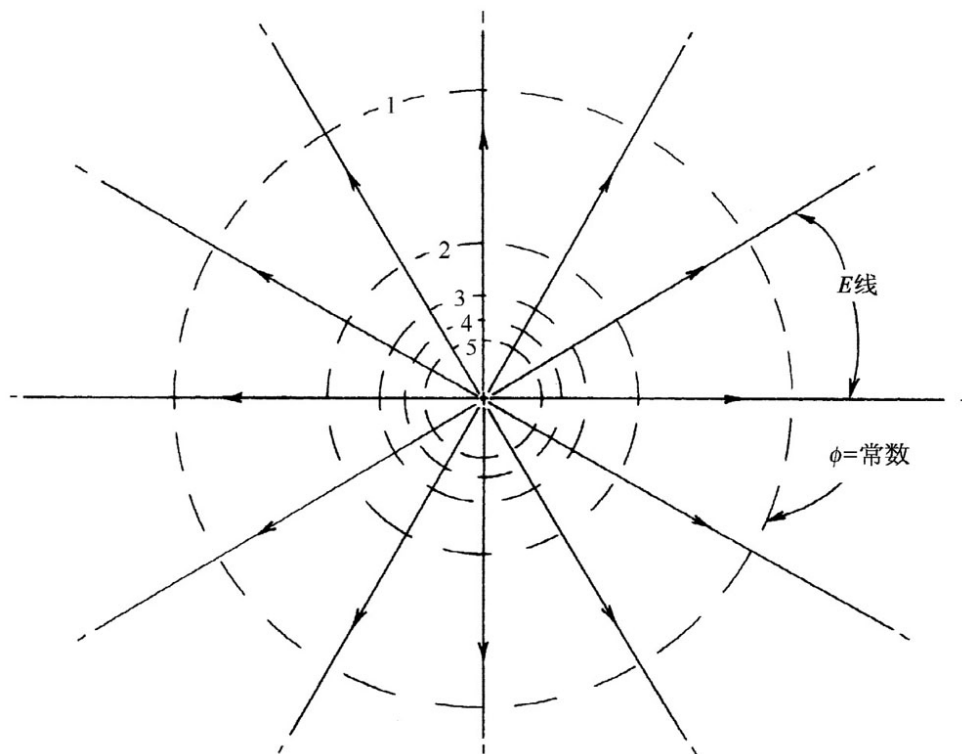


图4-12 一个正点电荷的场线和等势面

现在，对于势 ϕ 来说，我们也能找到一个相似的几何图像。表达势最方便的方法是画出 ϕ 为常数的那些面。这种面称为等势面——势相等的面。那么，等势面与场线间的几何关系又是如何呢？电场是势的梯度。梯度是在势变化最迅速的那个方向，所以它垂直于等势面。假如 **E** 并不 垂直于这种面，那么它会有一个沿面分量。此时，势会在面上发生变化，于是该面就不会是等势的了。因此，等势面必然会处处与电场线成直角。

对于一个孤立的点电荷来说，等势面是以该电荷为中心的球面。我们已在图4-12中显示出这些球面与一个通过该电荷的平面的交线。

作为第二个例子，我们考虑在两个大小相等而符号相反的电荷附近的场。要获得这个场挺容易。总场由该两电荷各自的场叠加而成。因此，我们可以取两幅如4-12那样的图并把它们叠加起来——不可

能！这样我们会有彼此相交的场线，而这是不可能的，因为 $\mathbf{E}$ 不能在同一点上有两个方向。场线图的缺点现在就显而易见了。根据几何论证不可能用十分简单的方法去分析那些新场线的去向。从两个独立图像我们不能获得一个综合的图像。叠加原理固然是关于静电场的一个简单而又深刻的原则，但在场线的图像方面，还没有一个容易的表达方式。

关于单位的备忘录

量	单位	量	单位
F	N	$1/\epsilon_0 \sim FL^2/Q$	$\text{Nm}^2 \text{C}^{-2}$
Q	C	$E \sim F/Q$	NC^{-1}
L	m	$\phi \sim W/Q$	$\text{JC}^{-1} = \text{V}$
W	J	$E \sim \phi/L$	Vm^{-1}
$\rho \sim Q/L^3$	Cm^{-3}	$1/\epsilon_0 \sim EL^2/Q$	VmC^{-1}

然而，场线图形毕竟有它的用途，所以对于一对相等（而相反的）电荷我们也许仍乐于去画出其图像来。若我们由式（4.13）算出场，又由式（4.24）算出势，那么，便可描绘出场线和等势面。图4-13显示这个结果。但我们得先在数学上解决这个问题！

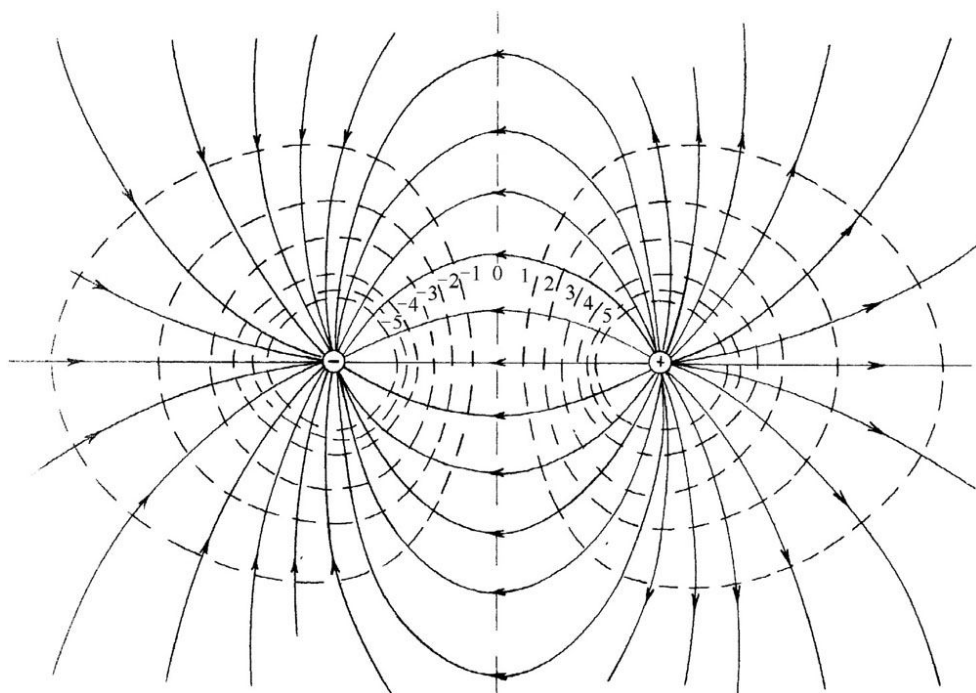


图4-13 两个相等而相反的点电荷的场线和等势面

第5章 高斯定律的应用

§5-1 静电学就是高斯定律加.....

静电学有两个定律：从某一体积出来的通量正比于其中的电荷——高斯定律；电场的环流等于零—— $\boldsymbol{E}$ 是一种梯度。所有静电学的预言都可以从这两个定律推出。但这些事情从数学上来说是一回事；而熟练地、巧妙地应用这些定律，却是另一回事。在本章中，我们将完成若干项可以直接由高斯定律进行的计算。我们将证明一些定理，并描述一些效应，特别是在导体中，这些可以很容易从高斯定律得到理解。高斯定律本身不能对任何一个问题提供答案，因为还有另一条定律必须遵守。因此，当我们应用高斯定律解决某些特定问题时，还得对它加点东西。例如，将必须假定场看来会怎样的某些概念——基于诸如对称性的论据。不然的话，我们可能就不得不明确地引入场是势的梯度这么一个概念了。

§5-2 静电场中的平衡

首先，考虑下述问题：一个处于其他电荷的电场中的点电荷何时才能处于稳定的力学平衡状态呢？作为一个例子，试设想在一水平面上有一个等边三角形，在每个角上各放置一负电荷。一个置于该三角形中心处的正电荷是否会保持在那里（如果暂时略去重力，问题就会简单些，尽管把它包括进去也不会改变所得结果）？作用于该正电荷

上的力为零，但这个平衡稳定吗？要是稍微移动一下电荷，它会回到平衡位置上来吗？答案是否定的。

在任何静电场中都不会有稳定的平衡点——除非这一点恰好叠在一个电荷上。应用高斯定律很容易看出其原因。首先，要使电荷在任一特定 P_0 点上处于平衡，场就必须等于零。其次，如果平衡是一稳定平衡，则还要求若把电荷沿任一方向移离 P_0 点，便应有一个与位移反向的恢复力。在一切邻近点的电场都必须指向内——即指向 P_0 点。但如果在 P_0 点没有电荷存在，那就会违反高斯定律，这点我们可以很容易看出来。

考虑一个包围着 P_0 点的小想象面，如图5-1所示。若在 P_0 点附近的电场处处都指向它，则对场的法向分量的面积分就肯定不会等于零。在上图所示的情况中，通过该面的通量必然是一负值。但高斯定律说明，通过任何曲面的电场通量正比于在该面内的总电荷。如果在 P_0 点处没有电荷，则我们想象出来的场便违反了高斯定律。在一个空的空间里，在那里的某一点不存在一些负电荷，使位于该点的一个正电荷处于平衡是不可能的。如果一个正电荷处于某一分布的负电荷中间，则它可以达到平衡。当然，那些负电荷的分布就必须由电力以外的力把它们固定在适当的位置上！

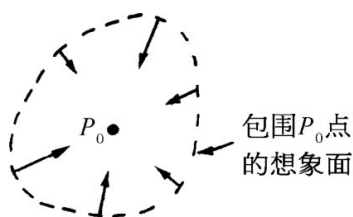


图5-1 如 P_0 对于一个正电荷来说是一个稳定平衡点，那么在其附近每一处的电场都应指向 P_0 点

对于一个点电荷我们得到了上述结果。这同一结论是否也适用于被固定——比如用棍子来固定——在相对位置上分布复杂的电荷呢？我们考虑关于固定在一根棍子上的两个相等电荷的问题。这个组合在某个静电场中能否处于平衡呢？答案再次是否定的。因为作用于棍子上的总力不可能对于每一方向上的位移都具有恢复作用。

设作用于棍子上任意位置的总力为 $\mathbf{F}$ ——因此， $\mathbf{F}$ 就是一个矢量场。根据上面所用的论据，我们断定：在一个稳定平衡的位置上， $\mathbf{F}$ 的散度必定是一个负值。但作用于棍子上的总力则等于第一个电荷乘以在其位置上的电场，加上第二个电荷乘以在其位置上的电场：

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{E}_2. \quad (5.1)$$

$\mathbf{F}$ 的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = q_1 (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) + q_2 (\nabla \cdot \mathbf{E}_2).$$

倘若 q_1 和 q_2 两电荷中每一个都处在自由空间里，则 $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{E}_2$ 均等于零，因而 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 也就等于零——不是负值，而负值对于平衡所要求的。可以看到，这论证的引申表明：在自由空间的静电场中，由任意数目电荷的刚性组合都不可能有一个稳定的平衡位置。

我们至今没有证明，即使有一些支点或其他机械约束，平衡仍然是不可能的。作为一个例子，考虑一根空心管，其中有一电荷可以自由往复运动，但却不能向旁移动。现在，不难设计出这么一个电场：

在管两端处场都指向内，而容许在管中心附近场可以从管侧面指向外。我们只要将正电荷置于管的两端，如图5-2所示。眼下虽然 $\mathbf{E}$ 的散度仍等于零，但可能有一个平衡点。当然，假如不是由于从管壁所加的“非电”力，则该电荷对于侧向运动来说还是不会处于稳定平衡的。

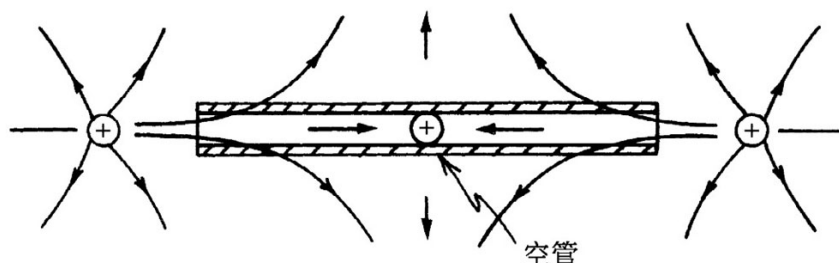


图5-2 如果有一些机械约束，电荷就可处于平衡

§5-3 有导体时的平衡

在固定电荷系统所产生的场中不存在稳定点。那么，对于带电导体的系统会怎样呢？由各带电导体组成的系统，能否产生对于一个点电荷来说会有稳定平衡点的那种场呢（当然，我们所指的不是在导体上的点）？你知道，导体具有其中电荷能够自由活动的那种性质。也许当该点电荷稍微移动一下时，导体上其他的电荷就会以一种将给予该点电荷一恢复力的方式移动？答案仍然是否定的——尽管刚才所给出的那种证法仍未对此有所证明。在这种情况下证明比较困难，我们将仅仅指出证明的方法。

首先，我们注意到：当电荷在导体上重新分布时，只有在电荷的运动减少其总势能的情况下才能进行（当电荷在导体中移动时，有些能量损失于发热）。现在我们已经证明了：如果那些产生场的电荷都是固定不动的，则在场中任一个零点 P_0 附近，就会有某一方向，

沿该方向要把一个点电荷移离 P_0 点会降低系统的能量（因为力从 P_0 指向外）。导体上任何电荷的调整都只能更多地降低势能，从而（按照虚功原理）它们的运动就只能在离开 P_0 点的特定方向上增大该力，而不是相反。

我们的结论并非意味着，不可能用电力来平衡一个电荷。只要人们愿意采取适当措施，控制那些支承电荷的位置或大小，那便是可能的。你知道，竖立在引力场中的一根棍子是不会稳定的，但这并未证明它就不能在手指尖上达到平衡。同理，一个电荷可能会被一些电场固定在一点上，只要那些场是可变的。但电荷决不会为一个被动的——也即是静止不动的——系统所固定。

§5-4 原子的稳定性

如果电荷不能够稳定地保持在它们的位置上，那么把物质想象成由受静电学定律支配的静止点电荷（电子和质子）所构成，肯定是不合适的。诸如这样的静止组态不可能存在，它是会坍塌的！

有人曾经建议过，原子的正电荷可以均匀地分布在一个球体中，而负电荷（各电子）则可静止地处于该正电荷之中，如图5-3所示。这是第一个原子模型，由汤姆孙所倡议。但卢瑟福却从盖革和马斯登的实验中得出结论：正电荷是很集中的，集中于他所称之为核的地方。汤姆孙的静止模型就不得不放弃了。于是卢瑟福和玻尔建议平衡可能是动力学的，电子在轨道上环行，就像图5-4所示的那种情况。通过轨道运动，电子将避免跌落到核里去。对于这样一种图像我们已知道至少有一点困难。电子这样运动就会有加速度（由于圆周运动），从而

会辐射能量。它们将丧失待在轨道上所需要的动能，从而会螺旋式地趋向核，再度出现不稳定！

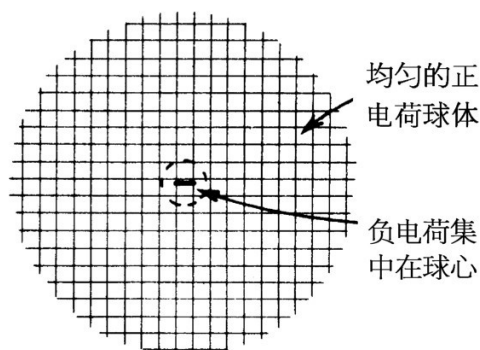


图5-3 原子的汤姆孙模型

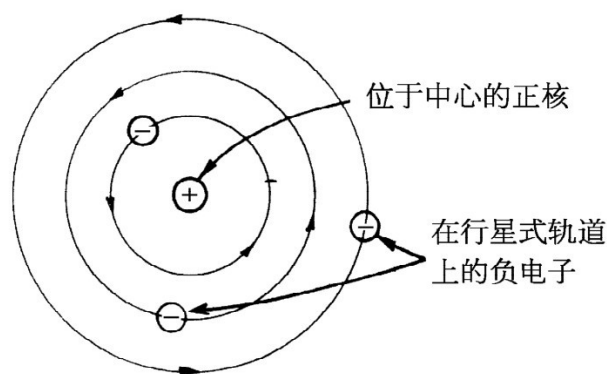


图5-4 原子的卢瑟福-玻尔模型

原子的稳定性现在可由量子力学给予解释。静电力把电子尽可能拉近核，但电子却被迫持续在空间中扩展一定距离，那是由不确定性原理规定的。假如它被禁锢在一个太小的空间里，它便有一个大的动量不确定性。但这意味着它会拥有高的期待能量——将被用来摆脱电的引力的影响，净结果是与汤姆孙想法没有太大差别的电的平衡——只是现在扩展开来的是负电荷（因为电子质量比质子质量小得多）。

§5-5 线电荷的场

高斯定律可以用来解决许多其中包括某种特殊对称性——通常是球形、圆柱形或平面形的对称性——的静电场问题。在本章的剩下部分，我们将用高斯定律来处理几个这样的问题。应用高斯定律很容易解决这些问题，这可能会引起一种错误印象，以为这种方法非常有效，人们将能够继续用它去对付其他许多问题。可惜情况并非如此。人们很快就搜索尽能够用高斯定律容易加以解决的问题。在以后几章中，我们将发展一些研究静电场的更强有力的方法。

作为第一个例子，我们考虑一个具有圆柱形对称性的系统。假设有一根十分长而均匀带电的棒，电荷沿一无限长直线均匀地分布着，单位长度所带的电荷为 λ ，我们希望知道电场。当然，问题可以通过对来自线的每一部分对场的贡献进行积分而加以解决。但我们准备不用积分，而通过应用高斯定律以及某种推测来求解。首先，推测该电场会从直线径向地向外。这是因为，从线中一边的电荷所产生的场的任何轴向分量，将伴随着从线的另一边电荷产生的场的相等的轴向分量，结果就只能为径向场。在与直线等距离的所有各点上，场应有相同大小，这似乎也是合理的，而且很明显（这一点可能不容易证明，但如果空间是对称的——正如我们所确信的那样——则它便是正确的）。

我们可按下述方式来应用高斯定律。考虑一个与该线同轴的圆柱形假想曲面，如图5-5所示。按照高斯定律，从这面出来的 $\mathbf{E}$ 的总通量等于其内部电荷除以 ϵ_0 。由于场假定是垂直于该面的，所以其法向分量就是场的大小，叫作 E 。令该柱面的半径为 r ，为了方便起见其长度取为一个单位。通过该柱面的通量等于 E 乘以该面面积（即 $2\pi r$ ）。因为电场与之相切，通过两个端面的通量等于零。因为在其中的线长为一单位，在该曲面之内总电荷恰好是 λ 。于是高斯定律给出

$$E \cdot 2\pi r = \lambda / \epsilon_0 ,$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} . \quad (5.2)$$

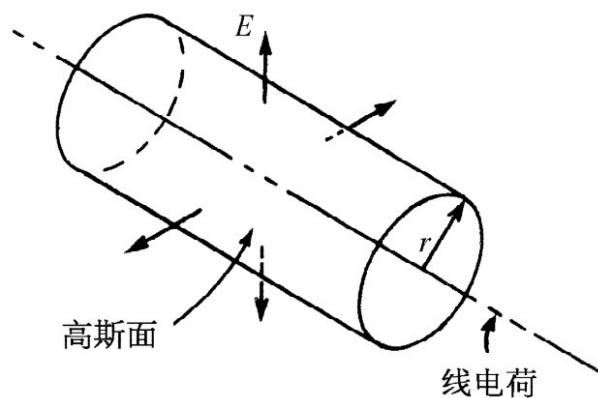


图5-5 与线电荷同轴的一个圆柱形高斯面

线电荷的电场与从线至该处的距离的二次 幂成反比。

§5-6 面电荷；平行板

作为另一个例子，我们现在来计算均匀面电荷所产生的场。假设该面延伸至无限远，而且单位面积的电荷为 σ 。我们要做一种推测：考虑到对称性，我们相信场的方向处处与该平面垂直，而倘若没有来自世界上任何其他电荷的场，则两边的场（大小）应相等。这次我们选取的高斯面是一个穿过该平面的四方盒子，如图5-6所示。平行于该平面的两个表面面积相等，比如说 A 。场垂直于此两面，而与其他四个面平行。总通量等于 E 乘以第一个面的面积，加上 E 乘以其对面的面积——其他四个面都没有做任何贡献。包含在该盒子内的总电荷为 σA 。使通量与其内部电荷相等，我们便有

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

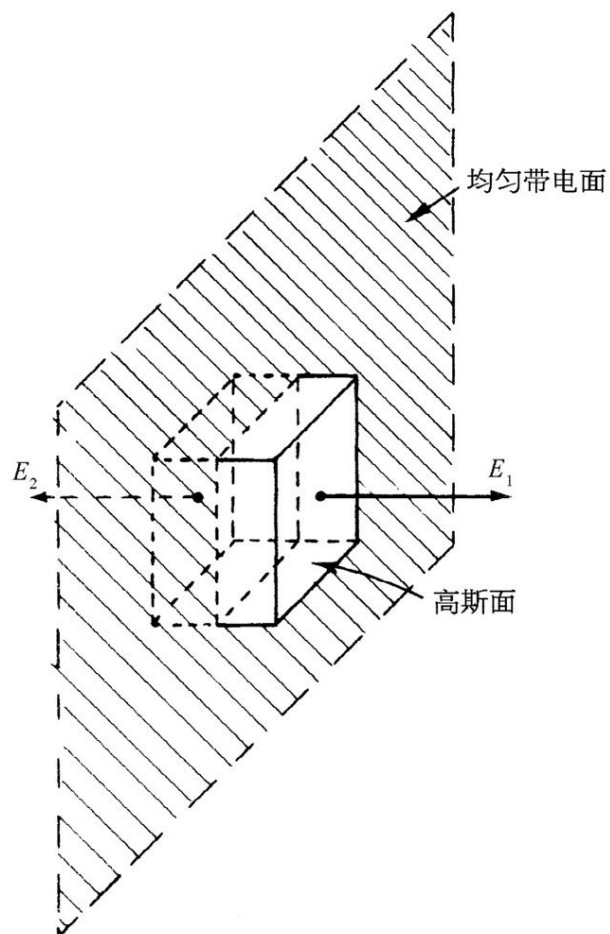


图5-6 在一均匀带电面附近的电场，可通过应用高斯定律于一个想象的盒子而求得

由此得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (5.3)$$

这是一个简单而又重要的结果。

你或许记得，这同样的结果曾在前面一章中通过对整个面进行积分而获得。在这个例子中，高斯定律更迅速地给出了答案（虽则它并不如以前的方法那么普遍适用）。

必须强调，这一结果仅适用于面电荷的场。如果在面电荷附近还有别的电荷，则靠近该面的总场就应等于式（5.3）与其他电荷的场之和。此时，高斯定律只会告诉我们：

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.4)$$

式中 E_1 和 E_2 分别代表从该面每侧指向外之场。

只要我们再次假定其外部世界是对称的，带有相等相反电荷（密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ ）的两平行板问题也同样简单。通过对由单块板所得的两结果叠加，或者通过构成一个包括两板在内的高斯盒，都不难见到，在该两板之外的电场为零〔图5-7（a）〕。由考虑一个只包括这块或那块板在内的盒，如图5-7（b）或（c）所示的那样，则能看出两板间的场应两倍于单独一块板的场。结果是：

$$E \text{（在两板之间）} = \sigma / \epsilon_0; \quad (5.5)$$

$$E \text{（在两板之外）} = 0. \quad (5.6)$$

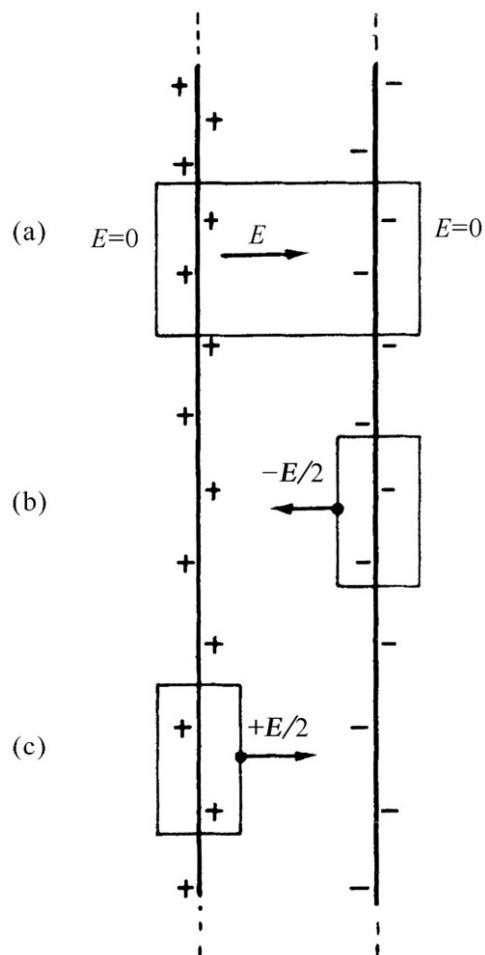


图5-7 两块带电板之间的场为 $\sigma\epsilon / 0$

§5-7 带电球体；球壳

我们曾（在第4章中）应用高斯定律求得一个均匀带电球体外的场。用同一方法也能给出球内各点的场。例如，这种计算方法可用来得到对原子核内部场的良好近似。尽管核里的质子互相排斥，但由于强大核力的作用，它们还是几乎均匀地分布在核体内的。

假设有一个半径为 R 并均匀地充满着电荷的球，令 ρ 为单位体积的电荷。再利用对称性的论证，假定场是径向的，并且在与球心等距

离的一切点上这个场的大小都相等。要求与球心的距离为 r 处的场，我们取一个半径为 r （ $r < R$ ）的球形高斯面，如图5-8所示。从这个面出来的通量为

$$4\pi r^2 E.$$

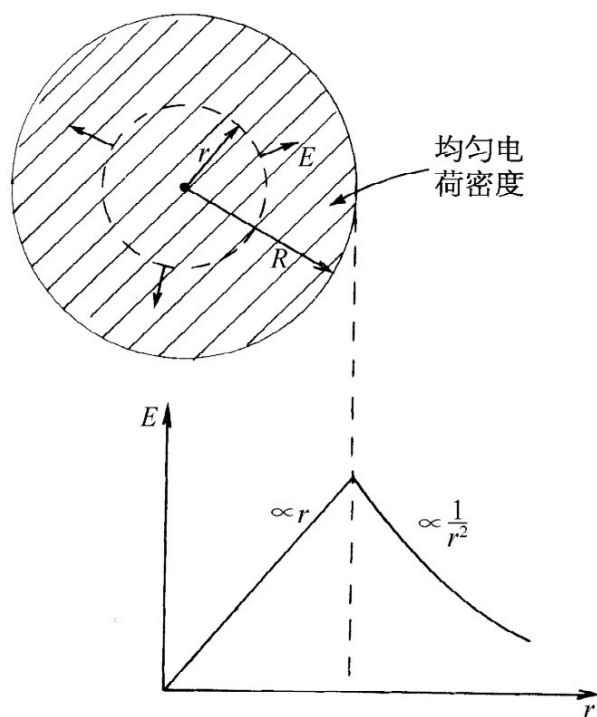


图5-8 高斯定律可用来求一个均匀带电球体内的场

在我们的高斯面内的电荷等于其内部体积乘 ρ ，或

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

应用高斯定律，可以推得场的大小由下式给出：

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} (r < R). \quad (5.7)$$

你可以看到，这一公式对于 $r=R$ 也会给出恰当的结果。电场与半径成正比，并沿径向指向外。

刚才对于一个均匀带电球体所提供的论证，也可应用于一个带电薄球壳。假定场是处处径向的并且具有球对称性，那便可以立即从高斯定律获得在球壳外的场与一个点电荷的场相似，而球壳内的场则处处为零（在球壳内的高斯面将不会包含电荷）。

§5-8 点电荷的场是否精确为 $1/r^2$

如果对球壳内的场为何会等于零这一点更详细地查看一下，我们就能更加清楚地看出，高斯定律之所以成立只是由于库仑力精确地依赖于距离的平方。考虑一个均匀带电球壳里面的任一点 P ，想象出一个以 P 为顶点的小锥形伸展至球壳表面，在那里它割出一个小面积 Δa_1 ，如图5-9所示。一个从 P 的相对一边发散出去的完全对称锥形，将会从球面割出一个面积 Δa_2 。如果从 P 至这两个小面积元的距离分别为 r_1 和 r_2 ，那么它们的面积比为

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

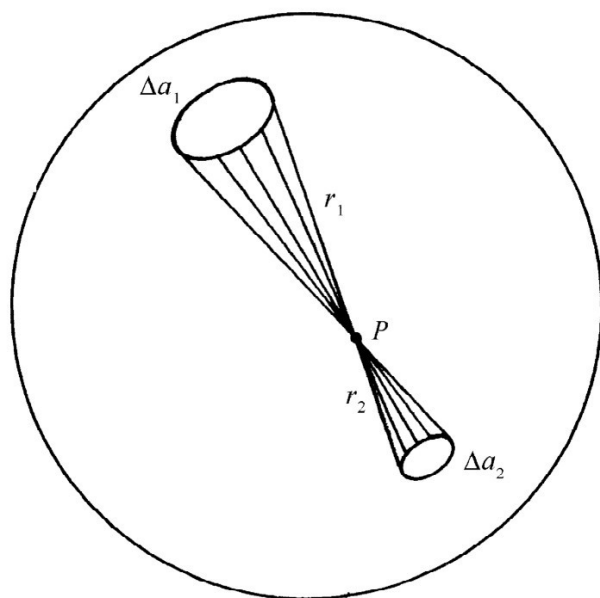


图5-9 在带电球壳内的任一点 P 处，场都等于零

对于在球面内的任一点 P ，可以用几何学来证明这一点。

如果球面是均匀带电的，则在每一面积元上的电荷 Δq 就正比于各面积，因而

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

于是库仑定律讲，由这两面积元在 P 点上所产生的场其大小之比为

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Delta q_2 / r_2^2}{\Delta q_1 / r_1^2} = 1.$$

这两个场恰好互相抵消。由于面上所有各部分都可按此办法配成对，因此，在 P 点的总场就应等于零。但你还可以看出，假如在库仑定律中 r 的幂数不精确等于2，那就不会这样了。

高斯定律的正确性取决于平方反比的库仑定律。若该力的定律不精确是平方反比，则在一个均匀带电球面内部的场严格为零这一说法就不正确了。例如，要是力变化得更快一些，比如与 r 的立方成反比，那么较接近于球内某一点的那部分面积产生的场将比较远部分面积所产生的场更大，对于正的面电荷结果会形成一个径向的、指向内的场。这些结论提示了一个检验平方反比定律是否完全正确的优越办法，我们只需确定在一个均匀带电球壳里的场是否精确为零。

很幸运存在这样一种方法。通常要高精度测量一个物理量是很困难的——要求精度达百分之一可能不太困难，但比如要测量库仑定律达到十亿分之一的精度，那该怎么着手呢？用目前所能达到的最优良技术测量两带电物体间的库仑力，要达到这样的精度几乎肯定是不可能的。但是只要确定在一个带电球面内部的电场小于某个数值，我们就能对高斯定律的正确性做出一个高精度的测量，因而这也是对库仑定律平方反比关系的高精度测量。实际上，人们所做的就是将具体力的定律与一标准的平方反比定律做比较。相等或几乎相等的事件的这种比较，往往是最精密的物理测量的基础。

我们将怎样来观察一个带电球面内的场呢？一种方法是，拿一物体与一球形导体的内部接触而试图使之带电。你知道，如果使一个小金属球接触到一个带电物体，然后将它同一静电计接触，则静电计就会带电，其指针将离开零点，如图5-10（a）所示。小球采得一些电荷是由于在该带电球壳外面存在电场，而这电场又会驱使电荷跑至（或跑出）小球。你如果将小球接触该带电球壳内部来做这同样的实验，

则发现并没有什么电荷会被带至静电计上。用这样一个实验，你就可容易地证明：在内部的场至多是外场的百分之几，因而高斯定律至少是近似正确的。

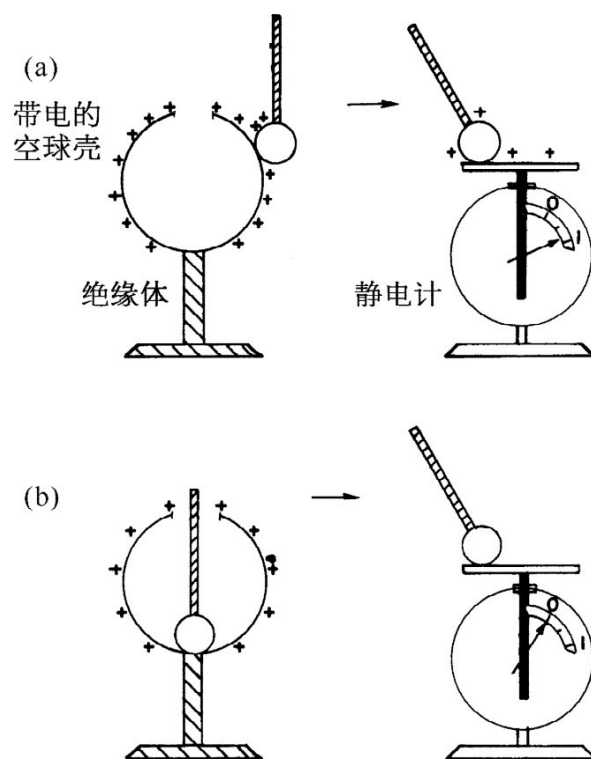


图5-10 在一个闭合的导体壳内电场为零

似乎是富兰克林最早注意到导体壳内的场为零的。这一结果似乎令他奇怪。当他把观察结果报告给普里斯特利时，后者提出可能与平方反比定律有关，因为当时已知道一个物质球壳在其内部不产生引力场。但一直到了18年后，库仑才测量出那个平方反比关系，而高斯定律的出现就更晚了。

高斯定律曾被仔细地加以检查，即把一静电计放在一个大球壳中，观察当用高压使球壳带电时静电计是否会发生偏转，但结果总是否定的。知道了仪器的几何尺寸以及静电计的灵敏度，便有可能算出

被观察到的最小的场。从这个数值就可以对幂指数与2的歧离设置一个上限。如果把静电力写成与 $r^{-2+\epsilon}$ 有关，则我们便能把上限放在 ϵ 上。通过这个办法，麦克斯韦曾测定了 ϵ 小于1/10 000。这个实验于1936年由普林顿和劳顿两人重新做过并加以改进。他们发现库仑幂数与2的差小于十亿分之一。

现在，由此可提出一个有趣问题：在各种不同情况下，我们是否知道这库仑定律有多准确呢？刚才所描述的实验测量了在几十厘米的距离上场与距离的关系，但对于原子内部的距离——比如在氢原子中，我们相信那里的电子受核的吸引也是按相同的平方反比定律发生的——又究竟如何呢？诚然，关于电子行为的力学部分必须运用量子力学，但力依然是寻常的静电力。在对此问题用公式来表示时，电子的势能必须被认为是与核距离的函数，而库仑定律给出随距离的一次幂成反比变化的势能。对于这么小的距离来说，这幂指数会准确到什么程度呢？由于在1947年兰姆和莱索福对氢的能级的相对位置进行了极为仔细的测量，所以我们知道，在这种原子尺度上——也即在1 Å (10^{-8} cm) 数量级的距离上——该幂指数也准确到十亿分之一。

兰姆-莱索福这一测量的准确性所以成为可能，又是由于一次物理“偶发事件”。氢原子的两个态被预期具有几乎相等的能量，只要势能是严格随 $1/r$ 变化。这个十分微小的能量差别是通过测量从一态至另一态的跃迁时所发射或吸收的光子的频率 ω ，应用能差 $\Delta E = \hbar\omega$ 测出来的。计算的结果表明，假如在力的定律 $1/r^2$ 中的幂指数与2会有十亿分之一那么大的误差，则 ΔE 会显著地与观察到的结果不同。

这同一幂指数对更短的距离是否仍然正确？从核物理中的测量发现：在典型的核距离——约 10^{-13} cm——处静电力仍然存在，而且它们

仍近似地与距离的平方成反比。在以后一章中将有一些例证。我们知道，在 10^{-13} cm量级距离内，库仑定律至少在某种程度上仍然是有效的。

对于 10^{-14} cm的距离又如何呢？这一范围可以通过质子与很高能量电子的碰撞及观察它们如何被散射来加以研究。迄今所得到的结果似乎指出，该定律在这种距离上失败了。电力在小于 10^{-14} cm的距离上，似乎显得比预期的要弱十倍。现在有两种可能的解释：其一，是库仑定律在这样小的距离上已失效；另一种可能解释，则是我们的客体——电子和质子——并不是点电荷。也许电子或质子，或两者，都是某种涂抹物。大多数物理学家倾向于认为质子的电荷是涂抹上去的。质子与介子反应十分激烈，这暗示一个质子时时会作为被一个 π^+ 介子所包围的一个中子而存在。像这样一个组态就该——在平均上——表现得如同一个带正电的小球。起因于一个荷电球体之场并非按 $1/r^2$ 一直变化至球心的，质子的电荷很可能是涂抹物。但关于介子的理论仍然很不完整，所以库仑定律在极小距离上失效也有可能。这一问题仍然未确定。

还有一点：平方反比定律在像1 m和 10^{-10} m的距离上都有效；但系数 $1/(4\pi\epsilon_0)$ 是否也都相同呢？答案是肯定的，至少达到兆分之十五的精度。

现在，我们回到在上面谈及对高斯定律的实验验证时曾被忽视的一件重要事情上来。你可能还不知道麦克斯韦或普林顿和劳顿的实验怎么会得到那么精确的结果，除非他们所用的球形导体是一个十分完美的球壳。十亿分之一精度确实是个辉煌成就，而你也许要问他们能

否做成那么精密的一个球壳。任何一个实际球体都肯定会有一些微小的不规则性，而如果有了不规则性，还不会在球内产生出一些场来吗？现在我们想要证明，并不需要有一个完美的球壳。事实上也能够证明，在任何形状的一个闭合导体壳中都不会有场存在。换句话说，实验与 $1/r^2$ 有关，而与面是否是球面却没有有什么关系（用球面的原因是，假如库仑定律有错，用球面容易算出场会是怎么样）。所以我们现在就来处理这一课题。要证明这一点，必须知道导电体的某些性质。

§5-9 孤立导体的场

导体是含有许多“自由”电子的固体。电子能够在材料中各处自由地运动，但却不能离开其表面。在一块金属中存在那么多的自由电子，以致任何电场都能使它们大量地进行运动。这样所建立的电子电流必须由外界能源不断来维持运动，或者会由于这些电子对那个曾产生初始电场之源放电而停止运动。在“静电”情况下，我们并不考虑连续性电流源（以后学习静磁学时才将考虑到），所以电子仅运动到它们自己被安排得在导体内部处处都产生零场为止（这通常是在远小于 $1s$ 的时间里发生的）。假如还有任何场存在的话，这个场则应该会推动更多的电子运动，唯一的静电态答案就是场在导体内部处处为零。

现在考虑带电导体的内部情况（所谓“内部”我们指的就是金属本身）。由于金属是导体，其内部的场必然为零，即势 ϕ 的梯度为零。这意思是说， ϕ 不会逐点变化。每个导体是一个等势区，而它的表面是一个等势面。由于在导电性材料中电场处处为零，所以 $\mathbf{E}$ 的散度也为零，而根据高斯定律在导体内部的电荷密度一定等于零。

如果在导体中不可能有电荷，那它怎么还能够带电呢？当我们说某一导体“带电”时，其意思到底是指什么呢？电荷在哪里？答案是：它们会存在于导体的表面上，那里有强大的力把它们保持住而不致离开——它们并非完全“自由”的。今后，当我们学习固体物理时将发现，在任何导体上的附加电荷平均来说都位于表面的一两个原子层内。对于我们眼前的目的来说，这样说就已经足够准确，即如果任何电荷被放上或放进导体之内，它将聚集在表面上，在导体内部没有电荷。我们也注意到，正好在导体表面外的电场必定与表面垂直，不可能有切向分量。假如有切向分量，电子就会沿表面运动，没有任何力来阻止它们。按另一种方式讲，我们知道，电场线必须始终与等势面成直角。

利用高斯定律，我们又可把刚好在导体外面的场强同表面的局部电荷密度联系起来。作为高斯面，我们取一半在面内、一半在面外的一个小柱形盒，如图5-11所示。对于 $\mathbf{E}$ 的总通量的贡献就只有来自导体外的盒子的一边。于是，贴近导体外表面的场为

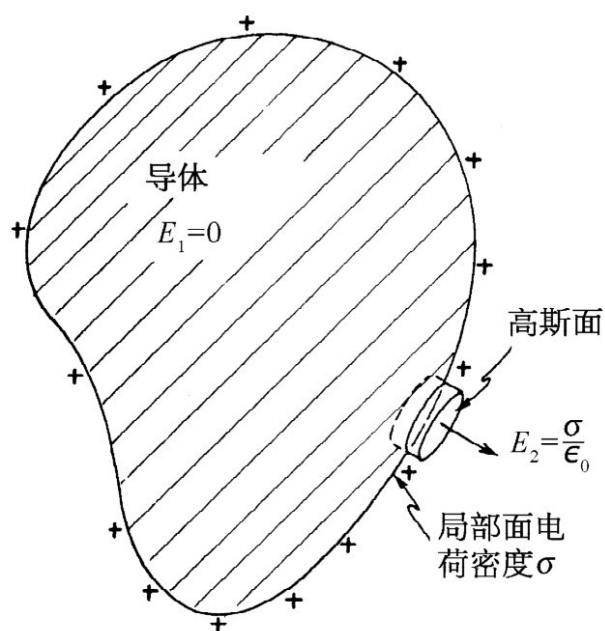


图5-11 紧贴导体表面的电场与局部面电荷密度成正比

在导体外

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.8)$$

式中 σ 是局部面电荷密度。

为什么在导体表面上的一片电荷所产生的场会不同于仅仅一片电荷所产生的场呢？换句话说，为什么式（5.8）是式（5.3）的两倍呢？原因当然是，对于该导体我们并未曾说过附近没有“其他”电荷。事实上，必然存在一些电荷使得导体里面的 $\mathbf{E}=0$ 。在表面 P 点附近的电荷的确给出表面内外两边的场 $E_{\text{局部}}=\sigma_{\text{局部}}/2\epsilon_0$ 。但在导体表面上的所有其他电荷“策划”在 P 点产生一个大小等于 $E_{\text{局部}}$ 的附加场。使得在内部的总场变成零而外部的场变成 $2E_{\text{局部}}=\sigma/\epsilon_0$ 。

§5-10 导体空腔内的场

现在，我们转到一个中空容器——导体内留有空腔——的问题。虽然在金属中不存在场，但在其空腔里怎样呢？我们将证明：如果空腔是空的，则不管导体或空腔的形状如何——比方说如图5-12所示的那种形状——在其中不存在场。考虑一个高斯面，像图5-12中的 S ，它包围着该空腔，但还处处落在导电材料之内。由于在 S 上的任何地方场均为零，所以并没有通量通过 S 面，因而在 S 面内的总电荷等于零。对于一个球壳来说，人们可以从对称性论证其内部没有电荷。但在一般情况下，我们只能说在导体的内表面上存在等量的正电荷与负

电荷。即可能 其中一部分内表面存在正的面电荷而另一部分存在负的面电荷，如图5-12所指出的那样。高斯定律并不能排除这种情况。

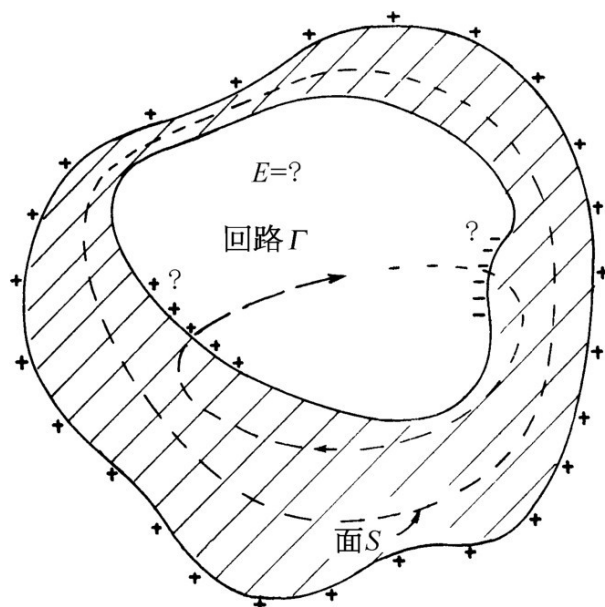


图5-12 在一个任意形状的导体空腔里其电场如何

当然，实际发生的情形是，任何在内表面上出现的等量异号电荷都会向四周滑动而彼此相遇，从而完全抵消掉。我们可通过应用 $\mathbf{E}$ 之环流始终等于零这个（静电学）定律来证明，它们必定完全抵消掉。假定在内表面的某些部分上存在电荷，则我们知道，在其他地方也得有与之数目相等而符号相反的电荷。那么任何 $\mathbf{E}$ 线就必须从那些正电荷出发而终止于那些负电荷上（因为我们所考虑的只是在空腔里并没有自由电荷的那种情况）。现在设想有这么一条回路 Γ ，它沿一条从某一正电荷至某一负电荷的力线穿过空腔，并经由导体回到原来的出发点（如图5-12所示）。沿这条力线从正电荷至负电荷所取的积分不会等于零。而经过金属里的积分则为零，因为 $\mathbf{E} = 0$ 。因此，我们就应该有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$$

但在静电场中， E 绕任一闭合回路的线积分总是为零。因此，在空腔里不可能存在任何场，而在内表面上也不会有任何电荷。

应当仔细地注意我们所做出的一个重要限制条件。上面我们总是说在一个“空 的腔里”，但如果有某些电荷被置于腔里的某些固定位置上——诸如被置在一个绝缘体上或一个与该主导体绝缘的小导体上——那么腔里就可以有场，但此时这个腔已经不是“空”的了。

我们已经证明：如果一个空腔给导体完全包围住，则任何外部 静止的电荷分布都不可能在其内部产生出任何场。这说明了通过将电学设备放在一个金属盒内就能把它们“屏蔽”起来的原理。同样某些论证也可用来证明，在一导体闭合面内部 的任何静电荷分布不可能在其外部 产生出任何场。屏蔽对双方都有效！在静电学中——但在变化着的场中——一个闭合导体壳两边的场是完全独立的。

现在你明白，为什么以往在核对库仑定律时能够达到那么高的精度。所用空壳的形状是无关重要的，并不一定是球形，立方的也可以！如果高斯定律严格正确，则里面的场始终为零。现在你也懂得，为什么坐在那百万伏范德格拉夫起电机的高压套管内可以安然无恙，并不必担心会受到电击——这是由于高斯定律的缘故。

第6章 在各种情况下的电场

§6-1 静电势的方程组

本章将描述在几种不同情况下电场的行为。它将向我们提供有关电场表现方式的一些经验，并将描述求解这种电场的某些数学方法。

首先我们要指出，全部数学问题在于解静电学的两个麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.2)$$

实际上，上述两方程也可合并成一个方程。从第二个方程我们立即知道可以把场描述为标量的梯度（见§3-7）：

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (6.3)$$

如果我们乐意，就可以用势 ϕ 完整地描写任一个特定电场。将式（6.3）代入式（6.1）中，便可得到 ϕ 所应服从的微分方程

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

ϕ 梯度的散度与用 ∇^2 对 ϕ 进行运算的结果相同，即

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (6.5)$$

因此，我们便可将式（6.4）写成

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

算符 ∇^2 称为拉普拉斯算符，而式（6.6）则称为泊松方程。从数学的观点看，静电学整个课题只不过是学习这一方程式（6.6）的解。一旦 ϕ 由解方程式（6.6）得出，便可立即由式（6.3）求得 $\mathbf{E}$ 。

我们将首先提出其中 ρ 作为 x, y, z 的函数是已知的那种特殊类型的问题。在这种情况下问题几乎是琐碎肤浅的，因为我们已知道式（6.6）的一般解了。以前就曾证明过：若 ρ 在每点均为已知，则在点（1）处的势就是

$$\phi(1) = \int \frac{\rho(2) dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (6.7)$$

式中 $\rho(2)$ 和 dV_2 分别代表点（2）处的电荷密度和体积元，而 r_{12} 则为（1）与（2）两点间的距离。微分方程式（6.6）的解已简化成对整个空间的积分。式（6.7）这种解应加以特别注意，因为物理学中就有许多情况都会引导到如

$$\nabla^2 (\text{某件东西}) = (\text{另一件东西})$$

这样一种方程，而式（6.7）便是任何这类问题解的典型。

这样，当所有电荷的位置都已知时，静电场问题的解就完全是直截了当的。让我们在下述几个例子中看看这是怎么回事吧！

§6-2 电偶极子

首先，取相距为 d 的两个点电荷 $+q$ 和 $-q$ 。令 z 轴沿这两电荷的连线，并选取原点在中间，如图6-1所示。于是，应用式（4.24），则来自这两电荷的势就是

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (6.8)$$

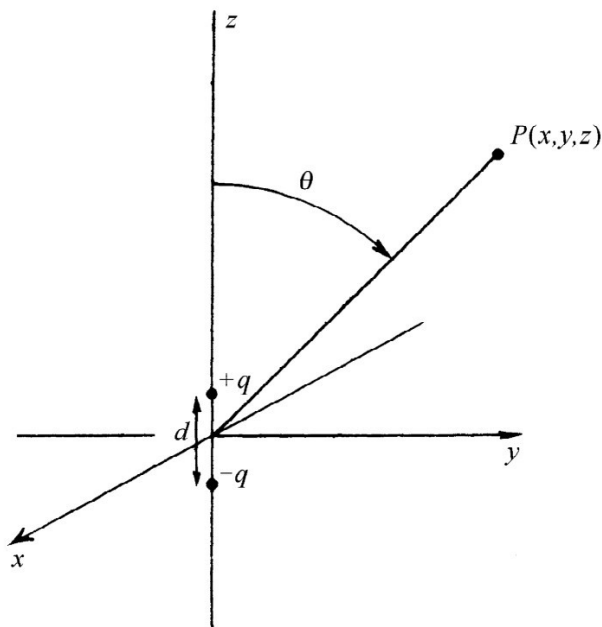


图6-1 偶极子：相距为 d 的两个电荷 $+q$ 和 $-q$

我们不打算把电场的公式写出，因一旦已有了势，就总可以把场算出来。因此，我们已解决了两电荷的问题。

存在两电荷靠得非常近的一种重要特殊情况——即是说，我们所感兴趣的仅仅是在与这两电荷的距离远比它们的间距为大的那些地方的场。我们称这样靠近的一对电荷为偶极子。偶极子是十分常见的。

例如，“偶极”天线常用互相分开一小段距离的两电荷来做近似——如果我们不去过问太接近于天线地方的场的话（我们经常对带有运动电荷的天线感兴趣，但这里静电学方程组实际上已不适用了。对于某些目的来说，那还是足够近似的）。

也许更重要的还是原子偶极子。在任何材料中，如果有一电场存在，则电子和质子将感受到方向相反的力并做相对移动。你会记起，导体中有些电子会移向表面，使内部的场变为零。在绝缘体中，电子不能够移得很远，它们将被核吸引回来。然而，它们的确会移动一点点。因此，尽管一个原子或分子在一外加电场中仍然保持中性，但它的正电荷和负电荷间会出现一个十分微小的间隔，从而成为一个微观的电偶极子。如果我们所感兴趣的是这些原子偶极子在普通大小物体附近的场，那么，我们正在与比这些电荷对的间隔大得多的距离正常地打交道。

在某些分子中，即使没有外电场存在，电荷也还是有点分开，这是由于分子的形状所致。例如，在一水分子中，氧原子附近有净负电荷，而两个氢原子附近则都有净正电荷，它们并非对称地排列着，而是如图6-2所示。尽管整个分子的电荷为零，但却形成这样一种分布：在一方有稍微多一点的负电荷而在另一方则有稍微多一点的正电荷。这种排列肯定不会像两个点电荷那么简单，但从远处看时，这个系统的作用就像一个偶极子一样。正如稍后我们便将见到的，在远距离处场对于这种细节并不敏感。

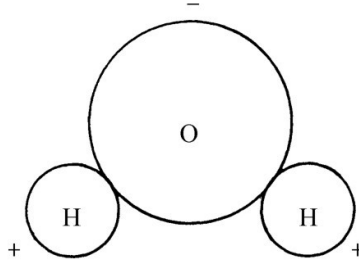


图6-2 水分子 H_2O 。两个氢原子各拥有稍微少于其份额的电子云；氧原子则稍微多些

那么，就让我们来看看，具有小间距 d 的两个异号电荷所产生的场。如果 d 变为零，两电荷互相重叠，两势则互相抵消，因而也就没有场了。但如果它们并不严格互相重叠，那就可通过将式(6.8)中各项（应用二项式展开法）展开成小量 d 的幂级数，从而可以得到势的一个优良近似。若仅仅保留 d 的一级项，便可以写成

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

按如下写法很方便，即

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

因此

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right),$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 [1 - (zd/r^2)]}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

对于 $[1 - (zd/r^2)]^{-1/2}$ ，可再应用二项式展开——并丢掉 d 的平方及更高幂次的项——我们便得

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right).$$

同理，

$$\frac{1}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right).$$

这两项之差就给出了势

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} qd. \quad (6.9)$$

得到这个势，也就有了电场（那是势的微商），它们都会正比于 qd ，即电荷与间距的乘积。这个积被定义为这两个电荷的偶极矩，我们用符号 p （切勿与动量混淆！）表示，即

$$p = qd. \quad (6.10)$$

式（6.9）也可写成

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (6.11)$$

因为 $z/r = \cos \theta$ ，其中 θ 是偶极子轴与指向点 (x, y, z) 的径向矢量之间的夹角——见图6-1。在对轴给定的方向上，偶极子的势按 $1/r^2$

下降（但对于一个点电荷，则按 $1/r$ 下降）。于是偶极子的电场 $\mathbf{E}$ 便会按 $1/r^3$ 减弱。

如果定义一个大小为 p 、方向沿偶极子轴从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量 $\mathbf{p}$ ，则我们可把上式写成矢量形式。这样，

$$p \cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r, \quad (6.12)$$

式中 $\mathbf{e}_r$ 为单位径向矢量（图6-3）。我们也可用 $\mathbf{r}$ 代表点 (x, y, z) ）。于是

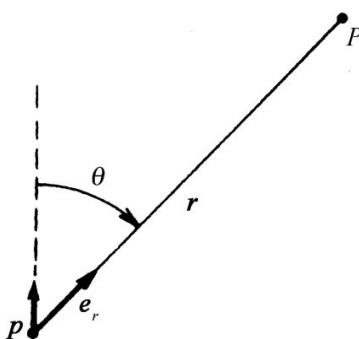


图6-3 电偶极子的矢量符号

偶极子势

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.13)$$

这一公式对于具有任何指向和位置的偶极子都适用，只要 $\mathbf{r}$ 代表从偶极子至所关注之点的矢量。

若想要得到电偶极子的电场，便可通过取 ϕ 的梯度获得。例如，场的 z 分量为 $-\partial \phi / \partial z$ 。对于一个沿 z 轴指向的电偶极子，我们可以应

用式 (6.9) :

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right),$$

或

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}. \quad (6.14)$$

x 分量和 y 分量则分别为:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}; \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}.$$

这两个分量还可合成一个垂直于 z 轴的分量, 我们将称其为横向分量 $E_{\perp}$:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

或

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}. \quad (6.15)$$

这横向分量 $E_{\perp}$ 处在 xy 平面内, 而且从偶极子轴直指向外。总场当然是

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

偶极子场与距离的立方成反比。在轴上，即当 $\theta=0$ 时，它比在 $\theta=90^\circ$ 处要强两倍。在这两个特殊角度上电场仅有 z 分量，但在这两处场的符号却相反（图6-4）。

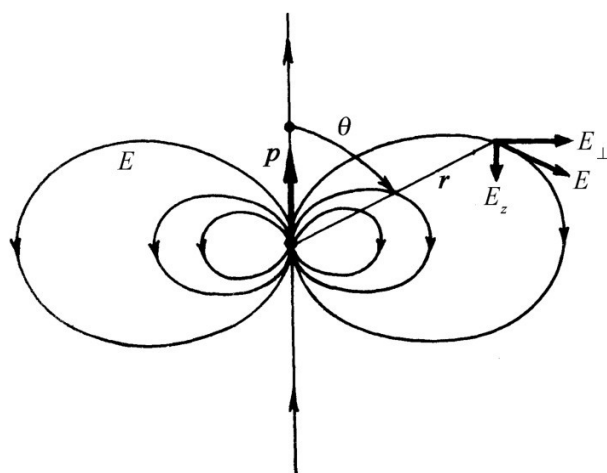


图6-4 偶极子的电场

§6-3 矢量方程述评

到此我们对矢量分析做个一般性评述挺合适。那些基本证明，可用一些具有普遍形式的优美方程式来表达。但在进行各种计算和分析时，以某种便当方式去选择坐标轴，总是个好主意。这里要注意，刚才在求偶极子的势时，我们曾选取 z 轴沿着偶极子方向，而不是在某个任意角度上，这使工作容易得多。可是后来我们却又把方程写成矢量形式，以便使其不再依赖于任何一个特定的坐标系。此后，就可以选择我们所要的任何坐标系了，因为已知道该关系式是普遍正确的。对于某一特定问题——假如结果最后能表达成一个矢量方程，当能够选取一个简洁的坐标系时却还去费神用一个在某一复杂角度上的任意坐标系，显然毫无意义。因此，务必利用矢量方程式与任一坐标系无关的这一事实。

另一方面，如果你不是仅对 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 望一望和仅想知道它是什么（而是正在试图算出一个矢量的散度），那便不要忘记它总是可以展开成下式的：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

这时，你若能算出电场的 x ， y 和 z 各分量并对它们微商，那你就会得到一个散度了。往往似乎有这样一种感觉：若将各分量写出，就会存在某种不太优美的——牵涉到某种失败的——东西；不管怎样，总会有办法用矢量算符去做每件事情。但这种想法往往没有什么好处。当初次碰到一个特殊问题时，诚然，我们熟悉将发生什么，它有助于我们写出分量。把数字代入方程之内并不见得不优美，而用微商代替某些悦目符号也未必不文雅。实际上，具体写出分量这一件事情就往往是一种智慧。当然，当你在专业杂志上刊登文章时，如果你能把一切东西都写成矢量形式，那将会美观些——而也更易于理解。此外，还节省篇幅。

§6-4 偶极子势的梯度表示

关于偶极子公式（6.13），我们愿意指出一件相当愉快的事情。该势也可写成

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.16)$$

如果你算出 $1/r$ 的梯度，你便可以得到

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\frac{\mathbf{e}_r}{r^2},$$

而式(6.16)与(6.13)就彼此相同了。

怎么会想到这一点呢？我们刚好记得， $\mathbf{e}_r/r^2$ 曾出现在有关点电荷的场公式中，而场又是那具有 $1/r$ 依赖关系的势的梯度。

之所以能够将偶极子势写成式(6.16)的形式，有其物理原因。假设有一个位于原点的点电荷 q ，则在点 $P(x, y, z)$ 处的势为

$$\phi_0 = \frac{q}{r}.$$

让我们在做这些论证时先丢下 $1/(4\pi\epsilon_0)$ ，最后可以把它插进去。现在若把电荷 $+q$ 向上移动距离 Δz ，那么在 P 点的势就将改变一点点，比如说 $\Delta\phi_+$ 。这 $\Delta\phi_+$ 有多大呢？哎呀！这恰好就是——假如让电荷留在原点上不动，而将 P 向下移过同样距离 Δz ——电势将要改变的数量（图6-5）。也就是说，

$$\Delta\phi_+ = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\Delta z,$$

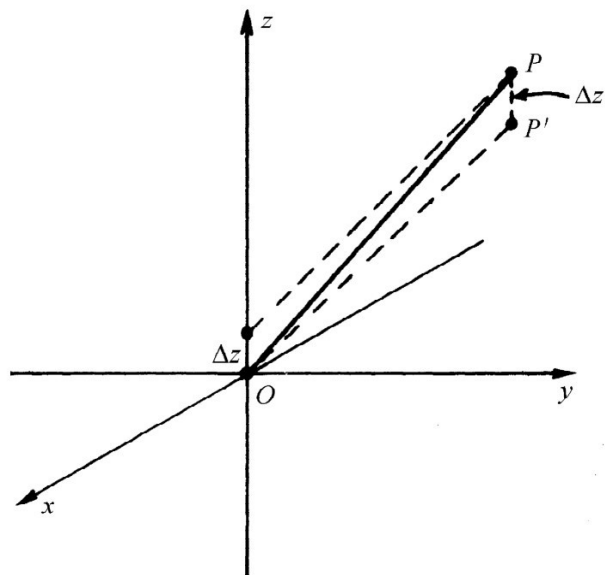


图6-5 来自原点顶上 Δz 处一个点电荷在 P 点上的势，等于来自原点处同一电荷在 P' 点（比 P 点低下 Δz ）上的势

式中 Δz 指的是与 $d/2$ 相同的间距。因此，引用 $\phi_0 = q/r$ ，我们就有该正电荷的势

$$\phi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.17)$$

对于该负电荷的势，应用同样的道理可写出

$$\phi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.18)$$

总电势等于式 (6.17) 与 (6.18) 两者之和：

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) d = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) qd. \quad (6.19)$$

对于其他指向的偶极子，可以将正电荷的位移表示为 $\Delta \mathbf{r}_+$ 。然后，我们应该把式（6.17）写成

$$\Delta \phi_+ = -\nabla \phi_0 \cdot \Delta \mathbf{r}_+,$$

式中 $\Delta \mathbf{r}_+$ 以后被 $\mathbf{d}/2$ 代替。和上面一样，在完成了推导过程之后，式（6.19）就会变成

$$\phi = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot q\mathbf{d}.$$

如果我们代入 $q\mathbf{d} = \mathbf{p}$ ，并插进 $1/(4\pi\epsilon_0)$ ，则上式与式（6.16）正好相同。按另一种方式来看，我们见到偶极子势，即式（6.13），可以解释为

$$\phi = -\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_0, \quad (6.20)$$

其中 $\Phi_0 = 1/(4\pi\epsilon_0 r)$ 仍是一单位点电荷的势。

尽管对一已知的电荷分布，我们总能够通过积分求得其势，但有时却可能运用一点聪明手法来获得答案，以便节省时间。例如，我们经常可利用叠加原理。如果有这样一个电荷分布，它是由两个电势已

知的电荷分布构成的，那么只要将所知的两个势相加起来就能很容易地求得所需的电势。这方面的一个例子是关于式（6.20）的推导，另一个例子如下所述。

假定有一个球面，其表面电荷的分布随极角的余弦而变化。对这么一个分布积分是相当麻烦的。可是令人惊奇，这样的分布却可通过叠加原理来加以分析。试设想有一个带着均匀正电荷体密度的球体，而另一个球体则带有相等的、均匀的负电荷体密度，它们原来就是互相叠合，形成一个中性——也就是不带电——的球体。然后，若该带正电荷球体相对那个带负电荷的球体稍微移动，则不带电的那部分球体仍将保持中性，但有少量正电荷会出现在一边，而少量负电荷则出现在相反的一边，如图6-6所示。若两球的相对位移很小，则净电荷相当于（在球面上的）面电荷，而该面电荷密度将与极角的余弦成正比。

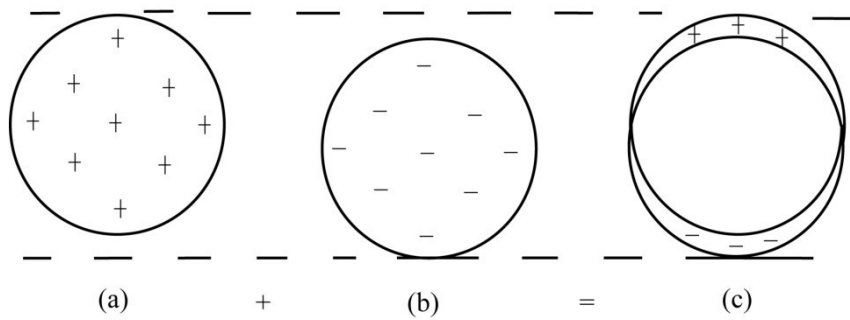


图6-6 彼此间有一微小位移的两个均匀带电球体互相叠加，相当于表面电荷的非均匀分布

现在，如果我们要得到来自这种分布的势，则不必再去做积分。因为我们知道来自每一个荷电球的势——对于在球外的点——与来自一个点电荷之势相同。这两个移动过的球与两个点电荷相似，其势恰好就是一个电偶极子的势。

用这样的方法，你可以证明：在一个半径为 a 的球面上面电荷密度的分布为

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta,$$

在球外产生的场恰好就是偶极矩为

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}$$

的偶极子产生的场。也能够证明，在该球内的电场是常数，其值为

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

若 θ 为相对正 z 轴的角，则在球内的电场在负 z 方向。我们刚才考虑的例子并不像它表面看来那么带有人为性，以后将在电介质理论中再次碰到它。

§6-5 任意电荷分布的偶极子近似

偶极子场还出现在另一个既有趣而又重要的场合中。假设有一个具有复杂电荷分布的物体——像水分子（图6-2）那样——而我们仅仅

对远处的场感兴趣。我们将证明，对于距离比物体尺寸要大的情况有可能找到关于场的一个恰当而相对简单的表示式。

我们可将该物体设想成在某一有限区域里的一群点电荷 q_i ，如图6-7所示（以后若我们愿意，可以用 ρdV 来代替 q_i ）。令每一电荷 q_i 被置于距原点（选取在该群电荷中间的某处）的位移为 $\mathbf{d}_i$ 的地方。在 $\mathbf{R}$ （ $\mathbf{R}$ 远大于最大的 $\mathbf{d}_i$ 值）处的 P 点，势究竟如何呢？来自整个电荷群的势由下式给出：

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (6.21)$$

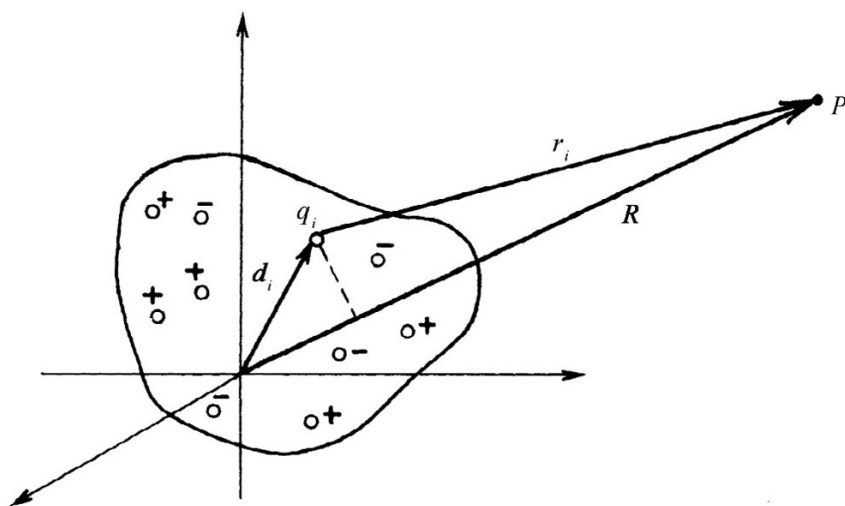


图6-7 一群点电荷在一遥远点 P 处产生的势的计算

式中 r_i 是从 P 点至电荷 q_i 的距离（即矢量 $\mathbf{R} - \mathbf{d}_i$ 的长度）。现在，如果这些电荷至观察点 P 的距离巨大，则每个 r_i 都可以用 R 来作近似。每一项就都变成 q_i/R ，从而可将 $1/R$ 取出作为在求和符号前的一个因子。这将向我们提供一个简便的结果

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_i q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}. \quad (6.22)$$

式中， Q 恰好就是整个物体的总电荷。这样我们发现：从距离任意一堆电荷足够远的各点上来看，该堆电荷就像一个点电荷似的。这一结果并不太令人惊异。

但若有等量的正电荷和负电荷又该怎么样呢？此时物体的总电荷 Q 为零。这并不是一种罕见的情况。事实上，正如你们所知道的，物体往往具有电中性。水分子就是电中性的，但其中诸电荷并非完全位于同一点，因而若站得足够近，就应能见到那些分开着的电荷的某些效应。对于来自电中性物体中一个任意电荷分布的势，我们需要一个比式 (6.22) 更好的近似式。式 (6.21) 仍然是准确的，不过不能再只是令 $r_i = R$ ，我们需要一个更准确的 r_i 表达式。如果 P 点位于遥远距离处， r_i 与 R 的差异可以通过 $\mathbf{d}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的投影而得到一个良好近似，正如从图6-7就可以看得出来的那样（你应该设想，实际上 P 比图上所示的还要遥远得多）。换句话说，若 $\mathbf{e}_R$ 是在 $\mathbf{R}$ 方向上的单位矢量，则我们对于 r_i 的二级近似为

$$r_i \approx R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R. \quad (6.23)$$

我们所真正需要的乃是 $1/r_i$ ，由于 $d_i \ll R$ ，对我们的近似程度来说， $1/r_i$ 就可写成

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R}{R} \right). \quad (6.24)$$

以此代入式 (6.21) 中，便可得到势

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} + \dots \right). \quad (6.25)$$

上式中最后三点代表已略去的有关 $\mathbf{d}_i/R$ 的较高次项。这些项，再加上已获得的那些，就是 $1/r_i$ 在 $1/R$ 附近以 $\mathbf{d}_i/R$ 为幂进行的泰勒展开中的相继的项。

式(6.25)中的第一项，就是在上面获得的，如果物体具有电中性，这一项则取消。第二项依赖于 $1/R^2$ ，正如偶极子那种情况。事实上，如果定义

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{d}_i \quad (6.26)$$

为该电荷分布的一种特性，那么势式(6.25)的第二项便是

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (6.27)$$

这恰好就是一个偶极子势。 $\mathbf{p}$ 这个量称为该分布的电偶极矩。它是对以前的定义的推广，而在两个点电荷的特殊情况下，它才简化成以前那样。

上述结果是：若距离整体是电中性的任一团电荷足够远，势就是一偶极子势。它按 $1/R^2$ 递降，并随 $\cos\theta$ 变化——而其强度与该电荷分布的偶极矩有关。正是由于这些缘故，偶极子场才那么重要。因为一对点电荷的那种简单情况是极为罕见的。

例如，水分子就有相当强的偶极矩，由于这偶极矩而产生的电场导致了水的某些重要性质。在许多种分子，诸如 CO_2 中，由于分子结

构的对称性使得其偶极矩为零。因此，对于这些分子我们理应展开得更准确些，得到势中随 $1/R^3$ 递降之项，而这称为四极子势。对于这些情况我们将在以后讨论。

§6-6 带电导体的场

现在已完成了我们希望涉及的一些例子，它们是从一开始就知道了电荷分布的那些情况。那是一种不太复杂的问题，至多只牵涉到某些积分。现在，我们将转到一类全新的问题，即对带电导体附近的场的确定。

假设总电荷 Q 被置于一任意导体之上，在这种情况下，我们将不可能确切地说出电荷的位置，它们将以某种方式分散在该导体表面上。我们怎能知道电荷在表面上是如何分布的呢？它们必须把自己分布得使该表面之势是一常数。假如该面不是一个等势面，则在导体内便会有电场，而电荷就会继续运动直到电场变为零。这一类普遍问题可以按下述的方法得到解决。我们先猜测有某一电荷分布而算出了势。若所算出的势在该表面上处处是常数，则问题便算了结。如果该表面不是一个等势面，那就说明我们对电荷分布所做的猜测有误。应该再进行猜测——希望得到一个有所改善的猜测！如果我们对逐步猜测不明智，则这一过程可以不断地继续下去。

如何猜测分布的问题在数学上相当困难。当然，自然界自有其完成此事的时间，电荷推来挽去直到它们互相平衡为止。然而，当我们试图求解该问题时，要做出一次尝试就得花很长的时间。这办法十分繁冗，对于任意一群导体和任意电荷来说，这一问题可能变得十分复杂。一般说来，如果没有相当复杂的数值计算方法就无从加以解决。

目前，这一类的数值计算是由计算机完成的，它能为我们代劳，只要先告诉它怎样去进行计算就行。

另一方面，有许多细小的实用情况，如果通过某种更直接的方法——不必为计算机编制程序——就能够找到答案，那该多么好。幸而，有若干种场合，其答案可以利用某些巧计或其他办法把它从自然界挤出来。我们将要描述的第一个巧计就涉及对已知解的应用，这些解是我们以前在各电荷的位置都已被规定的情况下获得的。

§6-7 镜像法

比方说，我们以前就曾经解出过两个点电荷的场。图6-8表示第4章中通过计算而获得的某些场线和等势面。现在考虑标明为A的那个等势面。假设我们造成一个其形状恰巧与这个面吻合的金属薄片。若把它准确地安放在该面上并调整其势至恰当数值，那就没有谁能够知道它是放在哪里了，因为一切都不会改变。

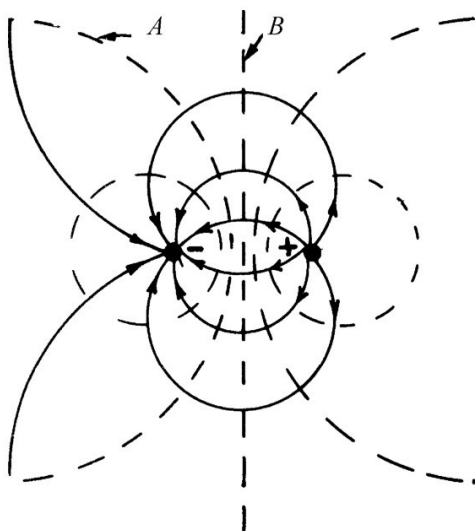


图6-8 两个点电荷的场线和等势面

可是要注意！实际上我们已经解决了一个新的问题。我们有这么一种情况：一块具有给定势的弯曲导体面被放在一个点电荷附近。如果被放置在该等势面上的金属片最终能自行闭合（或实际上伸展得足够远），那么就有一种在§5-10中曾考虑过的那样情况，其中空间被分隔成两个区域，其一是在闭合导体壳之内，另一则在其外。我们在那里已经知道这两个区域里的场是互相独立的。因而不管里面怎么样，在导体外面我们应该有相同的场。我们甚至可以用导电材料来填充整个内部。因此，就已找到了图6-9那种结构的场。在导体外部的空间里，场同图6-8中所示的两个点电荷之场一样。在导体内部，场等于零。并且——正应该如此——刚好在导体外面的电场会与该面正交。

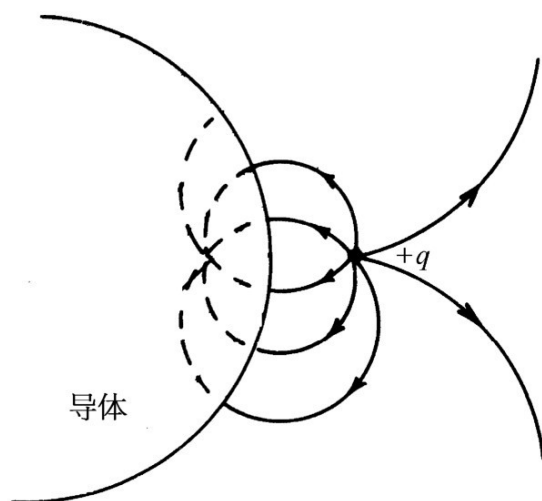


图6-9 在一个形状像图6-8中的等势面A的导体之外的电场

这样，我们便能通过计算 q 以及在适当位置上一个想象的点电荷 $-q$ 所产生的场来算出图6-9中的场了。那个我们“想象”其存在于导体表面背后的点电荷称为镜像电荷。

从书本中你可以找到有关双曲面形状的导体以及其他形状复杂的导体的各种解的长长名单，因而会觉得奇怪，怎么有人竟解决了这些可怕形状的导体问题。原来他们是倒过来求解的！有人解决了给定电

荷的一个简单问题。然后，他看到有某一个等势面表现出新的形状，于是就写出一篇论文，指明在这种特定形状的导体外的场可以用某种方法来描述。

§6-8 导电平面附近的点电荷

作为这种方法最简单的应用之一，让我们利用图6-8中的等势面 B 。有了它，便能求解在一块导电板面前放置一个电荷的问题。我们只需勾销该图左边的一半。有关这一解答的场线如图6-10所示。注意该平面，由于在两电荷的正中间，所以具有零势。这样，我们就解决了在一接地的导电板附近有一个正电荷的问题。

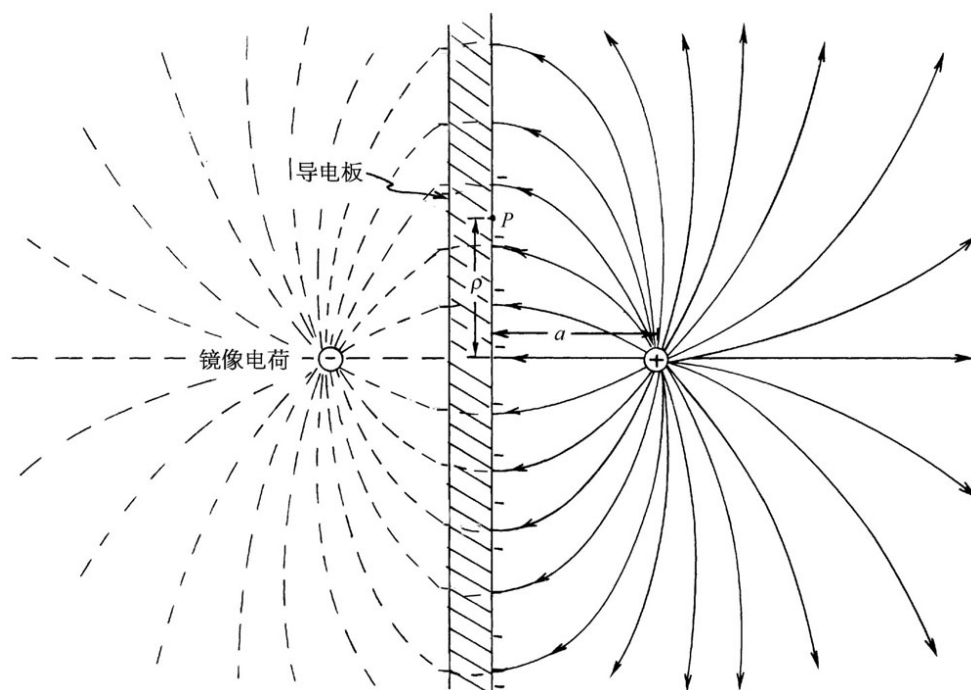


图6-10 在一导电平面附近一个电荷的场，用镜像法求得

对于整个电场至今我们已告解决，但造成这场的真实电荷究竟怎样呢？除了这个正点电荷之外，由于受到该正电荷（从老远处起）所

吸引，所以在导电板上出现一些感生负电荷。现在，假定由于某种技术原因——或出自好奇心——你想知道那些负电荷在该表面上是怎样分布的。那你可以利用我们在§5-9中由高斯定律所算出的结果求出面电荷密度，贴近导体外面的电场法向分量就等于面电荷密度 σ 除以 ϵ_0 。从表面处电场的法向分量倒过来计算，我们可以获得表面上任一点的电荷密度。因为我们已知道各处的场，所以就知道了面电荷密度。

考虑板面上一点，它与正对着正电荷的那一点距离为 ρ （图6-10）。在这一点上的电场垂直指向该表面。来自该正电荷的场其法向分量为

$$E_{n+} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.28)$$

对此还必须加上由那个负的镜像电荷产生的电场。这不过使该法向分量加倍（并抵消了所有其他之场），因而在该表面任一点的电荷密度 σ 就是

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.29)$$

对上述结果的一种有趣核对，仍是在整个面上对 σ 进行积分。我们求得总感生电荷为 $-q$ ，理应如此。

还有另一个问题：是否有力作用在点电荷上？有的，因为有来自板上的感生负面电荷的吸引力。现在我们已知道面电荷的分布（式6.29），本来可通过积分算出对该正点电荷的作用力。但我们也知道，作用于该正电荷上的力应该与用一负的镜像电荷来代替那块平板

所产生的力完全相同，因为在正电荷附近的场在这两种情况下都相同。该点电荷会感到一个指向板面的力而其大小为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}, \quad (6.30)$$

这样，比对所有负电荷取积分而求得力要容易得多。

§6-9 导电球体附近的点电荷

除了平面以外，还有哪些面具有简单解呢？第二种最简单的形状是球。如图6-11所示，在一金属球附近有一个点电荷 q ，让我们求出该球体周围的场。现在，我们必须寻找给出的等势面为球面的那种简单物理情况。如果我们事前仔细考虑人们已经解决的那些问题，就会发现，已有人注意到两个不相等的点电荷的场会有一个球形的等势面。啊哈！如果选择那个镜像电荷的位置——并选出适量的电荷量——那么也许就能使一个等势面符合我们的球面。事实上，的确可以用下述方法做到这一点。

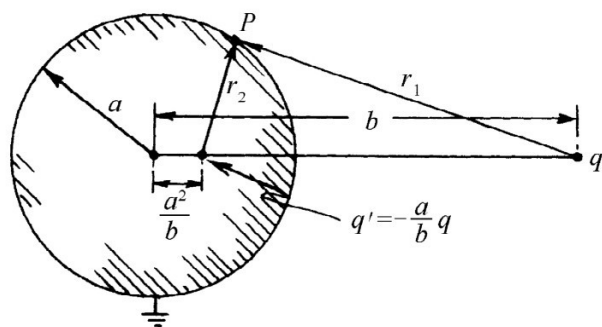


图6-11 点电荷 q 在一个接地的导电球体上感生了电荷，这些电荷的场就是被置在图中所示那一点上的一个镜像电荷 q' 所产生的

假设你希望有这样一个等势面：半径为 a 而其中心与电荷 q 相距为 b 的球面。试放置一个大小为 $q' = -q(a/b)$ 的镜像电荷于该真实电荷与球心的连线上，与球心的距离为 a^2/b 。这样，球面就将处于零势。

数学方面的理由来源于这样的事实：球面是与两固定点的距离之比始终保持常数的所有各点的轨迹。参考图6-11，在 P 点由 q 与 q' 所产生之势正比于

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}.$$

因此，势就将在下述一切点上为零：

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \text{ 或 } \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$

如果我们把 q' 置于距离球心为 a^2/b 的一点，那么比 r_2/r_1 就有常数值 a/b 。因此，若

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}, \quad (6.31)$$

则球面便是一等势面了。事实上，它的势为零。

如果我们感兴趣的是一个不处于零势的球，情况又会怎么样呢？原来只有在其总电荷碰巧等于 q' 时才会有零势。当然，如果球是接地

的，则在其上面所感生的电荷就恰好是那些。但如果它是被绝缘的，并且不带电荷，那又会怎么样呢？或者已知它带有总电荷 Q 呢？或者它具有的给定的势正好不等于零呢？所有这些问题都不难回答。我们总可以加一个点电荷 q'' 于球心上，通过叠加，该球面就仍保持为一等势面，只是势的大小将改变罢了。

例如，若有一个原来并没有带电而且与其他任何东西都绝缘的导电球，并将一个正的点电荷 q 带至其附近，那么球带的总电荷将保持为零。和以前一样通过用一个镜像电荷 q' ，但除此之外在球心再加上一个电荷 q'' 而找到解。选取

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}q. \quad (6.32)$$

在球外每一处的场由 q ， q' 与 q'' 的场叠加而成。问题就这样解决了。

现在我们能够看到，将有一吸引力存在于球与点电荷 q 之间。尽管在中性球上没有电荷，力仍不会等于零的。这吸引力来自何处呢？当你把一正电荷带到一导电球外面时，该正电荷会把负电荷吸引到靠近它自己的一边而把正电荷留在较远的另一边的面上。受负电荷的吸引作用大于受正电荷的排斥作用，因而就有一净的吸引作用。可以通过计算算出在 q' 和 q'' 所产生的场中作用在 q 上的力，而找出该吸引作用有多大。总力等于这两者之和： q 与置在 $b - (a^2/b)$ 距离上的电荷 $q' = -(a/b)q$ 之间的吸引力，以及 q 与置在 b 距离上的电荷 $q'' = +(a/b)q$ 之间的排斥力。

那些曾在童年时代对一个发酵粉盒上的商标里画上一个发酵粉盒，而在此盒的商标里又画上另一个发酵粉盒.....感到赏心悦目的人可能对下述问题感兴趣。两个相等的球，一个带有总电荷 $+Q$ ，而另一

个带有总电荷 $-Q$ ，被置在某一距离上。它们间的相互作用力有多大呢？这问题可以用无限个镜像电荷来解决。最初人们用球心上的电荷对每个球做近似，这些电荷将在另一个球中有其镜像电荷，这些镜像电荷又有其镜像电荷，如此等等。这个解就很像那发酵粉盒上的图画似的——收敛得相当快。

§6-10 电容器与平行极板

现在，我们提出另一类与导体有关的问题。考虑两块大的金属板，彼此互相平行并相隔一个比它们的宽度小得多的距离。而且，假定它们分别带有等量异号电荷。这样，每一板上的电荷将被另一板上的电荷所吸引，而这些电荷都将均匀地散布于板内侧表面上。两板将分别具有电荷密度 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ ，如图6-12所示。从第5章我们知道：两板之间的场为 σ/ϵ_0 ，而在两板外面的场则为零。两板将有不同的势 ϕ_1 和 ϕ_2 。为了方便起见，我们将称这差为 V ，它常叫作“电压”

$$\phi_1 - \phi_2 = V.$$

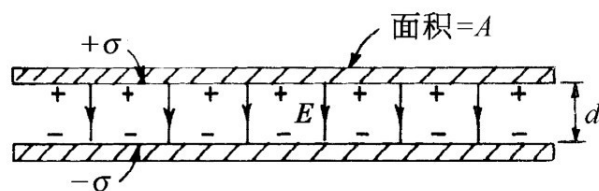


图6-12 平行板电容器

你将发现，有时人们把 V 当作电势用，但我们却选用 ϕ 作为电势。

势差 V 是单位电荷从一板移至另一板所需的功，因而

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d = \frac{d}{\epsilon_0 A}Q, \quad (6.33)$$

式中 $\pm Q$ 为每板上的总电荷， A 为板的面积，而 d 为两板间距。

我们发现电压与电荷成正比。对于在空间中的任何两个导体，只要一个带正电而另一个带等量负电， V 与 Q 之间的这种正比性都能找到。它们间的势差——也就是电压——将与电荷成正比（我们假定在其周围没有其他电荷）。

为什么会有这一种正比性呢？这只不过是叠加原理在起作用。假定我们已知道关于一组电荷的解，然后把两个这样的解叠加起来。电荷加倍，场也加倍，因此，将单位电荷从一点移至另一点所做的功也加倍。因此，在任何两点之间的势差就正比于电荷。特别是，两导体之间的势差正比于它们上面的电荷。当初有人把这个正比的式子写成了另一种形式。也就是说，他们写成

$$Q = CV,$$

式中 C 是一常数。这个比例常数叫作电容，而这样一种两个导体的系统则叫作电容器 [1]。对于我们的平行板电容器来说，

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} (\text{平行板}). \quad (6.34)$$

这个公式并非严格准确，因为在两板之间场并不像我们设想的那样真正处处均匀。在边缘处场并非刚好突然消失，而实际上更像图6-13所示的那种情形。总电荷不像我们所假定的为 σA ——对于边缘效应有一个小的修正。为了求得这个修正，我们得更准确地算出场并找出在边缘处究竟发生了什么。然而，这是一个复杂的数学问题，它可以

用技巧解决，我们现在就不加以描述了。这种计算的结果表明，接近两极板边缘处电荷密度会比中间稍微高些。（这意味着平板电容器的电容比我们计算的稍大。）

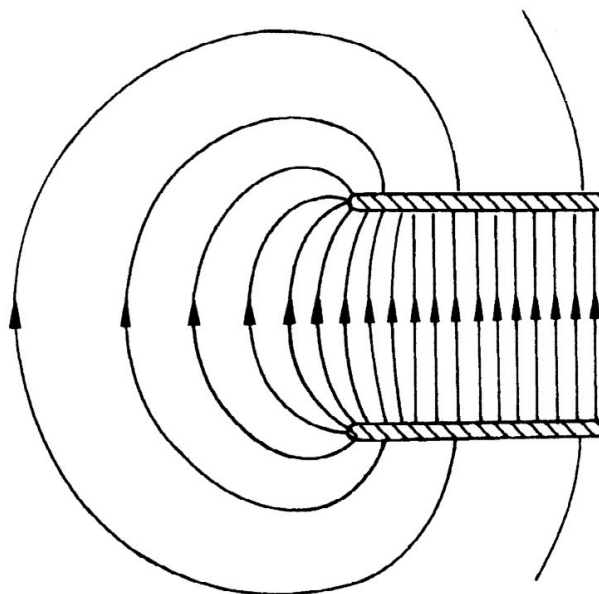


图 6-13 在两平行板边缘附近的电场

我们仅仅谈及了关于两导体的电容。有时人们会谈到单个物体的电容。例如，他们会说，一个半径为 a 的球体有 $4\pi\epsilon_0 a$ 的电容。他们把另一端设想为是一个半径无限大的球——即当有一电荷 $+Q$ 放在球面上时，相反的电荷 $-Q$ 则在一个无限大的球面上。人们也可以谈论当有三个或更多个导体时的电容，然而关于这方面的讨论我们将要推迟。

假设我们希望有一个电容很大的电容器，那就可以通过取极大面积但间距极小而获得。我们可以将浸过蜡的纸片夹在铝质薄膜之间而卷起来（如果把它密封在一个塑料盒中，那就会形成一个典型的无线电方面用的电容器了）。它有什么好处呢？好处在于能贮存电荷。比如，若我们试图把电荷贮存在一个球上，则当它充电时电势会很快升高，甚至可能高到电荷开始通过火花逃逸到空气中去。可是，若我们

把等量电荷放在一个电容十分大的电容器上，则电容器间所形成的电压会很小。

在电子线路的许多种应用中，凡能吸收或释放大量的电荷而又不大会怎样改变其电势的东西都是有用的，而这正是电容器。在电子仪器以及计算机中，电容器还有许多种应用。其中，有的被用来随着电荷的某一特定变化，从而相应地得到电压的一种特殊变化。在第1卷第23章中我们曾在描述共振电路特性的地方见到一种相似应用。

我们从 C 的定义可以看出，它的单位是 CV^{-1} 。这个单位也叫法（F）。考察式（6.34），我们见到 ϵ_0 的单位可表达为 Fm^{-1} ，这是最常用的单位。电容器的典型容量约在1 pF至1 mF之间。几皮法的那种小电容器常用于高频调谐电路中，而高达成百上千个微法的电容器则在能源滤波器中可以找到。面积为1 dm²而间距为1 mm的一对平行板约有1 pF的电容。

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ Fm}^{-1}$$

§6-11 高（电）压击穿

现在，我们想定性地讨论导体周围场的某些特性。若我们对之充电的导体不是一个球，而是在其上面有一针尖或尖端，如图6-14所示，那么尖端周围的场比起其他区域的场就会高出许多。从定性方面讲，原因是电荷企图尽可能广阔地铺开在导体表面，而尖端上的尖顶就是与大部分表面离得尽可能远的地方。板面上有些电荷被一直推至

尖顶，尖顶上相对小量 的电荷仍能提供一个大的面密度，而一个高的电荷密度也就意味着刚好在外部的一个强电场。

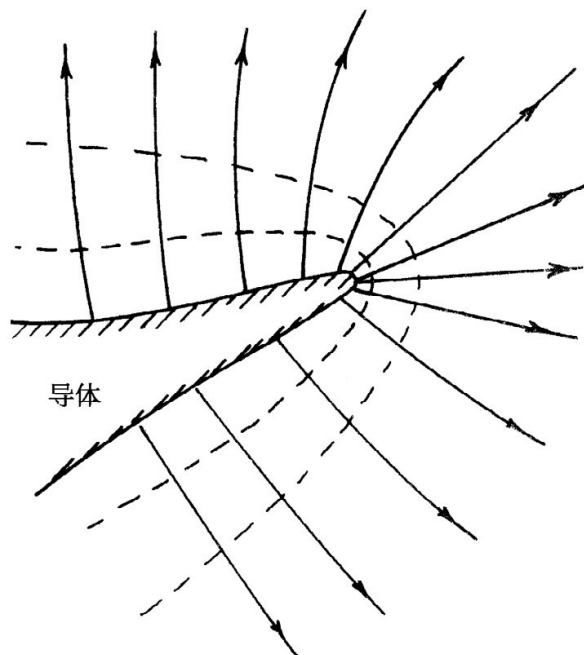


图6-14 在导体上接近尖端处的电场十分强

要看出导体上那些曲率半径最小的地方场最高的一种办法，是考虑一个大球与一个小球被导线连接在一起的那种组合，如图6-15所示。它多少是如图6-14所示的那个导体的某种理想模型。导线对于处在球外的场影响甚小，它在这里的作用只是维持两球处在相同的电势。现在，究竟哪一个球在其表面上会有较大的场呢？如果左边的球半径为 a 并带有电荷 Q ，则它的势约为

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

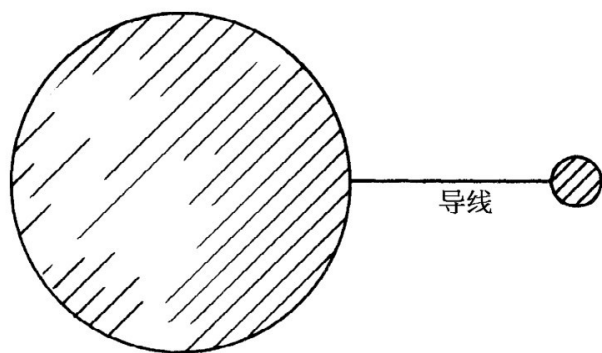


图6-15 一个尖锐物体的场可以由处于相同电势的球来近似

（当然一个球的存在总会改变另一个球上的电荷分布，因而无论哪个球上的电荷都不是真正球对称的。但若我们感兴趣的只是对场的一种估计，那就可采用一个球形电荷的势。）若那个半径为 b 的小球带有电荷 q ，则它的势约等于

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}.$$

但 $\phi_1 = \phi_2$ ，因而

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

另一方面，在表面上的场与面电荷密度成正比（见式5.8），而电荷密度又正比于电荷除以半径平方。因而我们得

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \quad (6.35)$$

所以，在小球表面处的场较高，场与半径成反比。

这一结果在技术上很重要，因为若电场太大，空气会被击穿。所发生的情况是：一个在空气中某处的游离电荷（电子或离子）被场所加速，倘若场很大，则该电荷会在打击另一个原子之前就获得了足够高的速率以致能够从该原子中打出一个电子来。结果，越来越多的离子产生了，它们的运动构成放电或火花。如果你要对一物体充电至一高电压而又不让它通过空气中的火花而使它本身放电，那你就必须保证该表面是平滑的，从而不会在任何一处出现异常强的电场。

§6-12 场致发射显微镜

在一带电导体上任何尖锐突出部分的周围那种非常高的电场，有很意义的应用。场致发射显微镜的操作就有赖于在一金属尖端上所产生的高场^[2]，它是按如下方式制成的：一根非常细小的针，其尖端的直径约为1 000 Å，被安置在一个抽成真空的玻璃球泡的中心（图6-16）。球的内表面涂上薄层荧光材料导电膜，而在这荧光涂层与针之间加上一个非常高的电压。

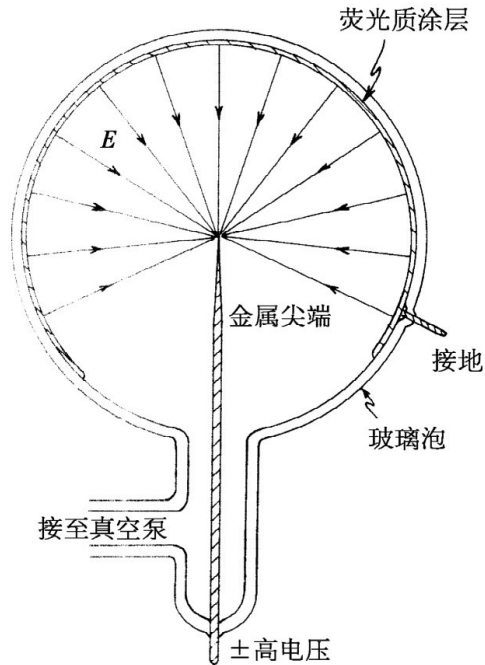


图6-16 场致发射显微镜

让我们首先考虑，当针相对于荧光涂层是负时所发生的情况。场线在尖端处高度集中。电场可以高达 4 GVm^{-1} 。在这样强的场中，电子会从针的表面被拉出去并在针和荧光涂层之间的势差中被加速。当电子到达涂层时就会引起发光，正如电视显像管中的情况一样。

那些到达荧光面给定点上的电子，在很高的近似程度上，可以看作是发源于径向场线的另一端，因为电子将沿着场线从该点跑至面上来。这样，我们在荧光面上就看到了针的尖端的某种像。更正确地说，是看到了针表面的发射率图像——也就是电子离开金属尖端表面的难易程度。如分辨率足够高，人们还可以指望能够分辨出在针的尖端处个别原子的位置。利用电子，由于下述一些原因，这样的分辨率无法达到。首先，电子波存在一种量子力学效应的衍射，它能使像模糊。其次，由于电子在金属中的内在运动，它们在离开针面时会有一

个小小的侧向初速，而这一种速度的无规横向分量就会引起像的某种模糊不清。这两种效应合在一起迫使分辨率限于 $25\text{ \AA}$ 左右。

然而，如果我们颠倒电极方向，并在玻泡中引进少量氦气，那就可能得到高得多的分辨率。当一个氦原子与针尖碰撞时，那里的强电场会把一个电子从该氦原子中剥离出来，剩下的原子就带上了正电。然后，这个氦离子就会沿着场线向外加速直至荧光屏。由于氦离子比电子重得多，其量子力学波长就小得多。如果温度不太高，则热速度效应也比电子的情况小。所以像就有了较少的模糊程度，一个清楚得多的有关尖端的图像就可以得到。用这种正离子的场致发射显微镜，有可能获得高达二百万倍的放大率——放大率比最佳的电子显微镜要高出十倍。

图6-17是由一台利用钨针的场致发射显微镜所得结果的一个例子。一个钨原子中心对氦原子的离化，比钨原子间的空隙有稍微不同的比率。在荧光屏上的斑点图样就会显示出钨针尖端的单个原子的排列。斑点之所以表现为环形，可以通过观察一个大箱子里用以代表金属里原子的、被堆积成矩形阵列的小球而得到理解。如果你从该箱子里划出一个粗略的球形的部分，便可以看到原子结构的环状图样特性。场致发射显微镜第一次为人类提供了观察原子的工具。鉴于该仪器的简单性，这是一项了不起的成就。

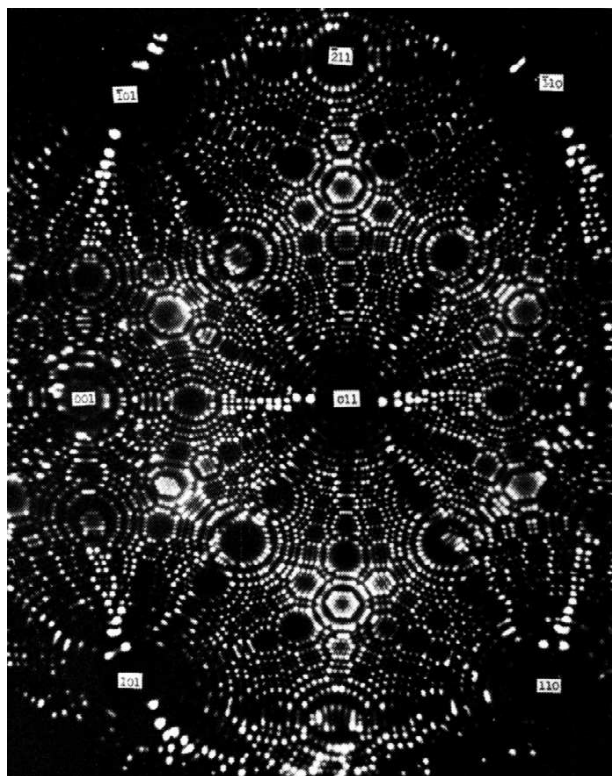


图6-17 由一架场致发射显微镜所产生的像 [宾夕法尼亚州州立大学物理学研究教授
埃尔温·W. 穆勒提供]

[1] 有人认为电容“capacitance”和电容器“capacitor”这两个较新名词应分别代替电容“capacity”和电容器“condensor”那两个词。我们决定采用那较古老的一套名称，因为在物理实验室中——即使不是在书本里——这套旧名称仍会普遍用到。

[2] Müller E W. The Field-ion Microscope. *Advances in Electronics and Electron Physics* , 1960, **13** : 83—179. Academic Press, New York.

第7章 在各种情况下的电场 (续)

§7-1 求静电场的各种方法

本章将继续讨论各种特殊情况下电场的特性。首先，要来描述一些求解导体问题的更精确的方法。并不期望读者对这些较高级的方法能够在这个时候就熟练掌握，虽然有些问题可能利用在较高级课程中学到的技巧就能解决，但从这类问题得到某种概念仍然可能是有意义的。然后，我们还将提出两个例子，其中电荷分布既非固定、也非由导体所携带，而是要由其他某种物理规律来确定的。

正如在第6章我们所发现的，当电荷分布已确定后，静电场问题基本上就很简单，只要求算出一个积分。然而，当有导体存在时，由于导体上的电荷分布原先不知道，复杂性便产生了。电荷必须这样分布于导体表面上，使得该导体能成为一个等势体。对于这种问题的解法既非直接也不简单。

我们曾看到过一个解决这类问题的间接方法，在此方法中我们找到了关于某种特定的电荷分布的一些等势面，并用一个导电面去代替其中的一个。按这种办法我们就能制成一份关于球面、平面等形状导体的特殊解的目录。在第6章中所描述的有关镜像法的应用，就是间接法的一个例子，我们将在本章中描述另一个例子。

如果所要求解的问题并不属于能够用间接法构造解的那一类问题，则我们不得不采用较直接的方法来解决。直接方法的数学问题是在服从某些边界——各导体表面——上 ϕ 分别为一些恰当常数的条件下，求拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7.1)$$

的解。凡属牵涉到求解一个微分方程并受某些边界条件所支配的问题，都叫作边值问题。这种问题已成为很多数学研究的对象。在具有复杂形状的导体的情况下，并没有普遍的解析方法，甚至像一个带电的两端都封闭着的金属柱体罐——比如啤酒罐——这种简单的问题都会遇到可怕的数学困难，它只能用数值算法近似地给予解决。唯一普遍的求解方法就是数值算法。

方程式（7.1）对于若干问题是可直接求解的。例如，具有旋转椭球面形状的带电导体问题，可以用已知的特殊函数严格解出。对于一个薄盘的解，可通过一个无限扁平的椭球来得出。同样，关于一根针的解，则可用一个无限长的椭球而获得。然而必须强调，唯一具有普遍适用性的直接方法乃是数值计算技术。

边值问题也可通过对一个物理类似体的测量来解决。拉普拉斯方程产生于许多不同的物理情况中：稳定热流、无旋液流、掺杂媒质中的电流以及弹性膜的挠曲。这些经常能够用来建立一个模拟所要求解的电学问题的物理模型。通过对在该模型上适当模拟量的测量，有关问题的解就可以确定了。模拟技术的一个例子是用电解槽来解二维的静电学问题，这个办法所以有效，乃是由于均匀导电媒质中势的微分方程与在真空中的相同。

有许多物理情况，在一个方向上物理场的变化为零，或者是与另外两个方向上的变化比较，这个变化可以忽略，这样的问题叫作二维问题，其场仅取决于两个坐标。例如，若沿 z 轴放置一根长直带电导线，则在离导线不太远处的一点，其电场只与 x 及 y 有关，而与 z 无关。这就是一个二维问题。由于在一个二维问题中 $\partial/\partial z=0$ ，所以在自由空间里关于 ϕ 的方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

由于这个二维方程相对简单，所以就会有一个宽广的条件范围，在这范围内它可以解析地求解。事实上，一个强有力的间接数学技巧依赖于复变函数的一个数学定理。现在，我们就将予以描述。

§7-2 二维场：复变函数

复变数 z 被定义为

$$z = x + iy.$$

（切莫把这里的 z 与 z 坐标混淆，在下面的讨论中我们将不涉及 z 坐标，因为已假定场与 z 没有依存关系了。）于是以 x 和 y 表示的每一点就对应于一个复数 z ，可以把 z 当成一个单独的（复）变数，并用它来写出通常类型的数学函数 $F(z)$ 。例如，

$$F(z) = z^2,$$

或

$$F(z) = 1/z^3,$$

或

$$F(z) = z \ln z,$$

等等。

给出任意特定函数 $F(z)$ ，便可以代入 $z = x + iy$ ，这就可得到一个 x 和 y 的函数——包括实的和虚的两部分。例如

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

任意函数 $F(z)$ 都可以写成纯粹实部与纯粹虚部之和，而每一部分都是 x 和 y 的函数

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

式中 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 都是实函数。于是，从任意复变函数 $F(z)$ 可以导出两个新的函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 。例如， $F(z) = z^2$ 给出的两个函数为

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad (7.5)$$

和

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

现在我们来谈一个不可思议的数学定理，它是那么令人喜悦，所以我们将把它的证明留给你们数学中一门课程去做（不应将所有的数

学奥妙都透露出来，否则题材就未免太枯燥无味了）。这个定理是：对于任一“普通复变函数”（数学家将把它定义得更好些），上述 U 和 V 两函数会自动地满足下列关系：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.8)$$

由此可立即推出，每一个 U 和 V 函数都各满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

这两方程对于式（7.5）和（7.6）那种函数显然是正确的。

这样，从任意普通的函数出发，我们便能得到两个函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ ，它们都是二维的拉普拉斯方程之解，并各代表一种可能的静电势。我们可以捡起任意函数 $F(z)$ ，它就代表某个电场问题——事实上是两个，因为 U 和 V 每个都代表一个解。我们可以随心所欲地写出尽可能多的解答——只要编造出各种函数——然后又只要找出与每一解答相符合的问题。这听起来似乎有点本末倒置，但毕竟是一种可能方法。

作为一个例子，让我们看一看函数 $F(z) = z^2$ 会提供什么样的物理内容。从这一函数我们获得了两个势函数式（7.5）和（7.6）。要看出函数 U 属于哪一种问题，可令 $U=A$ ，即一常数，而解出一组等势面来：

$$x^2 - y^2 = A.$$

这是一个直角双曲线方程。对各种不同 A 值，我们会得到如图7-1所示的那些双曲线。当 $A=0$ 时，所得到的是通过原点的两条交叉直线的特殊情况。

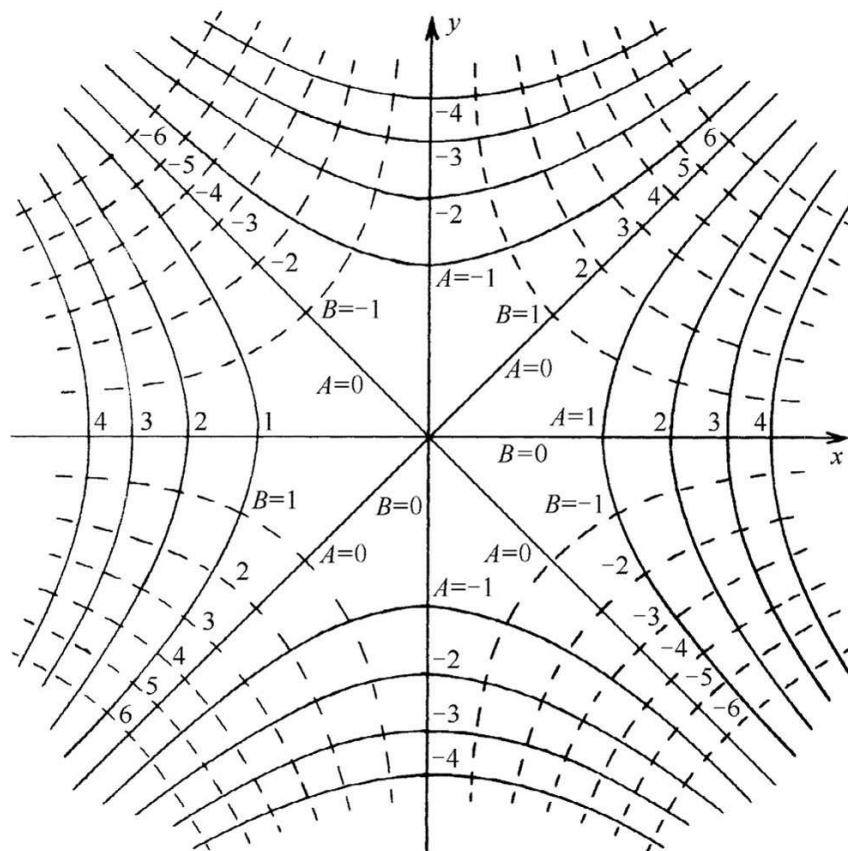


图7-1 两组正交曲线，它们各可代表一个二维静电场中的等势面

像这样的一组等势面相当于导体内一个直角角隅内的场。如果我们有两个形状做得像图7-2所示的、各保持不同电势的电极，那么标明为 C 的那个角附近的场看来就像图7-1所示的原点处那种场。图中实线组是等势面，而与之成直角的虚线组则相当于 $\mathbf{E}$ 线。在尖端或突出部分处电场趋向增强，而在凹陷处或坑谷里的场则会趋向减弱。

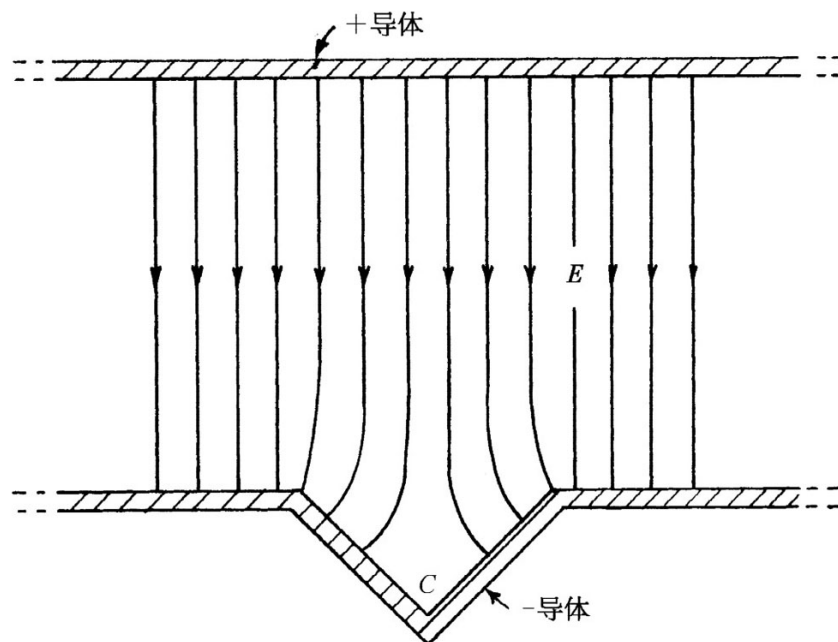


图7-2 在C点附近的场与在图7-1所示的相同

我们所找到的解也相当于一个双曲线形电极放在一个直角角隅附近或两个各具有适当电势的双曲线形电极的解。图7-1所示的场具有重要的性质。电场的 x 分量 E_x 为

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x,$$

即电场与离轴的距离成正比。利用这一事实，可制成一种（称为四极透镜的）装置，它对于使粒子束聚焦很有用（参阅§29-7），所需的场往往通过使用四个如图7-3所示的那种双曲线形电极而获得。对于图7-3中的电场线，我们只要把照图7-1中那一组代表 $V=\text{常数}$ 的虚线复制下来。我们有一意外收获！由于式（7.7）和（7.8），所以 $V=\text{常数}$ 的那些曲线会与 $U=\text{常数}$ 的那些曲线正交。每当我们选取一个函数 $F(z)$

时，就从 U 和 V 分别得到等势面和场线。我们已解决了两问题中的任一个，到底是哪一个，则取决于哪一组曲线将被称为等势面。

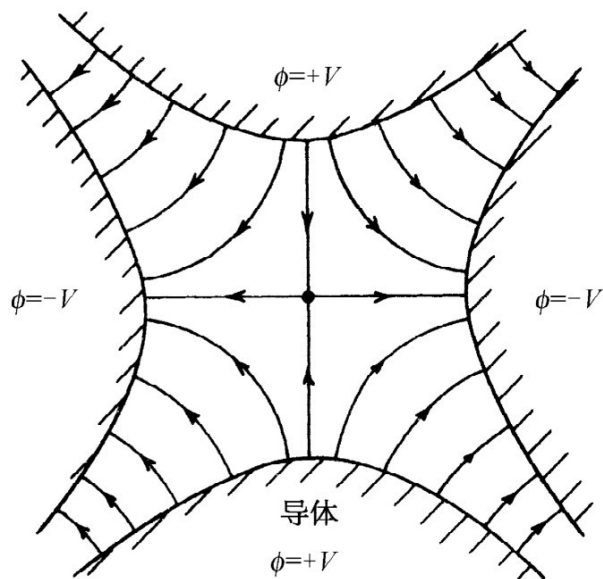


图 7-3 在一个四极透镜中的电场

作为第二个例子，考虑函数

$$F(z) = \sqrt{z}. \quad (7.11)$$

若我们写出

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

其中

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

而

$$\tan\theta = y/x,$$

那么

$$F(z) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

由此可得

$$F(z) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$

利用来自式 (7.12) 的 U 和 V , 对于 $U(x, y) = A$ 和 $V(x, y) = B$ 的两组曲线被画在图7-4上。另一方面, 有许多可能情况也可用这些场来描述, 其中最有趣的一种是靠近一张薄板边缘的场。如果 $B=0$ 的线——在 y 轴右侧的那条线——代表一块带电薄板, 那么在它附近的场线就是由 A 等于各种不同值的一组曲线给出的。物理情况如图7-5所示。

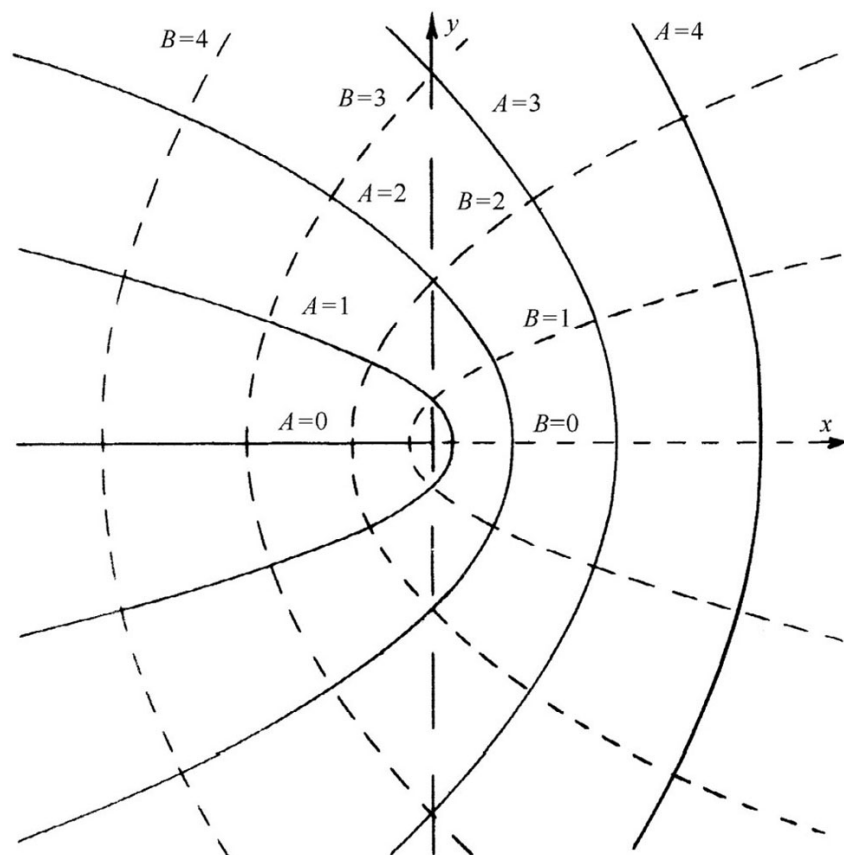


图7-4 由式 (7.12) 中 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 等于常数的两组曲线

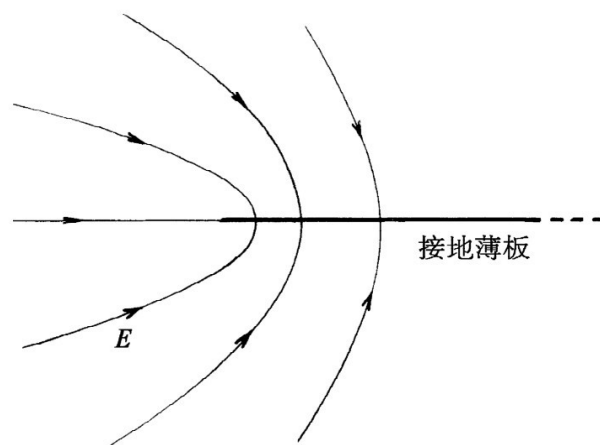


图7-5 在一块接地薄板的边缘附近的场

其他的例子还有：

$$F(z) = z^{2/3}, \quad (7.13)$$

这给出一个直角角隅处的场；

$$F(z) = \ln z, \quad (7.14)$$

给出一根线电荷的场；

而

$$F(z) = 1/z, \quad (7.15)$$

则会给出电偶极子的二维模拟物的场，也就是两条互相靠近而带有异号电荷的平行线的场。

本课程中对上述课题将不再追寻下去，但仍必须强调，虽然复变函数技巧常常很有效，但它局限于二维问题，而且还是一种间接方法。

§7-3 等离子体振荡

现在我们考虑某些物理情况，其中的电场，既不是由固定电荷也不是由导体表面上的电荷所确定，而是由两种物理现象的组合所确定。换句话说，场将同时由两组方程决定：（1）来自静电学的方程组，把电场与电荷的分布联系起来；以及（2）来自物理学另一分支的一个方程，确定场存在时电荷的位置或运动。

我们将要考虑的第一个例子是动力学的例子，其中电荷的运动由牛顿定律所支配。这种情况的一个简单例子发生在等离子体中，这是

一种分布于某一空间区域内由离子和自由电子组成的电离气体。电离层——大气的较高一层——就是这种等离子体的一个例子。来自太阳的紫外线把空气分子内的一些电子撞击出来，从而产生了电子和离子。在这样的等离子体中，正离子比电子重得多，因而同电子的运动相比，离子的运动可以略去。

假定分子是被单一电离的，并令 n_0 为在不受干扰的平衡状态下电子的密度，则这也必然是正离子的密度，因为等离子体（在不受干扰时）是电中性的。现在假定不知什么缘故电子离开了平衡状态而运动，试问将会发生什么情况？如果在一个区域里，电子的密度增大，它们便将互相排斥而趋向于返回其平衡位置。当电子朝着原来位置运动时，它们将会获得动能，但不会在其平衡位置上静止下来，而是过了头。它们将来回振动。与在声波中发生的情况相似，那里的恢复力是气体的压强。在等离子体中，恢复力则是作用于电子上的电力。

为了使讨论简单化，我们将只关心一维（例如沿 x 轴）运动。让我们假定原来位于 x 处的诸电子，在 t 时刻从它们的平衡位置上移动了一小段距离 $s(x, t)$ 。由于电子已移了位，它们的密度一般将改变。密度的改变是容易算出的。参照图7-6，最初包含在 a 与 b 两平面间的电子，已经移动，现在则包含在 a' 与 b' 两个平面之间了。位于 a 与 b 间的电子数目正比于 $n_0 \Delta x$ ；这相同数目的电子现在位于宽度为 $\Delta x + \Delta s$ 的空间中，因此密度已经变成

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \quad (7.16)$$

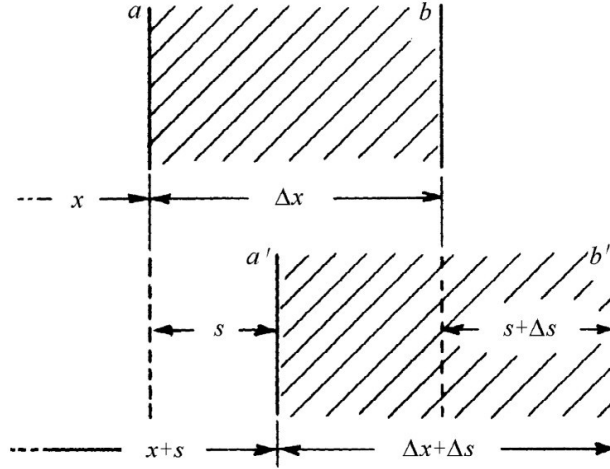


图7-6 等离子体中波的运动。在 a 平面处的电子移动至 a' ，而在 b 处的电子则移动至 b'

如果密度的变化很小，便可以写成〔利用对 $(1+\epsilon)^{-1}$ 的二项展开式〕

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x} \right). \quad (7.17)$$

假定正离子不发生显著移动（由于其大得多的惯性），因而它们的密度仍保持为 n_0 。每一电子所带的电荷为 $-q_e$ ，因而在任一点的平均电荷密度就由下式给出：

$$\rho = -(n - n_0) q_e,$$

或

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx}. \quad (7.18)$$

式中，我们已把 $\Delta s / \Delta x$ 写成微分形式。

电荷密度与电场的关系是通过麦克斯韦方程组，特别是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.19)$$

这个方程确定下来的。如果问题是属于一维的（并且倘若除来自电子位移的场外别无其他场），那么电场 $\mathbf{E}$ 只有一个分量 E_x 。式（7.19）同（7.18）一起给出

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7.20)$$

对式（7.20）积分得

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \quad (7.21)$$

由于当 $s=0$ 时 $E_x=0$ ，所以积分常数 K 为零。

作用于移了位的电子上的力为

$$F_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s, \quad (7.22)$$

这是一个正比于电子位移 s 的恢复力。它将会导致电子做谐振动。一个移了位的电子其运动方程为

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.23)$$

我们发现 s 将做谐变化。 s 随时间的变化将按照 $\cos \omega_p t$ ，或——应用第1卷的指数函数符号——按照

$$e^{i\omega_p t}. \quad (7.24)$$

振动频率 ω_p 由方程式(7.23)确定, 为

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad (7.25)$$

ω_p 称为等离子体频率。它是等离子体的一个特征数值。

在同电子的电荷打交道时, 许多人喜欢用一个量 e^2 来表示他们的答案, 该量定义为

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2.306\,8 \times 10^{-28} \text{ Nm}^2. \quad (7.26)$$

应用这一惯例, 式(7.25)变成

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}, \quad (7.27)$$

这是你们将在大多数书中见到的一种形式。

这样, 我们就发现, 等离子体的扰动会引起电子在其平衡位置附近、固有频率为 ω_p 的自由振荡。这固有频率与电子密度的平方根成正比。等离子体中电子的行为很像一个诸如在第1卷第23章中所描述过的那种共振系统。

等离子体的这种固有共振具有某些重要的效应。例如, 如果有人试图把无线电波通过电离层传播出去, 则他会发现只有当其频率高于等离子体频率时才能穿透, 否则信号将被反射回来。要是我们希望同空间的人造卫星通信, 就必须采用高频。反之, 若想同地平线上远处

的一个无线电台通信，则必须利用比等离子体频率低的频率，以便信号被反射回地面。

等离子体振荡的另一个有趣例子发生于金属内。金属里含有正离子的等离子体及自由电子。这里密度 n_0 十分高，因而 ω_p 也是这样，但仍应能观察到其中电子的振动。原来，按照量子力学，凡具有固有频率为 ω_p 的谐振子，都具有能量间隔为 $\hbar\omega_p$ 的能级。因此，如果把一束电子射进比如一张铝箔，而在箔的另一面十分仔细地测量电子能量，那么可以预料发现电子有时把能量 $\hbar\omega_p$ 传给等离子体振荡。这件事情的确发生过。1936年第一次从实验上观测到：拥有几百至几千电子伏能量的电子从一薄金属膜散射或穿透出来时，会以跳跃的方式损失能量。这一效应从未弄明白，直到1953年博姆和派因斯^[1]才证明这些观测结果可用金属中等离子体振荡的量子激发来解释。

§7-4 电解质内的胶态粒子

现在，我们转到各电荷的位置受这些电荷的一部分产生的势所控制着的另一种现象。这样产生的效应对于胶体的行为有着重要影响。胶体由水中的带电悬浮物构成，这些带电微粒尽管微小，但从原子的观点看却已十分巨大。要是这些微粒不带电，它们将有凝聚成一大块的倾向。但由于带电，就将互相排斥，并保持悬浮状态。

现在，如果有某种盐也溶解于水中，则它将分解成正负离子（像这样的离子溶液称为电解质）。那些负离子会被胶体微粒所吸引（假定微粒带的是正电），而正离子则被推开。我们要确定围绕着胶体微粒的那些离子在空间是怎样分布的。

为保持概念简单，我们还是仅仅求解一维情况。如果把一胶体微粒看成一个具有巨大半径的球——在原子尺度上！——那么，便可以把它表面的一小部分看成平面（每当试图理解一个新现象时，取一个有些过于简化的模型总是一个好主意。于是，用这个模型弄通了这个问题之后，才能更好地进行较精确的计算）。

假定那些离子的分布会产生一个电荷密度 $\rho(x)$ 和一个电势 ϕ ，这两者的关系遵守静电学定律 $\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0$ ，或者，对于仅在一维情况下变化着的场，则遵守

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.28)$$

现在假定已有这么一个势 $\phi(x)$ ，那么离子将怎样分布在其中呢？这可以通过统计力学的原理来确定。于是，我们的问题就是要确定 ϕ ，使得从统计力学所获得的电荷密度也能满足式（7.28）。

按照统计力学（参阅第1卷第40章），在一个力场中处于热平衡的粒子是这样分布的，即在位置 x 处的粒子密度 n 由下式给出

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \quad (7.29)$$

式中 $U(x)$ 为势能， k 为玻尔兹曼常量，而 T 为绝对温度。

假定每一离子带有正的一个电子的电荷。在离胶体微粒的表面为 x 的地方，一个正离子将有势能 $q_e \phi(x)$ ，因而

$$U(x) = q_e \phi(x).$$

这样，在该处的正离子密度就是

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_e \phi(x)/kT}.$$

同理，负离子密度则为

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_e \phi(x)/kT}.$$

总的电荷密度为

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_- ,$$

即

$$\rho = q_e n_0 (e^{-q_e \phi/kT} - e^{+q_e \phi/kT}). \quad (7.30)$$

把上式与式（7.28）相结合，我们发现势 ϕ 必须满足

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{q_e n_0}{\epsilon_0} (e^{-q_e \phi/kT} - e^{+q_e \phi/kT}). \quad (7.31)$$

这个微分方程可立即得到一个通解〔两边各乘以 $2(d\phi/dx)$ ，并对 x 积分〕，但为了尽可能保持问题简单，我们在这里仅考虑电势 ϕ 很小或温度 T 很高的那种极限情况。 ϕ 小的情况相当于稀溶液。在这些情况下，该指数很小，因而可做如下近似：

$$e^{\pm q_e \phi/kT} = 1 \pm \frac{q_e \phi}{kT}. \quad (7.32)$$

于是，式（7.31）给出

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = + \frac{2n_0 q_e^2}{\epsilon_0 kT} \phi(x). \quad (7.33)$$

注意！这时上式右边的符号已经是正的了。 ϕ 的解就不再是振动式的，而是指数式的。

方程式（7.33）的通解为

$$\phi = A e^{-x/D} + B e^{+x/D}, \quad (7.34)$$

式中

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 q_e^2}. \quad (7.35)$$

常数 A 和 B 必须由问题的条件确定。在上述情况下， B 应为零，否则对于大的 x 值电势将趋于无限大。因此，我们有

$$\phi = A e^{-x/D}, \quad (7.36)$$

式中 A 是在 $x=0$ 处，也即在胶体微粒表面处的电势。

每当距离增大 D 时，势就降低一个因子 $1/e$ ，如图7-7的曲线所示。数值 D 称为德拜长度，它是对电解质中包围一个巨大带电粒子的离子层厚度的一种量度。式（7.35）表明，当离子浓度 n_0 增加或当温度降低时，这离子层就变薄。

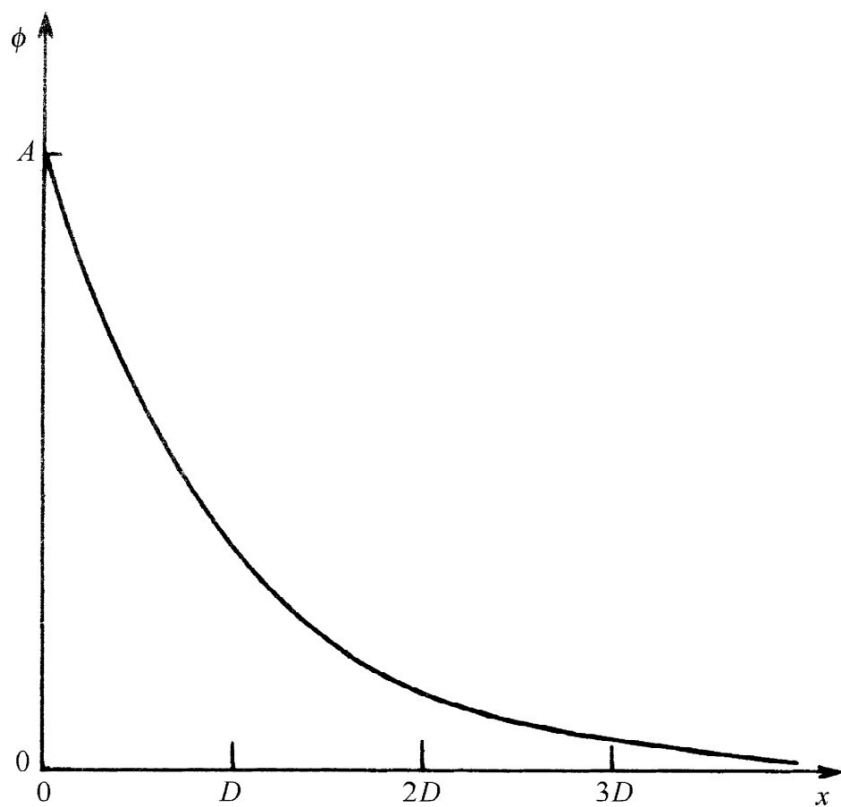


图7-7 在一胶体微粒表面附近电势的变化情形， D 为德拜长度

如果已知胶体微粒的表面电荷密度 σ ，那么式（7.36）中的常数 A 就可以容易获得。我们知道

$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.37)$$

但 E 也是 ϕ 的梯度

$$E_x(0) = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_0 = +\frac{A}{D}, \quad (7.38)$$

由此得出

$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.39)$$

把这一结果应用于式（7.36）中，便得到（通过取 $x=0$ ）该胶体微粒的电势为

$$\phi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.40)$$

你会注意到，这一个势与面电荷密度为 σ 而两板间距为 D 的电容器的电势差相同。

我们已经讲过，胶体微粒受它们之间电的排斥作用而得以保持分离。但现在我们见到，稍微离开胶体微粒表面的场会由于聚集在微粒周围的离子层而被削弱。如果这些离子层变得相当薄，则这些微粒便有较大机会互相对撞。于是它们会粘住，而胶体便会凝聚在一起并从液体中淀积出来。从上面的分析我们明白，为何对一胶体加进足够的盐类就会使它沉淀出来。这一过程称为“胶体的加盐萃取”。

另一个有趣例子则是盐溶液对于蛋白质分子的影响。一个蛋白质分子乃是一条既长而又可挠曲的复杂的氨基酸链。在这种分子上面存在各种电荷，而有时碰巧有一些净电荷——比如说负电荷——会沿该链分布着。由于各负电荷的相互排斥，所以蛋白质链便会保持拉长的姿态。并且，若溶液中还有其他相似的链存在，则由于同样的排斥效应，它们会保持彼此分开。因此，在一液体中可以有链状分子的悬浮物。但如果我们加盐于该液体中，则会改变悬浮物的特性。当盐加进溶液中时，德拜长度会缩短，链状分子能够互相靠近，并蜷缩起来。如果加进溶液中的盐足够多，链状分子便可以从溶液中淀积出来。有许多这类化学效应都可以用电力来加以理解。

§7-5 栅极的静电场

作为最后一个例子，我们想要描述电场的另一个重要特性。它是制造出来应用于电学仪器设计、真空管构造以及其他许多目的的一种特性。这就是带电导线栅附近电场的特性。为了使问题尽可能简单，让我们考虑一个由无限长导线间隔均匀地平行排列在一平面上的阵列。

若我们从在导线平面上方远处俯视电场，则见到一个恒定的电场，正如电荷被均匀地分布在平面上一样。当接近导线栅时，场开始与从远处见到的均匀场有所不同。我们想要估计靠栅多近才能见到势的明显变化。图7-8表示距栅不同距离处等势面的粗略草图。越接近栅，变化就越大。当我们平行于栅运动时，会观察到一种周期性起伏的场。

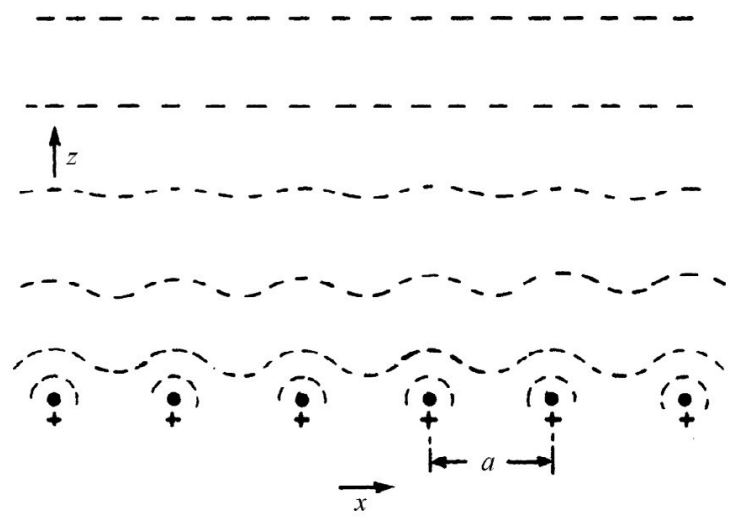


图7-8 在带电导线构成的均匀栅上面的等势面

现在我们已（由第1卷第50章）知道任何周期性量都可以表示成正弦波之和（傅里叶定理）。让我们来看看能否找到一种满足场方程的适当简谐函数。

如果导线都处在 xy 平面内，并且平行于 y 轴排列着，则我们可以试试下列这样的项

$$\phi(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a}, \quad (7.41)$$

其中 a 为导线间距，而 n 为简谐数（我们已假定各导线很长，从而不会随着 y 变化）。一个通解应该由 $n=1, 2, 3\dots$ 这样一些项之和构成。

如果这是一个正确的势，则它应在导线上面的空间（那里没有电荷）内满足拉普拉斯方程，即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

用式（7.41）中的 ϕ 对上式进行尝试，我们得出

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi nx}{a} = 0, \quad (7.42)$$

或者说， $F_n(z)$ 必须满足

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n. \quad (7.43)$$

因此，我们就必然有

$$F_n = A_n e^{-z/a}, \quad (7.44)$$

式中

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n}. \quad (7.45)$$

我们已找到：如果存在简谐数为 n 的场的傅里叶分量，则这个分量将按照特征距离 $z_0 = a/2\pi n$ 指数式地下降。对于第一谐波（ $n=1$ ）来说，每当 z 增大一个栅间隔 a 时，波幅将下降一个因子 $e^{-2\pi}$ （是一个大的降落），其他的谐波在离开栅时将下降得更快。我们看到，如果仅仅离开栅几个 a 的距离，场就十分接近于均匀场。也就是说，那些振荡的项都是小项。当然，为了给出在大 z 处的那个均匀场，就始终应该保留“零级简谐”场

$$\phi_0 = -E_0 z.$$

对于通解来说，我们应当把这一项与由诸如式（7.41）〔其中 F_n 由式（7.44）给出〕那些项之和组合起来。系数 A_n 应当这样调整，使得整个总和在经过了微分之后，会给出与栅格导线上的电荷密度 λ 相符合的电场。

我们刚才所发展的方法可以用来说明，为什么采用一个屏栅作为静电屏蔽物往往会与用一块坚实金属板同样优良。除非在与屏栅相距仅几倍于屏栅导线间隔的距离以内，在一闭合屏栅内的电场等于零。我们见到，为什么一个铜屏栅——比铜片既轻又便宜——常被用来保护灵敏的电学设备不受外面干扰电场的影响。

[1] 关于这方面的新近工作和文献摘要可参考Powell C J and Swann J B. *Phys. Rev.*, 1959, 115 :869.

第8章 静电能

§8-1 电荷的静电能：均匀带电球

在力学的研究中，最有意义而又最有用的发现之一是能量守恒定律。有了力学系统的动能和势能表达式，我们无须考察两个不同时刻系统状态间发生的细节，而能发现两态间的关系。现在我们要来考虑静电系统的能量。在电学中，能量守恒原理也将为发现一系列有意义的事情而发挥它的作用。

在静电学中，相互作用的能量定律十分简单。实际上，这个问题我们已经讨论过。假设两个电荷 q_1 和 q_2 ，相距 r_{12} 。在这个系统中，就存在一定能量，因为要把两电荷移到一起需要做出一定量的功。我们已计算过将远离的两个电荷移到一起所做的功，它为

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (8.1)$$

从叠加原理我们也知道，如果存在许多个电荷，则作用于任一电荷上的总力，等于其他各电荷作用于它的力的总和。因此，可以断定：由多个电荷构成的系统的总能量，等于每一对电荷间的相互作用的各项之和。若 q_i 和 q_j 是任一对相距为 r_{ij} 的电荷（图8-1），则这一特定电荷对的能量为：

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.2)$$

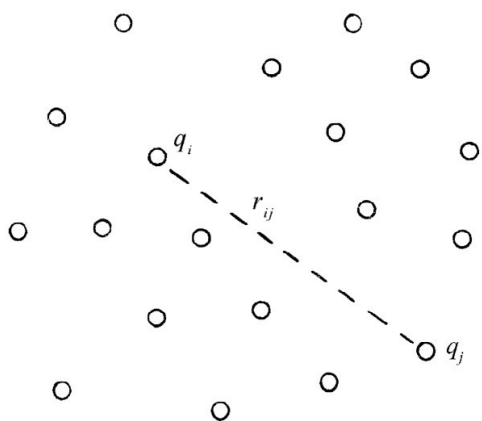


图8-1 一个粒子系统的静电能等于每对粒子静电能的总和

总静电能 U 等于所有可能的电荷对之间的能量的和：

$$U = \sum_{\text{所有的对}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.3)$$

如果有一个密度为 ρ 的电荷分布，式（8.3）的求和当然要用积分来代替。

我们应关注能量的两个方面：一是把能量概念应用于静电学问题；二是运用各种不同的方法，计算能量。对某些特殊情况，有时计算所做的功比按式（8.3）求和或计算相应的积分要容易。作为一个例子，让我们来计算把电荷集中到一个球体中，并具有均匀的电荷密度所需的能量。这一能量恰好等于把那些电荷从无限远处聚集起来所做的功。

设想该球体是由一层层无限薄的球壳构成的，在过程的每一阶段，我们聚集小量电荷并把它置于从 r 至 $r+dr$ 的薄层中。继续这一过程，一直达到最后的半径 a 为止（图8-2）。设 Q_r 为已建立至半径为 r 的球体上的电荷，那么把电荷 dQ 移到这个球体上面所做的功为

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.4)$$

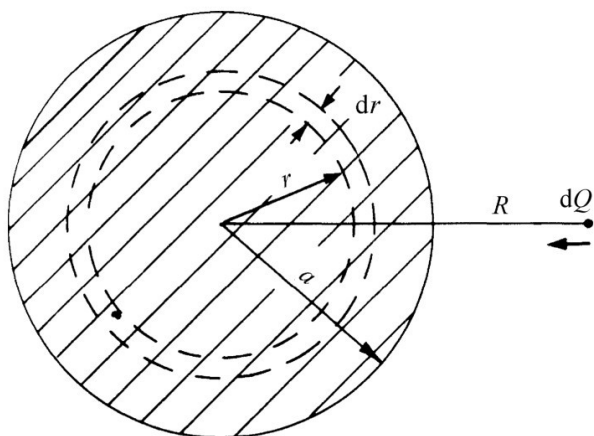


图8-2 一个均匀带电球体的能量，可以通过将它设想为由一层层球壳组合成的而计算出来

若球体中的电荷密度为 ρ ，则电荷 Q_r 为

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

而电荷 dQ 为

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

因此，式（8.4）变成：

$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

要把电荷聚集成整个球体，所需的总能量则等于从 $r=0$ 至 $r=a$ 对 dU 的积分，即

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

若希望把结果用球体的总电荷 Q 来表示，则为：

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.7)$$

可见，能量与总电荷的平方成正比而与球的半径成反比。我们也可以将式（8.7）理解为：对球体里的所有各对点来说， $(1/r_{ij})$ 这个量的平均值为 $6/5a$ 。

§8-2 电容器的能量；作用于带电导体上的力

现在我们来考虑电容器充电时所需的能量。如果电荷 Q 已从电容器的一个导体移至另一导体，则它们之间的势差为：

$$V = \frac{Q}{C}, \quad (8.8)$$

式中 C 为该电容器的电容。电容器充电时需做多少功呢？按照上面对球体的做法，我们设想电容器是逐步把小的电荷增量 dQ 从它的一板移至另一板而进行充电的。转移电荷 dQ 所需的功为：

$$dU = V dQ.$$

将式（8.8）中的 V 代入，则可以写成：

$$dU = \frac{QdQ}{C}.$$

或者，从零电荷到最后电荷量 Q 进行积分，则有：

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (8.9)$$

这个能量也可写成：

$$U = \frac{1}{2} CV^2. \quad (8.10)$$

若回忆起一个导电球体（相对于无限远处）的电容为

$$C_{\text{球体}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

则可立即由式（8.9）得到一个带电球的能量：

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.11)$$

当然这这也是一个带有总电荷 Q 的薄球壳的能量，而且恰好就是式(8.7)所给出的一个均匀带电球体能量的5/6。

现在，我们讨论静电能概念的应用。试考虑下述问题：施于电容器两板间的力多大？或者，当存在另一异号电荷的导体时，绕带电导体某个轴的力矩是多少？这些问题，应用上述电容器的静电能式(8.9)，再加上虚功原理（第1卷第4、13和14章），就不难回答。

让我们运用这一方法来求平行板电容器两板间的作用力。若我们设想两板的间距增加一小量 Δz ，那么外界对于移动这两板所做的机械功应为

$$\Delta W = F \Delta z, \quad (8.12)$$

式中 F 为两板间的力。这功必定等于电容器的静电能的变化。

根据式(8.9)，电容器原来的能量为：

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

这能量的变化（如果不让电量变化的话）为：

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.13)$$

使式（8.12）和（8.13）两者相等，则有

$$F\Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta\left(\frac{1}{C}\right). \quad (8.14)$$

这也可以写成：

$$F\Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.15)$$

当然，该力是由两极板上电荷的吸引造成的。但我们不必为电荷如何分布的具体细节而操心，我们所需要的一切都由电容 C 来对付。

不难看到，如何将这个概念推广到任意形状的导体以及关于力的其他分量上去。在式（8.14）中，我们可用所要寻求的力的分量代替 F ，并用在相应方向上的小位移来代替 Δz 。或者，若有一个带轴的电极，而希望知道该力矩 τ ，则可将虚功写成：

$$\Delta W = \tau \Delta \theta,$$

式中 $\Delta \theta$ 是小角位移。当然， $\Delta(1/C)$ 必须是与 $\Delta \theta$ 相对应的 $1/C$ 的变化。按照这一办法，我们能够求得如图8-3所示的那种可变电容器中作用于可动片上的力矩。

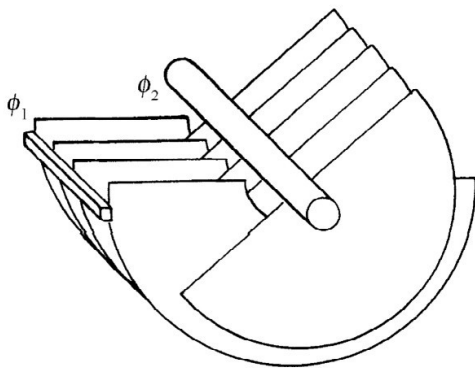


图8-3 作用于—可变电容器上的力矩有多大

再回到平行板电容器的特殊情况，我们可应用第6章中已导出的关于电容的公式：

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A}, \quad (8.16)$$

式中 A 是每块板的面积。如果两板间距增大 Δz ，则

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}.$$

由式（8.14）可以得到作用于两板间的力为：

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}. \quad (8.17)$$

让我们对式（8.17）更仔细地考察一下，并看看能否说出力是怎样来的。若把其中一板上的电荷写成

$$Q = \sigma A,$$

式（8.17）则可以重新写成

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

或者，由于两板间的电场为

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

于是

$$F = \frac{1}{2}QE_0. \quad (8.18)$$

人们会立即猜想到，作用于板上的力，应等于板上的电荷 Q 乘以作用于该电荷的场。但我们却有一个令人惊奇的因子 $\frac{1}{2}$ 。原因是， E_0 并非作用于电荷的场。如果设想在板表面上的电荷占据一薄层，如图8-4所示，则场将从这一层的内边界上的零变化至在板外空间里的 E_0 。作用于面电荷上的平均场乃是 $E_0/2$ 。这就是式(8.18)中为什么出现因子 $\frac{1}{2}$ 的原因。

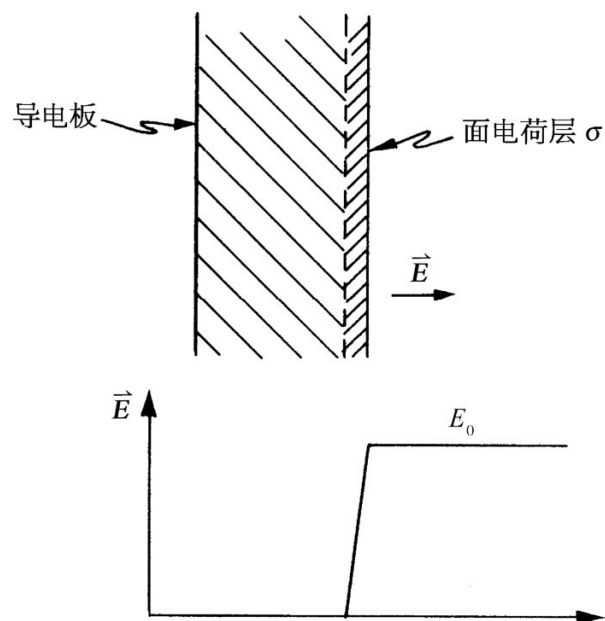


图8-4 导体表面上的电场，当穿过该表面的电荷层时，由零变至 $E_0 = \sigma / \epsilon_0$

你应注意，在计算虚功时，我们曾假定在电容器上的电荷保持不变——即在电的方面电容器不与其他东西连接，从而总电荷不能改变。

要是设想当电容器做虚位移时，其电势差保持不变。那么就应当取

$$U = \frac{1}{2} CV^2,$$

而且代替式（8.15），我们现在应有

$$F \Delta z = \frac{1}{2} V^2 \Delta C.$$

它给出一个大小等于式 (8.15) 的力 (因为 $V=Q/C$)，但却带有相反的符号！很遗憾，当我们把电容器和它的充电源断开时，电容器两板间的作用力肯定不会改变符号。并且，我们还知道，带有异号电荷的两板一定互相吸引。在这第二种情况下，虚功原理已被误用——我们未把充电时对电源所做的虚功计算在内。这就是说，当电容变化时，要保持电势 V 为常数，电荷 $V\Delta C$ 就必然要由电荷源来提供。但这一电荷是在势为 V 时提供的，因而保持电势不变的那个电力系统所做的功就是 $V^2\Delta C$ 。机械功 $F\Delta z$ 加上 这个电功 $V^2\Delta C$ 共同构成电容器总能量的变化 $\frac{1}{2}V^2\Delta C$ 。因此，如同上面一样， $F\Delta z$ 仍然是 $-\frac{1}{2}V^2\Delta C$ 。

§8-3 离子晶体的静电能

现在，我们来考虑静电能概念在原子物理中的一种应用。原子间的作用力，一般不易测量，但人们对原子的两种不同排列之间的能量差——比如说，化学反应的能量——却经常感兴趣。由于原子力基本上是电力，所以化学能大部分都是静电能。

例如，让我们考虑一离子晶格的静电能。像NaCl那种离子晶体，组成它的正离子和负离子都可以设想成刚性球体。它们由于电的作用而吸引，直至开始接触，然后出现一种排斥力。这时，若是试图将它们推得更加接近，则这种排斥力就会很快增大。

因此，作为我们的第一级近似，设想用一组刚性球体来代表食盐晶体里的原子。其晶格结构，已用X射线衍射法确定。它是一个立方晶格，像一个三维棋盘。图8-5所示为其一个截面图像。离子间的间隔为 $2.81 \text{ \AA}$ ($=2.81\times 10^{-8} \text{ cm}$)。

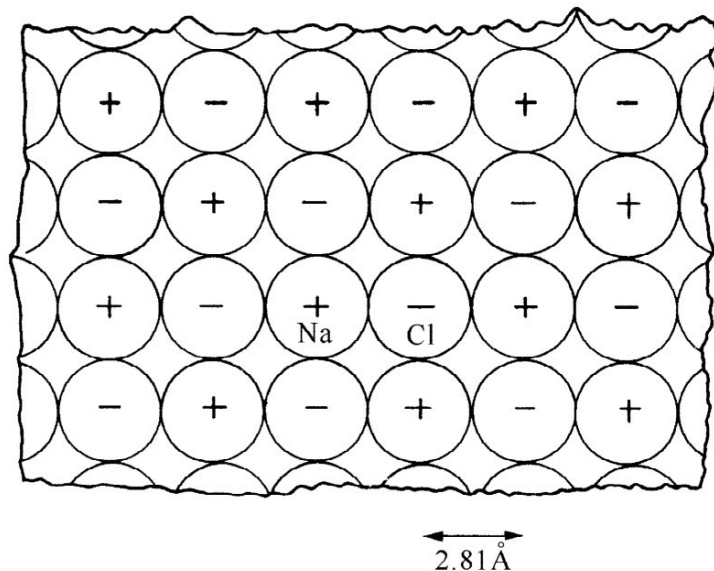


图8-5 在原子尺度上的食盐晶体的截面。Na和Cl两种离子跳棋盘式排列着，与此垂直的两个横截面上情况也一样（参考第1卷，图1-7）

这一系统的图像如果是正确的，那我们就可以通过提出如下问题而加以核对：把这些离子完全拉开——也就是，把晶体完全拆开成各离子——将需要多少能量？这一能量应等于NaCl的汽化热加上使分子分解成离子所需的能量。这个把NaCl分解成离子的总能量，在实验上已经确定为每个分子需7.92 eV。通过换算

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J},$$

以及1 mol的分子数，即阿伏伽德罗常量

$$N_0 = 6.02 \times 10^{23},$$

也可以给出汽化能为

$$W = 7.64 \times 10^5 \text{ J mol}^{-1}.$$

物理化学家喜欢用kcal作为能量单位，每kcal等于4 190 J，所以1 eV/分子就是23 kcal mol⁻¹。于是，化学家会说NaCl的离解能为

$$W=183 \text{ kcal mol}^{-1}.$$

我们能否通过计算将晶体拉开所需的功，从而在理论上得到这个化学能呢？按照我们的理论，这个功就是所有离子对的势能和。计算这个和的最容易的办法，是先挑选一个特定离子，再算出它与其他每个离子之间的势能。这将给予每个离子两倍的能量，因为这能量是属于一对电荷的。而我们所要的乃是属于某一特定离子的能量，所以应取这个和的一半。但我们真正要的却是每个分子的能量，而每一分子含有两个离子，因而这样算出来的和就将直接给出每个分子的能量。

一个离子与它最近邻的离子的能量为 e^2/a ，其中 $e^2 = q_e^2/(4\pi\epsilon_0)$ ，而 a 为两近邻离子的中心间距（这里所考虑的是单价离子）。这个能量为5.12 eV。我们已看到，它为我们提供了一个具有正确数量级的结果，但距我们所需的无限多项之和，还有一段很长的距离。

开始，我们对那些在直线上的离子的所有项求和。图8-5中标明为Na的那个离子是我们考虑的特定离子。现在将首先注意与它同在一条水平直线的那些离子，有两个带负电荷的Cl离子靠它最近，每个距离均为 a ；随后有两个在 $2a$ 距离处的正离子；依此类推。把这个和的能量叫作 U_1 ，就可以写出：

$$U_1 = \frac{e^2}{a} \left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \mp \dots \right) = -\frac{2e^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \right). \quad (8.19)$$

这一级数收敛缓慢，因而难于用数字算出，可是已经知道它等于 $\ln 2$ 。因此，

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1.386 \frac{e^2}{a}. \quad (8.20)$$

现在再来考虑位于上面的那条次近邻离子线，最靠近它的一个是负离子，距离为 a ；随后又有两个正离子位于距离 $\sqrt{2}a$ 处；下一对位于距离 $\sqrt{5}a$ 处，再下一对则是位于 $\sqrt{10}a$ 处，依此类推。所以，对于这整条线就得到一个级数：

$$\frac{e^2}{a} \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \mp \dots \right). \quad (8.21)$$

这样的线总共有四条：在上面、下面、前面和后面。然后，又有四条在对角线上的最靠近的线，如此等等。

如果你耐心地算出所有这些线的值，然后取其和，则将求得总和为：

$$U = -1.747 \frac{e^2}{a},$$

这比起在式（8.20）中对第一条线所得的结果仅稍微大一点。利用 $e^2/a = 5.12 \text{ eV}$ ，我们得到：

$$U = -8.94 \text{ eV}.$$

这答案比实验上观察到的能量要高10%。这表明关于整个晶格是由电的库仑力维持在一起的观点基本上是正确的。这是我们第一次从原子物理的知识中获得有关宏观物质的一种特殊性质，往后还要处理更多的问题。利用原子行为的定律来理解大块物质行为的学科叫做固体物理学。

计算上的误差怎么会出现的呢？为什么它不是完全正确的呢？那是由于在近距离处离子间的排斥作用造成的。它们并不是理想的刚球，因而当互相靠近时，将部分地被压缩。它们也并非很柔软，因而仅被压缩了一点点。可是，有些能量是用于使离子变形的，而当离子被拉开时，这能量被释放出来。拉开离子所需要的实际能量比我们算出的要稍微少一点。这种排斥作用有助于克服静电的吸引作用。

有没有办法对这一项贡献做出估计呢？只要我们知道有关排斥力的定律，就可能做到这一点。虽然目前我们不准备对这种排斥机制的细节进行分析，但可以从某些宏观测量结果获得有关它的特性的某种概念。对整块晶体压缩率的测量结果，就有可能得到有关离子间排斥定律的定量概念，从而获得它对能量的贡献。用这种方法已经求得这项贡献应等于来自静电吸引的贡献的 $1/9.4$ ，当然符号相反。如果从纯粹的静电能量减掉这一贡献，便可得出每个分子的离解能为 7.99 eV 。这与 7.92 eV 的观测结果已较接近了，但仍未完全相符。还有另一件我们没有算进去的东西，那就是对于晶体振动的动能还未作出估计。若对这一效应也做出修正，就可获得与实验值符合得很好的结果。因此，上述概念是正确的，对于像NaCl这种类晶体的能量的主要贡献是静电方面的贡献。

§8-4 核内的静电能

现在我们将考虑原子物理中另一个有关静电能的例子，也就是原子核的电能。但在此之前，还得对核中把质子与中子维持在一起的主要力（叫核力）的某些性质加以讨论。在发现核——以及构成核的中子和质子——的初期，人们曾希望，对于比如质子与质子间的非电部分的强作用力，会有某个简单的定律，如电的平方反比定律。因为一旦人们确定了这个力学定律，以及相应的有关质子与中子、中子与中子间的力学定律，对这些粒子在核中的全部行为就应该能在理论上给予描述了。因此，关于研究质子散射的宏大计划启动了，希望借此找到质子之间作用力的定律，但经过了30年的努力，完全没有任何结果。有关质子与质子间作用力的知识已经积累了相当多，但却发现，这种力可能要多么复杂就有多么复杂。

所谓“可能要多么复杂就有多么复杂”，我们指的是该力取决于应有尽有的许多东西。

首先，核力并非两质子间距离的简单函数。在距离大时它是吸引力，而在距离较小时则是排斥力。这种与距离的依赖关系，仍然未能完全搞清楚。

其次，核力依赖于质子自旋的指向。凡是质子都有自旋，而任何两个相互作用着的质子都可能以同向或反向的角动量自旋着。当两自旋平行与反平行时，如图8-6（a）和（b）所示，两者的作用力是不同的。这差别很大，并不是一个微小效应。

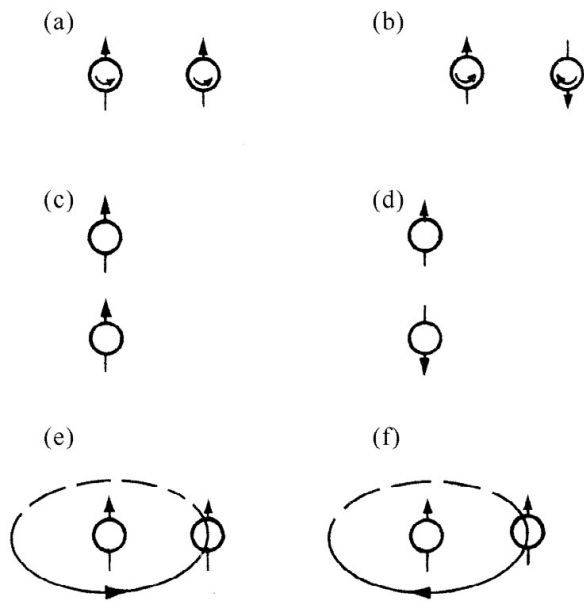


图8-6 作用于两质子间的力取决于每一个可能参数

第三，当两质子间的间隔在平行于它们的自旋方向上，如图8-6（c）和（d）时，与当间隔在垂直于自旋方向上，如图中的（a）和（b）时，力的差别也相当大。

第四，如同磁现象一样，核力依赖于质子的速度，只是这依存关系比起磁的情况来要强得多。而且，这个与速度有关的力并不是一种相对论效应。即使在速率远小于光速时，它仍然相当强。此外，这一部分力除了与速度大小有关外还依赖于其他东西。例如，当一质子在另一质子附近运动时，其轨道运动与自旋的转动方向同向，如图8-6（e）所示，与其轨道运动和自旋转动反向的如图8-6（f）所示，这力是不同的。这叫作核力的“自旋-轨道”部分。

在质子与中子间、中子与中子间作用力也同样复杂。迄今为止，我们还不知道这些力后面的机制——也就是任何理解它们的简单途径。

可是，存在一个重要方面，核力比其可能有的性质较为简单。这就是，两个中子间的核力与质子与中子间的核力彼此相同，与两质子间的核力相同！在任何核作用的情况中，如果我们用一个中子去代替质子（或者相反），核的相互作用不会改变。这种相等性的“基本原因”还不清楚，但它是也可以推广到其他强相互作用粒子——诸如 π 介子及“奇异”粒子——的相互作用定律去的重要原理的一个例子。

这一事实可用相似的核中各能级的位置漂亮地显示出来。考虑一个像 ^{11}B （硼11）的核，它是由5个质子和6个中子构成的。在这个核中这11个粒子以最复杂的舞蹈方式互相作用。现在，在所有可能的相互作用中存在一种具有最低可能能量的组态，那就是核的正常态，称为基态。如果核被扰动（比方说受一高能质子或其他粒子的撞击），它将跃迁到称为激发态的其他任何一个组态上去，每一激发态都将有一个高于基态的特征能量。在核物理研究中，像在利用范德格拉夫起电机〔例如在加州工学院的凯洛格（Kellogg）和斯隆（Sloan）两实验室〕所做的研究中，这些激发态的能量以及其他性质都可以由实验加以测定。关于 ^{11}B 的15个已知的最低激发态的能量表示在图8-7左边的一维图表上，那根最低的水平线代表基态。第一激发态拥有高于基态2.14 MeV的能量，第二激发态则有比基态高出4.46 MeV的能量，如此等等。核物理的研究试图对这一相当复杂的能量图案找到解释，然而直到如今，关于这种核能级的完整而普遍的理论却还未找到。

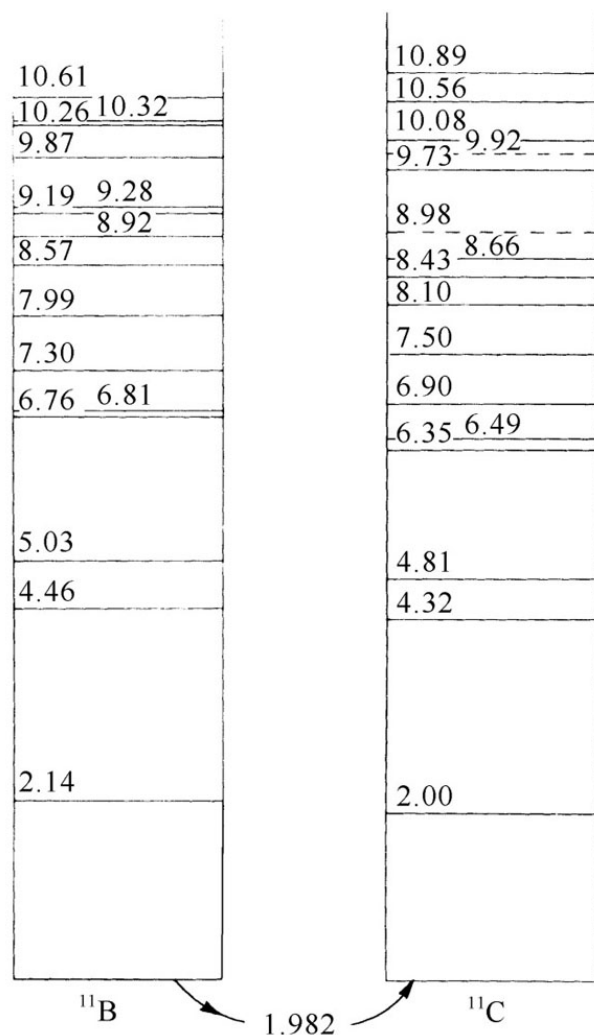


图8-7 ^{11}B 和 ^{11}C 的能级（以兆电子伏数计）。 ^{11}C 的基态比 ^{11}B 的要高出1.982 MeV

如果把 ^{11}B 中的一个中子换成质子，则会得到一个碳的同位素 ^{11}C 的核。这 ^{11}C 的最低16个激发态的能量也已测量出来，它们被描画于图8-7中的右边（虚线表示那些实验结果尚属可疑的能级）。

看看图8-7，我们便知道，在这两种核的能级图案之间存在着惊人的相似性。第一激发态位于基态之上约2 MeV处。从第一激发态到达第二个激发态有一个大小约为2.3 MeV的能隙，然后仅以一个大小为0.5 MeV的小跳跃就到达第三激发态。在第四至第五个能级间又再有一个

大的跳跃；可是在第五与第六两能级之间则只有0.1 MeV的小间隔了，如此等等。在约第十个能级之后，这种对应性似乎消失，但若用其他的规定特性——诸如角动量以及凡足以使其额外能量遭到损失的东西——来标明能级的话，则这种对应性就仍可以见到。

在 ^{11}B 和 ^{11}C 的能级图案间的惊人相似性肯定不仅仅是个巧合，它必然揭露了某个物理定律。事实上，它显示出：即使在核内的复杂情况下，用质子代替中子仅造成十分微小的变化。这只能意味着中子与中子、质子与质子之间的力必定几乎全同。只有这样，我们才会期望，拥有5个质子与6个中子的核的组态同拥有6个质子与5个中子的核的组态彼此相同。

注意，这两种核的性质还未告诉我们有关中子与质子间作用力的情况。这两种核中的中子与质子的组合数目相同，但若比较另外两个核，比如拥有6个质子与8个中子的 ^{14}C ，同拥有7个质子与7个中子的 ^{14}N ，我们又会找到能级相似的对应性。因此，可以断定： $p-p$ ， $n-n$ 与 $p-n$ 这三种力在它们所有的复杂性上都相同。关于核力定律竟存在这么一个意想不到的原理。尽管每对核粒子间的力十分复杂，但这三种可能不同的对之间的力却是相同的。

但某种小的差别仍然存在，能级并不严格对应。并且， ^{11}C 基态的绝对能量（它的质量）比 ^{11}B 的基态绝对能量高1.982 MeV，所有其他能级在绝对能量上也高出这么多。因此，这些力并不完全相等。可是我们知道得很清楚，整个力并不严格相等。由于每个质子都带正电荷，所以两质子之间就存在着电力，而在两个中子之间就不存在这种电力。我们或许能够通过 ^{11}B 和 ^{11}C 这两种情况中质子间电相互作用不同这一事实来解释它们间的差别？或许甚至能级上其余的小差别也是

由这一电效应所引起的？既然核力比电力强得那么多，电效应对于各能级上的能量就只应该有小的微扰影响。

为了核对这个概念，或毋宁说是要找出这一概念的后果如何，我们首先考虑这两种核的基态能量的差别。为选取一个十分简单的模型，我们假定核是含有 Z 个质子、半径为 r （待定）的球体。如果认为核像一个具有均匀电荷密度的球体，那么会预料到〔由式（8.7）〕其静电能为

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8.22)$$

式中 q_e 为质子的基本电荷。由于在 ^{11}B 中 Z 为5，而在 ^{11}C 中 Z 为6，所以它们的电能将是不同的。

然而，就具有这种小数目的质子来说，式（8.22）并不十分正确。如果假定各质子是几乎均匀地分布在球体中的各点，并计算所有这些质子对间的电能，则将发现，式（8.22）中 Z^2 那个量应由 $Z(Z-1)$ 代替，因而能量为

$$U = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \quad (8.23)$$

若已知半径 r ，就可以利用式（8.23）求出 ^{11}B 与 ^{11}C 之间静电能的差。但我们却要倒过来计算，即利用所观测到的能量差来算出半径，假定这能量差全都起源于静电方面。

可是，这并不完全正确。 ^{11}B 与 ^{11}C 基态间的能量差1.982 MeV还包括所有各粒子的静能——即能量 mc^2 。在从 ^{11}B 变成 ^{11}C 的过程中，

我们是用一个质量较小的质子和一个电子来代替一个中子的。因而部分能量差就是一个中子与一个质子加一个电子的静能之差，它等于 0.784 MeV。为了用静电能来说明能量差，因而这能量差应比 1.982 MeV 还要多，即

$$1.982 + 0.784 = 2.766 \text{ MeV.}$$

把这一能量数值代入式 (8.23) 中，便可找出 ^{11}B 或 ^{11}C 的半径为

$$r = 3.12 \times 10^{-3} \text{ cm.} \quad (8.24)$$

这个数值到底是否具有任何意义？要弄清楚这一点，我们应拿它同这些核半径的某些其他测量结果做比较。例如，可以通过观察核是如何散射快速粒子而对它的半径做另一种测量。事实上，从这样的测量已经发现所有各种核中的物质密度都几乎相同，也就是说，它们的体积与其所含有的粒子数成正比。若令 A 为核中质子和中子的总数（这是一个与其质量非常接近成正比的数目），那么已经找出半径可由下式给出：

$$r = A^{1/3} r_0, \quad (8.25)$$

其中

$$r_0 = 1.2 \times 10^{-13} \text{ cm.} \quad (8.26)$$

从这些测量结果我们发现一个 ^{11}B （或一个 ^{11}C ）核的半径预期为

$$r = (1.2 \times 10^{-13}) (11)^{1/3} \text{ cm} = 2.7 \times 10^{-13} \text{ cm.}$$

把这一结果与式（8.24）做比较，就可见 ^{11}B 与 ^{11}C 的能量差乃起因于静电方面的假设是相当良好的，差异只有约15%（作为我们的第一次核计算来说，这结果并不算坏！）。

产生差异的原因可能是这样，按照对核的现代理解，偶数的核粒子——在 ^{11}B 中是5个中子与5个质子——会形成一个核心，当另外一个粒子加入这个核心时，它会在该核心外面绕行以形成一个新的球形核，而不是被吸收到里面去。如果是这样，对于加入质子情况我们应取不同的静电能。对于 ^{11}C 比 ^{11}B 超过的能量，我们应该仅仅取 $\frac{Z_B q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ ，这是在该核心之外再添加一个质子所需的能量。这个数值只不过是式（8.23）所预期的数值的5/6，所以对半径的新的预期值就只有式（8.24）的数值的5/6，该值就更接近于直接测量的值。

从结果彼此相符这一事实就可以得出两个结论。其一是，电的定律在小至 10^{-13} cm 的范围内看来仍然适用；另一是，我们已经证实了质子与质子、中子与中子以及质子与中子之间力的非电部分全都相等这一引人注目的巧合。

§8-5 静电场中的能量

现在来考虑计算静电能的其他方法。这些方法全都可以从基本关系式（8.3）推导出来，该式将每个电荷对的相互作用能对所有电荷对求和。首先，我们希望写出有关电荷分布的能量表达式。按照常规，认为每个体积元 dV 含有电荷元 ρdV 。于是式（8.3）将写成

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (8.27)$$

注意：之所以要引入因子 $\frac{1}{2}$ ，是因为在对 dV_1 和 dV_2 的双重积分中，我们已把所有电荷元对都计算了两遍（没有任何方便的办法可以写出一个能跟踪电荷对，以使每对仅算一次的积分式）。其次，我们也注意到，式（8.27）中对 dV_2 的积分恰好是点（1）处的势，即是

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 = \phi(1),$$

因而，式（8.27）便可以写成

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(1) \phi(1) dV_1.$$

或者，由于点（2）已不再出现了，便可以简单地写成

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV. \quad (8.28)$$

这一方程可做如下说明。电荷 ρdV 的势能等于这电荷与其所在处势的乘积，因此，总能量就是对 $\phi \rho dV$ 的积分。但又有因子 $\frac{1}{2}$ ，这仍然是需要的，因为我们把能量计算了两遍。两个电荷间的相互作用能等于其中一个电荷乘以其所在点由另一电荷产生的势。或者，这也可认为是第二个电荷乘以该点由第一个电荷产生的势。于是对于两个点电荷来说，我们写成

$$U = q_1 \phi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

或

$$U = q_2 \phi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

注意，我们也能写成

$$U = \frac{1}{2}[q_1 \phi(1) + q_2 \phi(2)]. \quad (8.29)$$

式(8.28)中的积分部分对应于(8.29)中括弧内的两项。这就是为什么我们需要那个因子 $\frac{1}{2}$ 的原因。

一个有趣的问题：这静电能究竟位于何处？或许我们也会问：谁在乎呢？提出这样一个问题有什么意义？如果有一对相互作用着的电荷，则该组合就有某个能量。我们是否有必要说出该能量定位于其中某一电荷处、或另一电荷处、或两个电荷处、或两个电荷之间？这些问题可能不具有任何意义，因为我们实在只知道总能量是守恒的。能量定位在某处的概念并非必要。

然而，一般说来，假定能说出能量位于某处，确实 具有意义，如同热能那样，那么，我们就应该对能量守恒原理用如下的概念加以推广，即如果在一个给定体积内的能量变化了，我们应该能够通过流进或流出该体积的能量来说明这种变化。你认识到，如果某些能量从一处消失而在另一遥远处出现，在其间并没有任何东西正在通过（也就是说，没有任何特殊的现象发生），则我们先前关于能量守恒原理的提法仍然完全正确。因此，目前我们正在讨论关于能量守恒这一概念的推广，也许可以称为局域性 能量守恒原理。这样的一个原理会说：在任何给定体积内能量只能依据流进或流出该体积的量来变化。能量确实有可能是按这一方式局域守恒的。如果事情果然是这样，我们应有一个比起总能量守恒那种简单提法详细得多的定律。实际情况是，

在自然界中能量是局域守恒的。我们能够找到关于能量在哪里以及它如何从一处跑到另一处的公式。

能够说出能量在哪里是重要的事情，还有一个物理上的原因。按照引力理论，所有质量都是引力之源。我们也知道，根据式 $E=mc^2$ ，质量与能量彼此等价。因此，所有能量就都是引力之源。要是我们不能指明能量的位置，也就不能够指明质量的位置。我们将不可能说出引力场的源究竟位于何处。因而引力理论将是不完整的。

若把我们限制在静电学的范围里，确实无法说出能量的位置在哪里。电动力学完整的麦克斯韦方程会向我们提供多得多的知识（尽管此时答案严格说来仍不是唯一的），因此，我们将在后面一章中再详细讨论这个问题，现在仅仅给出在静电学的特殊情况下的那种结果。能量在电场所在的空间里，这似乎很合理，因为我们知道，当电荷加速时它们会辐射出电场来。我们愿意这么说，即当光或无线电波从一点传播至另一点时，它们随身带着能量，但是在这些波中却没有电荷。因此喜欢把能量定域在电磁场所在的地方，而不是在其发出来的电荷那里。于是我们不用电荷而是用由电荷所产生的场来描述能量。事实上，能够证明式（8.28）在数值上等于

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.30)$$

于是，可把此式解释为：当电场存在时，在该空间里就定域了能量，其密度（单位体积能量）为：

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (8.31)$$

这一概念如图8-8所示。

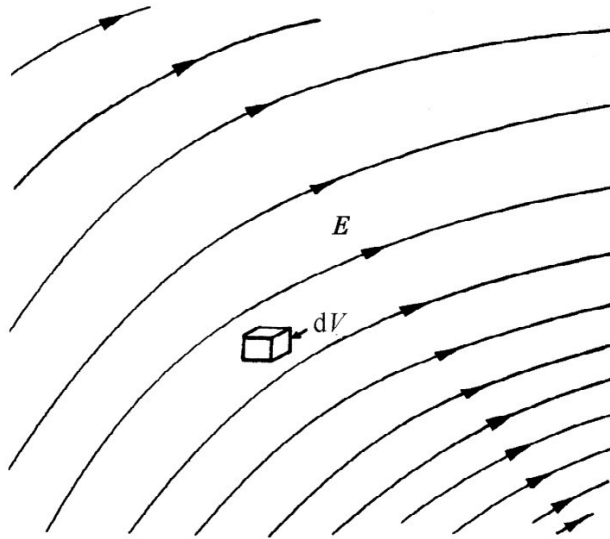


图8-8 在电场中每一体积元 $dV = dx \, dy \, dz$ 含有能量 $(\epsilon_0 / 2) E^2 \, dV$

为要证明式 (8.30) 与静电学定律一致，我们现在把曾在第6章中得到的有关 ρ 与 ϕ 的关系

$$\rho = -\nabla \cdot \epsilon_0 \nabla \phi$$

引入 (8.28) 式，因而得到

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla^2 \phi \, dV. \quad (8.32)$$

写出被积函数的各个分量后，可见到

$$\begin{aligned} \phi \nabla^2 \phi &= \phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ &= \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi). \end{aligned} \quad (8.33)$$

于是我们的能量积分为

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) dV.$$

可以利用高斯定理把第二个积分变成一个面积分：

$$\int_{\text{体积}} \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) dV = \int_{\text{曲面}} \phi \nabla\phi \cdot \mathbf{n} da. \quad (8.34)$$

我们要在所有电荷都被放置在某个有限距离内的假定下，对面积伸展至无限远处（从而使体积分变成对全部空间的积分）的情况计算该面积分，进行积分的简单办法乃是取一个具有巨大半径而其中心位于坐标系原点的球面。我们知道，当离所有电荷都很远时， ϕ 会随 $1/R$ 变化，而 $\nabla\phi$ 则按 $1/R^2$ 变化（如果那里分布中的净电荷为零，则这两项均将随 R 下降得更快）。由于该巨大球面的面积随 R^2 增大，当球面的半径增大时，那面积分将按照 $(1/R) (1/R^2) R^2 = (1/R)$ 而下降。因此，如果把全部空间都包括在我们的积分之内（ $R \rightarrow \infty$ ），则该面积分将趋于零，而结果为：

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全部空间}} (\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全部空间}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.35)$$

由此可见，对于任何电荷分布，我们总能将其能量表达为对场中能量密度的积分。

§8-6 点电荷的能量

我们的新关系式（8.35）说明，即使单个点电荷 q 也将有若干静电能量。在这种情况下，电场是由下式给出的：

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因此，在距离电荷 r 处的能量密度为

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

我们可以取一个厚度为 dr 、面积为 $4\pi r^2$ 的球壳作为体积元。总能量为

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (8.36)$$

现在对于在 $r=\infty$ 的上限毫无困难。但对于一个点电荷来说，我们本应从下限 $r=0$ 积起，而这会给出一个无限大的数值。式（8.35）讲：在一个点电荷的场中会有无限大的能量，尽管我们过去是从只在点电荷之间才有能量那种观点出发的。在我们原来关于一群点电荷的能量公式（8.3）中，并未把电荷对于其本身的任何相互作用能包括在内。实际发生的情况乃是：当我们转变到电荷的连续分布、即式（8.27）时，就曾计入了每一无限小电荷与所有其他无限小电荷之间的相互作用能。同一计算也包括在式（8.35）之内，因而当将其应用于有限多点电荷时，我们已把从无限小部分电荷聚集起来所要的那种能量也包括进去了。事实上，我们将注意到：若应用有关一个带电球体的能量表示式（8.11），并让其中半径趋于零，则我们也会获得式（8.36）中的那种结果。

必须断言，把能量定域在场中的那种概念同存在点电荷的假设是彼此不相容的。一种摆脱困难的办法应该说明，像电子那样的基本电荷并不是一些点，而实际上是电荷的微小分布。或者，本来我们也可以这样讲：在十分微小的距离内，电学理论已有些错误，或局域能量守恒的概念有点不对头。对于这两种观点中的任一个观点都存在困难，这些困难从未得到克服，一直遗留到今天。此后在某个时候，当我们已讨论过诸如电磁场中的动量那样一些附加概念之后，就将对在理解大自然时所碰到的这些基本困难给予更全面的估量。

第9章 大气中的电学

§9-1 大气的电势梯度

在寻常的日子，平坦的旷野或海洋上，当从地面垂直上升时，电势将每米增加约100 V。这样，在空气中就有一个竖直的 100 Vm^{-1} 的电场。这电场的符号与地面上带负电相对应。这意思是说，在室外，在你鼻子的高度上就有高于你脚下200 V的电势差！你也许会问：“为什么我们不正好在人体外空气中一米的距离上安装一对电极，就可利用这100 V来点亮电灯？”或者你也许会觉得奇怪：“是否真的在我的鼻子和脚底之间就会存在200 V的电势差，那为什么当我出门上街时不会受到电击？”

我们先来回答第二个问题。你的身体是一个相当好的导体，当你与地面接触时，你和地面将趋于形成一个等势面。通常等势面平行于地面，如图9-1（a）所示，但当你站在那里时，这些等势面就会变形，而场看来像图9-1（b）所示的样子。因此，在你的头与脚之间有非常接近于零的电势差。有一些电荷会从地面走向你的头部，从而改变着电场。它们有些会通过从空气中积累的离子而放电，但由这些过程形成的电流十分微小，因为空气是一种不良导体。

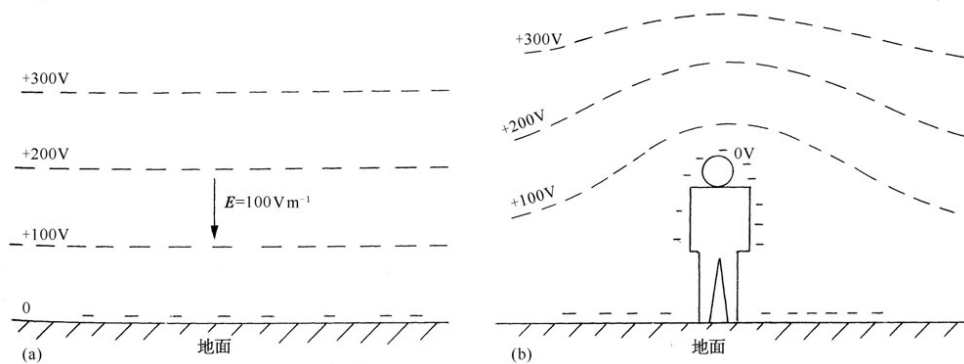


图9-1 (a) 在地面上的电势分布；(b) 在室外平坦地方人身附近的电势分布

如果把某件东西放在那里就会改变电场，那我们怎么能够测量这样的电场呢？有几种测量办法。一个办法是，把一个绝缘好的导体置于高出地面某个距离处，并让它留在那里一直到它的电势与空气的电势相等时为止。如果它在那里停留得足够久，则空气里的微小导电性会让电荷漏出该导体（或漏到该导体上去），直到它取得在它的高度上的势为止。然后，再把它带回到地面上，并测量当这样做时势的改变。一种较快捷的做法是令该导体为一个稍有点儿泄漏的水桶。当水珠滴下时，会带走任何超额电荷，因而该水桶与空气的势将趋向于相同（正如你所知道的，电荷分布于表面，当水珠漏出来时，“表面各部分”就会拆散）。我们可用一个静电计来测量水桶的电势。

还有另一种直接测量电势梯度的方法。由于存在电场，所以在地面上就会有面电荷（ $\sigma = \epsilon_0 E$ ）。如果放置一块平坦金属板在地面上并把它接地，负电荷就会在它上面出现〔图9-2（a）〕。现在若再对这块板覆盖上另一块接地的导体B，则电荷将会出现在这一块遮盖板上，而原来那块板A却没有电荷了。当我们把B盖上时，测量从A流向地面的电流（比方用一个连接于接地导线上的电流计），便能找出原来在那里的电荷密度，所以也就求得了电场。

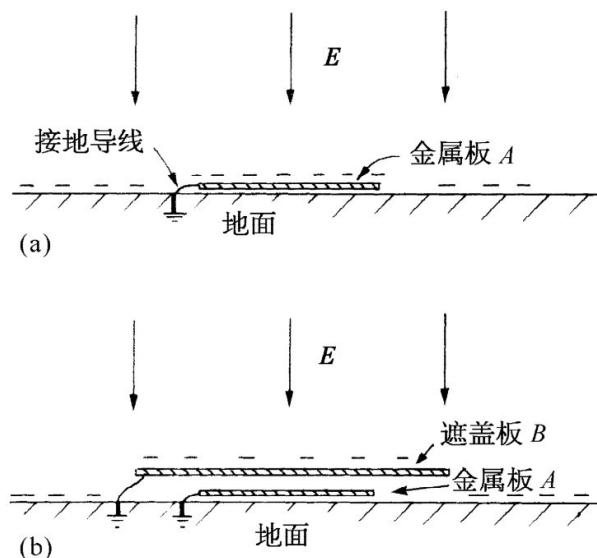


图9-2 (a) 一块接地金属板与相同面积的地面带有相同的面电荷；(b) 如果这块板又给另一块接地的导电体覆盖着，则它便不会有电荷。

在建议了如何才能测量大气中的电场后，我们现在继续来对它进行描述。首先，测量的结果表明：当我们升向高空时这个场持续存在，但它会逐渐减弱。在约50 km的高度上，这电场变得十分微弱，因而大部分的势差（对 E 的积分）都发生在较小高度上。从地面起一直到大气顶部总势差约为400 000 V。

§9-2 大气中的电流

除了电势梯度以外，另一个可以测量的东西就是大气中的电流。这电流密度很小——通过与地面平行的每平方米面积约有10 pA。空气显然不是完美的绝缘体，而由于这一导电性，一个微小电流——由刚才所描述的那种电场所引起的——就会从天空流向大地。

为什么大气会有导电性？原因是，这里或那里的空气分子中存在个别离子——比如已获得了一个额外电子、或也许丧失了一个电子的

氧分子。这些离子并不保持为单独的分子状态，它们由于带有电场而经常会把几个其他分子聚集在其周围，于是每一离子就成为一小团块，与其他团块一起，在电场中到处漂移——缓慢地移上移下——形成所观察到的电流。这些离子从哪里来的呢？最初人们猜测这些离子是由地球的放射性产生的（已经知道，从放射性材料发出的辐射会把空气分子电离而使空气导电）。像 β 射线那样的粒子，从原子核出来之后会跑得那样快以致把电子从空气里的原子中扯去，从而留下离子。当然，这就暗示着：要是我们升至较大高度，便会发现电离作用较少，因为放射性全都藏在地表上的尘土之中——在镭、铀、钾等的痕迹中。

为了检验这一理论，有些物理学家带着仪器乘气球上升去测量空气电离度（赫斯，1912年），但发现的情况相反——单位体积里的电离度随高度而增加（仪器与图9-3所示的相类似，两块金属板周期性地被充电至一电势 V 。由于空气的导电性，这两块板将慢慢地放电，这放电率用静电计测量）！这是一个最神秘的结果——在关于大气电研究的整个历史中最为戏剧性的发现。事实上，该结果是如此具有戏剧性，以致需要一门全新的学科分支——宇宙射线学。大气电本身仍保留它的不太戏剧性的地位。电离作用显然是从地球以外的某种东西产生的。对于这一来源的研究，导致了宇宙线的发现。我们现在不讨论宇宙线这一学科，只是说明宇宙线会维持离子的供应。尽管离子经常会被清除掉，但新的离子却总会由外面来的宇宙射线粒子创造出来。

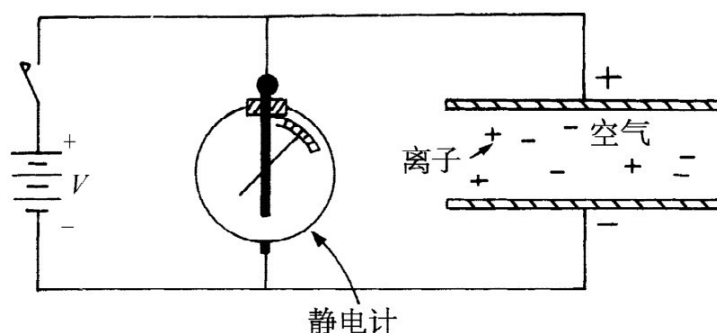


图9-3 测量由于离子运动所引起的空气导电性

为准确起见，我们必须说，除了由分子形成的离子外，还有其他种类的离子。微小的灰尘，像十分细小的粉末微粒，会漂浮于空气中并带了电。它们有时被称为“核”。例如，在海面上当一个波浪破碎时，小小的浪花就会飞溅到空中。当一颗这样的水珠蒸发时，它将留下一个无限小的NaCl晶体浮荡于空气中。此后，这些小晶体可能会拾取电荷而成为离子，它们被称为“大离子”。

那些小离子——由宇宙线形成的——最易于移动。由于它们那么小，就会在空气中运动得相当快——在 100 Vm^{-1} （或 1 Vcm^{-1} ）的场中其速率约为 1 cms^{-1} 。那些大得多而又重得多的离子，运动起来就缓慢得多。事实是，倘若空中有许多个“核”，它们会从那些小离子上拾得电荷。此时，由于“大离子”在场中运动得那么慢，总电导率就降低了。因此，空气的电导率是很容易变化的，因为它对空气里存在的灰尘份量很敏感。在陆地上这样的灰尘比在水面上多得多，因为风会刮起尘埃，或在那里人类会把各种污染抛入空气之中。这并不奇怪，日复一日，从此地到彼地，靠近地面的电导率变化得很厉害。在地面任何特定的地点所观测到的电压梯度也变化得很大，因为在不同的地方从高空流下来的电流大致相同，而只是由于靠近地面处多变的电导率引起了电压梯度的差异。

起因于离子漂移的空气电导率也随着高度上升而增加得很快——由于两个原因。首先，由宇宙线引起的电离作用随高度增加；其次，当空气密度降低时，离子的平均自由程增大，从而在碰撞之前，它们能够在电场中跑得较远——结果使电导率随高度增加得很快。

虽然空气中的电流密度只有每平方米几皮安，但由于大地表面有许许多多的平方米，以致在任何时刻流至地面的总电流很接近于1 800 A这一常数。当然，这个电流是“正”的——它把正电荷带到地面上。因此，我们就有400 000 V的电压供应，并伴有1 800 A的电流——功率达七亿瓦！

随着这么大的电流流下来，在地面上的负电荷会被很快放电。事实上，只需约半个钟头就使整个大地都放了电。但大气电场自从它被发现以来已经不止半个钟头。它到底是怎样得到维持的呢？什么东西在维持着电压？这电压存在于地球与什么东西之间？问题多得不胜枚举。

地球是负的，而空气中的电势是正的。如果你升得够高，那里的电导率会大得使水平方向电压变化的机会不多。对于我们所谈及的时间尺度来说，空气实际上已变成了导体。这发生在50 km左右的高空上。这一高度还没有所谓“电离层”那么高，在电离层中有由日光的光电现象所产生的大量离子。尽管如此，对于我们有关大气电的讨论来说，在约50 km的高空处，空气已变得足以导电，以致可以想象在这一高度上实际存在一个理想的导电面，电流从那里流下来。这种情况的图像如图9-4所示。问题是：正电荷怎样会维持在那里？它是怎样被泵回去的？既然它已降落到地面上，总得想办法把它泵回去才行。这是人们在相当长一段时间内有关大气电的最大困惑之一。

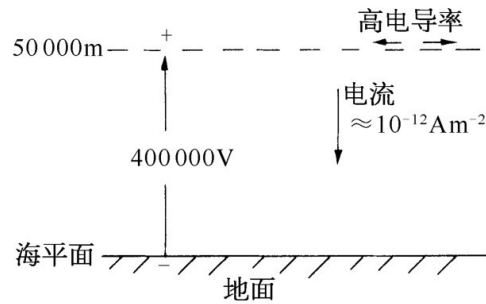


图9-4 在晴朗大气中的典型电状态

我们能够得到的每一点信息都会提供关于某事物的线索，或至少会告诉你关于它的某些情况。这里就是一个有趣现象：比方，若在海面上测量电流（它比起电势梯度来更为稳定），或者在严格条件下进行测量，并十分小心地对结果加以平均，除去不规则的变化，我们发现，仍然逐日变化。对在洋面上许多测量结果的平均，显示出一种大致如图9-5所示的那种跟随时间的变化。电流约有 $\pm 15\%$ 的变化，而在伦敦时间每天下午7时变化最大。事情的奇怪方面是：不论你在哪里测量电流——是在大西洋、太平洋或北冰洋上——总是当伦敦的钟在下午敲7点时电流就达到它的峰值！全世界，电流总是在伦敦时间下午7时达到极大，而在伦敦时间上午4时则达到极小。换句话说，它取决于地球的绝对时间，而不是取决于进行观测地点的当地时间。从一个方面说，这并不见得神秘，它与我们的下述观点一致，即在大气顶层有极高的横向电导率，这使得从地面至顶层间的电势差不可能按地域改变。任何电势变化都应该是全球性的，而事实确是如此。因此，我们现在所知道的就是，在“顶”面的电势随地球的绝对时间升降15%。

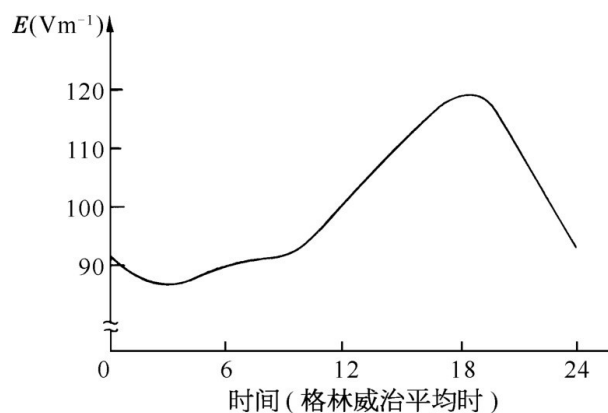


图9-5 在晴朗的日子里，在海洋上大气电势梯度的平均日变化（参照格林尼治时间）

§9-3 大气电流的来源

其次，我们必须谈谈关于从“顶”层流至地面持续对地球充负电的那种巨大负电流的来源，承担这一任务的电池组究竟放在哪里？这电池组如图9-6所表示。充电是通过雷暴雨和闪电来实现的。事实证明，那些闪电并不会使我们刚才谈及的电势“放电”（起初你或许会这样猜测的）。雷雨把负电荷带至地球上。每当一次闪电落下时，十之八九会把大量负电荷带至地球。正是全世界的这些雷暴雨经常以平均1 800 A的电流把地球充起电来，然后它通过天气好的那些地区逐渐放电。

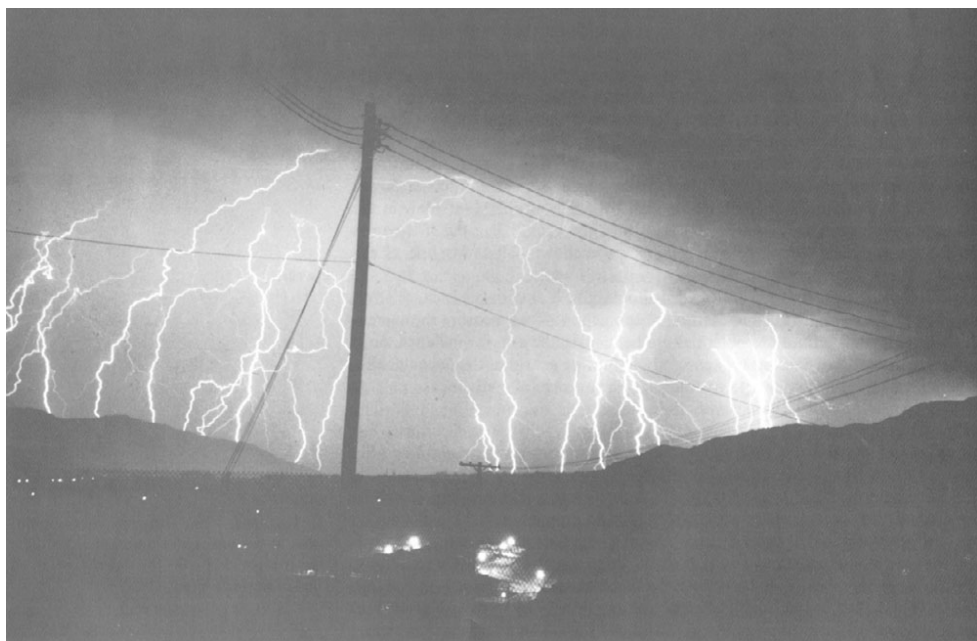


图9-6 产生大气电场的机制 [由William L. Widmayer拍的照片]

整个地面每天约有四万次雷暴雨，而我们可将其想象成会把电荷泵至上层以保持其电势差的电池组，然后计入地面的地理因素——在巴西每天下午总有雷暴雨及在非洲热带地区的雷暴雨等等。人们已经对在任何时候世界范围内落下多少次闪电做了估计，不用说他们的估计多少总会同电势差方面的测量结果相符：在整个地面上雷暴雨活动的总量在伦敦时间下午7时达到最高。然而，关于雷暴雨的估计十分难于做出，而只是在人们知道了必须发生那种变化之后才做出该估计的。这些事情十分困难，因为我们无论在海洋上或在全世界所有各地区，都没有做过足够多的观察以准确地弄清楚雷暴雨发生的次数。但那些认为他们“做得对”的人都曾得到这么一个结果，即在世界范围内每秒发生一百次闪电，在格林尼治平均时间下午7点钟雷暴雨活动达到顶峰。

为了了解这些电池组是怎样工作的，我们将详细地考察一次雷暴雨。在雷暴雨过程中到底发生了什么？打算就迄今已知道的给予描

述。当我们进入实际自然界——而不是一些想象中的理想导电球体存在于我们所能够非常熟练地加以解决的其他球面之内——这种令人惊奇的现象时，我们就发现不懂的东西非常多。任何曾经经历过雷暴雨的人都会感到一种享受，或吃了一惊，或至少也发生过某种激动吧。而在自然界中那些会引起激动的地方，我们发现一般都存在与此相应的复杂性和神秘性。目前并不可能对雷暴雨的行为做出准确描述，因为我们懂得的仍然不太多。但我们愿意尝试对所发生的事情稍微描述一下。

§9-4 雷暴雨

首先，一场普通的雷暴雨是由若干个彼此相当靠近却又几乎互为独立的“盒形区域”构成的。所以，最好是每次仅仅分析其中的一个盒。所谓“盒形区”指的是一个在水平方向上占据有限面积的区域，而全部基本过程都会在此中发生。通常会有几个盒子靠在一起，而在每一个中所发生的现象又约略相同，尽管可能在时间上有所不同。图9-7以一种理想的方式指示出在雷暴雨的最初阶段这样一个盒子会出现的形态。结果表明：在我们即将描述的条件下，空气中某处会出现普遍的空气上升，越接近顶层速度就越大。当底层的温暖而又潮湿的空气上升时，它会被冷却而其中的水蒸气发生凝结。图中那些小星星代表雪花，而小点点则代表雨，但由于向上冲的气流足够强而这些雨滴和雪花又足够小，因而在这一阶段雪和雨都不会落下来，这是开始阶段，还不是真正的雷暴雨——在这种意义上地面上还未发生过任何变化。当暖空气上升的同时，还会把旁边的空气也吸引过来——这是许多年来一直被忽略的一个要点。于是，不仅下面的空气会升上来，而且还有从侧面来的一定份量的空气。

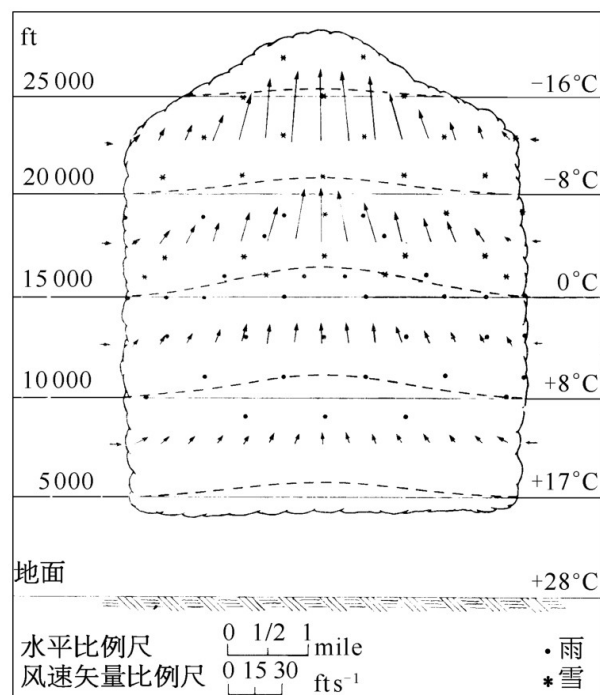


图9-7 在最初发展阶段中的一个雷暴雨云 [转载自美国商业部气候局报告，1949年6月]

为什么空气会像这样上升呢？正如你们所知道的，高度越高空气就越冷。地面被太阳晒热，而这些热量再辐射至天空中则要依靠大气高层中的水蒸气，因此，在高空空气是冷的——十分寒冷——较低的地方它较温暖。你可能会说：“那么事情很简单，暖空气比冷空气较轻，因而这个组合在力学上是不稳定的，这样暖空气便会上升。”当然，如果在不同高度空气的温度不同，那它在热力学上是不稳定的。要是让空气本身无限久地不受影响，则空气全部会达到相同的温度。可是，它并非不受干扰，太阳（在白天）总会向它照射。因此，问题确实不是一个热力学平衡的问题，而是一种力学平衡问题。假设我们——像在图9-8所示的那样——把空气温度相对地面上的高度做一曲线，在通常情况下，会得到沿一条像图9-8中（a）那样的曲线下降关系，当高度增大时温度下降了。大气怎样才能得到稳定呢？为什么下层的热空气不会简单地上升到冷空气中去？答案是这样的：假如空气

上升，压强就会下降，而要是考虑一特定区域里的空气正在上升，则它将绝热膨胀（没有任何热量会进出该区，因为在我们这里所考虑的那么大的尺寸内，将不会有时间让大批热量流动）。于是这个区域里的空气当升高时就会变冷。像这样的绝热过程会给出一条如图9-8中曲线（b）那样的温度与高度关系。任何从下面升上来的空气比它进入的环境温度要低，这样就没有理由让下层的热空气升上来。假如真的升起的话，它将冷却到其温度比原来已在该处的空气低，则会比那里的空气重，因而刚好一升上来就要再降下去了。在一个美好、晴朗的日子里湿度很低，此时大气中存在某个温度下降率，这一般比由曲线（b）所表示的那“极大稳定梯度”要低些。空气是处在一个稳定的力学平衡状态中。

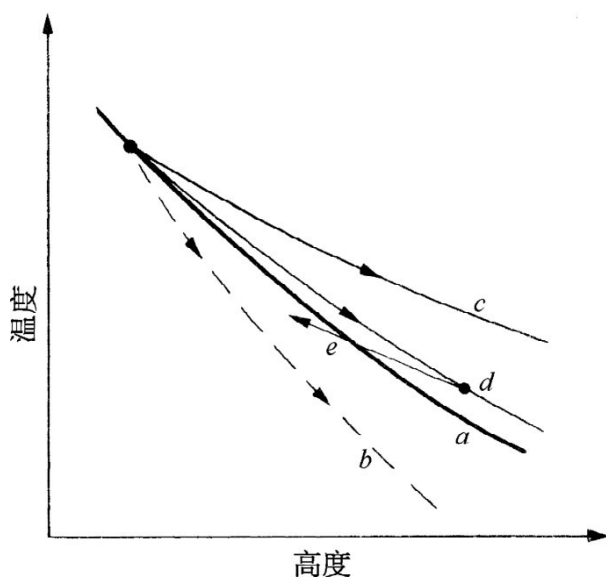


图9-8 大气温度。（a）静态大气；（b）干燥空气的绝热冷却；（c）潮湿空气的绝热冷却；（d）潮湿空气与一些周围空气混合

另一方面，要是我们想起一个里面含有许多水汽的部分空气正在上升，那么它的绝热冷却曲线就将不同。当它膨胀而冷却时，其中的水蒸气将会凝结，而这些正在凝结的水会释放出热量。因此，潮湿空

气并不像干燥空气冷却得那么厉害。所以如果比平均湿度高的那种空气开始上升，则其温度将按图9-8（c）那样的曲线下降。它将变得冷一些，但仍比同一高度的周围空气要暖和。如果一个区域中存在温暖的湿空气，并由于某种原因开始上升，则它始终比周围的空气要轻而温暖，所以将继续升高直到升达很高处为止。这就是使雷暴雨盒中的空气上升的机制。

多年来，关于雷暴雨盒的解释就只是这样。但此后的测量结果表明，云层里不同高度的温度并不会像曲线（c）所示的那样高。原因是：当湿空气的“气泡”上升时，它会从其周围捕捉到一些空气，并为这些空气所冷却。温度对高度的关系看来就更像曲线（d），与曲线（c）相比，它与原来的曲线（a）要接近得多。

当上述对流发生了之后，雷暴雨盒的截面看来就像图9-9那样。我们已有了所谓“成熟”的雷暴雨了。在这个阶段，向上冲的气流非常迅猛，一直升达10 000~15 000 m——有时比这还要高得多。具有凝结特点的雷暴雨盒顶部会一直向上爬至高出于一般云端之外，由一股通常约每小时60 mile的向上气流来完成。当水汽被带上去而凝结时，它形成了一些迅速被冷却至0°C以下的小水滴。它们本应该凝固，但并不立即凝固——它们已经是“过冷”了的水点。只要不存在足以使结晶过程开始的一些“核”，水及其他液体往往会在结晶之前冷却至凝固点之下。只有当一小块物质、例如一小块NaCl晶体存在时，水滴才会凝成一小冰块。此后平衡是这样建立的，即水滴蒸发而冰晶生长。于是，在某一时刻水会迅速消失，而冰迅速形成。并且，在水滴与冰粒之间也有可能直接相撞——那些过冷的水便粘上冰粒，从而使它突然结晶。所以在云体膨胀的某一时刻会有大的冰粒迅速累积起来。

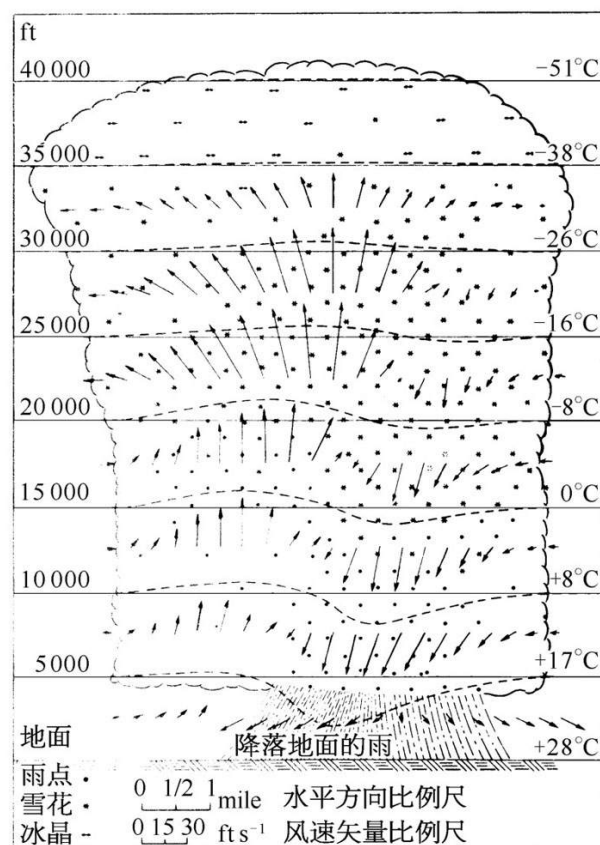


图9-9 成熟的雷暴雨云 [转载自美国商业部气候局报告，1949年6月]

当这些冰粒足够重时，它们穿过上升的空气开始降落——它们变得太重，以致那向上的气流支持不住。当冰粒落下来时，会连同一点儿空气也带下来，因而就开始了一股向下刮的气流。而足够奇怪的是，很容易看出当这种下刮之风一旦开始了之后，便将继续保持。现在空气正在冲下来！

注意，图9-8中那条代表云里实际温度分布情况的曲线（d），要比适用于潮湿空气的曲线（c）稍微陡些^[1]。所以，如果有湿空气落下来，则它的温度将按曲线（c）的斜率降落，只要下降得够多，它的温度便会低于其周围的温度，如图中曲线（e）所指出的。当它一旦那样做时，它的密度便会比周围的空气大，因而将继续迅速下降。你们会说：“那是一种永恒运动。起初你曾争辩说空气应该上升，而当你

确已把它升到那里时，却又同样巧妙地争辩说它应该下降”。但它并不是永恒运动。当情况不稳定而暖空气必须上升时，显然就得有某种东西来代替该暖空气。同样确实的是，下降的冷空气会有力地代替那暖空气，但你认识到，那下落的并不是原来的空气。早期的论据认为有某种特别的云，它上升时并不会挟带旁边的空气，而在上升了之后就又降落下来，这确有某种令人迷惑不解之处。这种论点需要雨来维持那向下的气流——是一个难以置信的论据。一旦我们认识到有不少原来空气会混杂于上升的空气之中，则热力学论据就足以表明原本处于某一高处的冷空气会降落下来。这就解释了图9-9的草图上的那种活跃的雷暴雨形象。

当空气降落时，雨开始从雷暴雨盒的底层降下来。另外，当那相对寒冷的空气降落到地面上时，还会向周围扩展。所以恰好在雨尚未落下之前，就有一小股冷风给我们以大暴雨即将来临的预兆。在暴风雨本身中，会有猛烈而又无规的阵风，而在云层里则有巨大的湍流，如此等等。但基本上是先有一股向上气流，然后才有一股气流向下——一般说来，这是一个十分复杂的过程。

降雨过程开始的时刻也就是强劲的下落气流开始的时刻，实际上，也是电现象发生的时刻。然而，在对闪电进行描述以前，我们可以通过考察在半个钟头至一个钟头以内，雷暴雨盒中发生的情况来结束这个故事。此时，该盒看来就像图9-10所示的那样。向上的气流停止了，因为已不再有足够的暖空气来维持它。降雨继续了一阵子，最后连一些小水滴都落了下来，情况逐渐变得越来越平静——尽管还有一些小冰晶残留在高空中。由于在极大高度上风吹向四面八方，云端通常就会伸展成一块铁砧的形状。雷暴雨盒到了生命的尽头。

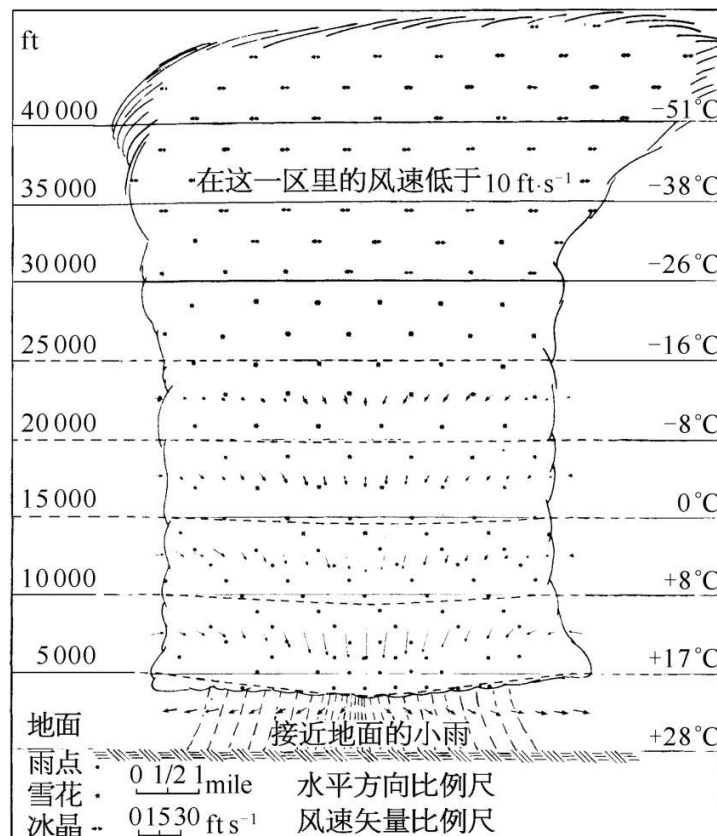


图9-10 雷暴雨云的后一阶段形势 [转载自美国商业部气候局报告, 1949年6月]

§9-5 电荷分离的机制

现在要来讨论对我们的目的来说最重要的方面——即关于电荷的发展情况。各种实验——包括飞机穿过雷暴雨区（干这一件事的飞行员真是好汉！）——都告诉我们，在雷暴雨云里的电荷分布有点像图9-11所示的那样。在顶部有正电荷，而在底部则有负电荷——只在云脚处还有小的局部区域带有正电荷，这对每个人都曾引起不少烦恼。似乎还没有谁懂得为什么它会存在那里，到底它有什么重要性——是该正电荷雨降落时的次级效应、还是机制中的基本部分。假使它不存在，事情该会简单得多。不管怎样，在底部占优势的负电荷与在顶部占优势的正电荷对于促使地面带负电所必需的电池组就有了正确符

号。正电荷存在于6或7 km高的大气中，那里温度约为 -20°C ，而负电荷则在3~4 km高处，那里温度在 0°C 与 -10°C 之间。

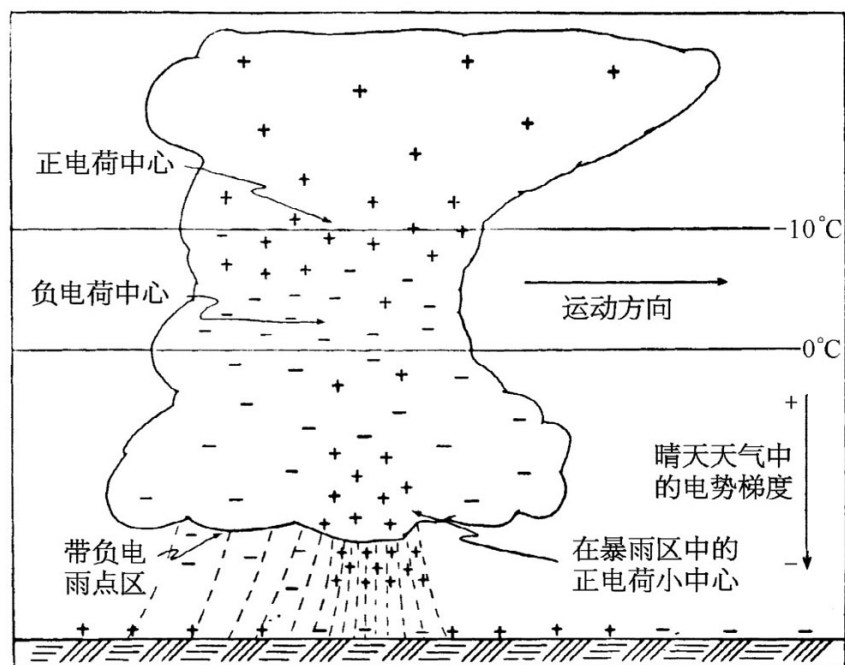


图9-11 在一个成熟的雷暴雨盆中的电荷分布 [转载自美国商业部气候局报告，1949年6月]

聚集在云底的电荷大到足以使在云与地面之间产生一个20或30、甚至达到100 MV的电势差——比起在晴朗大气中从“天空”至地面的0.4 MV要高得多。这样高的电压会把空气击穿，并产生大规模的弧光放电现象。当击穿发生时，在雷暴雨区底部的负电荷就会在闪电中被带到了地面。

现在我们将比较详细地来描述闪电的特性。首先，附近应有大的电势差，才能把空气击穿。闪电会发生于一朵云的两部分之间，或在云与云之间，或在云与地面之间。在每一次独立的放电闪光——就是你所见到的那种闪电——中大约有20~30 C的电荷被带到地面。一个问题是：云要再生这些被闪电所带走的20 C或30 C电荷需要多少时

间？这可以通过测量在离云很远的地方由云的电偶极矩所产生的电场而得知。在这样的测量中你可以见到，在闪电那一瞬间电场会突然降低，然后又有一个返回到原值的指数式变化，这个指数函数的时间常数对不同情况稍微不同，但约略在5s左右。每次发生闪电之后，雷暴雨只消5s就能再度建立起它的电荷。这并非意味着另一次闪电一定要恰恰在5s之后发生，当然因为几何形状的改变等等，闪电或多或少是无规发生的，但重要的是，大约需要5s才能重新创造原来条件。这样在雷暴雨的起电机中会流经约4A的电流。这意味着，任何为解释暴雨如何能产生它的电荷的模型一定是具有大量燃料的——它必须是一部庞大而又迅速运转着的装置。

在进一步讨论之前，我们将考虑一件几乎肯定是完全不相干的、但却是饶有趣味的事情，因为它的确表明电场对水滴的影响。我们之所以说它可能与雷电无关，是因为它联系到的是我们能用一束水流在实验室里做的、表明电场对水滴影响相当强的实验，而在雷暴雨中却没有水流，那里只存在由凝结的冰和水滴所形成的云。因此，关于在雷暴雨中起作用的机制问题，可能根本就与能够在即将描述的简单实验中所见到的现象毫无关系。要是你取一个小喷嘴接至水龙头上，并以陡峭的角度朝上安放，如图9-12所示，那么水便将以一小束流的形式射出来并最后碎裂成一串由微小水滴组成的雾。如果你现在把一横穿该水流的电场安置在喷嘴附近（例如把一根带电棒移近过来），那么该水流的形状就将改变。若用弱电场，则你将发现水流会破裂成数目较少的一些大水滴。但若所提供的是一个强电场，则水流将碎裂成许许多多的微小水滴——比以前的要小得多^[2]。采用弱电场时，有一种会妨碍水流碎裂成水点的倾向。可是，若用强电场则拆开成水滴的倾向就增加。

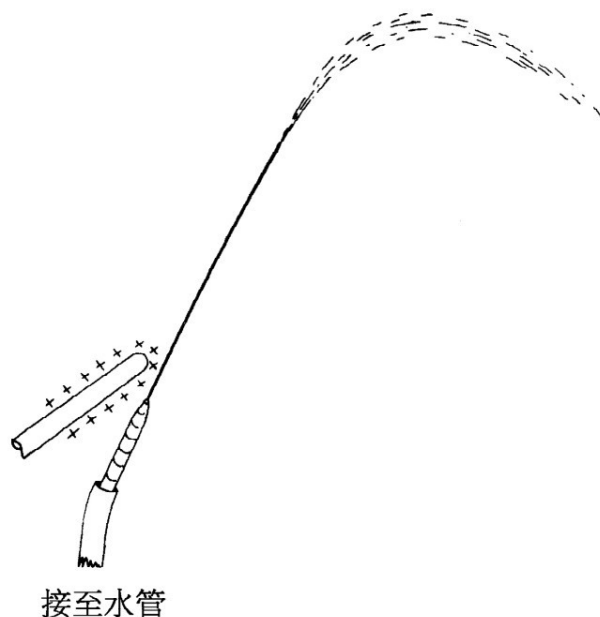


图9-12 把电场靠近喷嘴时的一条水流

有关这些效应的解释可能是这样。如果有一条从喷嘴射出来的水流而又让一弱电场横穿过它，则它的一边会稍微带正电而另一边稍微带负电。此时，当水流破裂时，一边的水滴便可能带正电而另一边的水滴带负电。它们将彼此互相吸引并将比以前更加倾向于粘在一起——水流不会那么容易破裂了。反之，如果电场较强，则存在于每一水滴上的电荷比较多，因而电荷本身就会通过其中的互斥作用而协助把那些水滴分裂。每一水滴将碎裂成许多更小的各带有电荷的水滴，因而它们将互相排斥而迅速向外扩展。所以当我们增强电场时，水流便将分裂成更微细的水珠。我们想要提出的唯一一点是，在某些条件下电场能够对水滴发生相当大的影响。在雷暴雨中某些事情发生的精确机制，还完全未弄清楚，而且也完全无须与刚才所描述的现象联系在一起。我们之所以把它包括进来只是为了使你们认识到可能会起作用的那些复杂性。事实上，还没有谁提出过以这种概念作为基础而适用于云的理论。

我们要来描述两种已经发明的、用来解释雷暴雨中电荷被分离的理论。两种理论都包含这样一个概念，即在凝结的粒子上带有某些电荷，而在空气中则有另一些不同电荷。于是通过这些凝结粒子——水滴或冰粒——在空气中的运动，电荷便分离了。唯一的问题是：这些粒子开始是怎样带电的？较老的一种理论被称为“水滴破裂”论。有人曾经发现，如果气流中有一水滴破裂为两小块，则在水滴上存在正电荷，而在空气里会有负电荷。这种水滴破裂理论存在几方面的缺点，其中最严重的是符号弄错了。其次，在大量会出现闪电的那种温度带式雷暴雨云中，高空里的凝结效应乃是形成冰，而不是形成水。

从刚才所说的，我们注意到，若能够想出一种在水滴顶部与底部各带有不同电荷的方法，而如果又能知道为什么在一个高速空气流中水滴会破裂成大小两部分——由于水滴穿过空气的运动，或其他原因使大的部分在前面而小的部分在后面——那么我们便会有一套理论了（这与任何已知的理论不同）。此后，在空气阻力的影响下，小滴在空中降落不如大滴那样快，因而取得了电荷分离的效果。你看，编造出各种可能性是有可能的。

一种更巧妙的、在许多方面比那水滴破裂理论更为满意的理论，是由C.T.R. 威尔逊提出的。我们将按照威尔逊的办法用水滴来描述它，尽管这同一现象也适用于冰。假设有一水滴正在约 100 Vm^{-1} 的电场中朝着带负电的地面降落。这水滴将有一个感生电偶极矩——水滴的底部带正电而顶部带负电，这如图9-13所示。原来在空气中会有如上面所提及的“核”——那些粗大而运动迟缓的离子（高速度的离子在这里没有重要影响）。假设当这水滴降落时，接近这么一个大离子。若这个大离子带的是正电，它会被水滴底部的正电荷所推开。因而，它就不会粘在该水滴上。可是，假若该离子是从上面接近水滴的，则

它也许会粘在那带负电的顶部。但由于水滴正在空中降落，所以有一股相对于水滴向上的气流，这气流将把离子带走，如果各离子在空气中运动得足够缓慢的话。于是正离子也就不会粘在水滴上了。你看，这只适用于大而行动缓慢的离子，这一种类型的正离子将不会粘在一颗降落的水滴前面或后面。反之，当一水滴接近一些粗大而行动缓慢的负离子时，它们便将被吸引而终于粘了上去，水滴将获得负电荷——这个电荷符号已被整个地球上的原来电势差所确定——而我们便将得到一个正确符号了。负电荷将由这些水滴带到了云的底部，而剩下的带正电荷的离子则将被各种向上气流吹刮至云顶。这一套理论看来相当好，至少会提供正确符号，并且它也不依赖于要有液态水滴。当我们以后学习到电介质的极化时将会见到，用小冰块也同样会做这些事情。当它们处于电场中时，在其两端处也将产生出电荷。

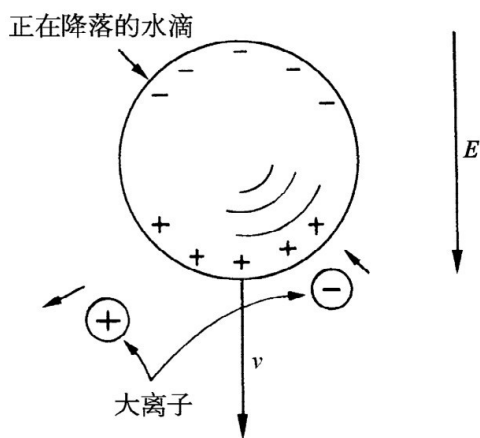


图9-13 有关雷暴雨中电荷分离的C.T.R. 威尔逊理论

然而，即便这一理论也还有一些问题。首先，在雷暴雨中所牵涉的总电荷会非常多。过了一段短时间之后，那些大离子的供应将告枯竭，因此威尔逊和其他人就建议还得有其他的大离子来源。一旦这种电荷的分离开始，巨大的电场便形成，而在这些大电场中某些地方的空气就可能发生电离。如果有一个尖端强烈带电，或有任何像水滴那

样的小物体，则它可能将场集中到足够强以致造成“刷形放电”。当有一个足够强的电场时——让我们说它是正的吧——电子们便将落入场中并在两次碰撞之间获得了巨大速率。它们的速率将足以在碰到另一个原子时把其中的一些电子拉出来，而让正电荷留在后面。这些新的电子又将获得速率而与更多的原子碰撞。因此，就将有一种链式反应或雪崩现象发生，从而离子会迅速积累起来。那些正电荷被留在原来的位置附近，因而净效应就是把原来在某一点上的正电荷分布在围绕该点的一个区域内。此时，当然就不再有强电场了，而这一过程便停止。这就是刷形放电的特点。有可能在云里的电场会变成足够强，以致形成一个小小的刷形放电；也可能还有其他别的机制，在一旦发动了之后就能产生大量离子。但还没有谁会确切知道它如何动作，因此，关于闪电的基本原因实际上就还未完全明白。我们仅知道它是来源于雷暴雨（而且我们当然也知道，雷声来自闪电——是由闪电释放的热能引起的）。

至少我们已能部分地理解大气电的起源。通过气流、离子以及雷暴雨中的水滴或冰粒，正、负电荷被分开了。正电荷被向上带至云顶（见图9-11），而负电荷则在电击时倾倒在地面上。那些正电荷还会离开云顶，进入具有更高电导率的高层大气中，并将伸展至全球。在气候晴朗的地区，这一高空层里的正电荷会通过空气中存在着的离子——由宇宙线、海洋及人类活动所形成的——缓慢地输送至地面。大气是一部忙碌工作着的电机！

§9-6 闪电

作为闪电中所发生情况的证据的第一张照片是这样获得的，快门打开着的一部照相机由人们提着前后移动——同时指向闪电所预期发生的地方。用这种办法获得的早期照片清楚地表明，闪电往往是由沿相同路线的一连串放电构成的。后来，一种安装在一个迅速旋转着的盘上的、配有分开 180° 的双镜头“博伊斯”（Boys）牌照相机问世了。由每一镜头所形成的像横越胶片移动——图像按时间被展开。比方，若闪电重复着，就会有并排着的两个像。通过对由这两个镜头所形成的像做比较，人们就有可能计算出有关闪光发生的时间序列的细节。图9-14表示由“博伊斯”牌照相机拍摄的一张照片。

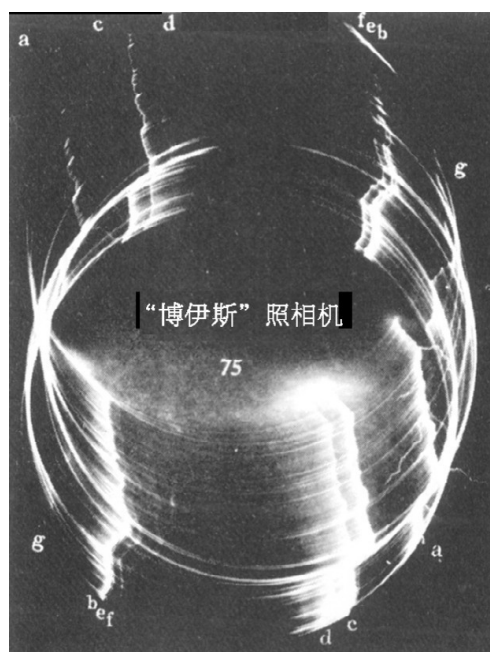


图9-14 由一部“博伊斯”牌照相机所拍得的一张闪电照片 [转载自Schonland, Malan and Collens, *Proc. Roy. Soc. London*, 1935, 152]

现在我们要来描写闪电。另外，对它的动作仍未确切理解。仅将对它的外表形象给予定性描述，但对于它为什么会这样表现则不做详细谈论。我们将仅仅描述在平坦旷野上面云底带有负电荷的那种普通情况。这朵云的负电势比起下面的地球的负电势来还要低得多，因而

带负电荷的电子将被加速而奔向地面。发生的情况如下。全都从一种所谓“梯式指引线”开始，这并没有像闪电那么光亮。在照片上人们可以看到，初时一小点亮斑会从云朵那里开始出现，随即迅速地向下移动——以六分之一的光速进行！它只跑过50 m左右便停下来。约歇息 $50\mu\text{s}$ 之后，重又开始另一步。再歇息一会就又跨出第三步，如此等等。通过一连串阶梯而向地面运动，沿着像图9-15所示的路线。在这条指引线里有来自云朵的负电荷，整根柱里充满着负电荷。并且，空气被那些产生该指引线的迅速运动的电荷所电离，因而沿电荷走过的这条路线空气已变成导体。在指引线接触到地面的那一瞬间，便有向上直通云朵的充满着负电荷的一根“导线”。现在，云里的负电荷能够最后干脆逃脱了出来。处在指引线底部的那些电子最早体会到这一点，它们倾倒了出来，剩下正电荷在后头，那又再从指引线的较高处吸引着更多的负电荷，而这又再倾倒下来，如此等等。所以最后一部分云朵里的全部负电荷将沿着这根柱以迅速而有力的方式奔跑出来。因此你所见到的闪电乃是从地面跑上去的，如图9-16所示。实际上，这一主要闪电——是其中最明亮的部分——称为回路闪电。这就是能够产生十分明亮的光的那种东西，而其热量使空气迅速膨胀从而发生霹雳一声雷响。

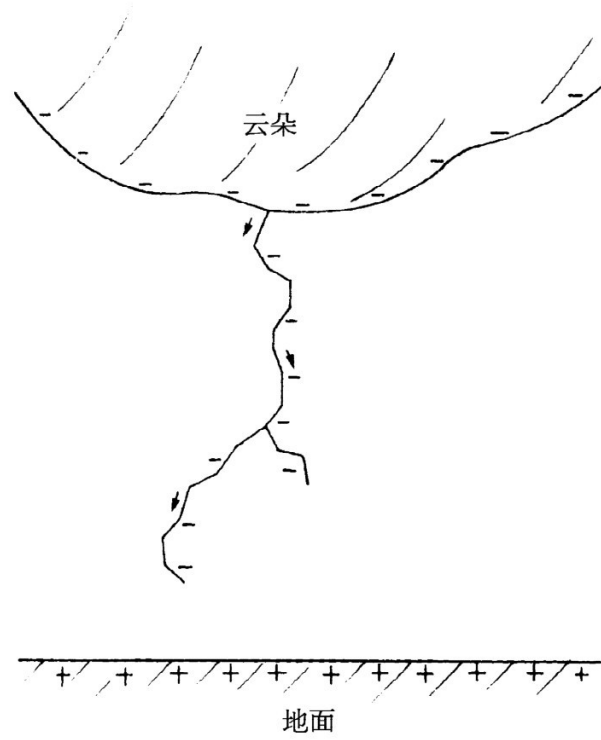


图9-15 “梯式指引线”的形成

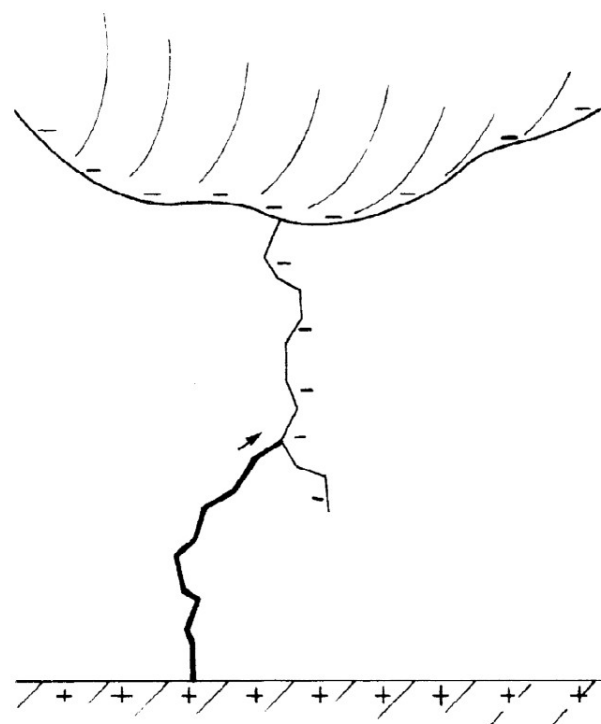


图9-16 回路闪电沿着指引线所开辟的道路回头跑上去

在一次闪电中，电流的峰值达到约10 000 A，由它带下来的电荷约为20 C。

但至此事态仍未结束。可能在大约百分之几秒后，当这个回路闪电消失时，另一条梯式指引线又冲了下来。但这一次中间不再歇息。它被称为“飞标引线”，一直奔跑下来——一下子就从顶到底。它全力完全沿着旧路前进，因为那里还有足够多的余烬使它成为一条最易通得过的路径。这一条新的指引线又再充满着负电荷。当它接触到地面的一刻——咣的一声！——沿着该路径就有一个回路闪电一直往上冲击。所以你会看到闪电一再发生。有时仅闪击一两次，有时五或十次——有一次在同一条路线上竟有多达42次的闪电被看到——但总是迅速地相继发生的。

有时事情甚至变得更加复杂。例如，在其中一次歇息之后，该指引线可能通过送出两个阶梯——都是朝下指向地面的，但在不同的角度上——而发展成一种分支，如图9-15。此后会发生什么情况，将取决于其中是否有一条支肯定更早地到达地面。如果真的是这样，则那明亮的（把负电荷倾卸到地面上的）回路闪电便会沿这条直达地面的支路往上冲，而在其通往云朵的路程中经过该分叉点时，就有一条明亮的闪电沿另一条支路往下跑。为什么？因为负电荷正在倾倒而下，而这便点燃了闪电。这电荷开始在那个次级分支的顶端运动，把该支路中那些较长的相继部分排空，因而该明亮闪电便显示出是在沿该支路奔跑下来，同时闪电也朝着云朵伸展上去。然而，倘若这些额外的指引线支路有一条恰巧几乎同时与那原来的指引线到达地面，则有时恰巧可能那第二次闪电的飞标指引线沿着这第二条支路。于是，我们便见到第一次主闪光发生在一处，而第二次闪光则发生在另一处。它是从原来概念衍生来的。

再者，对于十分靠近地面的区域，我们上面的描述就过于简化了。当该梯式指引线离地面100 m内时，有证据表明从地面发生了放电来迎接它。大概电场已变强至足以使一刷形放电产生。例如，设有一尖锐物体，诸如有尖顶的一座建筑物，那么当指引线落下至该屋顶附近时，电场是那么强大以致放电从尖端开始而向上达到该指引线。闪电倾向于打击这样的一点。

显然久已明白，高耸的东西常受雷击。波斯王哲息斯（Xerxes）的顾问阿塔班尼斯（Artabanis）曾有一句名言，那是当哲息斯企图把整个已知世界都归由波斯人管辖而出征时，他给予他的主子关于对希腊的一次预谋攻击的忠告。阿塔班尼斯说：“看上帝怎样利用他的闪电来毁灭那些大野兽，他不能容忍它们逐渐变傲慢，而那些小动物却从未惹怒过他。同样，他又如何使他的闪电总是落在高屋和高树上。”然后，他才解释理由：“因此，十分明白，他喜欢把任何灾难都降落在那些自高自大的东西上面”。

你是否会认为——现在你已经懂得了闪电总要打击高大树木的真正原因——比2 400年前的阿塔班尼斯对国王有关军事上的忠告更加明智？不要自高自大，你做起来只会比他更缺乏诗意。

[1] 这里按原文是“没有那么陡”，似乎有误，所以我们把它改了。——译者注

[2] 一种方便的用以观察水滴大小的办法是，让水流落在一大块金属薄板上，较大的水滴会造成较响的声音。

第10章 电介质

§10-1 介电常量

这里，我们开始讨论在电场的影响下物质的另一种特殊性质。上一章我们曾考虑过导体的行为，其中电荷为了响应电场而自由地移至这样的点上，使得在导体内部不再残留电场。现在我们将讨论绝缘体，即那种不能导电的材料。也许人们起初会认为不应该有任何效应。然而，利用一个简单验电器和一个平行板电容器，法拉第就发现事实并非如此。他的实验表明，在这个电容器的两板间塞进一块绝缘体时，其电容会增加。若绝缘体完全充满两板的间隙，电容会增大 κ 倍，而 κ 的大小仅取决于该绝缘材料的性质。绝缘材料也称作电介质。这样，该因子 κ 就代表电介质的一种特性，因而被称为介电常量。当然，真空的介电常量为1。

现在我们的问题在于解释：如果绝缘体确实是绝缘的而不能导电，那为什么还会有某种电效应呢？我们从电容增大这一实验事实出发，试找出可能的原因。考虑一个平行板电容器，在其两导体表面上带有一些电荷，让我们假定顶板带着负电而底板带着正电，两板的间距为 d ，而每块板的面积为 A 。正如以前我们曾经证明过的，这样一个电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad (10.1)$$

而在其上面的电荷与电压的关系为

$$Q = CV. \quad (10.2)$$

现在有这样的实验事实：若把一块留西特（一种人造荧光树脂）玻璃那样的绝缘材料塞进极板之间，则我们会发现电容增大了。当然，这意味着，对于相同的电荷来说电压则是降低了。可是电压或电势差等于电场经过电容器的积分，因而我们必然得出结论，即使两板上的电荷保持不变，电容器里的电场还是会减弱的。

怎么会这样呢？有一个由高斯创立的定律告诉我们，电场通量正比于所包围的电荷。考虑图10-1那个由虚线表示的高斯面 S 。由于有电介质存在时电场被削弱，所以我们断定，在该面内的净电荷应少于没有该材料时的净电荷。只有一个可能的结论，那就是在电介质表面上必然存在正电荷。由于场虽被削弱了，但不是降低至零，所以我们应期待这正电荷仍比在导体表面上的负电荷少。因此，只要能够以某种方式理解，当介电材料被置于电场中时会有正电荷感生于其一面而负电荷感生于另一面，这一现象便可以得到解释。

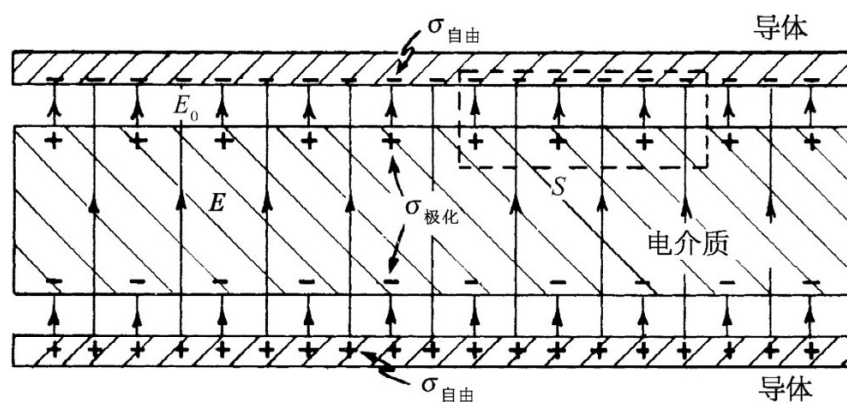


图10-1 含有电介质的一个平行板电容器。图中表示出 E 线

我们会预料，对于导体来说，这同一现象也会发生。比方，假设有一个板间距为 d 的电容器，而我们将一块厚度为 b 的电中性导体放进两板之间，如图10-2所示。电场在顶面会感生正电荷，而在底面感生负电荷，因而在导体内部就没有电场了。但在其他空间里的场，则和未放进该导体时一样，因为它等于面电荷密度除以 ϵ_0 。可是，为了获得电压（电势差）得进行积分，此时所取的距离却已经缩短了。该电压为

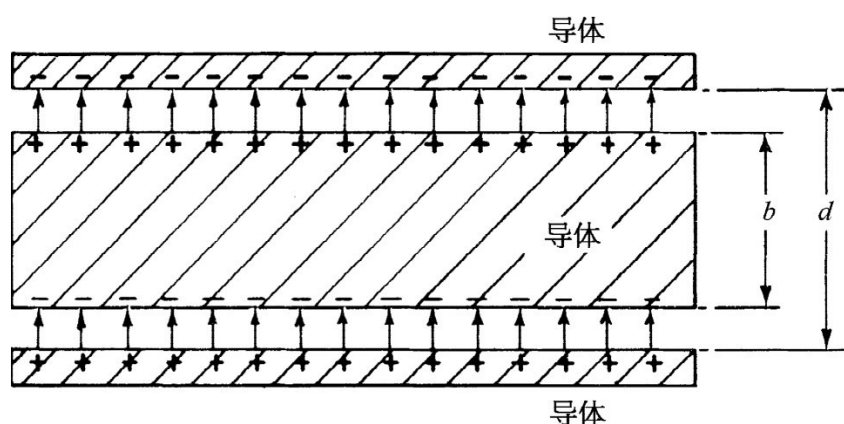


图10-2 若把一块导电板放进一个平行板电容器的空隙里，那些感生电荷就会使导体内之场减少至零

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - b).$$

关于电容的最终公式与式（10.1）相似，即

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d(1 - b/d)}. \quad (10.3)$$

只要用 $(d - b)$ 来代替 d 罢了。

电容按一定因子增大，而这个因子取决于 (b/d) ，即被导体所占的体积与原来空间体积的比例。

上述实验结果为我们提供了一个关于电介质到底是怎么回事的形象化模型——在材料内部有许多会导电的小片。这么一个模型的困难在于它具有某一特定轴，即那些片的法线，而大多数电介质却没有这么一种轴。然而，若我们假定所有介电材料都含有彼此绝缘分开的小导电球体，如图10-3所示的那样，这一困难则可以消除的。介电常量现象可以通过感生于每个球上的电荷的效应来加以解释。这是用来解释被观察到的法拉第现象的最早有关电介质的物理模型之一。更具体地说，曾经假定材料里每一原子是一个理想导体，但彼此互相绝缘。介电常量 κ 应该取决于这些导电小球体所占空间的比例。然而，这并不是目前常用的模型。

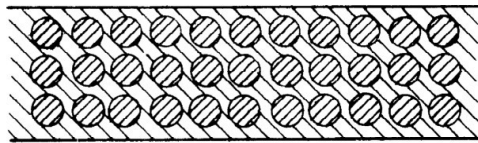


图10-3 关于电介质的一个模型。小导电球体被埋在一块理想绝缘体之中

§10-2 极化矢量 P

如果我们更深入地进行上面的分析，便会发现，关于完全导电性与完全绝缘性范围的概念并不是必要的。每一个小球的作用就像一个电偶极子，而其偶极矩则是由外电场感生的。对于理解电介质所唯一不可缺少的东西是：在该材料里感生了许许多多多个小偶极子。是否由于具备一些小导电球体或由于其他原因才会感生那些偶极子，却是无关紧要的。

如果原子不是一个导电球体，那电场为什么会在原子中感生一个电偶极矩呢？这一课题将留在下一章中做较详尽的讨论，内容会涉及介电材料的内部机制。然而，我们在这里要举出一个例子以显示一种可能的机制。一个原子在其核上带有正电荷，而在其周围则有一些负电子。当处于电场中时，核会被吸引向一方，而电子向另一方。电子的轨道或波形（或用任何一种量子力学图像）将在某种程度上变了形，如图10-4所示，负电荷的重心将移动而不再与核上的正电荷相重合。这样的一种电荷分布我们曾经讨论过。若从远处看，则这么一个电中性位形在一级近似下它相当于一个小的电偶极子。

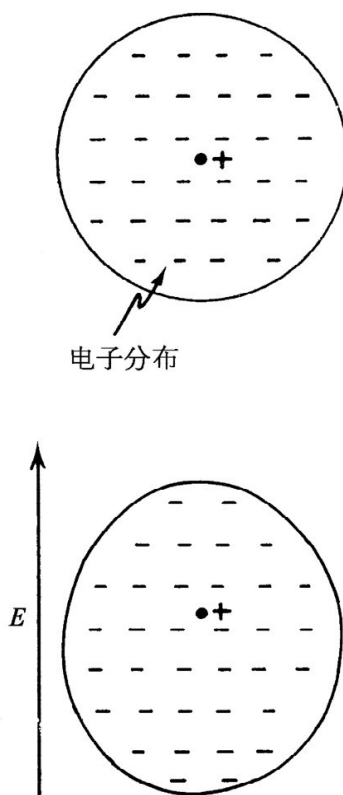


图10-4 电场中原子的电子分布，其中电子相对于核来说已有了移动

这样说似乎更合理：若场不太强，则所感生的偶极矩将与场成正比。这就是说，弱电场将把电荷稍微移动一点，而强电场则把它们移

动得多些——总是与场成正比——除非位移变得太大。在这一章的其余部分，我们将假定电偶极矩严格地与场成正比。

现在我们将设想，在每一原子中存在间距为 δ 的两个电荷 q ，因而 $q\delta$ 就是每一原子的偶极矩（我们采用 δ ，因为已把 d 用于两极板的间距了）。设单位体积中含有 N 个原子，则单位体积的偶极矩 等于 $Nq\delta$ 。这个单位体积偶极矩将用矢量 $\mathbf{P}$ 来代表。不用说，它处在各个电偶极矩的方向，也就是处在电荷位移 δ 的方向：

$$\mathbf{P} = Nq\delta. \quad (10.4)$$

一般说来，在电介质里面 $\mathbf{P}$ 将随位置而改变。可是，在材料中的任一点， $\mathbf{P}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 成正比。这个比例常数取决于电子移位的容易程度，它将与构成该材料的原子种类有关。

实际上是什么东西在决定这个比例常数如何表现，对十分强大的场这个常数保持不变会准确至什么程度，以及在不同材料内部会有什么事情发生，关于这些我们都将在以后讨论。目前，我们将简单假定，存在一种与电场成正比的感生电偶极矩的机制。

§10-3 极化电荷

现在让我们来看看，这一模型对于含有电介质的电容器的理论会提供些什么？首先，考虑其中每单位体积含有一定电偶极矩的一片材料。平均说来，是否会存在由此而产生的任何电荷密度？如果 $\mathbf{P}$ 是均匀的，那就不会有。即如果彼此被相对移了位的正电荷和负电荷都有相同的平均密度，那么它们被移了位这个事实就不会在该体积里产生

任何净电荷。反之，要是 $\mathbf{P}$ 在某一地方较大而在另一地方较小，那就意味着被移进某一区域的电荷比移出的要多。因此，我们会预期得到一个体电荷密度。对于平行板电容器来说，我们假定 $\mathbf{P}$ 是均匀的，因而就只需考虑在表面所发生的情况。在一个表面上，负电荷即电子，实际上被移出了一段距离 δ ；在另一个表面上，它们却向里面移动，因而留下正电荷使之实际上移出一段距离 δ 。如图10-5所示，我们将有一个称为面极化电荷 的面电荷密度。

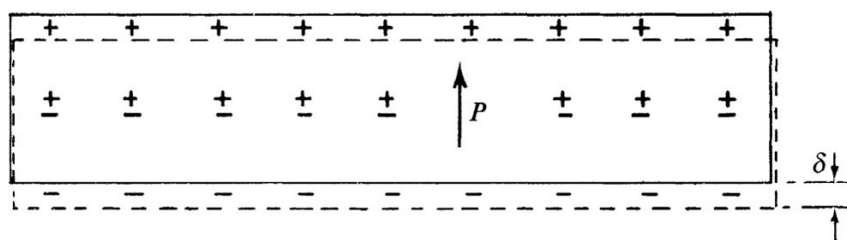


图10-5 在均匀电场中的一片电介质。正电荷相对于负电荷被移动了一段距离 δ

面极化电荷可以这样计算。设 A 为板的面积，则出现在板面上的电子数目应等于 $A \cdot N$ （单位体积的电子数）及位移 δ ——这里假定它与板面垂直——三者的乘积。表面电荷可由此再乘上电子电荷 q_e 而获得。为了得到在表面上感生的极化电荷面密度，我们除以 A 。因此，面电荷密度的大小为

$$\sigma_{\text{极化}} = N q_e \delta.$$

但这恰好等于式（10.4）中极化矢量 $\mathbf{P}$ 的量值：

$$\sigma_{\text{极化}} = P. \quad (10.5)$$

面电荷密度就等于材料内的极化强度。当然，这面电荷在一个面上是正的，而在另一个面上则是负的。

现在让我们假定，上述那块板就是存在于平行板电容器中的电介质。构成电容器的那两块金属板也带有面电荷，这我们将称之为 $\sigma_{\text{自由}}$ ，因为这些电荷可以在导体上到处“自由”移动。当然，这就是对电容器充电时我们放上去的电荷。必须强调， $\sigma_{\text{极化}}$ 之所以存在只是由于有了 $\sigma_{\text{自由}}$ 。如果通过使电容器放电而将 $\sigma_{\text{自由}}$ 移去，则 $\sigma_{\text{极化}}$ 将消失，但它没有沿放电导线跑掉，而是缩回材料里面去了——由于材料内部极化的衰减。

现在，我们可以将高斯定律用于图10-1的那个高斯面 S 。电介质里的电场 E 等于总的面电荷密度除以 ϵ_0 。很明显， $\sigma_{\text{极化}}$ 与 $\sigma_{\text{自由}}$ 具有相反符号，因而

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}} - \sigma_{\text{极化}}}{\epsilon_0}. \quad (10.6)$$

注意！金属板与电介质表面间的电场 E_0 要比 E 大一些，它仅对应于 $\sigma_{\text{自由}}$ 。但这里我们所关心的却是电介质内部的场，如果电介质几乎充满了两板间的缝隙，那么场就遍及几乎整个体积。利用式(10.5)，我们可以写出

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}} - P}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

这个式并不会告诉我们关于电场的样子，除非已知道 P 是什么。然而，这里我们已假定 P 依赖于 E ——实际上是正比于 E 。这个比例式通常写成

$$P = \chi \epsilon_0 E. \quad (10.8)$$

常数 χ 称为该电介质的电极化率。

于是，式（10.7）变成

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \frac{1}{(1 + \chi)}, \quad (10.9)$$

这向我们提供了关于场被减弱的因子 $1/(1 + \chi)$ 。

两板间的电压等于对电场的积分。既然场是均匀的，积分就不过是 E 与两板间距 d 的乘积。我们有

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{自由}} d}{\epsilon_0 (1 + \chi)}.$$

在电容器上的总电荷为 $\sigma_{\text{自由}} A$ ，以致由式（10.2）所定义的电容变成

$$C = \frac{\epsilon_0 A (1 + \chi)}{d} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}. \quad (10.10)$$

我们已解释了所观察到的事实。当一平行板电容器充满了电介质时，其电容就增大这么一个倍数

$$\kappa = 1 + \chi, \quad (10.11)$$

它代表该材料的一种特性。当然，我们的解释还不够完全，要等到已能解释——这将在以后来做——原子极化是怎样产生时才行。

现在，让我们来考虑某种稍微复杂的东西——极化强度 $\mathbf{P}$ 不是处处相同的那种情况。正如上面曾经提到的，如果极化不是常数，一般

会预期在体积内找到电荷密度，因为进入一个小体积元一边的电荷比离开另一边的电荷也许会多一些。我们怎样才能求得到底有多少电荷为一个小体积所获得或丧失了昵？

首先，让我们计算当材料被极化时有多少电荷会通过任一个想象的表面。倘若极化垂直于该表面，则穿过一个表面的电荷量恰好就等于 P 乘以该面积。当然，要是极化与该表面相切，那便不会有任何电荷通过该表面。

按照我们曾经用过的同样的论据，很容易看出，通过任一面积元的电荷将与垂直于该面积的 P 的分量成正比。试比较图10-6和10-5。我们见到在一般情况下，式（10.5）应改写成

$$\sigma_{\text{极化}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (10.12)$$

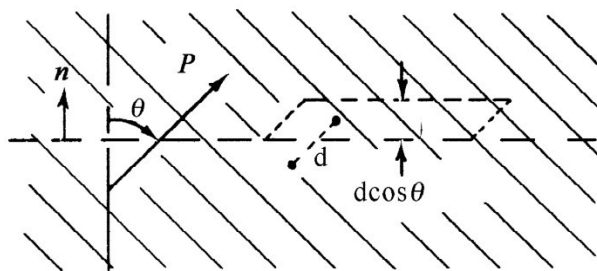


图10-6 在电介质里通过一个想象的面积元的电荷与垂直于该面积的 P 的分量成正比

若我们考虑在电介质里的一个想象的面积元，那么式（10.12）便会给出通过该面积的电荷，但不会形成净电荷，因为该面两边的电介质所贡献的仍是等量异号电荷。

然而，电荷的位移的确能产生体电荷密度。任何体积 V 通过极化向外移出的总电荷等于 P 的向外垂直分量对包围该体积的 S 面的积分

（见图10-7）。一个相等而异号的剩余电荷则被遗留在后头。我们把
在体积 V 内的净电荷记作 $\Delta Q_{\text{极化}}$ ，就可以写出

$$\Delta Q_{\text{极化}} = -\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (10.13)$$

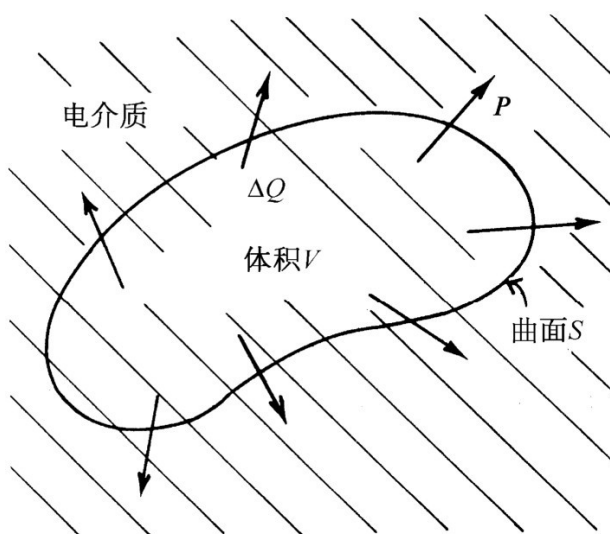


图10-7 非均匀的极化强度 $\mathbf{P}$ 会在电介质体内形成净电荷

还可认为 $\Delta Q_{\text{极化}}$ 是具有密度 $\rho_{\text{极化}}$ 的体电荷分布引起的，因而

$$\Delta Q_{\text{极化}} = \int_V \rho_{\text{极化}} \, dV. \quad (10.14)$$

将这两式结合起来，便得

$$\int_V \rho_{\text{极化}} \, dV = -\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (10.15)$$

我们已有一种把来自极化材料的电荷密度与极化矢量 $\mathbf{P}$ 相联系起来的
高斯定理。可以看到，这与上面在平行板电容器中的电介质表面上的
极化电荷所获得的结果相符。把式（10.15）应用到图10-1中的那个高

斯面上，该面积分给出 $P \Delta A$ ，而在里面的电荷为 $\sigma_{\text{极化}} \Delta A$ ，所以我们又再度获得 $\sigma_{\text{极化}} = P$ 。

正如以前我们对静电学的高斯定律所做的那样，可以将式（10.15）转变成一个微分形式——利用数学上的高斯定理：

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \, dV.$$

我们得：

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.16)$$

若是非均匀极化，则它的散度给出在该材料里的净电荷密度。我们强调，这是完全真实的电荷密度。之所以叫它作“极化电荷”，只是为了提醒我们自己，它是如何得来的。

§10-4 有电介质时的静电方程组

现在，让我们把上述结果同静电学理论结合起来。静电学的基本方程是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10.17)$$

这里 ρ 指一切电荷的密度。由于极化电荷不容易被注意，因而把 ρ 分开成两部分是很方便的。我们再把由非均匀极化所引起的电荷叫作 $\rho_{\text{极化}}$ ，而把所有其他的电荷叫作 $\rho_{\text{自由}}$ 。通常 $\rho_{\text{自由}}$ 指我们放在导体上面的或是置于空间某些特定位置上的电荷。于是，式（10.17）便变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{极化}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{自由}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

或

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (10.18)$$

当然，那个关于 $\mathbf{E}$ 的旋度方程却没有改变：

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.19)$$

由式（10.8）取 $\mathbf{P}$ ，我们便得到一个较简单的方程：

$$\nabla \cdot [(1 + \chi)\mathbf{E}] = \nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (10.20)$$

这些就是当有电介质时的静电学方程组。当然，它们并没有陈述任何新的东西，但对于其中 $\rho_{\text{自由}}$ 为已知、而极化强度 $\mathbf{P}$ 又是正比于 $\mathbf{E}$ 的那些情况，则在计算上它们仍不失为较方便的一种形式。

请注意！我们并没有把介电“常量” κ 提到散度之外。那是因为它不一定会处处相同。如果它的值处处相同，则可以把它提出来，因而方程组就不过是那些用 κ 来除电荷密度 $\rho_{\text{自由}}$ 的静电方程组了。我们所给出的那种形式的方程组仍适用于一般情况，即场中不同地点可能存在不同的电介质。这样，该方程组就可能很不容易求解了。

有一件具有某种历史重要性的事情应在这里提出。在电学的早期，对极化的原子机制还未了解，而 $\rho_{\text{极化}}$ 的存在也未被觉察到。当时

$\rho_{\text{自由}}$ 被认为是全部电荷密度。为了把麦克斯韦方程组写成一简单形式，一个新的矢量 $\mathbf{D}$ 被定义为 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{P}$ 的线性组合：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (10.21)$$

结果，式 (10.18) 和 (10.19) 就曾被写成表面上看来十分简单的形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}}; \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.22)$$

人们能否解出这组方程？只有给出了 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 之间关系的第三个方程才能做到。当式 (10.8) 成立时，这个关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.23)$$

上述方程往往被写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (10.24)$$

其中 ϵ 仍然是描述材料介电特性的另一个常数。它被称为“电容率”（现在你就明白，为什么在我们方程组中会有 ϵ_0 ，它是“真空的电容率”）。显然，

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 = (1 + \chi) \epsilon_0. \quad (10.25)$$

今天我们从另一个观点来看待这些事情，那就是，在真空中方程组较为简单，而倘若在每种情况下我们把一切电荷（不管其来源如何）都表示出来，则该方程组总是正确的。如果为了方便我们将其中

某些电荷分离开来，或由于我们不愿意详细讨论将要发生的事态，则可以把方程组改写成任一种可能方便的形式，要是我们乐意的话。

还有一点应该强调，一个像 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 的方程是描写物质特性的一种尝试。可是物质非常复杂，而这样一个方程实际上并不正确。例如，若 $\mathbf{E}$ 变得太大，那么 $\mathbf{D}$ 便不再正比于 $\mathbf{E}$ 。对于某些物质来说，甚至在相对弱的电场下这个比例关系就已经破坏了。并且，这比例“常量”还可能依赖于 $\mathbf{E}$ 随时间变化的快慢。因此这一种方程，像胡克定律一样，是一种近似。它不可能是一个深刻而又基本的方程。反之，我们关于 $\mathbf{E}$ 的基本方程组，式 (10.17) 和 (10.19)，却代表我们对静电学的最深刻而又最完整的理解。

§10-5 有电介质时的场和力

现在，我们将证明在电介质存在的情况下，关于静电学的某些相对普遍的定理。我们已经看到，如果电容器的两平行板之间充满了电介质，则电容会增大某一定因子。还可以证明，这对于任何形状的电容器都是正确的，只要在两个导体附近的整个区域里都充满一种均匀的线性电介质就行。在没有电介质时，待解的方程组为：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0.$$

当有电介质时，前一个式给修改了。因而，我们代之而有：

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.26)$$

现在，由于我们认为 κ 处处相等，这最后两方程还可以写成：

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times (\kappa \mathbf{E}) = 0. \quad (10.27)$$

因此，对于 $\kappa \mathbf{E}$ 和对于 $\mathbf{E}_0$ 就有相同的方程组，它们具备 $\kappa \mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ 的解。换句话说，比起没有电介质时的情况，场处处都减弱了一个因子 $1/\kappa$ 。由于电压是电场的线积分，所以电压也被降低了这同一因子。由于电容器电极上的电荷在两种情况下都被认为是相同的，式（10.2）就告诉我们，在一个处处都充满着均匀电介质的情况下，电容增大了 κ 倍。

现在我们要问，在有电介质时两个带电导体之间力该如何？考虑一种处处均匀的液态电介质。我们早已知道，一种求力的方法是把能量相对于一适当距离取微商。如果两导体上的电荷等量异号，能量就是 $U = Q^2 / (2C)$ ，其中 C 为它们的电容。利用虚功原理，任何一个分力都由微商给出。例如，

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (10.28)$$

由于电介质会给电容增大一个因子 κ ，因此所有力就将减少相同的因子。

必须强调，我们上面所说的只有对于液态电介质才正确。嵌在固态电介质里的导体的任何运动，都会改变电介质的机械应力条件，以及不但引起电介质里某种机械能量的变化，而且改变其电学性质。在液体中移动导体，则不会使液体发生变化。液体会移至一个新的地方，但它的电学性质却没有改变。

许多较古老的电学书往往从这样一个“基本”定律出发，即两电荷间的力为

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \kappa r^2}, \quad (10.29)$$

这种观点完全不能令人满意。其一是，它并非普遍正确，它只对充满某种液体的世界才正确。其次，它有赖于 κ 是常数这么一个事实，这对于大多数实际材料来说只是近似正确。从电荷处于真空中的库仑定律出发会好得多，那永远是正确的（对于静止电荷来说）。

在固体中究竟会发生什么呢？这是一个十分困难的问题，至今还未得到解决，因为在某种意义上它是不确定的。如果你把电荷放进一固态电介质里面去，就将涉及各种压强和应变。假如不把压缩固体所需的机械能量也包括进去的话，就不能同虚功原理打交道。而一般说来，要对电力和起因于固体材料本身的机械力做出唯一的区别是相当困难的。幸而，实际上还没有人需要弄清楚所提问题的答案。他有时可能想要知道在一固体中将产生多少应变，而这是能够算出的，但比起我们对于液体所获得的那种简单结果要复杂得多。

在电介质理论中有一个非常复杂的问题：为什么一个带电物体会吸起一些小块电介质？如果你在一个干燥的日子里梳一下头发，那梳子会立即吸起一些小纸片来。如果你偶然想起这件事，你大概认为梳子上有一种电荷而纸片上则有与之异号的电荷。但纸片开始时是电中性的。它并没有任何净电荷，但不管怎样它终于被吸引了。真的！有时纸片会来到梳子上，然后又飞开，在它接触到梳子之后就立刻被排斥了。这其中原因当然在于：当纸片接触到梳子时，获得了一些负电荷，此后同号电荷便互相排斥了。但这并没有回答原来的问题。首先，为什么纸片会朝着梳子跑 come 呢？

答案得用电介质放在电场中时会被极化来求得。两种符号的极化电荷都存在，它们分别被梳子所吸引和排斥。然而，会有一个净吸引力，因为靠近梳子一边的电场比远离梳子那一边的电场较强——梳子并非一个无限大板块。它的电荷是局域性的。一块电中性纸片在一个平行板电容器里将不会被哪一块板所吸引。电场的变化才是这个吸引机制的本质部分。

如图10-8上所示，一块电介质总是从一弱场区域被拉向场较强的区域。事实上，人们能够证明，对于细小物体这个力正比于场强平方的梯度。为什么会取决于场的平方呢？因为那些感生电荷与电场成正比，而对于已给定的电荷其所受的力又正比于场。然而，正如刚才我们所指出的，只有当场的平方逐点变化时才会有一个净力。所以力就正比于场平方的梯度了。比例常数除含有其他东西之外，还包括物体的介电常量，并依赖于物体的大小和形状。

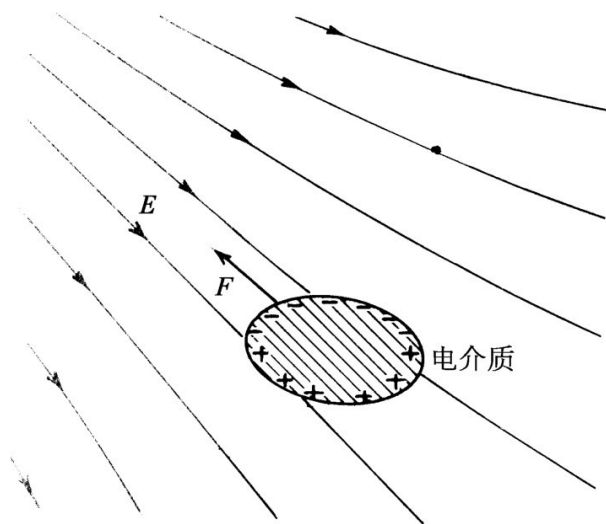


图10-8 电介质在非均匀场中会感到一个指向场强较高的区域的力

有一个与此相关的问题，其中作用于电介质上的力可以很准确地算出。如果在平行板电容器中有一片电介质只部分地插入，如图10-9

所示，则将有一个力要把它拉进去。对这个力作详细分析是十分复杂的，它同该片电介质与两板边缘附近场的非均匀性有关。然而，若我们不考察这些细节，而只是引用能量守恒原理，便能轻易地算出这个力来。我们可从以前所导出的公式求得这个力。式（10.28）等价于

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10.30)$$

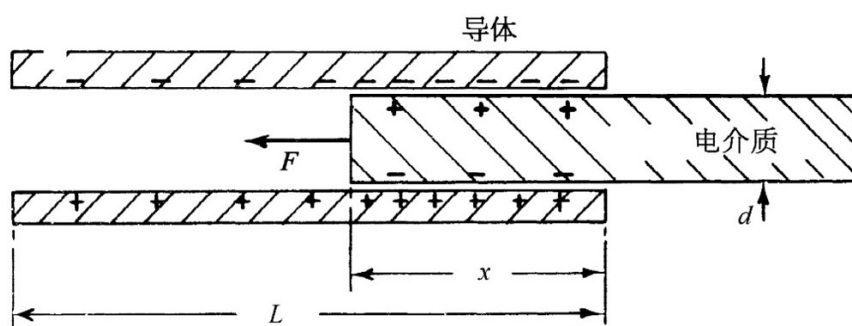


图10-9 作用置于一平行板电容器中的一片电介质上的力可通过应用能量守恒原理而算出

所以我们只需求出电容是如何随该块电介质的位置而变化的。

让我们假设板的总长为 L ，宽为 W ，两板间距和电介质厚度都是 d ，而该片电介质插入的距离为 x 。电容等于板上的总自由电荷除以两板间的电压。我们在上面已经见到，对于已知电压 V ，自由电荷的面密度为 $\kappa\epsilon_0 V/d$ 。因而板上的总电荷就是

$$Q = \frac{\kappa\epsilon_0 V}{d} xW + \frac{\epsilon_0 V}{d} (L-x)W,$$

由此可以得到电容：

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa x + L - x). \quad (10.31)$$

应用式 (10.30)，便有

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa - 1). \quad (10.32)$$

现在这个式子并不是对任何事情都特别有用，除非你碰巧需要知道在这种情况下力。我们只希望表明在求作用于电介质材料上的力时能量理论往往能避免一大堆复杂性——正如在目前情况下本来就应该有的那些复杂性。

上面关于电介质理论的讨论我们只涉及电现象，即承认材料的极化与电场成正比的事实。为什么会存在这样一个正比性，也许对物理学更有重大意义。一旦我们从原子的观点理解了介电常量的起源，我们便能运用在各种不同环境下对介电常量的电学测量结果来获得有关原子或分子结构的详细信息。这方面的部分问题将在下一章加以讨论。

第11章 在电介质内部

§11-1 分子偶极子

在本章我们将讨论为什么某些材料会是电介质。我们在上一章中曾说过：当一电场作用于电介质上时，场将在原子中感生一偶极子。一旦领会了这点，我们就可能理解那些含有电介质在内的带电系统的性质。具体地说，若电场 E 在单位体积里感生了一个平均偶极矩 P ，则介电常量 κ 由下式给出：

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}. \quad (11.1)$$

我们已经讨论过如何应用这个方程。现在我们得讨论当材料内部存在电场时极化发生的机制。从最简单的可能例子——气体的极化——谈起。但即使是气体，已经较复杂。气体存在两种类型。某些气体，如氧气，它们的每个分子含有对称的原子对，因而不会存在内禀偶极矩。但其他分子，如水蒸气（含有氢和氧两种原子的非对称排列），则有一永久电偶极矩。正如我们在第6章中曾经指出的那样，在水蒸气分子中的那些氢原子上存在着平均正电荷而氧原子则带有负电荷。由于负电荷的重心与正电荷的重心不一致，所以该分子的总电荷分布就具有偶极矩。像这样的分子叫作极性分子。在氧中，由于分子的对称性，正电荷重心与负电荷重心重合，因而氧分子就是一个非极性分子。然而，当氧被置在电场中时，它仍然会变成一个偶极子。这两种类型的分子形状如图11-1所示。

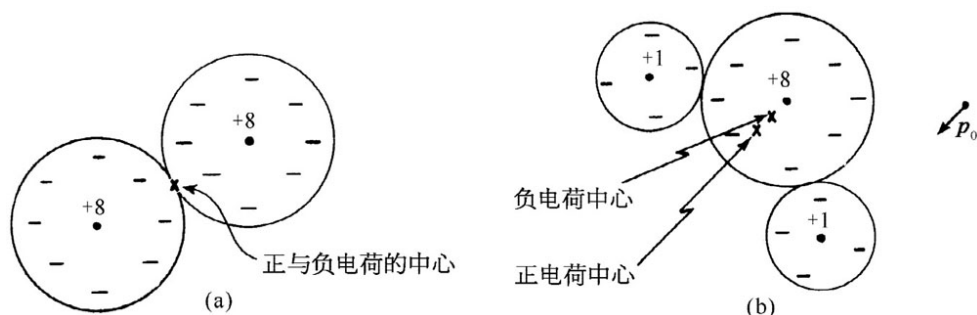


图 11-1 (a) 氧分子具有零偶极矩；(b) 水分子具有永久偶极矩 p_0

§11-2 电子极化强度

我们将首先讨论非极性分子的极化。可以从最简单的单原子气体（例如氦）开始。当这样一种气体的原子处在电场中时，电子会被场拉向一边而核则被拉向另一边，如图10-4所示。虽然相对于我们在实验上所能施加的电力来说原子是十分坚硬的，但是电荷中心仍存在微小的净位移，从而感生了一个偶极矩。对于弱场来说，这位移量、也就是偶极矩，与电场成正比。产生这种感生偶极矩的电子分布的位移称为电子的极化。

过去与折射率理论打交道时，我们曾在第1卷第31章中讨论过电场对原子的影响。如果你稍微思考一下便将看到，现在我们应该做的和那时做过的完全相同。但现在需要操心的只是不随时间变化的场，而折射率却与随时间变化的场有关。

在第1卷第31章中我们曾经假定，当原子被置于振动的电场中时，原子内电子的电荷中心会遵循下列方程而运动：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = q_e E. \quad (11.2)$$

式中，第一项为电子质量乘以其加速度，第二项为恢复力，而右边那一项则代表来自外电场的力。若电场以频率 ω 变化，则方程式（11.2）的解为

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (11.3)$$

这表明，当 $\omega = \omega_0$ 时，会发生共振。当以前得到这个解时，我们曾把它理解为该式表明 ω_0 是光（到底是在可见光区还是在紫外光区，则取决于该原子）被吸收的频率。然而，现在我们感兴趣的却只是恒定场的情况，也就是，只对于 $\omega = 0$ 的场有兴趣，因而可以将式（11.2）中的加速度项略去，并得出电荷的位移为

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}. \quad (11.4)$$

由此可见，单个原子的偶极矩为

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \quad (11.5)$$

在上述这种理论中，偶极矩 p 确与电场成正比。

人们经常把上式写成：

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (11.6)$$

（ ϵ_0 又一次由于历史原因而被放了进去）。其中常数 α 称为原子的极化率，并具有 L^3 的量纲。它是由电场在原子中感生一个偶极矩的难易

程度的一种量度。将式（11.5）和（11.6）两者比较，我们这一简单的理论讲

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.7)$$

设单位体积中共有 N 个原子，则单位体积的极化强度 $\mathbf{P}$ 就是

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p} = N \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (11.8)$$

把式（11.1）和（11.8）两者合并在一起，我们得到

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = N \alpha, \quad (11.9)$$

或者，利用式（11.7），可得

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.10)$$

从式（11.10）我们会预料到不同气体的介电常量 κ 可能与该气体的密度及其对光的吸收频率有关。

当然，上述公式只是一种近似，因为在式（11.2）中我们所选择的模型略去了量子力学的复杂性。例如，我们曾经假定每个原子仅有一个共振频率，而实际上却有许多个。为了正确地计算原子的极化率 α ，我们必须应用完整的量子力学理论，但上面的经典概念却已为我们提供了一个合理的估计。

让我们来看看，对某种物质的介电常量我们是否能得到一个正确的数量级。假定我们对氢做尝试，过去（在第1卷第38章中）就曾估计

过电离一个氢原子所需的能量约为

$$E \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad (11.11)$$

为了对那个固有频率 ω_0 做出估计，可以令这一能量等于 $\hbar \omega_0$ ——即固有频率为 ω_0 的原子振子的能量。这样我们就得到：

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3}.$$

若现在把 ω_0 的这个值应用于式（11.7），则可求得电子极化率为：

$$\alpha \approx 16\pi \left[\frac{\hbar^2}{me^2} \right]^3. \quad (11.12)$$

$[\hbar^2/(me^2)]$ 这个量是玻尔原子的基态轨道半径（见第1卷第38章），等于0.528 Å。因处于标准压强和标准温度（1 atm、0°C）下的气体每立方厘米都具有 2.69×10^{19} 个原子，所以式（11.9）就给出：

$$\kappa = 1 + (2.69 \times 10^{19}) 16\pi (0.528 \times 10^{-8})^3 = 1.00020. \quad (11.13)$$

氢气的介电常量已测定为

$$\kappa_{\text{实验}} = 1.00026.$$

由此可见，我们的理论已差不多正确了。不应该期望任何比此更佳的结果，因为测量当然是用正常氢气进行的，所以它所含的是双原子分子，而不是单原子分子。如果分子中各原子的极化与彼此分开的原子

的极化不完全相同，那应不足为怪。可是，实际上分子效应却不是那么大。对于氢原子的 α 进行严格的量子力学计算给出比式（11.12）约大12%的结果（即将 16π 改变成 18π ），因而预言一个更接近于观察值的介电常量。不管怎样，我们上述的电介质模型显然已相当之好。

对上述理论的另一个考验，是将式（11.17）试用于具有更高激发频率的那些原子。例如，需要有24.6 eV才能将氦原子中的电子拉出来，这可与电离氢所需的13.6 eV做比较。因此，我们会期待，氦的吸收频率 ω_0 应比氢约大一倍，从而它的 α 可能为氢的四分之一大。从式（11.13），我们期待：

$$\kappa_{\text{氦}} \approx 1.000\ 050.$$

实验值为

$$\kappa_{\text{氦}} = 1.000\ 068.$$

所以你们可以看到，我们的粗糙估计方向是对头的。至此，我们已了解非极性气体的介电常量，然而那不过是定性的，因为我们还未用到有关原子中电子运动的那种正确的原子理论。

§11-3 极性分子；取向极化

其次，我们将考虑具有永久电偶极矩 $\mathbf{p}_0$ ——如水分子那样——的分子。在没有电场时，各个偶极子指向处于无规方向，从而使单位体积内的净矩为零。但是当加上电场后会发生两件事。首先，由于场对电子施加了力，所以有额外偶极矩被感生，这部分给出的电子极化

率，其种类恰巧与我们对非极性分子所求得的电子极化率相同。当然，对十分精密的工作，这一效应是应该包括进去的，但目前我们将加以忽略（在最后总是可以加上去的）。其次，电场倾向于将各个偶极子排列起来从而在每个单位体积中产生一个净矩。假使气体中所有偶极子都整齐地排列起来了，则会产生很大的极化强度，但这种现象却从未发生过。在通常温度和电场的作用下，分子因热运动而发生的相互碰撞使它们排列得很不整齐。但总会有某种净的取向，因而也就有某种极化（见图11-2）。这里出现的极化可以通过第1卷第40章中所描述的那种统计力学方法来加以计算。

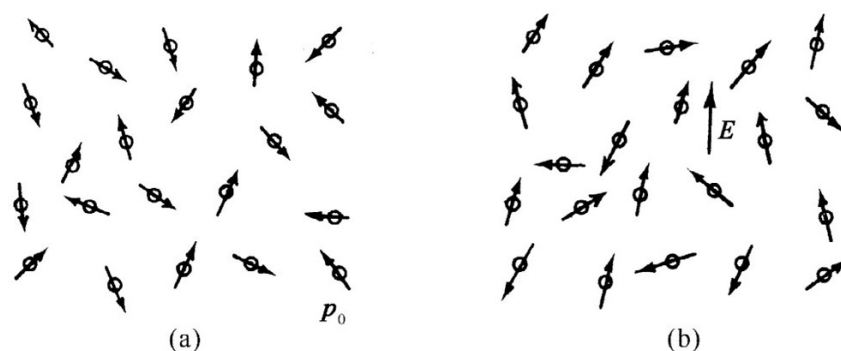


图11-2 (a) 在极性分子的气体中，各个偶极矩的取向是无规的，在一小体积里的平均矩为零；(b) 当有电场时，分子们就有某种平均取向了

要运用这种方法就需要知道偶极子在电场中的能量。考虑一个电偶极矩 $\mathbf{p}_0$ 处在电场之中，如图11-3所示。正电荷的能量为 $q\phi$ (1)，而负电荷的能量为 $-q\phi$ (2)。于是偶极子的能量为

$$U = q\phi \text{ (1)} - q\phi \text{ (2)} = q \mathbf{d} \cdot \nabla \phi,$$

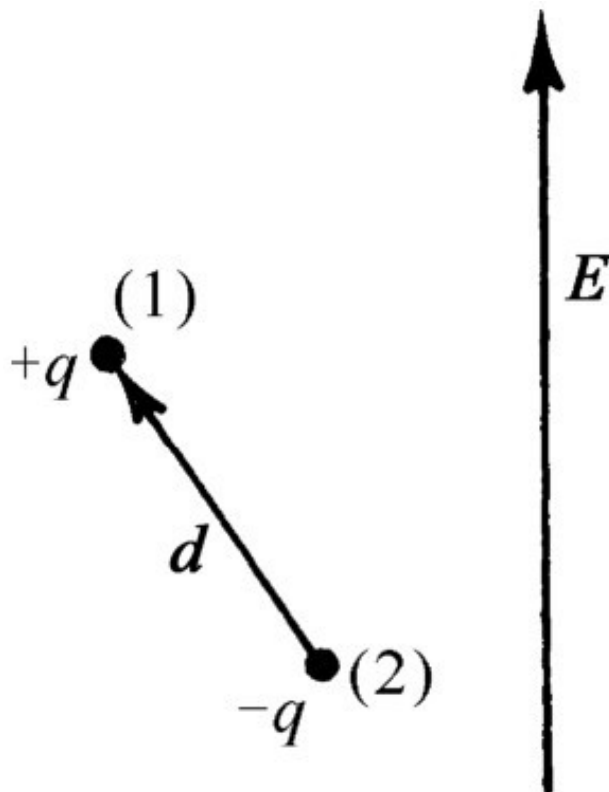


图11-3 在场 E 中一个偶极子 p_0 的能量为 $-p_0 \cdot E$

或

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos\theta, \quad (11.14)$$

其中 θ 是 $\mathbf{p}_0$ 与 $\mathbf{E}$ 间的夹角。正如我们会预料到的，当偶极矩沿着电场方向排列时其能量就最低。

现在，我们利用统计力学方法来求出会有多少取向排列发生。从第1卷第40章中就求得，在热平衡态具有势能 U 的分子其相对数目正比于

$$e^{-U/kT}, \quad (11.15)$$

式中 $U(x, y, z)$ 是作为位置函数的势能。相同的论证会说：若采用式(11.14)作为角度函数的势能，则在角度 θ 处单位立体角的分子数目正比于 $e^{-U/kT}$ 。

令 $n(\theta)$ 为在角度 θ 处单位立体角的分子数目，我们便有

$$n(\theta) = n_0 e^{+p_0 E \cos \theta / kT}. \quad (11.16)$$

对正常的温度和电场来说，这指数值很小，因此可以通过对指数函数展开而取其近似式

$$n(\theta) = n_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \right). \quad (11.17)$$

如果把式(11.17)对所有角度积分，则我们可以求得 n_0 。积分结果应恰好等于 N ，即单位体积的分子数目。 $\cos \theta$ 遍及所有角度的平均值为零，因而这一积分就刚好等于 n_0 乘以总立体角 4π 。我们得到：

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \quad (11.18)$$

由式(11.17)可以看出，沿场取向($\cos \theta = 1$)的分子比逆着场取向($\cos \theta = -1$)的分子要多，因而在任何含有许多个分子的小体积里每个单位体积都将有净的偶极矩——也即极化强度 P 。要算出 P ，必须得到单位体积内所有分子偶极矩的矢量和。由于我们知道这结果将沿着 $\mathbf{E}$ 方向，所以，我们将仅仅对这个方向上的分量求和（垂直于 $\mathbf{E}$ 的分量之和将为零）：

$$P = \sum_{\text{单位体积}} p_0 \cos \theta_i.$$

可以通过对整个角分布的积分而算出这个和。在 θ 处的微立体角为 $2\pi \sin \theta d\theta$ ，因而

$$P = \int_0^\pi n(\theta) p_0 \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (11.19)$$

把由式(11.17)得到的 $n(\theta)$ 代入，我们有

$$P = -\frac{N}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) p_0 \cos \theta d(\cos \theta),$$

上式很容易积分而给出：

$$P = \frac{N p_0^3 E}{3kT}. \quad (11.20)$$

由于极化强度与场 E 成正比，所以会有正常的电介质行为。并且，正如我们所预期的，极化强度与温度成反比，因为在较高温度时由于碰撞，不整齐排列的分子就多。这个 $1/T$ 的依赖关系叫作居里定律。永久偶极矩 p_0 之所以出现平方有下述原因：在一给定电场中促使分子排列整齐之力与 p_0 成正比；而由分子排列整齐所产生的平均矩又与 p_0 成正比。于是平均感生矩就会正比于 p_0^2 。

现在应该试着看看式(11.20)与实验符合的程度怎样？让我们考察水蒸气的情况。由于还不知道 p_0 是什么，所以就不能直接算出 P

来，但式（11.20）确实预言 $\kappa - 1$ 应与温度成反比，这点我们应该加以核对。

由式（11.20）得到

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3 \epsilon_0 k T}, \quad (11.21)$$

因而 $\kappa - 1$ 应正比于密度 N ，而反比于绝对温度。介电常量曾在几个不同压强和温度时测量过，对压强和温度的这种选取可使单位体积里的分子数能保持固定不变^[1]（注意！假如测量在恒压下进行，则单位体积里的分子数会随温度的升高而线性地减少， $\kappa - 1$ 将按 T^{-2} 变化，而不是按 T^{-1} 变化）。在图11-4中，我们把从实验观测到的 $\kappa - 1$ 作为 $1/T$ 的函数而图示出来。由式（11.21）所预期的那种依存关系遵循得很好。

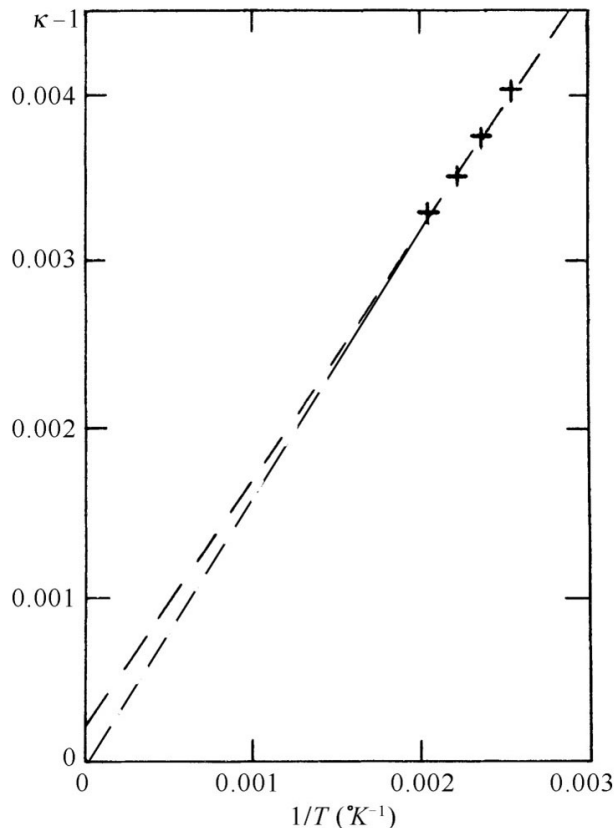


图11-4 在不同温度下水汽介电常量的实验测量

极性分子的介电常量还有另一种特性——随外加电场的频率变化。由于分子具有转动惯量，要使那些笨重分子转向场的方向就需要一定的时间。因此，若所加电场的频率在微波区或者更高，则对于介电常量极性的贡献开始下降，因为分子不可能跟随变化。与此相反，即使高至光频，电子的极化率仍保持不变，这是由于电子惯性较小的缘故。

§11-4 电介质空腔里的电场

现在要转到一个有趣而又复杂的问题——致密材料中的介电常量问题。假设我们选取液态氦或液态氩，或其他某种非极性材料，我们

仍将期待会有电子极化。可是在致密材料中， $\mathbf{P}$ 可以很大，从而使作用在各个别原子上的场会被其近邻原子的极化所影响。问题在于，作用于各个别原子上的电场究竟如何？

设想有一液体被置于一电容器的两极之间。若板上带电，则这些电荷将在液体里产生一个电场。但在各个别原子中也有电荷，因而总场 $\mathbf{E}$ 便是这两种效应之和。这一真正电场在液体里从一点至另一点变化得十分迅速。这电场在原子内部很强——特别是刚好在核附近——而在原子与原子之间就相对弱了。两板间的电势差是对这一总场的线积分。若略去一切微小尺度上的变化，则可以认为存在一个平均电场 $\mathbf{E}$ ，它恰好就是 V/d （这是上一章中我们所曾采用过的场）。应该把这个场想象成在一个含有许多个原子的空间内的平均场。

现在你也许认为，一个处在“平均”位置上的“平均”原子会感觉到这一个平均场。可是事情却并不那么简单，若想象电介质中有不同形状的空腔，则通过考虑里面所发生的情况就可证明这点。例如，假设在一块被极化了的电介质里挖出一个槽来，该槽的取向与电场平行，如图11-5（a）所示。由于我们知道 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，故在环绕图（b）所示曲线 Γ 所取的线积分就应等于零。槽中的场所提供的贡献必定恰好抵消来自槽外的场的贡献。因此，实际上在一条狭长槽的中心处得到的场 E_0 等于在电介质里找到的平均电场 $\mathbf{E}$ 。

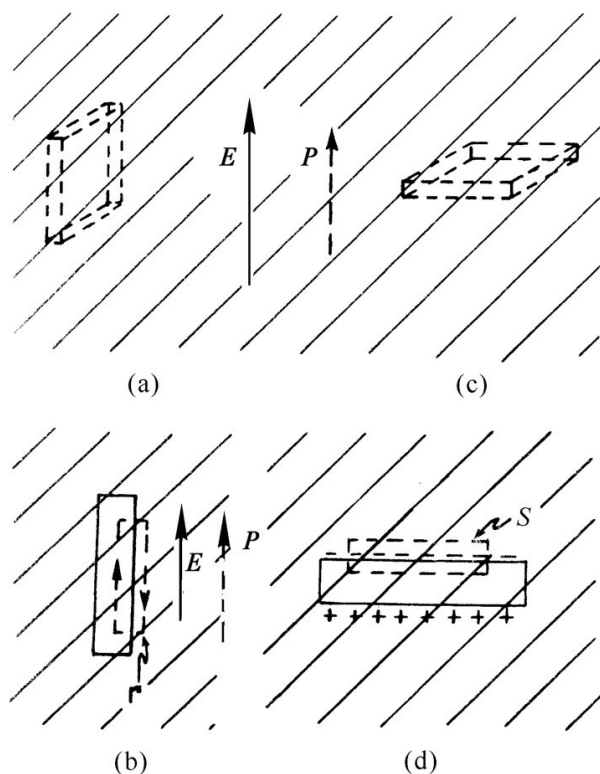


图11-5 从电介质里切割出一个槽来，槽中的场取决于该槽的形状及取向

现在考虑大的侧面与 E 垂直的另一种槽，如图11-5（c）所示。在这种情况下，槽里的场 E_0 就不同于 E ，因为极化电荷出现在槽面上了。如果我们应用高斯定律于图（d）中所画出来的那个 S 面，则发现槽里的场 E_0 由下式给出：

$$E_0 = E + \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (11.22)$$

式中 E 仍然是电介质中的场（该高斯面中含有面极化电荷 $\sigma_{\text{极化}} = P$ ）。我们曾在第10章中提及， $\epsilon_0 E + P$ 这个量常称为 D ，因而 $\epsilon_0 E_0 = D$ 就等同于在电介质里的 D 。

在物理学较早期的历史中，当时人们认为每个量都要直接由实验来下定义是非常重要的，因而当发现不必在原子之间到处爬行就能够给电介质里的 E 和 D 下定义时，感到十分喜悦。平均场 E 在数值上就等于平行于场的槽中所量得的场 E_0 。通过挖一个垂直于场的槽，并求得其中的 E_0 ，从而可测得场 D 。但从来没有人按照这种办法把它们测量出来，因而那不过是一种哲学上的东西而已。

对于结构不太复杂的大多数液体来说，我们可以期待：平均地说一个原子发现自己受到其他原子的包围，作为很好的近似，认为它处在一个球形的空腔之中。因此，我们就会问：“在一个球形空腔中的场到底怎样？”注意！若在一块均匀极化材料中，设想挖出一个球形空腔，那不过是把极化材料中的一个球体移出去罢了，这样就可将腔里之场找出来（我们必须想象，在挖出该空腔之前极化已被“冻结”了）。然而，根据迭加原理，在该球体移出之前，电介质内部的场等于球体体积外所有电荷的场再加上极化球内部电荷之场。这就是说，若我们把在均匀电介质里的场叫作 E ，则可以写成

$$E = E_{\text{空腔}} + E_{\text{塞子}} \quad (11.23)$$

式中， $E_{\text{空腔}}$ 指在该腔里之场，而 $E_{\text{塞子}}$ 则为一个均匀极化球内部的场（见图11-6）。由一个均匀极化球所产生的场，如图11-7所示。在这个球体之内，场是均匀的，其值为

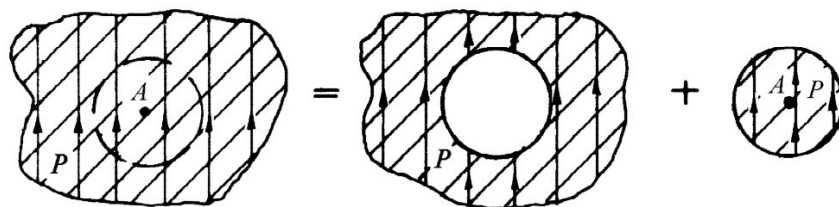


图11-6 介质内任一点 A 的场，可认为是一个球形空腔里的场与一个球形塞子所产生的场之和

$$E_{\text{塞子}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.24)$$

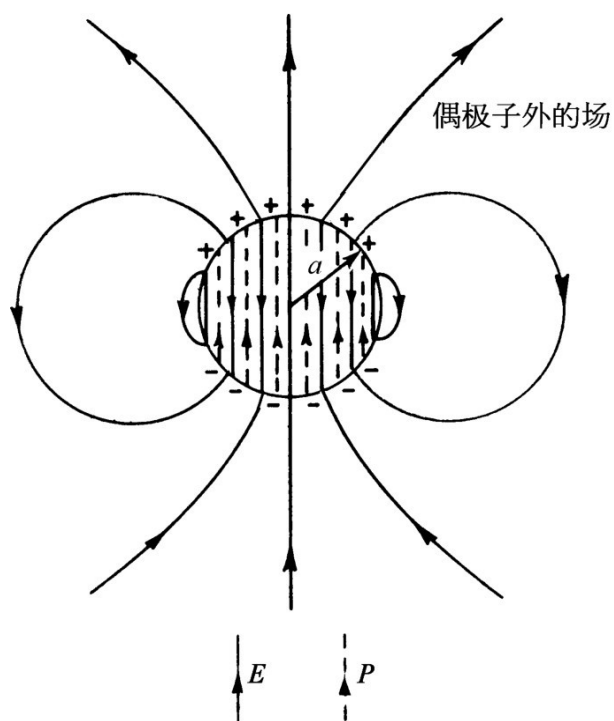


图11-7 一个均匀极化球体的电场

应用式 (11.23)，我们得到

$$E_{\text{空腔}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.25)$$

在一个球形空腔里的场比平均场要大 $P/3\epsilon_0$ （系数1/3表明，球形空腔里的场介于平行于场的槽内的场和垂直于场的槽内的场之间）。

§11-5 液体的介电常量；克劳修斯-莫索提方程

在液体中，我们期待对各个别原子起极化作用的场类似 $E_{\text{空腔}}$ ，而不是 E 。如果把式（11.25）的 $E_{\text{空腔}}$ 用作式（11.6）中的极化场，则式（11.8）变成

$$P = N\alpha\epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad (11.26)$$

或

$$P = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3} \epsilon_0 E. \quad (11.27)$$

回忆一下， $\kappa - 1$ 正好是 $P / (\epsilon_0 E)$ ，因而有

$$\kappa - 1 = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3}. \quad (11.28)$$

这为我们提供了用原子极化率 α 表达的液体介电常量。式（11.28）称为克劳修斯-莫索提方程。

每当 $N\alpha$ 非常小时，如在气体那种情况（因为密度 N 很小），于是项 $N\alpha/3$ 与1相比可以忽略，因而我们得到以往那个结果，即式（11.9），

$$\kappa - 1 = N\alpha . \quad (11.29)$$

让我们拿式（11.28）同某些实验结果进行比较。有必要首先考虑能用 κ 的测量值通过式（11.29）算出 α 来的那些气体。例如，对于在0°C的CS₂来说，介电常量为1.002 9，所以 $N\alpha$ 就是0.002 9。气体的密度一般容易算出，而液体的密度则可从手册中找到。液态CS₂在20°C的密度比在0°C时该气体的密度要高381倍，这意味着它处在液体时的 N 比处在气体时高381倍。因而——倘若我们近似地认为CS₂凝结成液体时，其基本原子极化率并不发生变化——在液体中的 $N\alpha$ 便是0.002 9的381倍，即1.11。注意项 $N\alpha/3$ 的值接近0.4，所以就显得极为重要。用这些数字我们预测介电常量等于2.76，与2.64的观测值符合得相当好。

在表11-1中，我们列出了几种不同材料的一些实验数据（从《化学与物理学手册》中得来的），以及按刚才所述的方法由式（11.28）计算出来的介电常量。对于Ar和O₂，观测值与理论值的符合程度甚至比CS₂还要好——而对于CCl₄理论值与观测值的符合程度就不那么好了。大体上，所得结果都表明式（11.28）用起来十分好。

表11-1 由气体的介电常数算出液体的介电常量

物 质	气 体			液 体				
	κ (实验值)	$N\alpha$	密 度	密 度	比 值*	$N\alpha$	κ (预料值)	κ (实验值)
CS ₂	1.002 9	0.002 9	0.003 39	1.293	381	1.11	2.76	2.64
O ₂	1.000 523	0.000 523	0.001 43	1.19	832	0.435	1.509	1.507
CCl ₄	1.003 0	0.003 0	0.004 89	1.59	325	0.977	2.45	2.24
Ar	1.000 545	0.000 545	0.001 78	1.44	810	0.441	1.517	1.54

*比值=液体密度/气体密度。

我们关于式(11.28)的推导仅适用于液体中的电子极化。对于 H_2O 那样的极性分子来说，这个式子就不正确了。如果对水也做同样的计算，便会得出 $N\alpha$ 等于13.2，那意味着在该液体的介电常量为负值，但 κ 的观测值却是80。这一问题牵涉到得对永久偶极矩作正确的处理，而昂萨格(Onsager)就曾指出过正确的方向。现在我们没有时间来讨论这种情况，但若你有兴趣的话，可参考克脱耳(Kittel)所著的《固体物理导论》，书中对这个问题有所论述。

§11-6 固态电介质

现在我们再来讨论固体。关于固体的第一个有意义的事实是，可能存在由某些东西构成的永久极化——即使没有外加电场，那些东西也依然存在。例如，蜡这样一种材料，它含有带永久偶极矩的长形分子。要是你熔解了一些蜡，并当它在液态时就加上一强电场，使得那些偶极矩部分地排列起来，那么当液体凝固时它们将保留原样。当场移去之后，这固体材料仍将具有那遗留下来的永久极化。像这样的固体叫永电体或驻极体。

在永电体的表面上会有永久的极化电荷。它是类似于永磁体的带电体，然而却并不怎么有用，因为来自空气中的自由电荷会被吸引至其表面上，最后抵消了那些极化电荷。永电体被“放了电”，因而便没有可见的外电场了。

在某些结晶物质中，也可以找到自然发生的永久的内部极化强度 P 。在这类晶体中，晶格的每个晶胞都有一个彼此相同的永久偶极矩，如图11-8所示。即使没有外加电场，所有的偶极子仍会指向同一

方向。事实上，许多复杂晶体就都有这种极化现象。但我们平常并没有注意到它，这是由于出现于晶体外面的场已被放了电，正如永电体的情况那样。

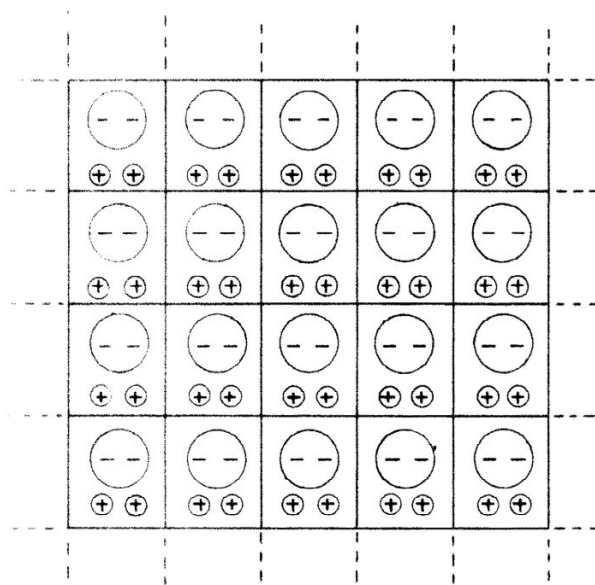


图11-8 复杂的晶格可以有一永久的内禀极化强度 P

然而，如果晶体中这些内在偶极矩发生变化，则由于此时杂散电荷还来不及聚集起来和抵消这些极化电荷，所以外电场会显现出来。如果电介质是在电容器里，那么自由电荷将会感生在极板上。例如，当电介质加热时，其中的电偶极矩可能由于晶体受热膨胀而发生变化，这一效应称为热释电。同样地，如果我们改变晶体中的应力——如把晶体弯曲——偶极矩也可能稍微改变，因而出现微小的电效应，这种效应称为压电效应，它可以被探测出来。

对于那些不具有永久电极矩的晶体来说，我们可以求出一种涉及原子中电子极化率的介电常量理论来。这跟液体的情况差不多。有些晶体内部还存在可转动的偶极子，而这些偶极子的转动也会对 κ 有所贡献。在诸如NaCl这种离子晶体中还有离子极化率。这种晶体由正、

负离子排列而成的方格构成，在电场中正离子会被拉向一边而负离子被拉向另一边；正电荷和负电荷之间有一个净的相对运动，因而也就有了体积极化。根据食盐晶体的硬度知识我们能够估计出这种离子极化率的大小，但这里不打算讨论这一课题。

§11-7 铁电现象； BaTiO_3

现在要来描述一种特殊晶体，几乎仅仅是偶然它才具有内在的永久电极矩。它的情况很接近临界状态，以致若稍微升高一点温度，该晶体便将完全丧失永久电极矩。另一方面，若它们接近于立方晶体，以致它们的矩可以在不同方向被转动，则可以在改变外电场时探测到电极矩大的变动。所有的极矩都翻转过来了，因而得到了大的效应。凡具有这种永久电极矩的物体都称为铁电体，它取名于首先在铁中发现的相应的铁磁效应。

我们愿意通过对铁电材料的一个特殊例子的描述，来解释铁电现象是如何产生的。有几种方法可以产生铁电特性。但我们将仅仅讨论其中一种神秘情况—— BaTiO_3 。这种材料的单胞具有如草图11-9的那种晶格。事实证明，在某个温度以上，具体地说即在 118°C 以上， BaTiO_3 是一种普通电介质，具有巨大的介电常量。然而，低于这一温度，它会突然具有永久电极矩。

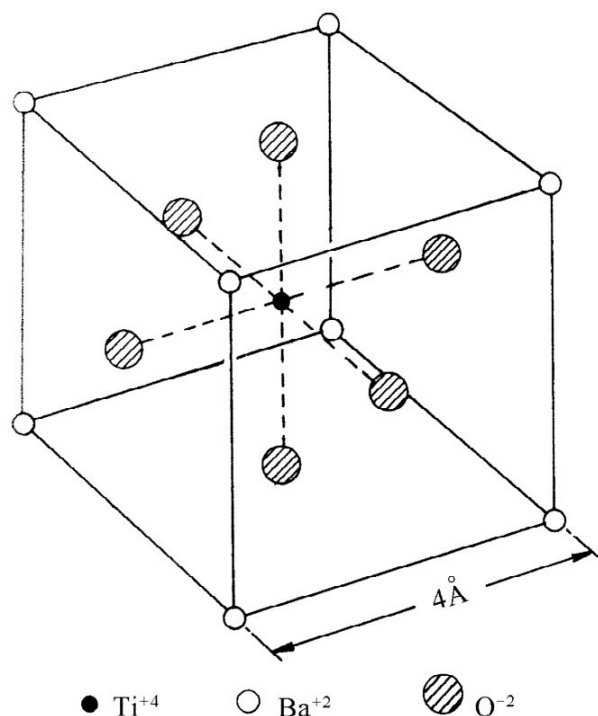


图11-9 BaTiO_3 的一个单胞，原子实际上填充了大部分空间，但为了看起来清楚起见，仅表示出它们的中心位置

在计算固态材料的极化时，我们必须先求得每个元胞处的局部电场。同时还必须将自身极化的场也计算在内，如同上面处理液体的情况那样。但晶体并非均匀液体，因而不能采用在一个球形空腔里可能获得的那种局域场。如果你对该晶体进行计算，就会发现在式（11.24）中的那个因子 $1/3$ 已稍微发生了变化，但与 $1/3$ 仍相距不远（对于简单立方晶体来说，就恰好是 $1/3$ ）。因此，在这里的初步讨论中，我们将假定在 BaTiO_3 中这个因子为 $1/3$ 。

原来当我们在上面写出式（11.28）时你可能就已怀疑，要是 $N\alpha$ 变成大于3那会发生什么情况呢？似乎显出 κ 会变成负数。但这肯定是不对的。让我们来看看，要是在一特定晶体中 α 逐渐增大会出现什么情况。当 α 变大时，极化跟着增加，从而形成了一个较强的局域电

场。可是一个较大的局域电场将使每一原子的极化增强，从而又进一步提高了局域电场。假如原子的“适应性”足够大，则这一过程会继续下去；这里有一种反馈作用，引起了极化的无限度增长——假定每一原子的极化始终正比于场而增长。这个“失控”条件发生在 $N\alpha = 3$ 时。当然，极化不会变成无限大，因为感生极矩与电场之间的正比关系在强场时失灵了，从而使上述的一些公式不再正确。真正发生的情况，是在晶格中已“锁住”了一个自生自长的、高度的内部极化。

在 BaTiO_3 的例子中，除了电子极化之外，还有相当大的离子极化。这可认为是由于钛离子在立方晶格中会稍微移动一点而引起的。不过晶格会阻碍大的运动，因而当钛离子已移过一小段距离后，它就被堵住而停止不动。但这时晶胞却已把一个永久偶极矩保留下来了。

在大多数晶体中，这就是在能够达到的各种温度时的实际情况。关于 BaTiO_3 的这个十分有趣事情，是由于存在这么一个灵敏的条件，即如果 $N\alpha$ 只减少一点点就不会碰到困难了。既然 N 是随温度升高而减少的——由于热膨胀的缘故——我们便能够通过改变温度来调整 $N\alpha$ 。在那临界温度之下它才恰好被固定下来，因而——通过加上电场——就很容易改变极化并把它锁定在另一个方向上。

让我们来看看能否更详细地对所发生的事态进行分析。就把 $N\alpha$ 严格等于3的那个温度叫作临界温度 T_c 。当温度升高时，由于晶格膨胀， N 就减少一些。由于膨胀很小，所以我们便可以说，在临界温度附近

$$N\alpha = 3 - \beta (T - T_c) . \quad (11.30)$$

式中 β 是一个小的常数，它与热膨胀系数的数量级相同，或者约等于 $10^{-6}—10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ 。现在，若我们将这个关系代入式（11.8）中，便可以得到

$$\kappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

由于已假定 $\beta(T - T_c)$ 比1小，因而可以将此式近似地化成

$$\kappa - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_c)}. \quad (11.31)$$

当然，这个关系式仅在 $T > T_c$ 时才是对的。我们看到，恰好在临界温度以上时， κ 非常大。由于 $N\alpha$ 那么接近3，因此就有一个巨大的放大效应，使介电常量可以轻易地高达50 000至100 000。它对温度也非常敏感，当温度升高时，介电常量与温度成反比地降低。可是，与偶极性气体的情况不同，那里的 $\kappa - 1$ 与绝对温度成反比，而对于铁电体它同绝对温度与临界温度两者之差反比地变化（这一定律称为居里-外斯定律）。

当我们把温度降至临界温度时，会发生什么情况呢？如果设想一个像图11-9所示的那种单胞晶格，便会见到有可能选出沿竖直线离子链。在这些链中，有一种是由彼此相间的氧离子和钛离子组成的。还有其他一些线则分别由钡离子或氧离子构成，但沿这些线上的间隔要大些。通过想象出如图11-10（a）所示的一系列离子链我们便可以作出一个简单模型来模拟这种情况。沿着我们所称的主链，其中离子间隔为 a ，等于晶格常量的一半；在彼此全同的链之间，其横向距离为 $2a$ 。在这些主链之间还有一些不那么致密的链，我们暂且不予考虑。为使分析稍微简单些，我们也将假定在各条主链上的所有离子完

全相同（这不是一种极粗略的简化，因为所有一切重要效应仍会出现。这是理论物理的技巧之一。先做另一个问题，因为它较容易解决——然后，在已经理解了事情怎样进行之后，才及时将一切复杂情况都放进去）。

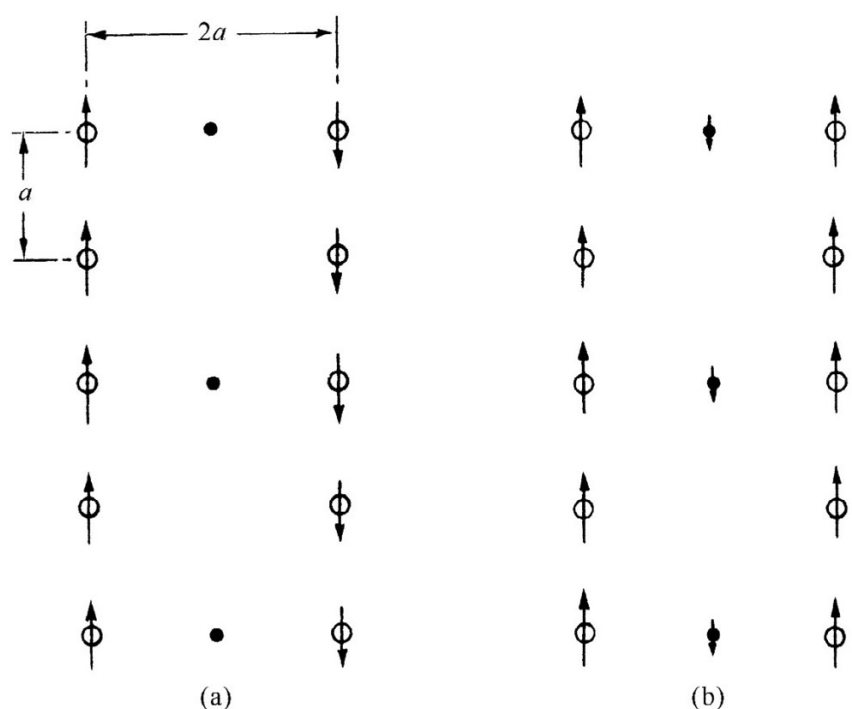


图11-10 关于铁电体的模型。(a) 相当于反铁电体；(b) 相当于正常铁电体

现在，让我们试着按照上述模型找出会发生的事情。我们假定每个原子的偶极矩为 p ，并希望算出链中一个原子处的场，必须求来自其他各原子之场的总和。我们将首先算出仅来自一条竖直链中各偶极子的场，其他的链我们将在以后再谈。沿偶极子轴向并与其相距为 r 处的场由下式给出：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (11.32)$$

作用于任一特定原子上的、由那上下两个等距偶极子所提供的场，方向总是相同，因而对于整条链来说，我们就得到：

$$E_{\text{链}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \cdot \left(2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} + \dots\right) = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{0.383}{a^3}. \quad (11.33)$$

不太难证明：要是我们的模型像一块完整的立方晶体——也就是说，若近邻的全同链只离开 a ——则数值0.383便应改成 $1/3$ 。换句话说，要是近邻一些链位于距离 a 处，这些链对整个和的贡献也不过是-0.050个单位。然而，我们正在考虑的近邻一条主链却在 $2a$ 距离处，而正如你可回忆第7章那里所讲的，来自一个周期性结构的场乃是随距离作指数函数式衰减的。因此，这些链的贡献将远比-0.050为小，这正好使我们可以略去所有其他链的贡献了。

现在，应当找出要使失控过程能够进行必须有多大的极化率 α 。假定链中每一原子的感生极矩 p 正比于作用在它上面的场，如式（11.6）所示。利用式（11.33），就可从 $E_{\text{链}}$ 获得作用于原子上的、使其极化的场。因而便有下列两式：

$$p = \alpha \epsilon_0 E_{\text{链}}$$

和

$$E_{\text{链}} = \frac{0.383}{a^3} \frac{p}{\epsilon_0}.$$

上面这一对方程有两个解： $E_{\text{链}}$ 和 p 均为零；或当 $E_{\text{链}}$ 和 p 均为有限时

$$\alpha = \frac{a^3}{0.383},$$

于是，若 α 与 $a^3/0.383$ 同样大，则由它本身的场所维持的永久极化便将开始。这一临界等式对于 BaTiO_3 来说，必须正好在温度 T_c 时达到（注意，假如 α 高于弱场的临界值，则在强场中 α 应降低，而在平衡态我们已找到的相同等式仍将成立）。

对于 BaTiO_3 来说，间距 a 为 $2 \times 10^{-8} \text{ cm}$ ，因而必然预期 $\alpha = 21.8 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ 。我们可以把它与单个原子的已知极化率做比较。对于氧， $\alpha = 30.2 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ ，看来我们是对头的！但对于钛， $\alpha = 2.4 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ ，那就相当之小。为了运用上述模型，我们大概应当采取它们的平均值（本来也可再度就相间原子的那种链进行计算，但结果却几乎相同）。因此， α （平均） $= 16.3 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ ，它仍未达到足以提供永久极化的程度。

但请等一等！迄今为止我们仅对电子极化率进行了相加。此外，还有由于钛离子移动而引起的某种离子性极化。我们只需要一个等于 $9.2 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ 的离子极化率^[2]（采用相间原子所进行的更精密的计算表明实际上需要的是 $11.9 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ ）。要理解 BaTiO_3 的特性，我们就得假定有这么一种离子极化率存在。

在 BaTiO_3 中，为什么钛离子会有那么大的离子极化率还不清楚。此外，在较低温度时，它在沿体对角线和在沿面对角线上的极化程度为什么会相同，也不明白。如果把图11-9中各球的实际大小都计算

出，并问在由钛的近邻氧离子所构成的箱子中钛离子是否会有点儿松动——那是我们所期望的，以便它较易移动——你却找到完全相反的结果，它被塞得很紧。那些钽原子就有儿松，但要是你仅让它们运动，则算不出那种结果。因此，你会看出，这一课题实际上还没有百分之百弄清楚，仍然存在一些我们希望了解的奥秘。

回到图11-10（a）中的简单模型上来，我们看到来自一条链的场往往会使其邻近的链按相反方向极化，这意味着尽管每一条链会被锁住，但单位体积里却不会有净极矩（这样，虽然不会有外部的电效应，但仍存在某种人们可以观测到的热力学效应）！像这样的系统确实存在，并称为反铁电体。因此，我们刚才所解释的实际上乃是反铁电体。然而， BaTiO_3 确实排列得如图11-10（b）那样。所有的氧钛链都在同一个方向上极化，因为它们之间还有一些中间链存在。尽管这些链中的原子并不是非常极化，也并非十分致密，但仍将在与氧钛链相反的方向上有些极化。这极化作用在近邻一条氧钛链上所产生的弱场就会促使它处于与第一条链相平行的方向。因此， BaTiO_3 的确是属于铁电性的，这是由于在链与链之间还存在一些原子。你或许会觉得奇怪：“在两条氧钛链之间的直接影响又该会怎么样呢？”然而，应当记住，那直接效应是随距离按指数函数减弱的。强偶极子的链在 $2a$ 距离上的效应可能还小于弱偶极子的链在 a 距离上的效应。

这一个目前我们对于气体、液体和固体的介电常量理解的相当详尽的报告就此结束。

[1] 参考：Sanger, Steiger and Gachter. *Helvetica Physica Acta*, 1932, 5 :200.

[2] 按照上述的简单平均法计算，这个数字似乎应是 $11.0 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ 。——译者注

第12章 静电模拟

§12-1 相同的方程组具有相同的解

自科学兴起以来，对于物理世界所获得的知识总数非常繁多，任何人要懂得其中的一个相当部分都似乎是不可能的。但实际上一个物理学家仍很有可能掌握有关物理世界的广泛知识，而不致成为某一狭窄范围内的专家。这里面有三重原因：第一，有一些重大原理可以应用到一切不同种类的现象上去——诸如能量以及角动量的守恒原理。对这些原理的透彻理解会马上导致对许多东西的理解。其次，有这么一个事实，即许多复杂现象，诸如固体在受压缩时的行为，实际上基本取决于电力和量子力学方面的力，所以如果人们理解了电学和量子力学的基本规律，至少对发生于复杂情况下的许多现象就有理解的可能。最后，还有一个最引人注目的吻合：对于多种不同物理情况的方程，都具有完全相同的形式。当然，符号可能不同——一个字母代替了另一个字母——但方程的数学形式却彼此相同。这意味着，已经学习了一个学科，我们便立即拥有大量直接而又精确的关于另一门学科的方程的解的知识。

现在，我们已结束了静电学这一科目，不久便将继续学习磁学和电动力学。但在这样做之前，我们很想指出，在学习静电学的同时就已经学习了许多其他学科。我们将发现，静电学的方程组会出现在物

理学的其他几个场合。通过对解答的直接转译（当然相同的数学方程组必定具有相同的解），就有可能像在静电学中那样同等容易——或同等困难——地去解决在其他方面存在的问题。

我们知道，静电学方程组是：

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}; \quad (12.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (12.2)$$

这里选取了含有电介质的那种静电学方程组，以便得到最普遍的情况。同样的物理内容也可以表达为另外的数学形式：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi; \quad (12.3)$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla\phi) = -\frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (12.4)$$

现在问题的要点在于，有许多物理问题其数学方程都具有相同形式。有一个势（ ϕ ）的梯度乘以一标量函数（ κ ），该积的散度等于另一标量函数（ $-\rho_{\text{自由}}/\epsilon_0$ ）。

我们对静电学所知道的任何东西，都可以立即转移到其他学科里去，反过来也是如此（当然，这是一种双行道——如果在其他学科中某些特定性质为已知，则我们也可把这种知识应用到对应的静电学问题上来）。下面我们要考虑一系列例子，它们都来自能够产生这种形式的方程组的不同学科。

§12-2 热流；无限大平面边界附近的点源

以前（在§3-4中）我们就曾讨论过一个例子——热流。设想有一大块材料，它无须均匀，也可以是在不同地方含有不同材质，而其内部温度是逐点变化的。这些温度变化的结果产生一股热流，由矢量 $\mathbf{h}$ 表示，这代表每秒通过垂直于流向的单位面积的热量。 $\mathbf{h}$ 的散度表示热量从该区域单位体积离开的速率：

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{单位时间内从单位体积流出的热量.}$$

当然，本来也可以将此式写成一积分形式——正如我们以前曾在静电学中用高斯定律处理问题那样——那就会说明：通过一个面的通量等于材料内部热能的变化率。我们不准备自找麻烦，在微分与积分形式之间把方程组变来变去，因为这种变换同静电学的变换一模一样。

在各个地方热的产生率或吸收率当然依问题的不同而异。例如，假设在材料内部有一个热源（也许是一个放射源，或是由电流加热的电阻器）。让我们把由这个源每秒在单位体积中所产生的热能叫作 s 。也可能还有转变成体积内其他类型的内能而引起的热能损失（或获得）。设 u 为单位体积的内能，则 $-du/dt$ 也将是热能的一个“源”。于是我们便有

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt}. \quad (12.5)$$

眼下不打算讨论其中事物随时间变化的完整方程，因为我们正在做静电模拟，这里并没有什么东西与时间有关。我们将仅仅考虑恒定热流问题，其中有些恒定源已产生了一个平衡态。在这些场合下，

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \quad (12.6)$$

当然，还必须用另一个方程来描述在各不同地方热是如何流动的。在许多种材料中，热流近似地正比于温度对位置的变化率：温差越大，热流越强，正如我们曾经见到的，热流这个矢量与温度梯度成正比。比例常数 K 称为热导率，它代表该材料的一种性质。

$$\mathbf{h} = -K \nabla T. \quad (12.7)$$

如果材料的导热性能是随地点而改变的，那么 $K = K(x, y, z)$ 就是一个位置函数〔式(12.7)并不如表达热能守恒的式(12.5)那么基本，因为前者依赖于物质的特性〕。现在我们若把式(12.7)代入式(12.6)中，便有

$$\nabla \cdot (K \nabla T) = -s, \quad (12.8)$$

这与式(12.4)在形式上完全相同。恒定热流问题与静电学问题相同。热流矢量 $\mathbf{h}$ 对应电场 $\mathbf{E}$ ，而温度 T 则对应于 ϕ 。我们已经注意到，一个热源会产生一个按 $1/r$ 变化的温度场和一个按 $1/r^2$ 变化的热流。这不过是从静电学方面来的一种转译，即一个点电荷会产生一个按 $1/r$ 变化的势和一个按 $1/r^2$ 变化的电场。一般说来，我们能够跟解决静电学问题那样，容易地去解决恒定热流问题。

考虑一个简单例子。假设有一个半径为 a 、温度为 T_1 的圆筒，该温度由筒内所产生的热维持着（这可能是一根载电流的导线，或一根其中有蒸汽正在凝结的管道）。这个圆筒外面覆盖着一层绝缘材料的同心护套，这种材料的热导率为 K 。比方说，这绝缘套的外半径为 b ，套外的温度为 T_2 〔图12-1（a）〕。我们要找出该导线、或蒸汽管、或在其轴心上的任何东西的热量损失率。设由长度为 L 的一段管道每秒所损失的总热量为 G ——这就是我们要尝试去求的。

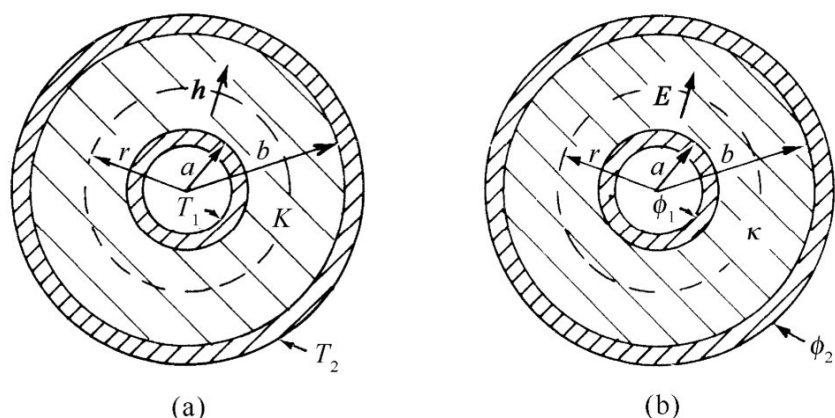


图12-1 (a) 在一个圆筒状几何形体中的热流；(b) 相应的电学问题

如何才能求解这个问题呢？我们已有了上述微分方程，但是由于这些方程和静电学的相同，所以实际上就已解决了该数学问题。类似的电学问题是：一个半径为 a 的圆筒形导体处于势 ϕ_1 ，与处于势 ϕ_2 、而半径为 b 的另一个圆筒形导体分别隔离着，中间填充了一层同轴的电介质材料，如图12-1 (b) 所示，现在既然热流 h 对应于电场 E ，我们所要求的量 G 就对应于出自长度 L 的电场通量（换句话说，对应于在长度 L [1] 上的电荷除以 ϵ_0 ）。我们已用高斯定律解决了静电学问题。对于热流问题，我们也按照相同的步骤来求解。

由对称性可知， h 仅取决于与轴心间的距离 r 。所以我们包围管子作一个长为 L 、半径为 r 的高斯圆柱面。根据高斯定律，我们知道，热流 h 乘以该表面的面积 $2\pi rL$ 便应等于其内部所产生的总热量，这就是我们所称的 G ：

$$2\pi rLh = G \quad \text{或} \quad h = \frac{G}{2\pi rL}. \quad (12.9)$$

热流与温度梯度成正比：

$$\mathbf{h} = -K \nabla T,$$

或者在这种情况下， $\mathbf{h}$ 的大小为

$$h = -K \frac{dT}{dr}.$$

上式同式 (12.9) 一起给出

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi K L r}. \quad (12.10)$$

从 $r=a$ 至 $r=b$ 进行积分，便得

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi K L} \ln \frac{b}{a}. \quad (12.11)$$

解出 G ，得

$$G = \frac{2\pi K L (T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \quad (12.12)$$

这一结果完全对应于圆柱形电容器上的电荷

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 \kappa L (\phi_1 - \phi_2)}{\ln(b/a)}. \quad *$$

*原书式中少了 κ 。——译者注

问题相同，因而有相同的解。我们根据静电学知识，也知道一根隔热管道损失了多少热量。

现在来讨论热流的另一个例子。假设我们要知道位于地下离地表不远或在一大块金属表面附近的一个点热源周围的热流，这个定域热源也许是一个在地下爆炸了的原子弹所留下来的一个强烈热源，或许相当于在一大块铁中的一个小小放射源——总之会有种种可能性。

我们将处理这样一个理想化的问题，即一个强度为 G 的点热源置于一块无限大均匀材料——其热导率为 K ——的表面下距离为 a 的地方。我们将忽略材料外面空气的热导率，而希望求得这块材料表面上的温度分布。试问在材料表面上正对热源的那一点以及其他各处的温度是多少？

怎样解决这个问题呢？它很像静电学中这样一个问题，即在一平面边界两侧存在介电常量不同的两种材料。啊哈！或许它与边界附近的点电荷的情况相似，而该边界处在电介质与导体或类似的某些东西之间。让我们来看看，该表面附近的情况如何。这表面的物理条件是， $\mathbf{h}$ 的法向分量为零，因为我们已假定没有热量流出板外，我们会问：在我们做过的哪一种静电学问题中会有这样的条件，即在表面处电场 $\mathbf{E}$ （这类似于 $\mathbf{h}$ ）的法向分量为零。不会有这种情况！

这是一件务必当心的事情。由于一些物理原因，可能在某一门学科中对数学条件产生了某些限制。因此，若我们仅仅对有限几种情况的微分方程进行分析，便可能会丢失在其他物理情况下能够发生的某些类型的解答。例如，没有一种材料的介电常量为零，而真空的热导率却确实等于零。所以对于完全绝热的物体，竟找不出一类静电的类似物来，然而，我们还是可以采用同样的方法。不妨试行想象，假如介电常量等于零，将发生什么情况（当然，在任一种实际情况中，介电常量总不会等于零的。但也许会有这么一种情况，即其中有一种材料其介电常量非常高，使得我们可以略去外面空气的介电常量）。

如何去找与表面没有垂直分量的那种电场呢？也就是一种只与表面相切的电场。你会注意到，我们的问题与在一平面导体附近放置一个点电荷的问题刚好相反。那里曾要求有一个垂直于表面的场，因为该导体全都处于相同的势，在电的问题中，我们通过设想在导电板后面有一个点电荷而发明了一种解法，可再引用那同一概念。试挑选一个“像源”，那将会自动地使在表面上场的法向分量为零。这种解法如图12-2所示。一个同号而又等强的像源被置在该表面之上距离为 a 处，将使场始终切于材料表面。这两个源的法向分量互相抵消了。

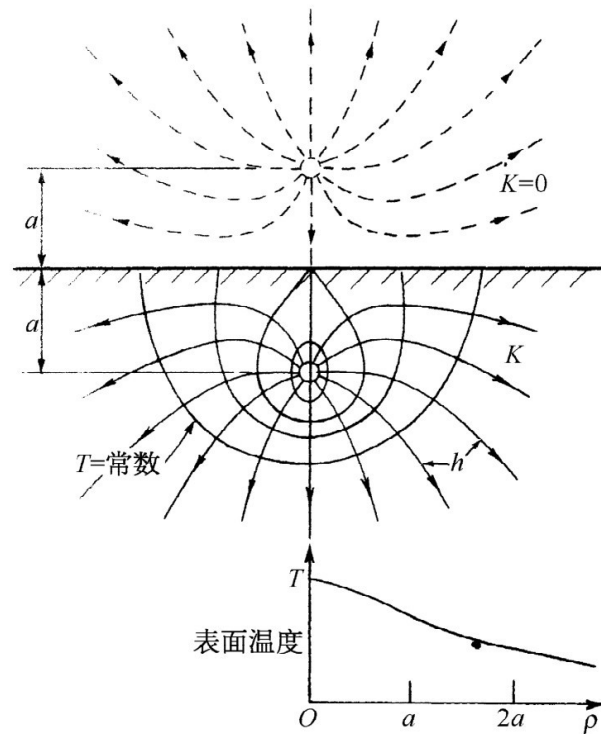


图12-2 在一良热导体表面之下距离为 a 处有一个点热源，在其周围附近所产生的热流和等温面。材料外面显示的是一个像源

这样，我们的热流问题就得到了解决。通过直接类比，在各处的温度与两个相等点电荷产生的势相同。放在无限大媒质中一个单独点源 G ，在距离为 r 处所产生的温度为

$$T = \frac{G}{4\pi K r}. \quad (12.13)$$

当然，这只是 $\phi = q / (4\pi\epsilon_0 r)$ 的模拟。对于一个点源来说，若加上它的像源，所产生的温度就是

$$T = \frac{G}{4\pi K r_1} + \frac{G}{4\pi K r_2}, \quad (12.14)$$

上式给出在大块材料内任一点的温度。图12-2中表示出几个等温面，同时也显示出一些 h 线，它可以由 $h = -K \nabla T$ 获得。

我们原来的问题是要找出在该表面上的温度分布。对于表面上离轴心为 ρ 的一点，即在 $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ 处，就会有

$$T(\text{表面}) = \frac{1}{4\pi K} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \quad (12.15)$$

这一函数在图上也表示了出来。刚好在热源正上方一点上的温度自然会高于其他较远的点的温度。这是地球物理学家们经常需要加以解决的那类问题。我们现在看到，这也在电学方面已经解决了的同类事情。

§12-3 绷紧的薄膜

现在让我们来考虑一种完全不同的物理情况，不过它会再次给出相同的方程。设有一橡胶薄层——一张膜——铺在一个大的水平构架上而被拉紧（如一张鼓膜）。现在假设这张膜的一处被顶起，而在另一处被压下，如图12-3所示。对于这个表面的形状我们能够加以描述吗？即将表明，当膜的挠曲程度不太大时，这一问题如何才能解决。

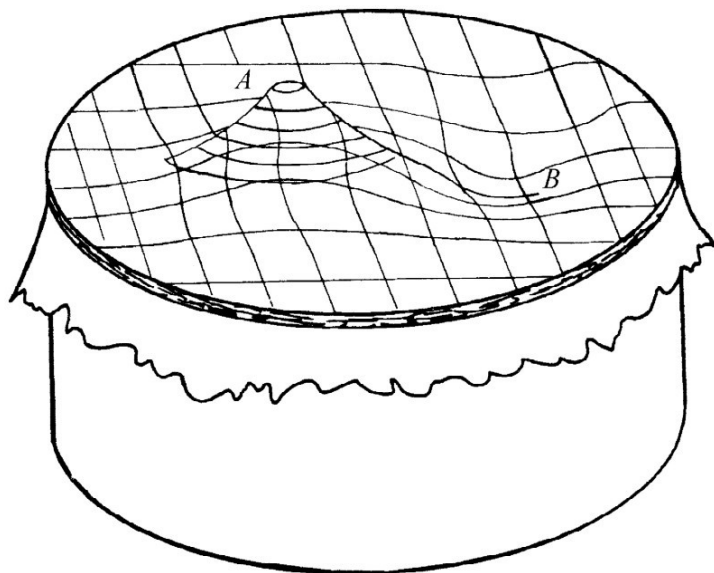


图12-3 一橡胶薄层铺在一个筒形构架上而被拉紧（如一张鼓膜）。如果在该薄层 A 处被顶起，而在 B 处被压下，这个表面是什么形状？

由于膜被拉紧所以在膜内就会有力存在。要是在任一处造成一条小裂缝，则裂缝两边就会彼此互相拉开（见图12-4）。可见在薄层内有一种表面张力，如同拉紧弦线中的一维张力。对于如图12-4所示的那样一条裂缝，刚刚能够把缝的两侧拉在一起的单位长度的力，我们定义为表面张力，其大小为 τ 。

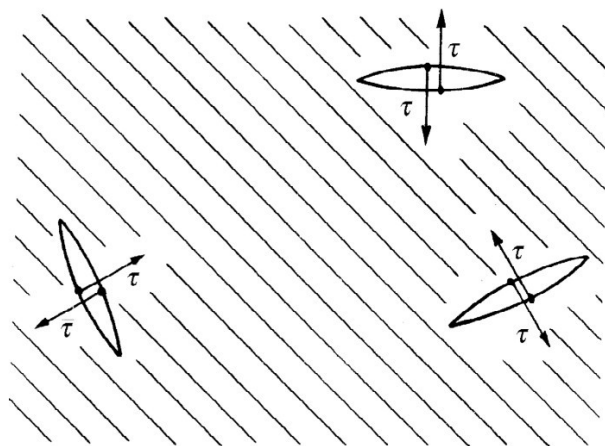


图12-4 一张绷紧了的橡胶薄层，其中表面张力 τ 为垂直于一条线的单位长度的力

现在就来观察膜的一个垂直截面。它将表现为一个弯曲截面，如图12-5所示。设 u 为膜离开其正常位置的垂直方向位移，而 x 和 y 则分别代表水平面上的两个坐标（图上所表示的截面平行于 x 轴）。

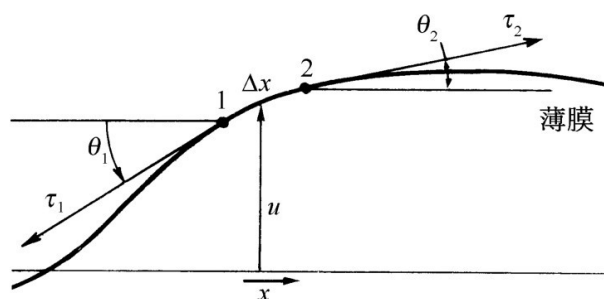


图12-5 被挠曲了的膜片的横截面

试考虑长度为 Δx 而宽度为 Δy 的一小块表面。由于表面张力，所以将会有作用于该小块表面每一边的力。图上边缘1上的力将是 $\tau_1 \Delta y$ ，其方向与该表面相切——也就是与水平线成 θ_1 角。边缘2上的力将在角 θ_2 的方向，为 $\tau_2 \Delta y$ （还有作用于该小块表面其他两个边缘上的相似之力，但这些我们暂不予理会）。从1与2两个边缘作用于该小块表面上的向上的净力为

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1.$$

我们将只考虑膜的小畸变，也就是小斜率范围。于是， $\sin \theta$ 便可用 $\tan \theta$ 来代替，而 $\tan \theta$ 又可写成 $\partial u / \partial x$ 。因而力为

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y.$$

在方括号内的量也同样可以写成（对于小 Δx 而言）

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x.$$

于是

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y.$$

作用在其他两个边缘上的力对 ΔF 也将有贡献，所以总力显然是

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (12.16)$$

该鼓膜之挠曲是由外力引起的。让我们设 f 为由外力引起的膜上单位面积的向上的力（一种“压强”）。当该膜处于平衡状态（静止情况）时，这力必须被刚才所算出的内力即式（12.16）平衡掉。也就是说，

$$f = - \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}.$$

于是式(12.16)便可以写成

$$f = -\nabla \cdot (\tau \nabla u). \quad (12.17)$$

其中， ∇ 目前所指的当然是二维的梯度算符 $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 。我们就有一个把 $u(x, y)$ 和所施力 $f(x, y)$ 以及表面张力 $\tau(x, y)$ ——一般来说，膜中的 τ 是可以逐点改变的——联系

起来的微分方程（一个三维弹性体的畸变也由一组相似的方程所支配，但我们将专注于二维的情况）。我们将仅仅关心表面张力 τ 在整张膜中为常数的那一种情况。于是，可以将式(12.17)写成

$$\nabla^2 u = - \frac{f}{\tau}. \quad (12.18)$$

这样就有另一个与静电学相同的方程了！——只是这回限制在二维上。位移 u 对应于 ϕ ，而 f/τ 对应于 ρ/ϵ_0 。所以无论是对于无限大的平面带电板、或两平行长导线、或带电的圆筒形导体，我们所做过的一切工作，均可直接应用到一张绷紧的薄膜上。

假设我们在膜的某些点上将膜推到一定高度——也就是说，在某些点上把 u 值固定下来，这就是在电的情况下，在各对应地方有一个特定势的一种模拟。因此，比如我们可以用一个与筒形导体对应的截面形状的物体把膜推上去，因而形成一个正“势”。例如，若我们用一根圆棒把膜推上去，该表面便将如图12-6所示的形状。高度 u 与一带

电圆棒的静电势 ϕ 相同。它是按 $\ln(1/r)$ 下降的（其斜率，对应于电场 E ，将按 $1/r$ 下降）。

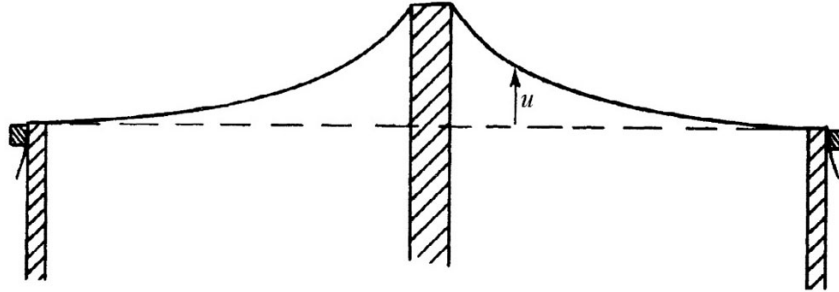


图12-6 一张绷紧的橡胶薄层用一根圆棒推上去时的横截面。函数 $u(x, y)$ 与在一根很长的带电棒附近的电势 $\phi(x, y)$ 相同

一张绷紧的橡胶薄层，往往用来作为一种从实验上解决复杂的电学问题的途径。这里，模拟是倒过来用了！各种不同的棒和杆被用来把膜推至对应于一组电极的势的高度。此后，对高度的测量就能给出在电情况下的电势。这一种模拟甚至被发展得更远。如果将一些小球放在膜上面，它们的运动会近似地对应于电子在相应电场中的运动。人们能够实际上观看到“电子”在其轨道上运动。这一方法曾被用来对许多光电倍增管（诸如那些用在闪烁计数器上的，以及那些用于控制凯迪拉克牌汽车的车前灯光的）的复杂几何图形进行设计。这一方法目前仍被采用，但其准确度却是有限的。对于最准确的工作，更好的是通过数值计算法，即利用大型电子计算机把场求出来。

§12-4 中子扩散；均匀媒质中的均匀球形源

我们取另一个会给出相同类型方程的例子，这回得同扩散打交道了，在第1卷第43章中，我们曾经考虑过离子在纯气体中的扩散，以及一种气体在另一种气体中的扩散。这一次让我们选取一个不同的例子——中子在一种诸如石墨那样的材料中的扩散。之所以着重提出石墨（碳的一种纯净形式），是因为碳并不会吸收慢中子。在碳中，中子能够自由地到处漂移。它们在被核散射而偏转至一个新的方向之前，能够平均沿直线跑过几厘米。所以如果我们有一大块石墨——每边有许多米长——那么最初在某处的中子就会扩散至其他地方。我们想要找出能对它们的平均行为——也就是，对它们的平均流动——所做的一种描述。

设 $N(x, y, z) \Delta V$ 代表点 (x, y, z) 处体积元 ΔV 中的中子数。由于运动，有些中子就会离开 ΔV ，而其他一些则将进入。若在一个区域里有比其邻区更多的中子，则从第一个区进入第二个区中的中子比起返回的将会多些，这将有一个净流。按照第1卷第43章中的讨论，我们用一个流矢量 $\mathbf{J}$ 来描述该流动。它的 x 分量 J_x 就是单位时间通过垂直于 x 方向的单位面积的净中子数。我们曾经求得

$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (12.19)$$

式中扩散系数 D ，由平均速度 v 和在连续两次散射间的平均自由程 l 表达的关系式为

$$D = \frac{1}{3}lv.$$

因而有关 $\mathbf{J}$ 的矢量方程便是

$$\mathbf{J} = -D \nabla N. \quad (12.20)$$

中子流经任一个表面元 da 的时间变化率为 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$ ($\mathbf{n}$ 照例指单位法向矢量)。于是，从一体积元流出 的净流 (根据通常的高斯理论) 为 $\nabla \cdot \mathbf{J} dV$ 。这一流动应该导致在 ΔV 内的数目随时间而减少，除非有些中子正在 ΔV 中产生出来 (通过某一种核过程)。若在该体积内存在能够在单位时间单位体积中产生出 S 个中子的源，则流出 ΔV 的净流将等于 $(S - \partial N / \partial t) \Delta V$ 。这时我们就有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.21)$$

把式 (12.21) 和 (12.20) 两者合并，便得到中子扩散方程：

$$\nabla \cdot (-D \nabla N) = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.22)$$

在静止——即其中 $\partial N / \partial t = 0$ ——情况下，我们再度得到式 (12.4)！可以利用关于静电学的知识来解决中子的扩散问题。因此，就让我们来解答这个问题。你们可能会奇怪：如果已在静电学中解答了一切问题的话，为什么 还要再来求解一个问题？原因是，这回我们能够较快 地获得解答，因为静电学的问题已经 解决了！

假设有一大块材料，其中中子——比如是通过铀裂变——正在从一个半径为 a 的球形区域里朝各方向均匀地产生出来 (图12-7)。我们想要弄清楚：各处的中子密度是多少？在产生中子的区域里中子的密度究竟会多么均匀？在源中心处的中子密度与在源区表面上的中子密度的比率是多少？要找出这些答案挺容易。这里，源密度 S_0 代替了

电荷密度 ρ ，因而我们的问题与具有均匀电荷密度的球体问题相似。求 N 正如同求势 ϕ 。以前我们曾计算出一个均匀带电球体的内场和外场，对这些场取积分就可以获得势。在球外，电势为 $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ，其总电荷 Q 是由 $4\pi a^3 \rho/3$ 给出的。因此

$$\phi_{\text{外}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (12.23)$$

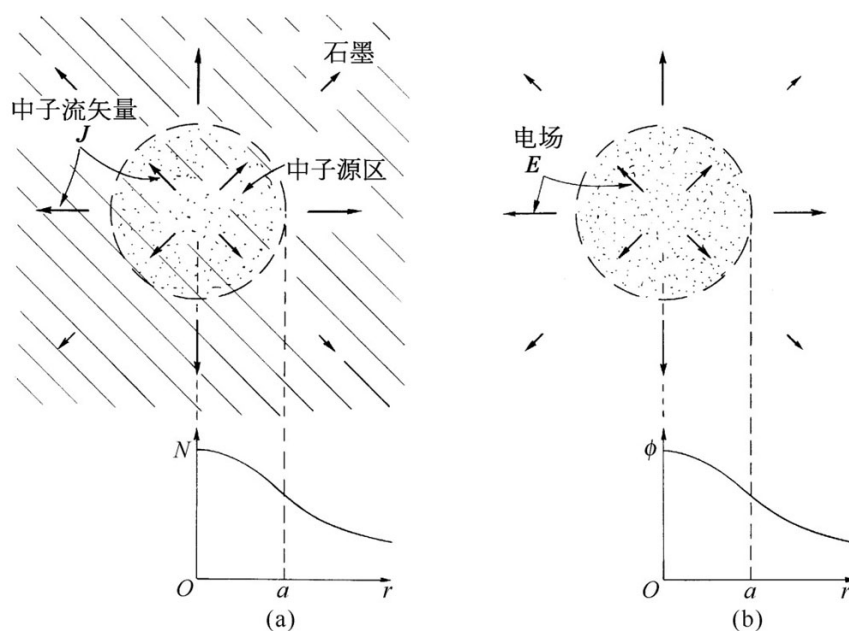


图12-7 (a) 在一大块石墨中，中子在一个半径为 a 的球体里均匀地产生并向外扩散。发现中子密度 N 为离源心距离 r 的函数。(b) 类似的静电情况：一个均匀带电球体，其中 N 对应于 ϕ ，而 J 对应于 E

对于球内各点，那里的电场仅仅来自半径为 r 的球体内的电荷 $Q(r)$ ，亦即 $Q(r) = 4\pi r^3 \rho/3$ ，因而

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (12.24)$$

这个场随着 r 增大线性地增大。对 E 取积分便可得到 ϕ ，于是我们有

$$\phi_{\text{内}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{常数}.$$

在半径 a 处， $\phi_{\text{内}}$ 与 $\phi_{\text{外}}$ 必定相等，因而该常数就应当是 $\rho a^2 / (2\epsilon_0)$

（假定离源很远的地方 ϕ 等于零，这就相当于那里的中子数 N 为零）。因此，

$$\phi_{\text{内}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.25)$$

我们立即就知道另一个问题中的中子密度。答案是

$$N_{\text{外}} = \frac{Sa^3}{3Dr} \quad (12.26)$$

和

$$N_{\text{内}} = \frac{S}{3D} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.27)$$

N 作为 r 的函数如图12-7所示。

那么，源心与边缘的密度之比又是多少呢？在源心（ $r=0$ ）处，密度正比于 $3a^2/2$ ；在边缘（ $r=a$ ）处，密度正比于 $2a^2/2$ ；因而，两密度的比为3/2。一个均匀源并不会产生均匀的中子密度。你看！静电学的知识给我们提供了关于核反应堆物理学的一个良好开端。

有许多物理情况，其中扩散起着重要作用。例如，离子在液体中的运动，或电子在半导体中的运动，都遵循相同的方程。我们一次又

一次地和这种相同的方程式打交道。

§12-5 无旋流体的流动：从球旁经过的流动

现在让我们考虑一个并非十分完美的例子，因为我们将要用的方程式不会真正十分普遍地代表该主题，而只是代表一种人为的理想情况。将要讨论的是水流问题。对于绷紧的薄膜，我们的方程乃是一种近似，只有在挠曲程度微小时才正确。在有关水流的讨论中，将不做这种近似，而必须做出一些与实际的水流有很大出入的限制条件。我们将仅仅处理一种不可压缩的、无黏滞性的，而又无环流的液体的定常流动情况。然后，就将速度 $\mathbf{v}$ ($\mathbf{r}$) 作为位置 $\mathbf{r}$ 的函数来表达该流动。若流动是定常的（唯一具有静电学类似的一种情况），则 $\mathbf{v}$ 与时间无关。如果用 ρ 代表该流体密度，则 $\rho \mathbf{v}$ 便是单位时间通过单位面积的质量。根据物质守恒， $\rho \mathbf{v}$ 的散度一般将是单位体积内材料质量的时间变化率。我们将假定，并没有任何不断创造或消灭物质的过程。于是物质守恒就要求 $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$ （一般说来，它应当等于 $-\partial \rho / \partial t$ ，但由于我们的流体是不可压缩的， ρ 便不可能发生变化）。由于 ρ 处处相同，故可将其分离出来，因而上述方程就不过是

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

好！我们又回到静电学（空间不存在任何电荷）上来了。上式恰好就像 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。然而，情况并非那样简单！静电学并不仅仅是 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，而是包括一对方程。单单一个方程不能告诉我们足够多的东西，还需要另一个方程。为了同静电学协调起来，我们还需要 $\mathbf{v}$ 的旋度为

零。但这对于实际液体来说，并非普遍正确。大多数液体往往会产生一些环流。所以我们就被限制在没有液体环流的情况。这样的流动常称为无旋流动。不管怎样，若我们作出了所有这些假定，便可以想象出类似于静电学的一种流体流动情况。因而采取

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (12.28)$$

和

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (12.29)$$

我们要强调，遵循这些方程的液体流动只是一些特殊而远非普遍的情况。它们是表面张力、可压缩性和黏滞性都必须可以忽略、而又可以假定该流动是无旋的那么一些情况。这一些条件对于真实水的适用性竟是如此之少，以致数学家冯·诺伊曼曾经说过，凡对式（12.28）和（12.29）进行过分析的人们乃是在研究“干水”！我们将在第40和41章中对流体流动的问题进行更详细的讨论。

由于 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ，因此“干水”的速度就可以写成某个势的梯度：

$$\mathbf{v} = -\nabla \psi. \quad (12.30)$$

ψ 这个量的物理意义是什么？它并不含有任何十分有用的意义。速度可以写成为势的梯度，仅仅是因为该流动是无旋的。而根据与静电学的类比， ψ 就称为速度势，但它与 ϕ 不同，与势能毫无关系。由于 $\mathbf{v}$ 的散度为零，我们便有

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi = 0. \quad (12.31)$$

和在自由空间 ($\rho=0$) 里的静电势一样, 这速度势 ψ 也服从同样的微分方程。

让我们举一个属于无旋流动问题的例子, 并看看能否通过学过的方法来解决它。考虑穿过液体下落的球体问题。如果它降落得太慢, 则我们所忽略的黏滞力就会十分重要。如果它落得太快, 则会有一些小漩涡(湍流)出现在其尾部, 而在水里就会有一些环流。但若该球体运动得既不太慢又不太快, 则水流将大体上符合我们的那些假设, 这样才能通过那些简单方程式来描述水的运动。

在固定于球体 的参照系中来描述所发生的事情很方便。在这个参照系中, 我们提出这样一个问题: 若在离球很远的地方水均匀流动, 当其流经静止球体时, 运动情况将如何呢? 这就是说, 在离球很远的地方, 流动处处相同。但在球体附近的流动则如图12-8中的那些流线。这些线, 始终平行于 $\mathbf{v}$, 而与电场线相对应。我们希望得到有关这一速度场的定量描述, 即关于任一点 P 的速度表示式。

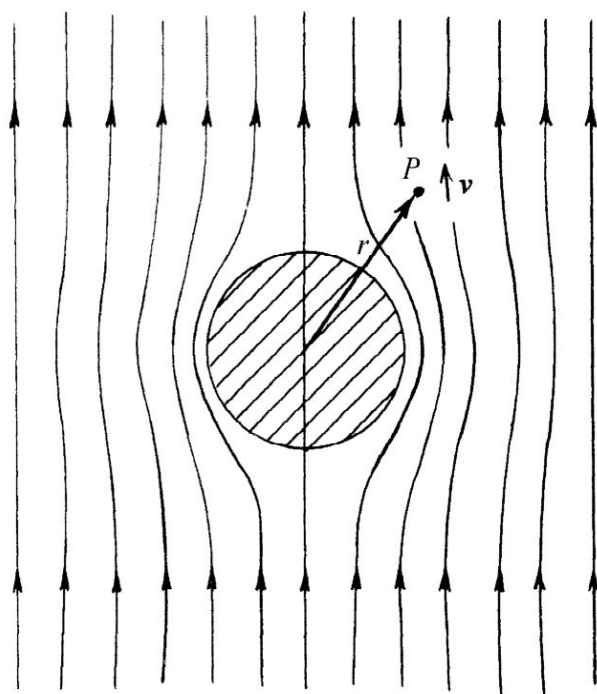


图12-8 从球旁流过的无旋流体的速度场

可以从 ψ 的梯度求得速度，因而首先就要算出势来。我们需要处处都满足式(12.31)的那一种势，而这个势也应满足两个限制条件：

(1) 球内区域不存在流动；(2) 在远距离处流动是稳定的。为了满足条件(1)，垂直于球面的 $\mathbf{v}$ 分量就应等于零。这意味着，在 $r=a$ 处， $\partial\psi/\partial r$ 为零。为了满足条件(2)，则在 $r \gg a$ 的所有点上，必须有 $\partial\psi/\partial z = v_0$ 。严格说来，并没有一种静电情况会完全对应于我们的问题。实际上它对应于把一个介电常量为零的球体放置在一个均匀电场中。要是已求出了关于介电常量为 κ 的球体放在一均匀场中的问题之解，那么代入 $\kappa=0$ ，我们便该立即获得有关这一问题的解答。

实际上，并未详细算过这个特定的静电学问题，那现在就让我们来做吧（本来也可以直接用 $\mathbf{v}$ 和 ψ 来解决流体问题的，但仍将采用 $\mathbf{E}$ 和 ϕ ，因为那是我们所熟悉的）。

问题是：求出 $\nabla^2\phi=0$ 的一个解，使得对于 r 很大时 $\mathbf{E}=-\nabla\phi$ 为一常数，比方说 $\mathbf{E}_0$ ，而又使得在 $r=a$ 处 $\mathbf{E}$ 的径向分量为零，即

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.32)$$

我们的问题牵涉到一种新的边界条件，这里并不要求表面上的 ϕ 为常数，而是要求 $\partial\phi/\partial r$ 为常数。这样一来，情况就有所不同了，不容易立即得到答案。首先，当该球体不存在时， ϕ 应当是 $-E_0 z$ 。于是 $\mathbf{E}$ 应该沿 z 轴方向，并具有一个大小不变的 E_0 。原来我们曾经分析过内部具有均匀极化的一个电介质球的情况，而且我们发现在这种均匀极化球内部的场乃是一个均匀场，而在其外部的场则与一处在球心的

点偶极子的场相同。因此，我们猜测所希望得到的解为一个均匀场和一个偶极子场的叠加。因偶极子之势（第6章）为 $pz / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ ，于是我们假定

$$\phi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (12.33)$$

由于偶极子场按 $1/r^3$ 下降，所以在大的距离处我们便恰好拥有场 E_0 。我们的猜测自动满足了上面的条件（2）。但该偶极子强度 p 取何值呢？为求得这个值，我们可利用关于 ϕ 的另一条件，即式（12.32）。必须取 ϕ 对 r 的微商，但这当然要求在一个固定的角度上进行，因而为了方便，首先就得用 r 和 θ 而不是用 z 和 r 来表达 ϕ 。由于 $z = r \cos\theta$ ，所以得：

$$\phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.34)$$

E 的径向分量为

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = +E_0 \cos\theta + \frac{p \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.35)$$

上式在 $r=a$ 处对于所有的 θ 均必须为零。若取 p 为

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0, \quad (12.36)$$

那就确实如此。

要小心注意！如果式（12.35）中两项并非都具有相同的 θ 依赖关系，则不会有可能选得出 p 而使式（12.35）在 $r=a$ 处对一切角度都变

为零。我们算出的结果意味着，在写出式（12.33）时的猜测是聪明的。当然，在做出该猜测时，我们是向前看的。我们知道将需要另一项，它将会：（a）满足 $\nabla^2 \phi = 0$ （任何真实的场都该如此）；（b）依赖于 $\cos\theta$ ；（c）并在大的 r 处降至零。偶极子场就是唯一能满足这三个条件的场。

利用式（12.36），我们的势就是

$$\phi = -E_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.37)$$

关于流体流动问题的解可以简单地写成：

$$\psi = -v_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.38)$$

从这个势求 $\mathbf{v}$ 很方便，对此事我们就不进一步追究下去了。

§12-6 照度；对平面的均匀照明

在这一节中，我们将转到一个完全不同的物理问题上去——旨在显示许多不同的可能性，此次，我们将做某种事情，它所导致的积分与我们在静电学中所求得的积分类型相同（如果我们有一个数学问题会给出某一积分，而它若就是以前解决另一问题的同一积分，那么我们对于该积分的性质便会理解一些）。现在就从照明工程中选取一个例子。假设有一光源放在一平面上距离为 a 处。该面上的照明情况如何呢？这就是说，单位时间到达单位表面积上的辐射能量有多少（见图12-9）？假定光源是球对称的，以致在任何方向辐射的光都相等。

这时，通过垂直于光流的单位面积的辐射能量与距离的平方成反比。显然，在垂直于光流的表面上，光的强度与点电荷源产生的电场具有相同的公式。若光线与表面的法线成一角度 θ 投射到表面上，那么 I_n ，即到达单位面积表面上的能量，就仅有 $\cos\theta$ 那么大了，因为同样的能量落在了 $1/\cos\theta$ 倍的面积上。如果我们称光源的强度为 S ，则在一个面上的照度 I_n 便是

$$I_n = \frac{S}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}. \quad (12.39)$$

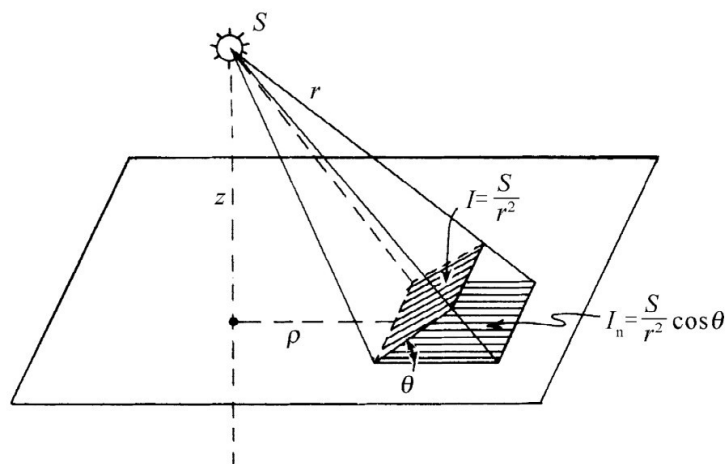


图12-9 面上的照度 I_n 代表单位时间到达单位面积表面上的辐射能

式中， $\mathbf{e}_r$ 是从光源向外的单位矢量；而 $\mathbf{n}$ 则是该面积的单位法线。照度 I_n 相当于从一强度为 $4\pi\epsilon_0 S$ 的点电荷所产生的电场的法向分量。明白了这一点，我们便可看到，对于任一种光源分布，都能够通过求解对应的静电学问题而获得答案。在计算电荷分布所产生的电场在一平面上的垂直分量时，我们就是按照这种求光源[2]对一平面的照度的方法来做的。

试考虑下述例子。为了某种特定实验条件，我们希望使台面上有一个十分均匀的照明。这里，可资利用的是一些沿管的长度辐射均匀的长荧光管。这可以在距台面为 z 处的天花板上安置一整排荧光管对我们的台面照明。如果我们要求台面照度均匀，比方说在1‰的起伏范围内，则所选用的管与管间的最大间隔 b 是多少？答案：（1）求相隔为 b 的均匀带电导线栅的电场；（2）计算电场的垂直分量；（3）找出 b 应多大才能使场的起伏不超过1‰。

在第7章中我们曾见过，带电导线栅的电场可用许多项之和来表示，其中每项给出一个周期为 b/n 的正弦变化的场，这里 n 是一整数。任何一项的幅度都由式（7.44）给出：

$$F_n = A_n e^{-2\pi n z / b}.$$

若要求的场是不太靠近那导线栅处的场，则我们仅需考虑 $n=1$ 的情况。对于一个完整的解来说，本来还需确定整套系数 A_n ，而这我们还未曾做过（尽管是简单的计算）。既然我们只要求 A_1 ，就可以估计出它的大小约略与平均场相同。于是该指数因子就会直接提供关于场强变化的相对幅度。如果希望这个因数等于 10^{-3} ，则将得出 b 应为 $0.91z$ 。若令荧光灯管间的间隔等于台面至天花板距离的 $3/4$ ，则该指数因子为 $1/4\ 000$ ，而我们便有一个安全系数4，从而相当肯定地会使照明在1‰的范围内保持恒定不变（准确的计算表明， A_1 实际上两倍于平均场，因而 $b \approx 0.83z$ ）。对于这么一个均匀照明，所容许的管间距离竟会如此之大，多少有点令人惊奇。

§12-7 自然界的“基本统一性”

在这一章中，我们希望证明，在学习静电学的过程中你们已同时学习了怎样去处理物理学中的其他许多课题，而正是由于这一点，我们才有可能在有限的岁月里学习几乎全部物理学。可是，当这样的讨论结束时肯定会浮现出一个问题：为什么从不同现象所得到的微分方程竟会如此相似呢？我们也许会说：“那是自然界的基本统一性。”但这指的到底是什么呢？这样一个命题本来能具有什么意义？简而言之，它意味着不同现象有着彼此相似的方程组，当然这时我们还未给出任何解释。“基本统一性”也许指的是，任何东西都由同一种材料构成，因而便应服从同样的方程。这听起来是一个完满的解释，但让我们深思一下，静电势、中子扩散、热流——是否确实与同一种材料打交道？我们能否真的想象出那静电势在物理上全同于温度，或全同于粒子密度？肯定的是， ϕ 不会恰好与粒子的热能相同；鼓膜的位移肯定不像温度。既然如此，为什么还会有“一种基本统一性”呢？

事实上，对各种不同科目的物理学加以更密切的考察就会证实，那些方程式并非真的全同。对于中子扩散所找到的方程只是一种近似。当我们观察的距离比自由程大时，以上近似才有效。如果更细致地进行观察，便会看到各个中子正在各处跑动。各个中子的运动，肯定完全不同于我们从微分方程解出的那种连续光滑的变化。该微分方程只是一种近似，因为我们曾经假定中子在空间是连续分布的。

是否这就是关键所在？是否一切现象所共有的东西就是空间，即藉以建立物理学的一种构架？只要东西在空间里相当平滑，那么所牵涉的重要事情就将是某些量相对于空间中位置的变化率。这就是为什么我们总是获得一个有梯度存在的方程。微商必定以梯度或散度的形式出现；由于物理定律与方向无关，所以它们必然表示成矢量的形式。静电学方程组就是人们所能获得的、仅含有各个量的空间微商

的、最简单的矢量方程组，任何其他简单问题——或复杂问题的简化——看起来都应当像静电学那样。所有问题的共同点是：它们全都涉及空间，以及我们总是用简单的微分方程来模拟实际的复杂现象。

由此引导到另一个有趣问题。这同样的讲法对静电学方程组是否也可能是对的呢？它们是否也只有作为实际上复杂得多的微观世界的一种理想化的模拟才是正确的呢？客观（物质）世界是否可能由一些仅在极微小距离上才能看得见的 X 子组成的呢？而在测量过程中我们是否可能总是在那么大的尺度上进行观察，以致不能见到这些小 X 子、这才是所以会得到那些微分方程的根由？

现在最完整的电动力学理论，的确会在十分短的距离上碰到困难。因此，在原则上这些方程可能是某些事情的理想化模型。它们在小至约 10^{-14} cm的距离上仍显示正确，但此后就开始显得不对了。可能会有某种迄今还未被发现的内部“机制”，而这种内部复杂性的一些细节被表面上看来理想的那些方程隐藏起来了——正如在那种“理想”的中子扩散现象中一样。但还没有人系统地提出过克服那种困难的成功理论。

相当奇怪的是：事实表明（基于我们完全不清楚的原因），相对论和量子力学按照我们所知的方式结合起来，似乎已不允许有一个基本上不同于式（12.4）的方程，而同时又不会引起某种矛盾的那种发明。不仅仅是与实验不符合，而且还是一种内部矛盾。例如：对所有可能会发生的各种情况的概率之和不等于1，或能量有时可能会出现为复数的那种预言，或其他与此类似的某种荒谬设想。迄今还没有人能够创立一种电学理论，使得在其中 $\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0$ 被理解成对深一层机制的一种理想化近似，而又不会最终引导到某一种谬论上去。然而，

还必须补充说明：若假定 $\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0$ 在所有不论多么小的距离上都正确，则会导致它本身的荒谬（一个电子的电能为无限大）——即迄今还没有谁懂得怎样摆脱这些谬论的影响。

[1] 这里两处“长度 L ”，在原书中都作“单位长度”，我们作了改正。——译者注

[2] 由于我们所谈的是关于非相干光源，它们的强度就总是线性地相加，因此模拟的电荷将始终带有相同符号。并且，我们的模拟仅适用于到达一块不透明面上的光能，因而在我们的积分中只需计入照射于该面上的光源（自然不包括该面下面的其他光源）。

第13章 静磁学

§13-1 磁场

作用于一电荷上的力不仅取决于它的位置，而且还取决于它运动的速度。空间每一点可由两个能确定作用于电荷上的力的矢量来做标志。首先，电力 提供了与电荷运动无关的一部分力，我们用电场 $\mathbf{E}$ 来描述它；其次，另一部分力，称为磁力，那是有赖于电荷的速度的。磁力还具有一种奇怪的方向特性：在空间任一特定点上，这力的方向和大小均取决于该粒子的运动方向。在任一时刻，这力总是垂直于速度矢量；并在任一特定点上，这力又总是与空间中某一固定方向成直角（见图13-1）；而且，力的大小是与垂直于这一规定方向的速度分量成正比的。所有这一切行为都能由一个定义为磁场矢量的 $\mathbf{B}$ 来加以描述。这个矢量不仅在空间规定出唯一方向，并且还规定力与速度成正比的那个比例常数，从而写出磁力为 $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。于是，作用于电荷上的总电磁力就可以写成

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (13.1)$$

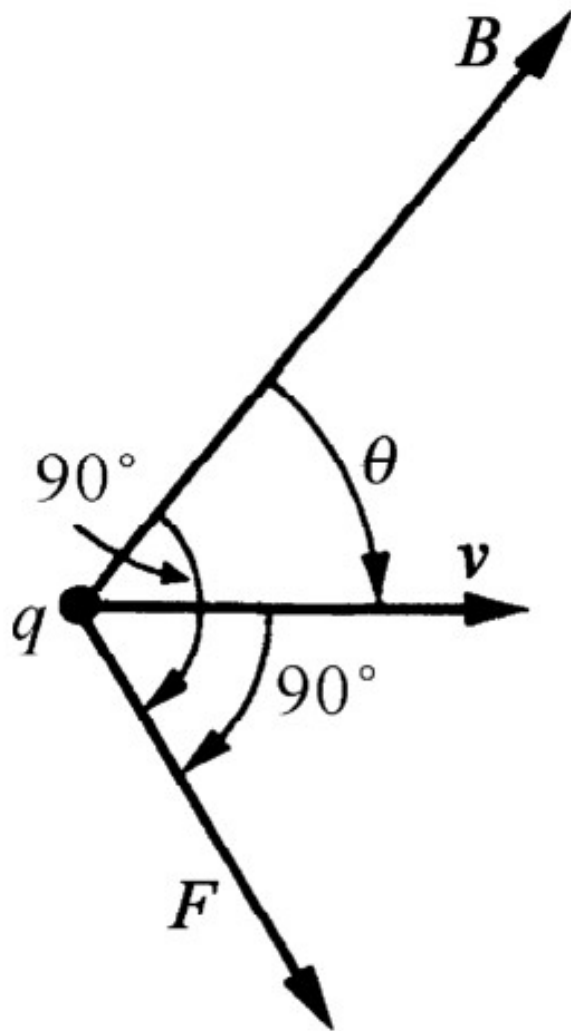


图13-1 作用于运动电荷上与速度有关的那一部分力，与 $\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{B}$ 的方向都成直角。它也与垂直于 $\mathbf{B}$ 的 $\mathbf{v}$ 的分量（即 $v \sin \theta$ ）成正比

这称为洛伦兹力。

磁力可用一根磁棒靠近一阴极射线管而轻易地加以演示。电子束的偏转，表明磁铁的存在产生了一个作用于电子而与其运动方向成直角的力，如同在第1卷第12章中我们曾描述过的那样。

磁场 $\mathbf{B}$ 的单位显然是 $1 \text{ NsC}^{-1} \text{ m}^{-1}$ 。这同一单位也是 1 Vsm^{-2} 。它也称为 1 Wbm^{-2} 。

§13-2 电流；电荷守恒

我们首先考虑怎样来理解磁力对载流导线的作用。为此，我们先给所谓电流密度下个定义。电流是电子或其他电荷的净漂移或净流动所形成的运动。我们可用一个矢量来表达这一种电荷流动，这矢量给出每单位时间通过垂直于流动方向的单位面积元的电荷量（正如我们对于热流所曾做过的那样），我们称之为电流密度，并用矢量 $\mathbf{j}$ 来表示，它的方向沿着电荷运动的方向。如果在材料中某处取一小面积 ΔS ，则单位时间流经该面积的电荷量为

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S, \quad (13.2)$$

式中 $\mathbf{n}$ 是垂直于 ΔS 的单位矢量。

这电流密度与电荷的平均流动速度有关。假设有一个电荷分布，它的平均运动就是一个速度为 $\mathbf{v}$ 的漂移。当这一分布通过一面积元 ΔS 时，在 Δt 时间内流经该面积元的电荷 Δq ，等于包含在一个底面为 ΔS 、高度为 $\mathbf{v} \Delta t$ 的平行六面体内的电荷，如图13-2所示。这个平行六面体的体积就是 ΔS 在垂直于 $\mathbf{v}$ 方向上的投影乘以 $\mathbf{v} \Delta t$ ，若再乘以电荷密度 ρ ，就将给出 Δq 。这样，

$$\Delta q = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t.$$

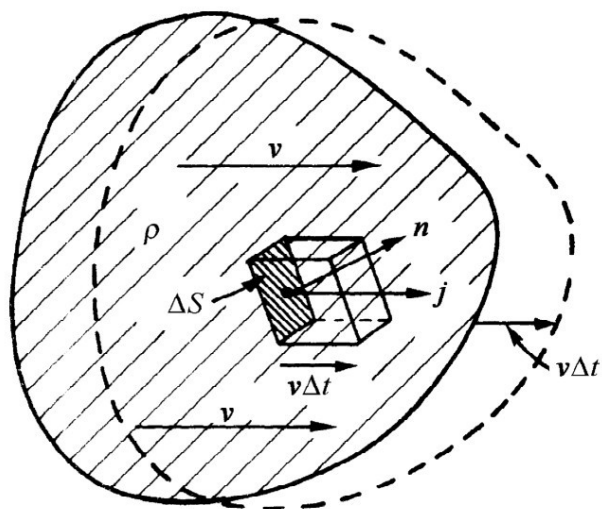


图13-2 如果具有密度为 ρ 的电荷分布以速度 $\mathbf{v}$ 移动，则单位时间流经 ΔS 的电荷为 $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S$

于是单位时间通过的电量为 $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S$ ，由此可得

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (13.3)$$

如果该电荷分布是由单独的电荷、比方说电子组成的，其中每个电荷各具有电量 q ，并以平均速度 $\mathbf{v}$ 运动，则电流密度为

$$\mathbf{j} = Nq \mathbf{v}, \quad (13.4)$$

式中 N 为单位体积的电荷数目。

单位时间通过任一个面 S 的总电量称为电流 I 。它等于通过该面的所有面元的流的法向分量的积分

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13.5)$$

(见图13-3)。

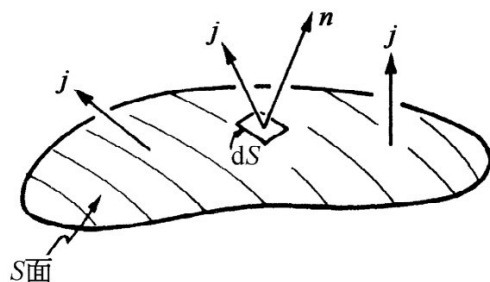


图13-3 流过 S 面的电流 I 为 $\int j \cdot n dS$

从闭合面 S 流出来的电流 I 代表电荷从面 S 所包围的体积 V 内离开的速率。物理学的一个基本定律为：电荷是不灭的；它永不消失也永不被创造。电荷能够从一处移至另一处，但却从未出现过无中生有的情况。我们说电荷是守恒的。如果有一个净电流从一个闭合面流出，则其内部的电荷就应相应地减少（图13-4）。因此，我们能够将电荷守恒律写成

$$\int_{\text{任一闭合面}} j \cdot n dS = - \frac{d}{dt} (Q_{\text{内}}). \quad (13.6)$$

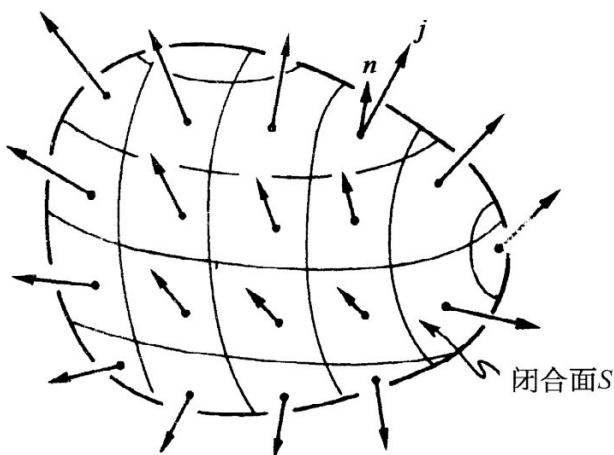


图13-4 $j \cdot n$ 对整个闭合面的积分，等于内部总电荷 Q 的变化率的负值

内部电荷则可以写成电荷密度的体积积分：

$$Q_{\text{内}} = \int_{\text{在} S \text{ 内之} V} \rho dV. \quad (13.7)$$

如果应用式 (13.6) 于一个小体积 ΔV ，那么我们便知道左边的积分为 $\nabla \cdot \mathbf{j} \Delta V$ 。其中的电荷为 $\rho \Delta V$ ，因而电荷守恒律也可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.8)$$

(再一次是高斯数学！)。

§13-3 作用于电流上的磁力

现在我们准备求磁场作用于—载流导线上的力。电流由以速度 $\mathbf{v}$ 沿导线运动的带电粒子组成。每一个电荷都感受到一个横向力

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

[图13-5 (a)]。如果单位体积含有 N 个这样的电荷，则在导线的一个小体积 ΔV 内的数目为 $N \Delta V$ 。作用于 ΔV 上的总磁力 $\Delta \mathbf{F}$ 等于作用在各电荷上之力的总和，即是，

$$\Delta \mathbf{F} = (N \Delta V) (q \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

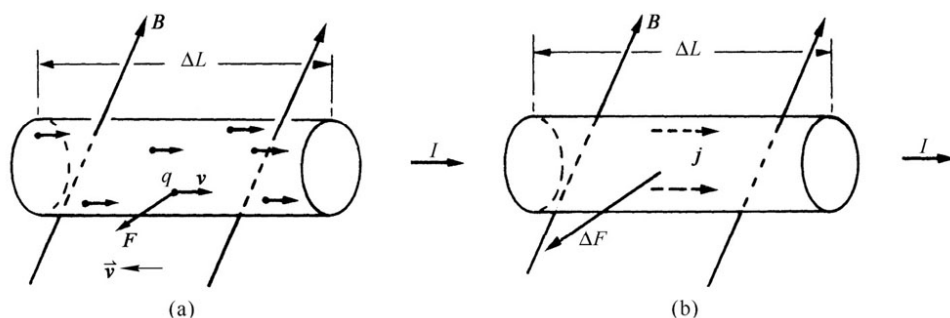


图13-5 作用于—载流导线上的磁力等于对各个运动电荷作用力的总和

但 $Nq \mathbf{v}$ 恰好就是 $\mathbf{j}$ ，因而

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \Delta V \quad (13.9)$$

[图13-5 (b)]。作用于单位体积的力为 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 。

如果在—根截面为 A 的导线中，流经导线的电流是均匀的，则可取截面为 A 而长度为 ΔL 的一段柱体作为体积元。于是

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} A \Delta L. \quad (13.10)$$

现在就可以把 $\mathbf{j} A$ 叫作导线中的电流矢量 $\mathbf{I}$ （它的大小为导线中的电流，而其方向则是沿着导线）。这样，

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \Delta L. \quad (13.11)$$

因此作用于单位长度导线上的力为 $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ 。

上式显示了一个重要结果，即由于导线内电荷运动而作用于导线上的磁力，仅取决于总电流，而与其中每一粒子所带的电荷量——甚至连符号！——都无关。作用于磁铁附近导线上的力，通过观察接通电流时线的偏转不难加以演示，正如在第1章中所曾描述过的那样（见图1-6）。

§13-4 恒定电流的磁场；安培定律

我们已经看到，诸如在由一磁铁所产生的磁场存在的情况下，就有力作用于导线上。从作用等于反作用这一原理出发，我们也许会期望，当导线中有电流通过时应当有一个力作用于磁场之源，也即作用于磁铁上^[1]。确实有这样的力存在，这可由置于载流导线附近的一根磁针的偏转而看出来。原来我们知道，磁铁会感受到来自其他磁铁的作用力，因而这就意味着，当导线中有电流时，这导线本身就会产生磁场。于是，运动电荷确实会产生 磁场。现在我们愿意尝试找出如何确定这种磁场产生的规律。问题是：给出电流后，它能形成什么样的磁场？对这一问题的解答由实验上的三个决定性实验和安培在理论上所做的辉煌论证而确定了下来。我们将绕过这一有趣的历史进程，而只是简单地说说大量实验事实已经证实了麦克斯韦方程组的有效性。我们将把它们作为起点。若在这些方程中省略含有时间微商的那些项，则可得到关于静磁学 的方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.12)$$

和

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (13.13)$$

这些方程仅在一切电荷密度都恒定、一切电流都稳恒，使得电场和磁场都不随时间而变——一切场都呈现“静止”状态——时才正确。

应当指出，认为有像静磁这种情况是相当危险的，因为毕竟总得有电流才能获得磁场——而电流则只能来自运动着的电荷。因此，“静磁”只是一种近似，它指的是拥有大量 运动电荷、而我们又可将其近似成定常 流动的一种特殊的动力情况。只有这样才能谈论一种不随时间而变的电流密度 j 。这一题目应当更准确地称为关于恒定电流的研

究。假定所有的场都恒定，我们从那完整的麦克斯韦方程组（2.41）中省略了一切含有 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 和 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 之项后，便可获得上面两个方程式（13.12）和（13.13）。并注意：由于任何矢量旋度的散度均必须等于零，所以式（13.13）便要求 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 。根据式（13.8），这只有在 $\partial \rho / \partial t$ 为零时才正确。但如果 $\mathbf{E}$ 不随时间而变，这便是必然的了，因而我们的一些假设都是一致的。

$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 这一要求的含意是，只能容许在首尾相连的路线中才有流动着的电荷。例如，它们可以在构成一个完整回路——称为电路——的导线中流动。当然，这种电路可以包含维持电荷流动的发电机或电池组。但不容许包括正在被充电或放电的电容器（当然，我们以后还将推广到包括那些动态场，但目前打算先讨论较简单的恒定电流情况）。

现在，让我们来看看式（13.12）和（13.13）的含意如何。第一个式子说明 $\mathbf{B}$ 的散度为零。拿它与静电学中的类似方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 作比较，就可以断定，不会有电荷的磁类似物，即没有能从中产生出 $\mathbf{B}$ 线的磁荷。如果我们用矢量场 $\mathbf{B}$ 的“线”来考虑，则这些线将永远不可能突然出现，也永远不可能终止。那么，它们是从哪里来的呢？在有电流的地方磁场才会“出现”；它们有一个正比于电流密度的旋度。无论哪里有电流，那里就有构成回路的磁力线环绕着该电流。由于 $\mathbf{B}$ 线无始无终，这些线便经常能够兜绕回来以形成闭合回路。但也有 $\mathbf{B}$ 线不是简单闭合回路的那些复杂情况。可是，无论情况如何，它们永远不会有从一些点上散发出去。迄今为止，还没有发现过磁荷，因而 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。这一结果，不仅对于静磁场正确，甚至对于动态场也始终正确。

$\mathbf{B}$ 场与电流的关系包含在式 (13.13) 中。这里有一个新的情况与静电学大不相同，在那里我们曾有过 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。这个方程意味着 $\mathbf{E}$ 环绕着任一闭合回路的线积分为零：

$$\oint_{\text{回路}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

这一结果是由斯托克斯定理得到的，该定理说：任一个 矢量场沿任一闭合曲线的线积分，等于该矢量旋度的法向分量的面积分（对以该闭合回路为其边缘的任何表面求积分）。把同样这个定理应用于磁场矢量并利用在图13-6上所示的那些符号，则可得

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.14)$$

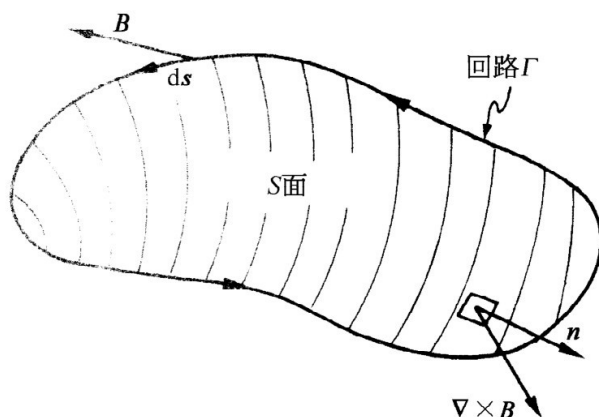


图13-6 $\mathbf{B}$ 切向分量的线积分等于 $\nabla \times \mathbf{B}$ 法向分量的面积分

由式 (13.13) 取 $\mathbf{B}$ 的旋度，便有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.15)$$

根据式 (13.5)，对 $\mathbf{j}$ 的积分即是通过 S 面的总电流 I 。由于是对恒定电流来说的，所以通过 S 面的电流与该面的形状无关，仅仅要求该面

由 Γ 曲线所包围，因而人们往往说成是“穿过 Γ 回路的电流”。这样，我们就有一个普遍定律：围绕任何闭合曲线的 $\mathbf{B}$ 的环流，等于穿过该回路的电流 I 除以 $\epsilon_0 c^2$ ：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{穿过}\Gamma}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.16)$$

这一定律——叫安培定律——在静磁学中的作用与高斯定律在静电学中的作用相同。但是只有安培定律仍不能由电流确定 $\mathbf{B}$ 。一般说来，还必须用到 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。然而，正如我们将在下一节中见到的，在具有某些简单对称性的特殊情况下仍可以用它来求磁场。

§13-5 直导线与螺线管的磁场；原子电流

通过求出一根导线附近的磁场，我们就能够举例说明安培定律的应用。我们要问：在一条圆形截面的长直导线外面的场如何？我们将假定某种东西，它可能不十分明显、但无论如何却是真的：即 $\mathbf{B}$ 的场线以闭合圆周环绕着该导线。如果我们做出这一假定，那么安培定律，即式（13.16），便会告诉我们场有多强。根据这一问题的对称性，在导线的一个同心圆上的所有各点， $\mathbf{B}$ 就具有相同的大小（见图13-7）。于是，我们能够很容易地算出 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ 的线积分，只不过是 B 乘以该圆周罢了。设 r 为圆周半径，则

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r.$$

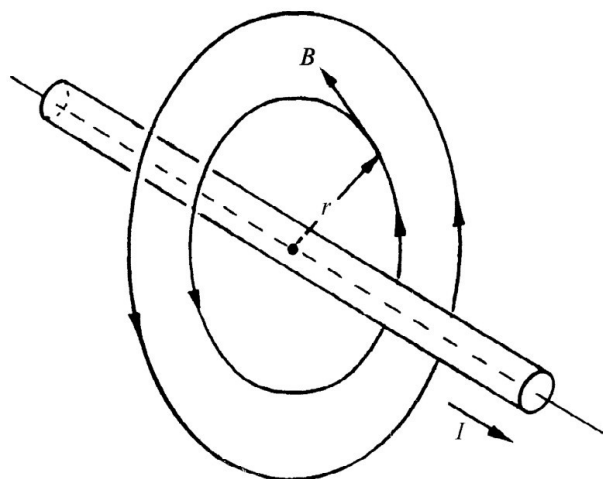


图13-7 在载有电流 I 的一根长直导线外面的磁场

穿过该回路的总电流就是导线中的电流 I ，因而

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

或

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}. \quad (13.17)$$

磁场的强度与 r 反比地逐渐减弱， r 是距导线轴心的距离。倘若我们乐意，也可把式 (13.17) 写成矢量形式。记住 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{r}$ 两者都垂直，因而有

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r}. \quad (13.18)$$

我们已将因子 $1/(4\pi\epsilon_0 c^2)$ 提了出来，因为它经常会出现。值得记住的是，这一因子准确地等于 10^{-7} （在 $\text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}$ 制中），因为一个像

式(13.18)那样的方程式是用来定义 电流单位安培的。在距离1 A电流1 m远处的磁场为 $2 \times 10^{-7} \text{ Wbm}^{-2}$ 。

由于电流产生了磁场，所以它也将施力于附近另一根同样载有电流的导线上。在第1章中，我们就曾描述过作用于两载流导线间的力的一个简单演示，如果两导线互相平行，则每根导线将垂直于由另一导线所产生的磁场。当两电流处在相同方向时，两线将互相吸引；当电流的方向相反时，则两线互相排斥。

让我们举另一个例子，它也可以用安培定律来加以分析，只要我们加进关于场的某种知识。假设有一个长导线圈绕成的紧密螺旋线，其两种截面如图13-8所示。这样的线圈称为螺线管。从实验上我们观察到：当一螺线管相对于其直径十分长时，则管外的场与管内的场相比将十分微小。仅仅利用这一事实，再加上安培定律，便可以求出管内场的大小。

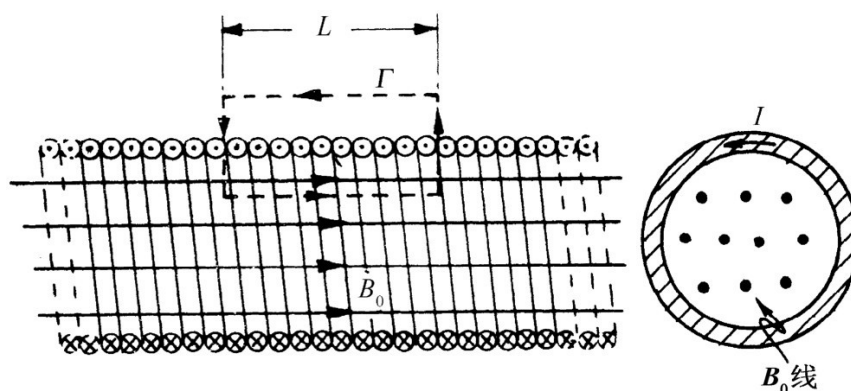


图13-8 长螺线管的磁场

由于场存在 其里面（而且散度为零），那么表示它的一些场线就必然平行于管轴，如图13-8所示。假定这是事实，便可利用图上所示的那条矩形“曲线” Γ 来运用安培定律。这条回路先在螺线管内沿着那

里的场，例如 B_0 ，行了一段距离 L ，然后垂直于场而行，再沿着管外回来，而那里的场则可以忽略。对于这么一条曲线， $\mathbf{B}$ 的线积分正好是 $B_0 L$ ，而它应当等于 $1/(\epsilon_0 c^2)$ 乘以穿过 Γ 的总电流，如果在长度为 L 的螺线管上共有 N 匝的话，则总电流为 NI 。这样，我们就有

$$B_0 L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}.$$

或者，若令 n 为单位长度螺线管的匝数（即 $n=N/L$ ），则得

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.19)$$

当到达螺线管一端时， $\mathbf{B}$ 线会怎么样呢？大概的情形是：它们多少有点散开，并兜回到另一端，再进入螺线管，如图13-9所示的那样。像这样的场恰好就是在 一根条形磁铁外面所观察到的。但磁铁到底是什么东西？我们的方程表明， $\mathbf{B}$ 来自电流。可是我们知道，一根普通铁棒（既没有电池组也没有发电机）也能产生磁场。你也许会期望，在式（13.12）或（13.13）的右边还应有其他一些项来代表“磁铁密度”或诸如此类的量，但是却没有这样的项。我们的理论说：铁的磁效应乃来自某些内部电流，而这些电流则已用 $\mathbf{j}$ 的项来对付了。

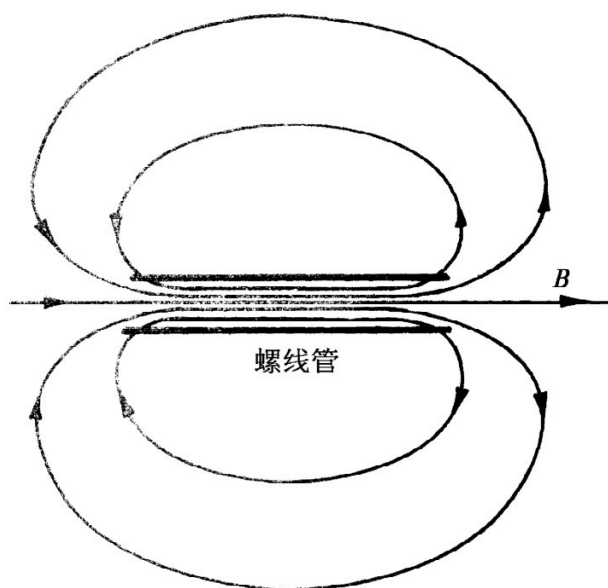


图13-9 在螺线管外面的磁场

从基本观点上看，物质是十分复杂的——正如我们以前在试图理解电介质时所见到的那样。为了不致扰乱目前的讨论，我们打算以后再详细处理像铁那样的磁性材料的内部机制。暂时你们得接受所有磁性都来自电流，而在永磁体中就有永久性的内部电流存在。对铁来说，这些电流来自绕其本身的轴自旋的电子。每一电子既然带有这样的自旋，便相当于一个小环行电流。当然，一个电子不会产生多么大的磁场，但在通常一块物质中就有无数亿个电子。平常它们都在作自旋并各自指向任意方向，因而没有任何净效应发生。奇迹出现在寥寥几种像铁那样的物质中，其中有相当大一部分电子会绕相同方向的轴自旋——对铁来说，每一原子中就有两个电子参加这种协同运动。在一根条形磁铁中会有许许多多电子全都在同一方向自旋，因而，正如我们将会见到的，其总效应就相当于环绕该磁棒表面的电流（这与我们以前对电介质所发现的情况很相似——即一块均匀极化的电介质相当于在其表面上有电荷分布）。因此，一根磁棒与一个螺线管等价并不是偶然的。

§13-6 磁场与电场的相对性

当我们在前面提及作用于电荷上的磁力与其速度成正比时，你也许会奇怪：“什么速度？相对于哪个参照系？”事实上，从本章开头所给出的有关 $\mathbf{B}$ 的定义就已经很清楚，这个矢量是什么取决于我们选取哪一个参照系来规定电荷的速度。但关于哪一个才是规定磁场的合适参照系，我们还未说过什么。事实证明，任何 一个惯性系都可以。我们也将看到，磁和电并不是互相独立的东西，它们必须永远作为一个完整的电磁场结合在一起。虽然在静止情况下，麦克斯韦方程组会分成性质不同的两对，其中一对是关于电方面，而另一对则关于磁方面，在这两种场之间并没有明显联系，然而，在自然界内部它们之间却有一个起因于相对性原理的十分密切的关系。从历史上看，相对性原理是在麦克斯韦方程组之后才发现的。事实上，正是对于电和磁的研究才最终导致爱因斯坦对相对性原理的发现。但是让我们且来看看，如果假定相对性原理可以——的确是可以——应用于电磁学方面的话，则关于磁力相对论知识会告诉我们些什么。

假定我们想一想，如图13-10所示，一个负电荷以速度 v_0 平行于一根载流导线而运动，将会发生的情况。我们试图理解在如下两种参照系中正在进行的事态：一个系统相对于导线固定，如图（a）所示；而另一个系统则相对于粒子固定，如图（b）所示。我们将第一个参照系叫作 S ，而第二个参照系叫作 S' 。

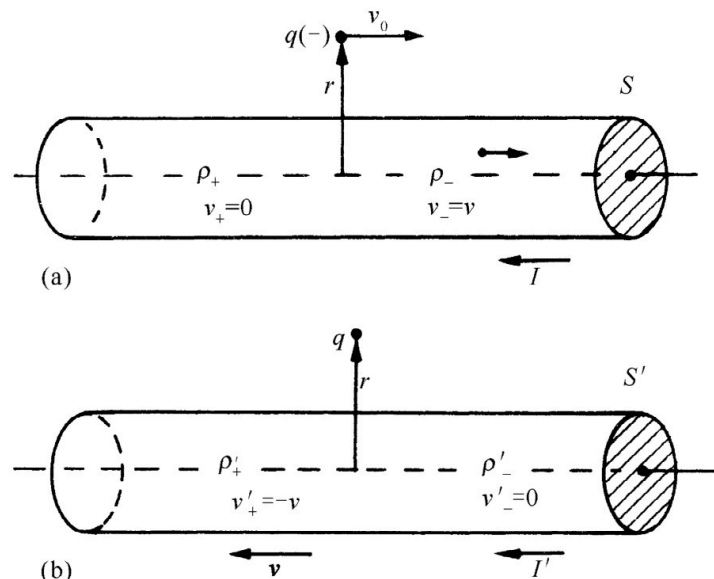


图13-10 从两个参照系上去看一根载流导线与一个电荷 q 的相互作用。(a)在 S 系上,导线是静止的;(b)在 S' 系上,电荷是静止的

在 S 系中,显然有一磁力作用于该粒子上。这力指向导线,所以若该电荷做自由运动,则应该看到它会向导线方面靠拢。但在 S' 系上,就不会有任何磁力作用于该粒子,因为它的速度为零。因此,它是否将停留在那里呢?在这两个参照系上,我们会看到不同的事态发生吗?相对性原理理应说明,在 S' 系我们也该看到粒子会向导线方面靠拢。必须尝试去理解,为什么会发生这样的事情。

现在我们回过头来对一载流导线中的原子进行描述。在诸如铜一类的通常导体中,电流来自某些负电子——称为传导电子——的运动,而正的核电荷以及其余电子则都在材料里保持不动。我们令传导电子的密度为 ρ_- ,在 S 系中它们的速度为 v 。在 S 系中,那些静止不动的电荷密度为 ρ_+ ,这必须等于 ρ_- 的负值,因为我们正在考虑的是一根不带电的导线。这样在导线之外便不会有电场,因而作用于该运动粒子上的力正好是

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}.$$

利用式 (13.18) 中我们所求得的结果，即离导线轴心 r 处的磁场，我们可以断定，作用于该粒子上的力指向导线而具有量值：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2Iqv_0}{r}.$$

利用式 (13.3) 和 (13.5)，电流 I 可以写成 $\rho_- v A$ ，其中 A 是导线的截面积。于是

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2q\rho_- A v v_0}{r}. \quad (13.20)$$

我们可以继续处理任意速度 v 和 v_0 的普遍情况，但考察粒子速度 v_0 与传导电子速度 v 相等的那种特殊情况，只会更好。因此，我们就写成 $v_0 = v$ ，而式 (13.20) 则变成

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.21)$$

现在我们把注意力转移到在 S' 系中所发生的情况，那里粒子静止不动而导线则以速率 v （朝向图的左方）从旁跑过。那些跟着导线跑的正电荷将在该粒子处造成某一磁场 B' 。但粒子现在是静止的，因而就没有磁力作用于其上！如果有任何力作用于该粒子上，则它必然来自电场，必定是那根正在运动着的导线已产生了电场。但它所以能够这样只有它表现出带了电——一定是一根载流的中性导线运动时才会表现出带了电。

我们必须对此仔细检查。应当尝试从 S 系中所已知的导线里的电荷密度算出在 S' 系中导线内的电荷密度，人们起初也许认为它们相同。可是我们知道，长度在 S 与 S' 之间是改变的（见第1卷第15章），从而体积也将起变化。由于电荷密度有赖于电荷所占的体积，因而密度也将发生变化。

在我们对 S' 系中的电荷密度做出决定以前，必须知道一群电子正在运动时它们的电荷会发生什么情况。我们知道，一个粒子的表观质量按 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 变化。是否它的电荷也要做某种相似变化？不！无论动还是不动，电荷总是一样的。否则我们便不会始终都观测到总电荷守恒了。

假设我们取一块材料，比方说一块导体，它原本是不带电的。现在我们把它加热。由于电子与质子的质量不同，所以它们速度改变的数量将会不同。假如粒子的电荷有赖于携带该电荷的粒子的速率，则在这么一块加了热的导体中，电子和质子的电荷便不再平衡了。一块材料当加了热之后就该变成带电的了。正如以前我们曾经见到的，在一块材料中所有电子的电荷若发生微小变化就会引起巨大的电场。这样的效应却从未观测到。

并且，我们还可以指出，在物质中电子的平均速率与其化学成分有关。假如电子的电荷会随速率变化，则在一块材料中的净电荷将在化学反应中有所变化。通过一种直接计算又能够证明：即使电荷对速率仅有一个十分微小的依存关系，也会从最简单的化学反应中产生出巨大的电场来。但从没有这种效应被观测到，因而我们得出结论：单个粒子的电荷与其运动状态无关。

因此，一个粒子所带的电荷 q 是一个不变标量，与参照系无关。这意味着，在任何参照系中，由电子分布的电荷密度恰好就正比于单位体积中的电子数目。我们只需关注这么一个事实：体积可以由于距离的相对论性收缩而发生改变。

现在，我们把这些概念应用于正在运动的那根导线。如果取长度为 L_0 的一段导线，其中静止电荷具有密度 ρ_0 ，则它将含有总电荷 $Q = \rho_0 L_0 A_0$ 。如果同样这些电荷是在一个以速度 v 运动着的不同参照系中被观测的，则它们均会在一段较短的长度

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (13.22)$$

的材料内被找到。但面积 A_0 却依旧不变（因为垂直于运动的尺度不会改变），参见图13-11。

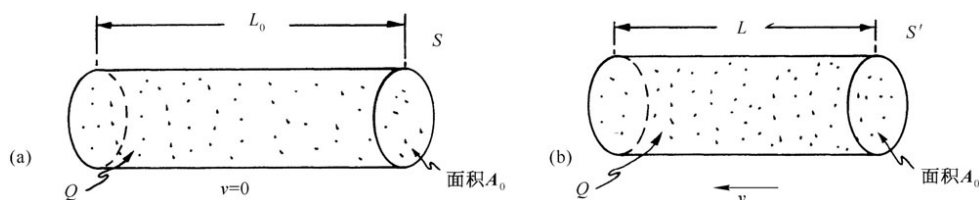


图13-11 如果处于静止的带电粒子的一个分布具有电荷密度 ρ_0 ，则从一个以相对速度 v 运动着的参照系来看，同样的电荷将具有密度 $\rho_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

若把电荷在其中运动着的那个参照系中的电荷密度叫作 ρ ，则总电荷 Q 将是 $\rho L A_0$ 。这也必定等于 $\rho_0 L_0 A_0$ ，因为在任一参照系中电荷总是一样的，所以 $\rho L = \rho_0 L_0$ ，或根据式（13.22），在一个运动着的电荷分布中，其电荷密度的变化情况，就像一个粒子的相对论性质量那样。

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.23)$$

现在我们将这一普遍结果应用于导线中的正电荷，这些电荷在 S 参照系中是静止的。然而在 S' 系中，导线以速率 v 运动，因而正电荷密度就会变成：

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.24)$$

负电荷在 S' 系上是静止的，因而在这一参照系中它们具有“静密度” ρ_0 ，即在式(13.23)中， $\rho_0 = \rho'_-$ 。由于当导线静止时，即在 S 系中，负电荷的速率为 v ，因而它们具有密度 ρ_- 。于是对于传导电子来说，我们便有

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (13.25)$$

或

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (13.26)$$

现在我们就能够明白，为什么在 S' 系中会有电场——因为在这一个参照系上导线里拥有净电荷密度 ρ' ，其为

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-.$$

利用式(13.24)和(13.26)，便得

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

由于静止导线是中性的， $\rho_- = -\rho_+$ ，因而我们就有

$$\rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.27)$$

由此可见，运动导线会带正电，并将在导线外的一个静止电荷处产生电场 E' 。我们已经解决了一个均匀带电柱体的静电学问题。与该柱轴相距为 r 处的电场为

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.28)$$

作用于带负电粒子上的力指向导线。从这两个观点来看，至少我们有一个相同方向的力，在 S' 系中的电力与在 S 系中的磁力方向相同。

在 S' 参照系中，力的大小为

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.29)$$

拿这个结果 F' 与式（13.21）中的结果 F 比较，我们看到从这两个观点来说力的大小几乎完全相等。事实上，

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.30)$$

所以对于我们已经考虑过的低速情况，这两个力相等。至少，对于低速情况我们能够说，我们相信磁和电不过是“观察同一事物的两种方

法”而已。

可是事情甚至比此还要好。若我们从一参照系过渡到另一参照系时把力的变换这一事实也计算在内，则将发现这两种看待事情发生的方法对于任何速度来说都确实给出相同的物理结果。

要弄清楚这一点的一种办法，是先提出这样一个问题：力作用了一会儿之后，该粒子会有什么样的横向动量？从第1卷第16章中我们知道，不论在 S 或 S' 参照系中，一个粒子的横向动量应该相同。若把这横向坐标叫作 y ，则我们要来比较 Δp_y 和 $\Delta p'_y$ 。利用在相对论中正确的运动方程 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ，我们期待在 Δt 时间之后粒子将有一横向动量 Δp_y ，这在 S 参照系中即是

$$\Delta p_y = F \Delta t. \quad (13.31)$$

而在 S' 系，则这横向动量将为

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'. \quad (13.32)$$

当然，我们必须在互相对应的时间间隔 Δt 与 $\Delta t'$ 中来比较 Δp_y 和 $\Delta p'_y$ 。在第1卷第15章中我们曾见到，相对于一个运动粒子来说，时间间隔显得比在该粒子的静止系统中要长些。由于粒子在 S' 系中最初是静止的，因而我们期望，对于小的 Δt ，应有

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.33)$$

而所有这一切都表现正常。根据式（13.31）和（13.32），

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F' \Delta t'}{F \Delta t},$$

如果把式（13.30）和（13.33）两式结合起来，上式正好等于1。

我们已发现：对于沿一导线运动着的粒子，无论是从相对于导线静止的坐标系，还是从相对于粒子静止的坐标系来进行分析，都会得到同样的物理结果。在第一种情况下，该力纯系“磁”力；而在第二种情况下，则力纯系“电”力。这两种观点显示于图13-12中（尽管在第二个参照系中仍有一磁场 $\mathbf{B}'$ ，但它对于一静止粒子来说将不会产生任何力）。

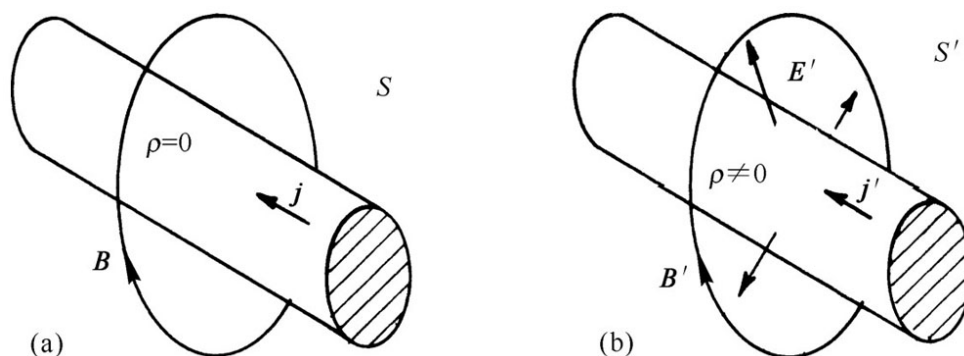


图13-12 (a) 在 S 参照系，电荷密度为零而电流密度为 j 。这里仅有一磁场。

(b) 在 S' 系，就有电荷密度 ρ' 和一不同的电流密度 j' 。磁场 $\vec{B}'$ 已经不同，且还有一电场 E' 。

要是选取另一个坐标系，则会找到另一组不同的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 场。电力和磁力都是同一物理现象——粒子间的电磁相互作用——中的两个部分。把这一相互作用分成电的和磁的两部分，在很大程度上取决于被选用来描述它的参照系，但完整的电磁描述是不变的，因而电和磁合在一起就同爱因斯坦的相对论是一致的了。

由于我们改变坐标系时，电场和磁场会以不同的混合体显示出来，所以如何看待 $\mathbf{E}$ 场和 $\mathbf{B}$ 场就必须小心谨慎。例如，倘若我们把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 想象成“线”，就绝不可能赋予太多的真实性。若试图从一个不同的坐标系去进行观察，有些线可能会消失。比如，在 S' 系上有电场线，但我们却从未发现过这些线“在 S 系上以速度 v 在我们旁边通过”。在这个 S 系中根本就没有电场线！因此，做这样的陈述是没有意义的：当我把一块磁铁移动时，它会带着它的磁场一起动，因而 $\mathbf{B}$ 线也就在移动。一般说来，从“场线的运动速率”这么一种概念出发，始终无法构成任何意义。场是我们用来描述在空间一点所发生的事情的办法。特别是， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 告诉我们作用于一个运动粒子上的力。“由运动 磁场作用于一电荷上的力是什么”的问题根本不含有任何准确意义。力是由电荷处 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的值给出的，而公式 (13.1) 不会由于 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{B}$ 之源 正在运动而改变（ $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 之值才会由于源的运动而发生改变）。我们的数学描述只是同相对于某一惯性参照系 的两种作为 x ， y ， z 和 t 的函数的场打交道。

以后将常提到“在空间传播的电场和磁场的波”，诸如光波。但这与谈论一根弦线上的行波 相似。此时，我们并非指弦线 的某部分将会在波的方向上运动，而是指弦线的位移 将首先出现在某处，继而又出现在另一处。同理，在一电磁波中，波 在传播，但是场的大小在变化。所以今后当我们——或其他人——谈及一个“运动着”的场时，你就应该把它看作仅是一种描述在某些情况下变化着的场的既便利而又快捷的途径。

§13-7 电流与电荷的变换

对于上面当我们对粒子和对导线里的传导电子均取同样的速度 $\mathbf{v}$ 时所作的那种简化手续，你可能会感到担心。本来尽可以返回去并对两个不同速度再进行分析，但更方便的却是去注意电荷和电流是一个四维矢量的分量（见第1卷第17章）。

我们已经知道，若在静止参照系中的电荷密度为 ρ_0 ，则在具有速度 $\mathbf{v}$ 的参照系中，该密度为

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

在这参考系中电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.34)$$

原来我们知道，一个以速度 $\mathbf{v}$ 运动着的粒子其能量 U 与动量 $\mathbf{p}$ 分别由下列两式给出：

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

其中 m_0 为粒子的静质量。我们也知道， U 与 $\mathbf{p}$ 构成一相对论性四维矢量。由于 ρ 和 $\mathbf{j}$ 与速度 $\mathbf{v}$ 的关系同 U 和 $\mathbf{p}$ 与速度的关系一样，所以我们便可以断定， ρ 和 $\mathbf{j}$ 也是一个相对论性四维矢量的分量。这一性质就是对以任一速度运动着的导线之场进行普遍分析的钥匙。如果我们想要对线外粒子速度 $\mathbf{v}_0$ 不同于那些传导电子速度的问题再次谋求解决，就需要这一把钥匙。

如果我们希望把 ρ 和 $\mathbf{j}$ 变换到以速度 u 沿 x 轴运动的一个坐标系中，则我们知道，它们应该恰好如同 t 和 (x, y, z) 那样变换（见第1卷第15章）：

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\y' &= y, & j'_y &= j_y, \\z' &= z, & j'_z &= j_z, \\t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho - uj_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{13.35}$$

有了这些方程式，我们就能把两个参照系中的电荷和电流互相联系起来。取得其中一种参照系中的电荷和电流后，我们便能通过应用麦克斯韦方程组解出在该参照系中的电磁学问题。不管我们选取哪一个参照系，所获得的关于粒子运动的结果将会彼此相同。稍后我们还将回到有关电磁场的相对论性变换上来。

§13-8 叠加原理；右手定则

我们将通过对静磁学这一课题再作出两点评论来结束这一章。首先，关于磁场的两个基本方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/c^2 \epsilon_0$$

对 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{j}$ 来说都是线性的。这意味着，叠加原理也适用于磁场。由两个不同的恒定电流所产生的场等于每一电流单独作用时的场之和。我们的第二点评论是关于以前曾遇到过的右手定则（诸如由电流所产生之磁场的那个右手定则）的。我们也曾注意到，一块磁铁的磁化被理

解成来自该材料里的电子自旋。一个自旋电子的磁场方向也通过同样的右手定则而与其自旋轴线相联系。由于 $\mathbf{B}$ 是按照“手”式法则——涉及一个叉积或旋度——而制定的，因而被称为轴 矢量（凡在空间里的方向与参照右手或左手都无关的那些矢量则叫作极 矢量。例如，位移、速度、力和 $\mathbf{E}$ 都是极矢量）。

可是，在电磁学中物理方法上的可观测 量却不是 右手（或左手）的。电磁相互作用在反射（变换）下是对称的（见第1卷第52章）。每当计算两组电流间的磁力时，改变手的约定并不会改变所得的结果。与右手约定无关，我们的方程组总会导致同向电流相吸而异向电流相斥的最终结果（试用“左手定则”来算出力）。吸引力或排斥力是一种极矢量。之所以出现这一结果，是由于在描述任一完整的相互作用时，我们两次用了右手定则——一次是从电流找出 $\mathbf{B}$ ；再一次则是求出这个 $\mathbf{B}$ 在另一电流上所产生的力。使用右手定则两次与使用左手定则两次是一样的。假如把约定改变成一左手系统，则所有的 $\mathbf{B}$ 场都将反向，但所有的力——或更加确切的乃是所观测到的物体的加速度——却仍保持不变。

虽然最近物理学家惊讶地发现，自然界的所有 定律未必总是对镜面反射保持不变的，但电磁定律的确具有这样一种基本对称性。

[1] 然而，我们不久将见到，对于电磁力来说这样的假定一般是不正确的。

第14章 在各种不同情况下的磁场

§14-1 矢势

在本章中，我们将继续讨论与恒定电流有关的磁场——静磁学课题。磁场与电流之间由如下的基本方程相联系：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (14.1)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (14.2)$$

现在我们希望以一种普遍的方式，即不需要任何特殊对称性或直观猜测，就能在数学上解出这些方程。在静电学中，我们曾发现当所有电荷的位置均为已知时存在求场的一种直接方法。人们通过对电荷取积分——比如式（4.25）中的积分——就能简单地算出标势 ϕ 来。然后，如果还想知道电场，则可对 ϕ 求微商而得到。现在我们要证明：如果已知所有运动电荷的电流密度 $\mathbf{j}$ ，则会有一种求得磁场 $\mathbf{B}$ 的相应方法。

在静电学中，我们就知道（由于 $\mathbf{E}$ 的旋度始终为零），有可能把 $\mathbf{E}$ 表达成一个标量场 ϕ 的梯度。现在 $\mathbf{B}$ 的旋度却不常等于零，因而一般说来不可能把它表达成一梯度。然而， $\mathbf{B}$ 的散度却永远为零，这就意味着我们总能把 $\mathbf{B}$ 表达成另一个矢量场的旋度。因为正如我们以前

曾在§2-7中见到的，旋度的散度总等于零。于是，就总能够把 $\mathbf{B}$ 与将被称作 $\mathbf{A}$ 的场互相联系起来，

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (14.3)$$

或者通过写成分量，则有

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

既然写出了 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，就能保证式 (14.1) 被满足，因为必然有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

$\mathbf{A}$ 这个场被称为矢势。

你会记得，标势 ϕ 并未由其定义完全规定。如果你对某一问题已求得了 ϕ ，你还总能通过加上一常数而找到另一个同样好的势 ϕ' ：

$$\phi' = \phi + C.$$

因为梯度 ∇C 为零，所以这个新的势 ϕ' 会给出相同的电场。因而 ϕ' 与 ϕ 代表相同的物理性质。

同样，我们也有可能给出同一磁场的不同矢势 $\mathbf{A}$ 。而且，由于 $\mathbf{B}$ 是由 $\mathbf{A}$ 的微商得到的，因而，若在 $\mathbf{A}$ 上加一常数并不改变任何物理的实质。可是对于 $\mathbf{A}$ 来说，还有更加广阔的活动余地。我们可以对 $\mathbf{A}$ 加进任何场，只要它等于某一标量场的梯度，就不致改变其物理情况。

这可证明如下。假设对某个实际问题我们已有了一个 $\mathbf{A}$ ，它正确地给出了磁场 $\mathbf{B}$ ，并试问在什么情况下某一个新的矢势 $\mathbf{A}'$ 才能在代入式 (14.3) 中时，会给出同一个场 $\mathbf{B}$ 。于是， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 必定具有相同的旋度：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}.$$

因此，

$$\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0.$$

但若一矢量的旋度为零，则它必然是某一标量场——比如说 ψ ——的梯度，因而 $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$ 。这就意味着，若 $\mathbf{A}$ 为适合于某一问题的矢势，则不论对于任何 ψ ，

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (14.5)$$

仍将是一个同样令人满意的矢势，因为它导致相同的场 $\mathbf{B}$ 。

这样做往往很方便，即任意使 $\mathbf{A}$ 受另一条件限制，因而将其某些“活动范围”扣除出去（正如我们经常选取在无限远处的标势 ϕ 等于零也很方便一样）。例如，可以任意规定 $\mathbf{A}$ 的散度必须是什么而对 $\mathbf{A}$ 加以限制。我们总能够这样做，而不致影响 $\mathbf{B}$ 。这是因为：虽然 $\mathbf{A}'$ 和 $\mathbf{A}$ 都具有同一旋度，从而给出了相同的 $\mathbf{B}$ ，但它们却不需要具有相同的散度。事实上， $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$ ，因而通过选取某一适当的 ψ ，就可以使 $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ 成为我们所希望要的东西。

对于 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 到底应该如何选取呢？这一选择应为获得最大的数学方便而做出，并将取决于我们所要解决的问题。对于静磁学来说，我

们将做这种简单选择：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (14.6)$$

（往后，当考虑电动力学时。将改变这种选择）。于是，目前我们对 $\mathbf{A}$ 的完整定义 [1] 为：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ 和 } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

为了对矢势得到一些经验，让我们首先看看对于匀强磁场 $\mathbf{B}_0$ 来说，它的矢势是什么。选取 z 轴作为 $\mathbf{B}_0$ 的方向，我们就应有：

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0; \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

经检查可知这些方程的一个可能解为：

$$A_y = xB_0; \quad A_x = 0; \quad A_z = 0.$$

或者，我们也同样可以取：

$$A_x = -yB_0; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0.$$

还有另一个解则是上述两个解的线性组合：

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0; \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0; \quad A_z = 0. \quad (14.8)$$

很明显，对于任一特定场 $\mathbf{B}$ 来说，矢势 $\mathbf{A}$ 有许多可能性，因而不是唯一的。

上面第三个解，即式 (14.8)，具有某些有趣的特性。由于其 x 分量正比于 $-y$ ，而其 y 分量正比于 $+x$ ，所以 $\mathbf{A}$ 必定垂直于与 z 轴同方向的矢量。我们把这个矢量叫作 $\mathbf{r}'$ （之所以加上一撇是为了要提醒我们，并不是从原点出发的一个位移矢量）。并且， $\mathbf{A}$ 的大小仍正比于 $\sqrt{x^2 + y^2}$ ，因而也就正比于 r' 。所以（对于我们的匀强磁场来说） $\mathbf{A}$ 可以简单写成

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}'. \quad (14.9)$$

这矢势 $\mathbf{A}$ 具有 $\mathbf{B}_0 r'/2$ 的量值并绕着 z 轴旋转，如图14-1所示。例如，若 $\mathbf{B}$ 场为螺线管内的轴向磁场，则这个矢势便和螺线管上的电流一样沿着同一指向环行。

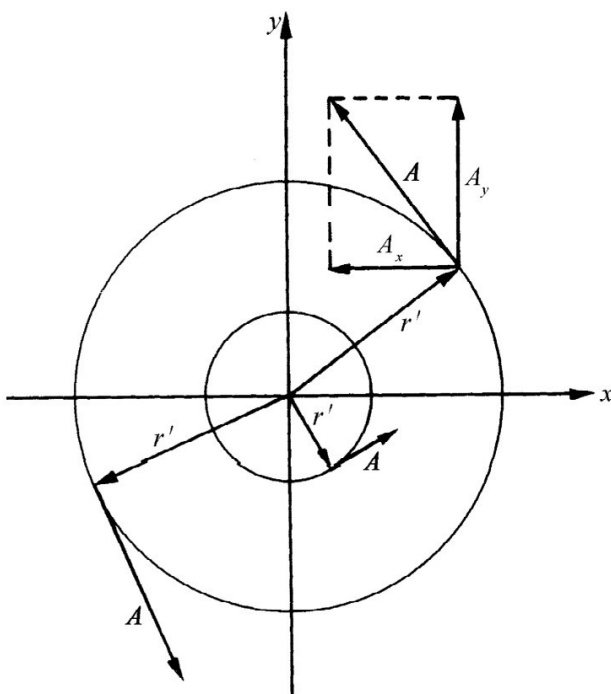


图14-1 一个沿 z 方向的匀强磁场 $\mathbf{B}$ 对应于绕着 z 轴旋转而又具有大小为 $A = Br'$ /2的矢势 $\mathbf{A}$ (r' 是从 z 轴出发的位移)

关于一匀强场的矢势也可由另一种方式获得。 $\mathbf{A}$ 绕任一闭合回路 Γ 的环流与 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的面积分可以由斯托克斯定理、即式 (3.38) 相联系:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{在 } \Gamma \text{ 内}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (14.10)$$

但右边的积分等于 $\mathbf{B}$ 穿过回路的通量, 因而

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{在 } \Gamma \text{ 内}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \quad (14.11)$$

因此, $\mathbf{A}$ 绕任一回路的环流等于 $\mathbf{B}$ 穿过该回路的通量。如果在与匀强场 $\mathbf{B}$ 垂直的平面上取一半径为 r' 的圆形回路, 则通量恰恰为

$$\pi r'^2 B.$$

如果把原点选取在对称轴上, 则可以认为 $\mathbf{A}$ 沿着圆周并且仅仅是 r' 的函数, 所以 $\mathbf{A}$ 的环流将为

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

同上面一样, 我们得到

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

在刚才所述的例子中，我们已从磁场算出了矢势，这与正常做法恰好相反。在复杂问题中，往往先解得矢势，然后才由它来确定磁场，那就比较容易。接下来，我们将说明如何才能做到这一点。

§14-2 已知电流的矢势

由于 $\mathbf{B}$ 是由电流确定的，所以 $\mathbf{A}$ 也如此。我们现在要由电流来求 $\mathbf{A}$ 。从基本方程式 (14.2) 出发：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

当然，这就意味着

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (14.12)$$

这一方程对于静磁学，正如同方程

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14.13)$$

对于静电学一样。

如果我们应用矢量恒等式 (2.58)，将 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ 改写成：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (14.14)$$

则关于矢势的式（14.12）看来就更像关于 ϕ 的式子。由于我们已决定使 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ （而现在就会看出个所以然来了），所以式（14.12）变成

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.15)$$

当然，这个矢量方程包括下列三个方程：

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}; \quad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}; \quad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.16)$$

而这三个方程中的每一个在数学上均与下列方程全同：

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (14.17)$$

所有以前曾学习过的由已知 ρ 解出势的方法，都可用来由已知 $\mathbf{j}$ 解出 $\mathbf{A}$ 的每一个分量！

在第4章中，我们已经知道，静电学方程式（14.17）的一个通解为

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) dV_2}{r_{12}}.$$

因而我们就立即知道，关于 A_x 的通解为

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (14.18)$$

A_y 和 A_z 与此相仿（图14-2将使你们想起关于 r_{12} 和 dV_2 的习惯表示）。我们可以将这三个解合并在一个矢量式中

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (14.19)$$

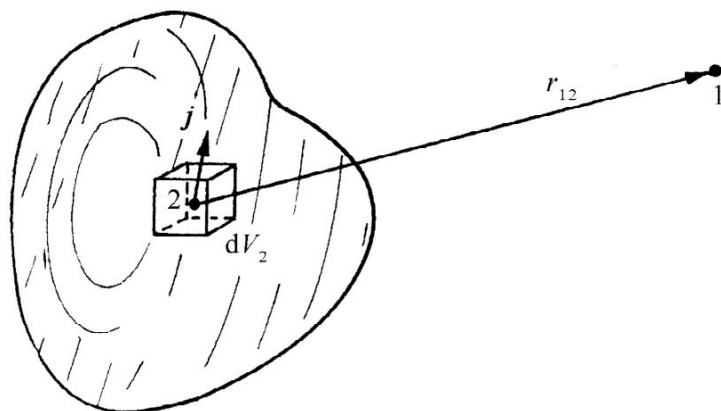


图14-2 点1处的矢势 $\mathbf{A}$ 是对所有点2处的电流元 $\mathbf{j} dV$ 积分而得出的

如果你乐意，还可直接对各分量取微分而证实：关于 $\mathbf{A}$ 的这一积分满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，只要 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ，而我们早已知道对于恒定电流来说这是理所当然的。

这样，我们就得到关于求出恒定电流的磁场的普遍方法。原则是：从一电流密度 $\mathbf{j}$ 所产生的矢势的 x 分量与从一等于 j_x/c^2 的电荷密度 ρ 所该产生的电势 ϕ 相同——而 y 和 z 分量也与此相仿（这一原则只对固定方向上的分量才适用。例如， $\mathbf{A}$ 的“径向”分量不能用同样的办法从 $\mathbf{j}$ 的“径向”分量算出来）。因此，从电流密度矢量 $\mathbf{j}$ ，便可以应用式 (14.19) 求出 $\mathbf{A}$ ——即通过求解电荷分布为 $\rho_1 = j_x/c^2$ ， $\rho_2 = j_y/c^2$ 和 $\rho_3 = j_z/c^2$ 的三个想象中的静电学问题，从而求得 $\mathbf{A}$ 的每一分量。然后，又可通过 $\mathbf{A}$ 的各种微商算出 $\nabla \times \mathbf{A}$ ，最后获得 $\mathbf{B}$ 。这比静电

学稍微复杂一些，但想法是相同的。现在，我们将通过在几种特殊情况下矢势的求解例子来说明这一理论。

§14-3 直导线

作为第一个例子，我们将再次求一直导线的场——这在上一章中已经应用式（14.2）和一些关于对称性的论据而解出。我们考虑半径为 a 而通有恒定电流 I 的一根长直导线。与静电学中电荷分布于一导体上的情况不同，导线中的恒定电流乃均匀地分布在该线的横截面内。如果选取如图14-3所示的坐标系，则电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 便只有一个 z 分量，其大小在导线内为

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2}, \quad (14.20)$$

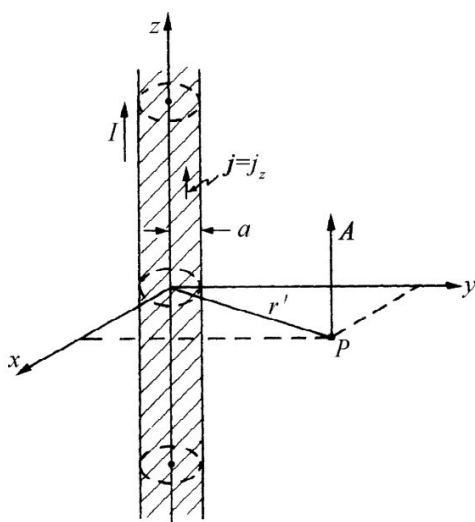


图14-3 沿着 z 轴而通有均匀电流密度 j 的一根长圆柱形导线

而在导线外则为零。

既然 j_x 和 j_y 都是零，我们便立即有

$$A_x=0; A_y=0.$$

为求得 A_z ，我们可以利用带有均匀电荷密度 $\rho=j_z/c^2$ 的导线，解出其电势 ϕ 。在一无限长均匀带电圆柱体之外的各点，其电势为

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

式中 $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，而 λ 则为单位长度的电荷，即 $\pi a^2 \rho$ 。所以对于通有均匀电流的长直导线之外的某点， A_z 应该为

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'.$$

由于 $\pi a^2 j_z = I$ ，上式还可以写成

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'. \quad (14.21)$$

现在就可由式（14.4）求出 $\mathbf{B}$ 。由于该式的六个微商中只有两个不等于零，因而得出

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2}; \quad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}; \quad (14.23)$$

$$B_z = 0.$$

我们得到了与以前相同的结果：***B*** 环绕着导线，其大小为

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \quad (14.24)$$

§14-4 长螺线管

其次，再来考虑一个无限长螺线管。沿管的表面单位长度通有 nI 的环行电流（我们设想每单位长度绕有 n 匝通了电流 I 的导线，并略去绕圈时的微小螺距）。

正如曾经定义过的“面电荷密度” σ 那样，这里我们也定义“面电流密度”***J***，它等于在该螺线管表面上单位长度的电流（这当然恰好就是平均电流密度 j 乘以该薄线圈层的厚度）。***J*** 的大小在这里等于 nI 。这一表面电流（见图14-4）具有如下分量：

$$J_x = -J \sin\phi, \quad J_y = J \cos\phi, \quad J_z = 0.$$

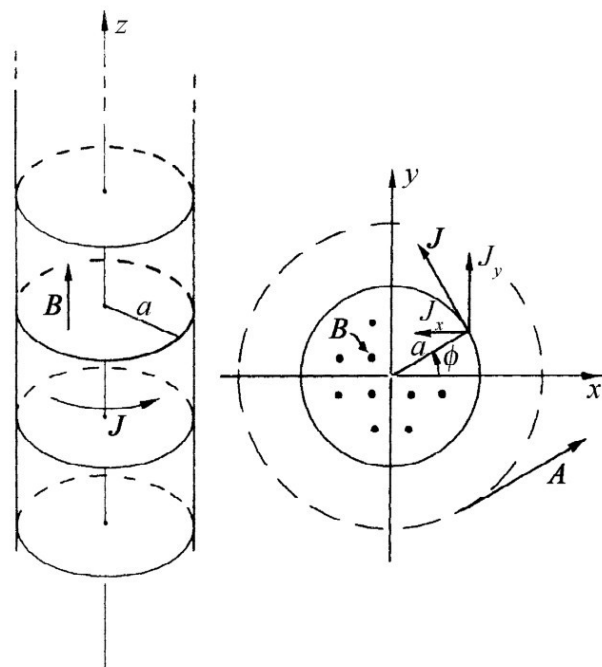


图14-4 通有面电流密度 J 的长螺线管

现在我们必须对这样一种电流分布找出 A 来。

首先，我们希望找出在螺线管外面各点处的 A_x ，这结果与带有面电荷密度

$$\sigma = \sigma_0 \sin\phi$$

（其中 $\sigma_0 = J/c^2$ ）的圆柱外的电势相同。我们从未解过这样一种电荷分布，但却求解过某种相似的问题。这一电荷分布相当于两根各带正电和负电的实心圆柱，在 y 方向上它们的轴有了微小的相对位移。这样一对带电柱体的势，与单独一根均匀带电柱体的势对 y 的微商成正比。这一比例常数是可算得的，但暂时无须对它操心。

一根带电柱体的势正比于 $\ln r'$ ，于是一对带电柱体的势便为

$$\phi \propto \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

因此我们知道

$$A_x = -K \frac{y}{r'^2}, \quad (14.25)$$

式中 K 是某一常数。根据相同的论证，我们会求出

$$A_y = K \frac{x}{r'^2}. \quad (14.26)$$

尽管以前曾经说过在螺线管之外没有磁场，但现在我们却发现有一个 A 场环绕着 z 轴，如图14-4所示。问题在于，它的旋度是否等于零？

显然， B_x 和 B_y 都等于零，而

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{x}{r'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{y}{r'^2} \right) = K \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4} \right) = 0.$$

因此，在一个十分长的螺线管外面磁场的确为零，即使矢势并不等于零。

上述结果我们还可以利用其他已知的东西来核对：矢势绕螺线管的环流应等于管内 $\mathbf{B}$ 的通量（式14.11）。这环流为 $A \cdot 2\pi r'$ ，或者，由于 $A = K/r'$ ，所以环流为 $2\pi K$ 。注意！这与 r' 无关。如果管外不存在 $\mathbf{B}$ 的话，这恰好就是应得的结果，因为通量仅仅是螺线管内 $\mathbf{B}$ 的大小乘

以 πa^2 。对于半径 $r' > a$ 的所有圆周这通量都相同。在上一章中我们曾经得出管内的场为 $nI / (\epsilon_0 c^2)$ ，因而可以确定常数 K ：

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\epsilon_0 c^2},$$

即

$$K = \frac{nI a^2}{2\epsilon_0 c^2}.$$

因此，管外矢势的大小为：

$$A = \frac{nI a^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r'}, \quad (14.27)$$

并且总是垂直于矢量 $\mathbf{r}'$ 。

我们刚才考虑的是一个由导线绕成的螺线管，假如旋转一根表面带有静电荷的长柱体，也会产生那相同的场。若有一根半径为 a 、带有面电荷密度 σ 的薄圆柱壳，则当把它旋转时就会形成一个表面电流 $J = \sigma v$ ，其中 $v = a\omega$ 是面电荷的速度。这样，在该柱内就将有一个 $B = \sigma a\omega / (\epsilon_0 c^2)$ 的磁场。

现在，可以提出一个有趣的问题。假设我们把一根短导线 W 安置成垂直于柱轴，从轴心伸至柱面，并固定于柱面上，以便随柱旋转，如图14-5所示。由于这根导线是在磁场中运动，因而力 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 就会引起该导线两端带电（两端将被充电直至由这些电荷所产生的 $\mathbf{E}$ 场的力恰好抵消 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 之力为止）。如果该柱壳带有正电荷，则导线在柱轴那一端将有负电荷。通过测量这根导线一端的电荷，我们能测得该系统的旋转速率。这样，也就有一种“角速度计”了！

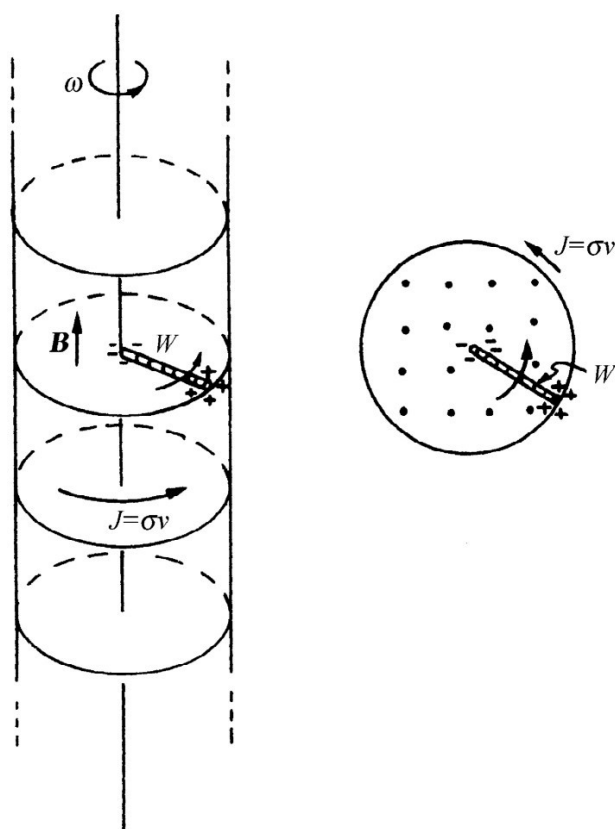


图14-5 一根旋转着的带电柱壳在柱内会产生一个磁场。伴随该柱旋转的一根径向短导线会有电荷感生于其两端上

但你还在怀疑：“要是把自己置身于该旋转柱的参照系上又将如何呢？这时不过是一根静止不动的带电圆柱壳，而我知道那些静电方程说明并没有电场存在于该柱壳之内，因而也就没有任何力会把电荷推

向轴心。因此一定是出了某种差错”。但却没有发现什么东西弄错了。原来不存在“转动的相对性”。由于一个转动系统并不是一个惯性参照系，因而物理规律是不同的。我们必须确实保证，只相对于惯性坐标系才应用电磁学方程组。

要是我们能够运用这么一个带电圆柱壳来测量地球的绝对转动，那该多好，但可惜该效应过于微小，即使采用目前能够得到的最精密仪器也无法观察出来。

§14-5 一个小电流回路的场；磁偶极子

让我们应用矢势的方法求出一个小电流回路的场。所谓“小”者，照例它仅仅指我们所感兴趣的乃是远比回路尺度大得多的那些距离处的场。结果将得出，任一个小回路就是一个“磁偶极子”。这就是说，它所产生的磁场类似于一个电偶极子的电场。

首先考虑一矩形回路，并按照图14-6所示选择我们的坐标系。由于沿 z 方向并没有电流，因而 A_z 为零。在长度各等于 a 的两边则都有沿 x 向的电流。每一段中，电流密度（以及电流）都是均匀的。因此关于 A_x 的解就恰好像来自两根带电棒的静电势（见图14-7）。既然这两根棒各带相反电荷，所以它们在远处的电势只可能是一个偶极子的势（§6-5）。在图14-6中的 P 点，这势应为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}, \quad (14.28)$$

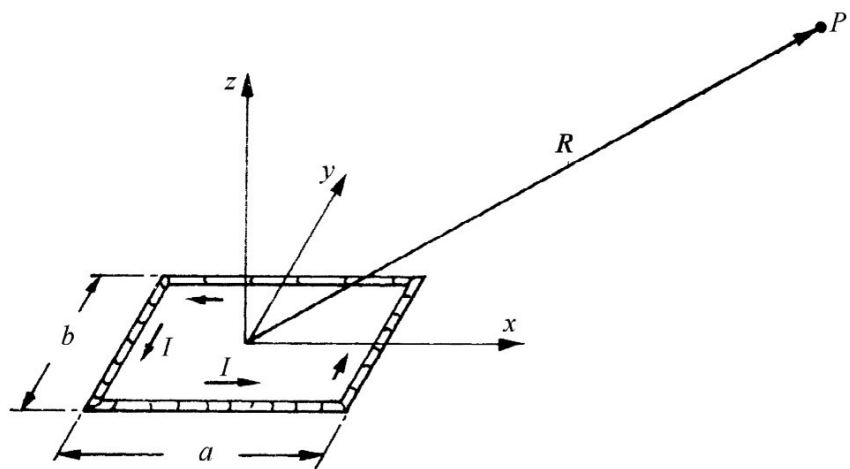


图14-6 通有电流 I 的一个矩形回路。在 P 点的磁场有多大？（ $R \gg a$ 且 $R \gg b$ ）

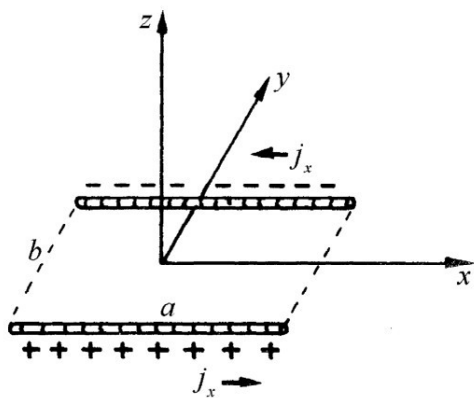


图14-7 在图14-6的电流回路中 j_x 的分布

式中 $\mathbf{p}$ 为该电荷分布的偶极矩。在这种情况下，偶极矩等于一根棒上的总电荷乘以两棒间的距离：

$$p = \lambda ab. \quad (14.29)$$

这偶极矩指向负 y 方向，因而 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{p}$ 夹角的余弦为 $-y/R$ （其中 y 是 P 点的坐标）。所以我们有

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ab}{R^2} \frac{y}{R}.$$

简单地用 I/c^2 代替 λ ，我们就得到 A_x ：

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3}. \quad (14.30)$$

同理可得

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3}. \quad (14.31)$$

另外， A_y 正比于 x ，而 A_x 则正比于 $-y$ ，所以该矢势（在远处）绕 z 轴围成圆环，与回路中的电流 I 有相同的指向，如图14-8所示。

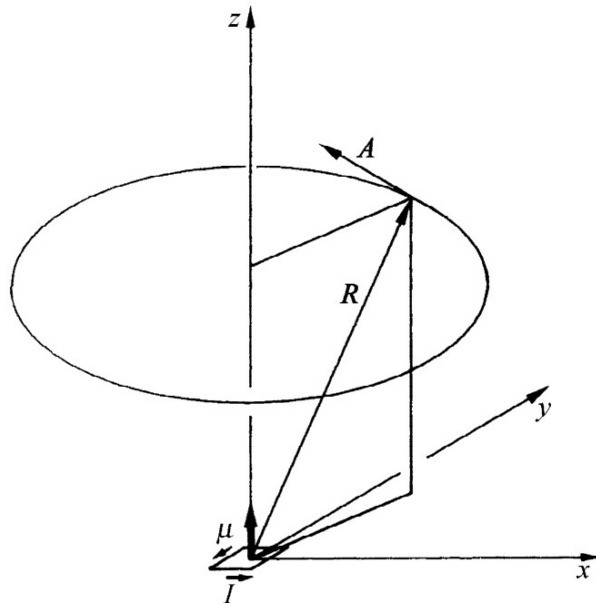


图14-8 在 (xy) 平面的) 原点处一个小电流回路的矢势；一个磁偶极子的场

$\mathbf{A}$ 的强度与 Iab 成正比，即是电流乘以该回路的面积。这一乘积称为该回路的磁偶极矩（常简称“磁矩”）。我们用 μ 来表示：

$$\mu = Iab. \quad (14.32)$$

一个具有任何形状（圆、三角、或其他）的平面小回路的矢势也是由式（14.30）和（14.31）给出的，只要我们用下式来代替 Iab ：

$$\mu = I \times (\text{回路面积}). \quad (14.33)$$

这留给读者去证明。

如果把 μ 视作矢量，并将其方向规定为垂直于该回路的平面，由右手定则给出其正的向指（图14-8），则可把有关 $\mathbf{A}$ 的方程写成如下的矢量形式：

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (14.34)$$

现在仍需求出 $\mathbf{B}$ 来。应用式（14.33）和（14.34），连同式（14.4）一起，便可得到：

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} = \dots \frac{3xz}{R^5} \quad (14.35)$$

[其中我们用...来代表 $\mu / (4\pi\epsilon_0 c^2)$]，

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \frac{3yz}{R^5}, \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\dots \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = -\dots \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right). \end{aligned} \quad (14.36)$$

可见 $\mathbf{B}$ 场分量的表现与由一指向 z 轴的电偶极子产生的 $\mathbf{E}$ 场的表现完全一样 [见式 (6.14) 和 (6.15) 以及图6-4]，这就是为什么我们把电流回路叫作磁偶极子的缘故。“偶极子”这个词，当应用于磁场时，是有点令人迷惑不解的，因为并没有与电荷相对应的磁“荷”。磁“偶极子场”不是由两个“荷”所产生的，而是起因于一电流回路元。

然而，事情显得有点奇怪：从完全不同的两定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ 出发，竟会得出形式相同的场。为什么会这样呢？那是由于偶极子场只出现在与所有电荷或电流的距离都很远处。因此通过大部分有关空间， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的方程就相同：两者各具有零散度和零旋度。所以它们给出相同的解答。然而，我们用偶极矩来概括的那些源的位形在物理上却很不相同——对于彼此互相对应的场，在一种情况下源是一环行电流，而在另一种情况下源则是位于该回路平面上与下的一对电荷。

§14-6 电路的矢势

我们经常感兴趣的是导线直径与整个系统的线度相比非常小的那种电路所产生的磁场。在这种情况下，我们就能简化磁场的方程组。对细小导线来说，我们可以把体积元写成

$$dV = S ds,$$

式中 S 是导线的横截面积，而 ds 则是沿导线的距离元。实际上，由于矢量 $d\mathbf{s}$ 与 $\mathbf{j}$ 方向相同，如图14-9所示（而且我们也可假定， $\mathbf{j}$ 在任一给定截面上各处保持不变），我们便可写出一个矢量方程：

$$j \, dV = jS \, ds. \quad (14.37)$$

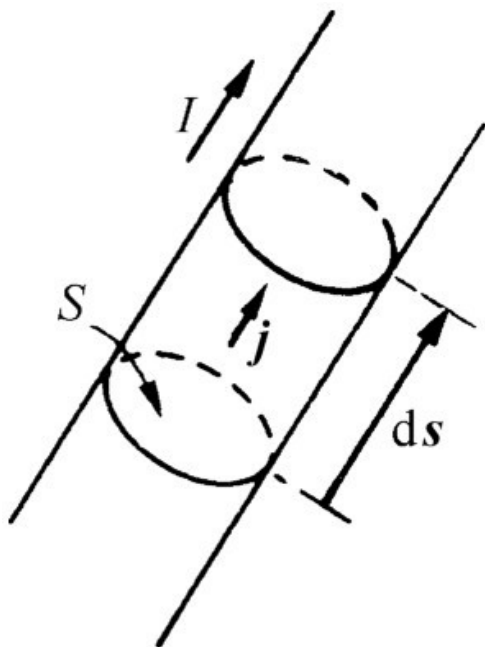


图14-9 对于一根细小导线来说， $j \, dV$ 与 $I \, ds$ 相同

但 jS 恰好就是我们所称的导线中的电流 I ，因而关于矢势式 (14.19) 中的积分就变成

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \quad (14.38)$$

(见图14-10)。我们假定通过电路的电流处处相同，但若有几条各载有不同电流的支路，则对于每条支路当然就应各自采用适当的 I 。

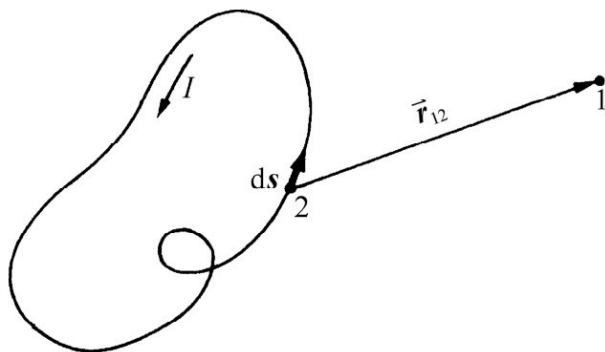


图14-10 导线的磁场可以通过环绕该电路取积分而获得

我们又一次可由直接对式（14.38）进行积分或由对相应的静电学问题求解而把场求出来。

§14-7 毕奥-萨伐尔定律

在学习静电学时我们了解到，某一已知电荷分布的电场可直接由积分式（4.16）获得：

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}.$$

正如我们曾经见到的，要算出这一积分——实际上是三个积分，每一分量各有一个——比起算出势的积分并求出它的梯度来，通常要花费更多工夫。

有一个相似的积分，它把磁场同电流联系了起来。我们已有一个关于 $\mathbf{A}$ 的积分，即式（14.19），就可以通过对该式两边取旋度而获得关于 $\mathbf{B}$ 的积分：

$$\mathbf{B}(1) = \nabla \times \mathbf{A}(1) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}} \right]. \quad (14.39)$$

现在我们必须小心：该旋度算符的含义是取 $\mathbf{A}$ （1）的旋度，这就是说，它仅对坐标 (x_1, y_1, z_1) 进行运算。如果我们记住， $\nabla \times$ 这个算符只对附有脚标1的那些变量才进行运算，而这些变量显然仅出现于

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \quad (14.40)$$

中，则可将该算符移进积分符号之内。对于 $\mathbf{B}$ 的 x 分量，我们得

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right] dV_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] dV_2. \end{aligned} \quad (14.41)$$

方括号内的量恰好就是

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}$$

的 x 分量。对于其他分量，我们将会找出相应结果，因而有

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (14.42)$$

这一积分直接由已知的电流给出了 $\mathbf{B}$ 。这里所涉及的几何性质与图14-2中所示的相同。

若电流仅存在于细小导线的电路中，则如同上一节，我们可立即从导线的一头到另一头加以积分，即用 $I d\mathbf{s}$ 代替 $j dV$ ，其中 $d\mathbf{s}$ 是导线的长度元。这时，采用图14-10上的符号，便得：

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I \mathbf{e}_{12} \times d\mathbf{s}_2}{r_{12}^2} \quad (14.43)$$

（负号之所以出现是由于我们颠倒了该叉积的次序）。这一有关 $\mathbf{B}$ 的方程，以它的发现者的名字命名，称为毕奥 - 萨伐尔定律。它提供一个直接获得载流导线所产生的磁场的公式。

你可能会觉得奇怪：“如果能直接由那个矢量积分找出 $\mathbf{B}$ 来，则矢势还有什么用处呢？毕竟 $\mathbf{A}$ 也含有三个积分！”因为有关 $\mathbf{B}$ 的积分中存在叉积，所以该积分往往较为复杂，正如由式（14.41）显然可见。并且，由于 $\mathbf{A}$ 的积分同静电学的那些相仿，所以我们可能已经懂得它们了。最后，我们还将见到：在更高一级的理论内容（比如相对论，力学定律的更高级描述方式，像以后将要讨论到的最小作用量原理，以及量子力学等）中，矢势起着重要的作用。

[1] 我们的定义仍未唯一地确定 $\mathbf{A}$ 。对于一个唯一的规定，我们还得说明在某个边界上或在无限远处场 $\mathbf{A}$ 的行为如何。例如，选取在无限远处场趋向于零有时是方便的。

第15章 矢势

§15-1 作用于电流回路上的力；偶极子能量

上一章我们研究了由一矩形小电流回路所产生的磁场。并发现那是一个偶极子场，其偶极矩由

$$\mu = IA \quad (15.1)$$

给出，式中 I 为电流而 A 为回路面积。矩的方向垂直于该回路平面，因而也就可以写成

$$\boldsymbol{\mu} = IA \mathbf{n} ,$$

式中 $\mathbf{n}$ 是该面积 A 的法向单位矢量。

一个电流回路或磁偶极子不仅会产生磁场，而且当置于其他电流的磁场中时也会感受到力的作用。我们将首先考察在一匀强磁场中作用于矩形回路上的力。设 z 轴沿磁场方向，而回路平面则被置于通过 y 轴并与 xy 面成 θ 角，如图15-1所示。这样，该回路的垂直于回路平面的磁矩就将与磁场成 θ 角。

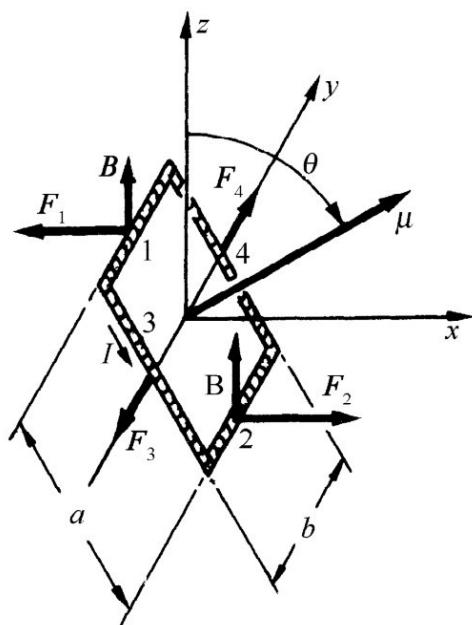


图15-1 一个通有电流 I 的矩形回路位于一匀强磁场 $\mathbf{B}$ （沿 z 方向的）中。这样作用于该回路上的力矩就是 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ ，其中磁矩 $\mu = Iab$

由于在矩形对边上的电流互相反向，所以作用在上的那些力也将反向，从而不会有净力作用于该回路上（当磁场均匀时）。然而，由于图中标明为1和2的两边上存在作用力，因此就有一个倾向于把该回路绕着 y 轴旋转的力矩。这两个力 F_1 和 F_2 的大小为

$$F_1 = F_2 = IBb .$$

它们的力臂为

$$a \sin\theta ,$$

从而该力矩为

$$\tau = IabB \sin\theta ,$$

或者，由于 Iab 是该回路的磁矩，所以

$$\tau = \mu B \sin\theta .$$

这力矩还可以写成矢量形式：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} . \quad (15.2)$$

尽管仅仅在一个相当特殊的情况下证明了力矩由式（15.2）所给出，但这一结果对于任何形状的小回路都正确，正如我们将会看到的。对作用于电场中一电偶极子上的力矩也有相同类型的关系式：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} .$$

现在我们要询问这一电流回路的机械能。由于存在力矩，所以这能量显然与取向有关。虚功原理讲，力矩等于能量相对于角度的变化率，因而我们可写出

$$dU = \tau d\theta .$$

令 $\tau = \mu B \sin\theta$ 并积分，则能量可以写成：

$$U = -\mu B \cos\theta + \text{常数} \quad (15.3)$$

（符号之所以为负，是因为该力矩企图把磁矩旋转至与磁场同向，当 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行时能量最低）。

由于今后将会讨论到的一些原因，这一能量并不是该电流回路的总能量（首先，我们未曾把回路中维持电流的那种能量计算在内）。因此，将这一能量称为 $U_{\text{机械}}$ ，就是要提醒我们它只是能量的一部分。并且，由于无论如何我们总已漏掉了某些能量，所以可令式（15.3）中的常数等于零。因而可把上式写成

$$U_{\text{机械}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}. \quad (15.4)$$

这再次与电偶极子的结果相对应：

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}. \quad (15.5)$$

原来，式（15.5）中的静电能是真实的能量，但式（15.4）中的 $U_{\text{机械}}$ 却不是实际的能量。然而，凭借虚功原理它仍可用来计算力，假设回路中的电流或至少是 μ 保持不变的话。

我们能够证明：对于一个矩形回路来说， $U_{\text{机械}}$ 也相当于把该回路拿进场所需做的机械功。只有在匀强磁场中施于回路上的总力才等于零；在非均匀场中，则始终有一净力作用于通有电流的回路上。在把该回路置于场中时，我们势必经过其中场并非均匀的一些地方，因而就做了功。为使计算简单起见，我们将设想该回路被带进场时它的矩沿着场的指向（在到达了指定位置之后，还可以转至最后位置）。

试设想我们希望把该回路沿 x 方向移至场较强的区域，而该回路的指向按图15-2所示。我们从场等于零的某处出发，并对回路移进场中所受的力乘距离后进行积分。

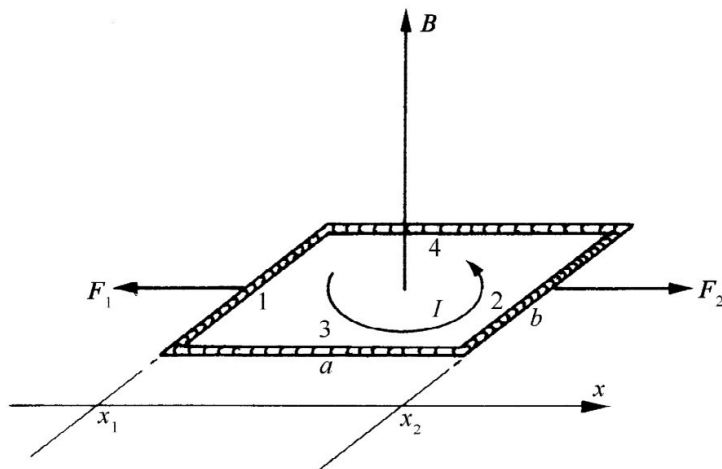


图15-2 一个回路沿 x 方向移动，通过与 x 轴正交的 B 场

首先，让我们分别计算对每边所做的功，然后取其和（并非在积分之前就把力加起来）。作用于边3和边4上的力与运动方向垂直，因而没有做任何功。作用于边2上的力为 $IbB(x)$ ，在 x 方向，因而要获得抵抗磁力所做的功就必须从场为零的某处、比方说从 $x=-\infty$ 处积至它目前所处的位置，

$$W_2 = - \int_{-\infty}^{x_2} F_2 dx = - Ib \int_{-\infty}^{x_2} B(x) dx . \quad (15.6)$$

同理，为抵抗磁力而对边1所做的功为

$$W_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x) dx . \quad (15.7)$$

为求得每个积分，我们需要知道 $B(x)$ 是怎样依赖于 x 的。但要注意，边1紧跟在边2之后，因而对它的积分就包括对边2做功的大部分。事实上，式（15.6）与（15.7）之和恰好就是

$$W = - Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x) dx . \quad (15.8)$$

但若在一个区域里边1与边2处的场 B 几乎相等，则可将该积分写成

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x) dx = (x_2 - x_1) B = aB ,$$

式中 B 是在该回路中心处的场。我们所加进去的总机械能为

$$U_{\text{机械}} = W = -IabB = -\mu B . \quad (15.9)$$

这个结果同我们把式（15.4）作为能量相一致。

当然，要是在进行积分以求得功之前先将作用于回路上的力相加起来，也应该获得同样的结果。如果令 B_1 为边1处、而 B_2 为边2处的场，则沿 x 方向总的力为

$$F_x = Ib (B_2 - B_1) .$$

若该回路很“小”，也就是说，若 B_2 和 B_1 相差不多，则可写成

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a .$$

因而力为

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x} . \quad (15.10)$$

由外力对该回路所做的总功为

$$- \int_{-\infty}^x F_x dx = Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = - IabB ,$$

这恰好又是 $-\mu B$ 。直到如今我们才看出为什么作用于一小电流回路上的力会与磁场的微商成正比，正如我们从

$$F_x \Delta x = -\Delta U_{\text{机械}} = -\Delta (-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (15.11)$$

中预料到的。

上述结果表明：即使 $U_{\text{机械}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ 可能并未包括系统的所有各种能量在内——它是一类臆造的能量——但它仍能同虚功原理一起被用来求得作用于恒定电流回路上的力。

§15-2 机械能与电能

现在我们要来证明，为什么上一节所讨论的能量 $U_{\text{机械}}$ 并不是与恒定电流相关的正确的能量——它并未包括世界上的总能量。固然，我们曾经强调过它仍是一种能量，可用它由虚功原理算出力来，只要在回路中的电流（以及所有其他电流）都维持不变。让我们来看看为什么会是这样。

试设想图15-2上的回路正在沿正 x 向运动，并选取 z 轴在 $\boldsymbol{B}$ 的方向，在边2中的传导电子将感受到一个沿线即沿 y 向的力。但由于这些电子的流动——造成电流——就会有一个与此力同向的运动分量。因此，每一电子将得到功率为 $F_y v_y$ 的功，其中 v_y 是电子沿导线的速度分量。我们将称对电子所做的这个功为电功。现在证明：如果该回路在一匀强场中运动，则总电功为零，因为对回路的某些部分做的正功等于对其他部分做的负功。但如果该电路是在一非均匀场中运动，那就不正确了，此时将会对电子做净功。一般说来，这功会倾向于改变电子的流动，但若电流维持不变，则能量必然会被那些维持电流恒定的电池组或其他电源所吸收或输出。上面当我们由式（15.9）计算 $U_{\text{机械}}$ 时，这能量还未包括进去，因为我们的计算仅仅包括施于导线整体上的那些机械力。

你可能在想：但作用于电子上的力取决于导线运动得多快，若导线运动得足够慢，也许这一电能便可以略去。真的，电能被输出的功率与导线运动的速率成正比，但输出的总能量却也与这一功率所持续的时间成正比。因此，总电能就正比于速度乘时间，那刚好是移动的距离。对于在场中移动给定的距离，就做了相同数量的电功。

让我们考虑单位长度的一段导线，其中通有电流 I 并沿与其本身及磁场 $\mathbf{B}$ 均成直角的方向以速率 $v_{\text{导线}}$ 运动。由于通有电流，所以导线中那些电子将具有沿导线的漂移速度 $v_{\text{漂移}}$ 。对每一电子所施的磁力在漂移方向上的分量为 $q_e v_{\text{导线}} B$ 。因此做出电功的功率为 $F v_{\text{漂移}} = (q_e v_{\text{导线}} B) v_{\text{漂移}}$ 。设每一单位长度的导线里共有 N 个传导电子，则所做电功的总功率为

$$\frac{dU_{\text{电}}}{dt} = N q_e v_{\text{导线}} B v_{\text{漂移}}.$$

但 $N q_e v_{\text{漂移}} = I$ ，即导线中的电流，因而

$$\frac{dU_{\text{电}}}{dt} = I v_{\text{导线}} B.$$

现在由于电流保持恒定，所以作用于那些传导电子上的力并不引起它们加速，也就是说这电能将不会成为电子所有而是归于维持电流不变的那个电源所有。

但要注意作用于导线上的力为 IB ，因而 $IB v_{\text{导线}}$ 也是对导线做机械功的功率，即 $dU_{\text{机械}}/dt = IB v_{\text{导线}}$ 。因此我们断言：对导线所做的

机械功恰好等于对电流源所做的电功，因而回路的能量保持不变！

这并不是偶然的，而是我们所已知定律的一个推论。对导线中每个电荷的总作用力为

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

其做功的功率为

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] . \quad (15.12)$$

如果没有电场，便只有第二项，而这项总是等于零。以后我们将见到，一个正在变化着的磁场会产生电场，因而我们的论证就只适用于在恒定磁场中移动着的导线。

那么虚功原理又怎会给出正确的答案呢？那是由于我们还未曾把世界上的总能量都计算进去。我们未曾把正在产生磁场（该磁场正被着手进行处理）的电流能量也包括在内。

设想有一个如图15-3（a）所绘的那种完整系统，其中我们正在把带有电流 I_1 的回路移进磁场 $\mathbf{B}_1$ 中去，而这磁场是由线圈中的电流 I_2 产生的。原来回路里的电流 I_1 也将在线圈那里产生某个磁场 $\mathbf{B}_2$ 。如果回路正在移动，则场 $\mathbf{B}_2$ 将正在变化。正如我们将在下一章见到的，一个变化着的磁场会产生一个 $\mathbf{E}$ 场，而这一 $\mathbf{E}$ 场则将对导线中的电荷做功。这样一个能量也应包括在我们关于总能量的出纳表中。

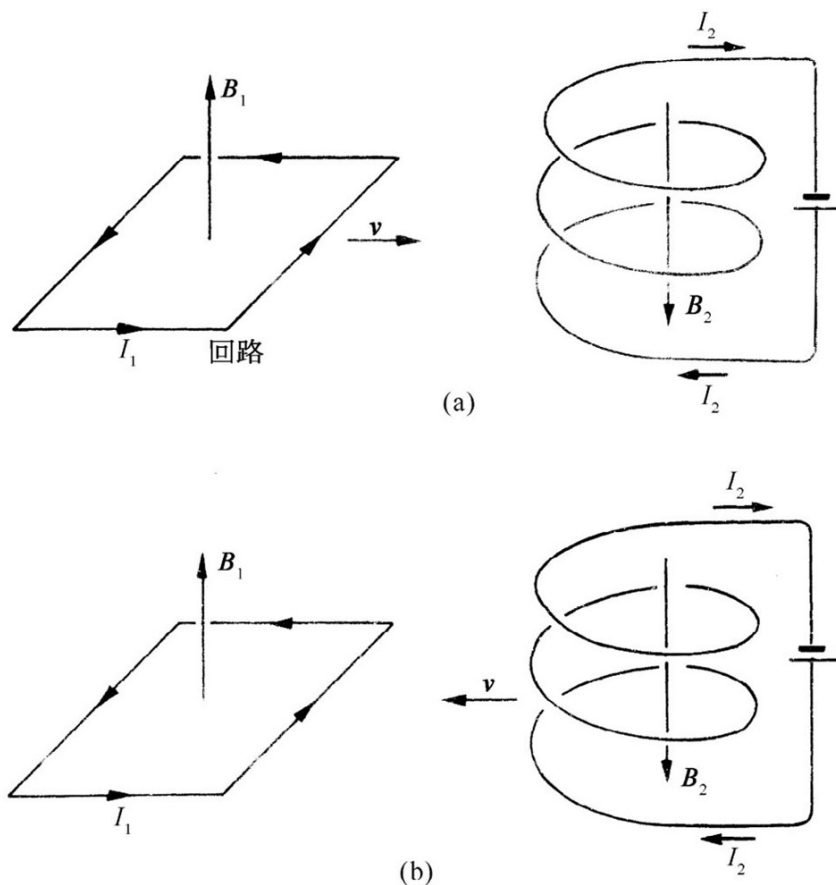


图 15-3 试求一个小回路在磁场中的能量

我们本来可以等到下一章才来求出这个新的能量项，但若按照下述办法应用相对性原理，则我们也可见到它将是什么。当把回路朝静止线圈移动时，我们知道回路中的电能恰与所做的机械功相等而符号相反。所以

$$U_{\text{机械}} + U_{\text{电}} (\text{回路}) = 0.$$

现在假设从一个不同的观点来考察所发生的事情，即在其中回路静止不动，而线圈向着它运动。这时线圈正在移进由回路所产生的场中。同样的论证会给出

$$U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{线圈}) = 0.$$

在上述两种情况下所做的机械功相同，因为它来自两电路之间的作用力。

这两个方程之和给出

$$2U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{回路}) + U_{\text{电}}(\text{线圈}) = 0.$$

整个系统的总能量，当然就是这两项电能再加上仅取一次的机械能。因此我们有

$$U_{\text{总}} = U_{\text{电}}(\text{回路}) + U_{\text{电}}(\text{线圈}) + U_{\text{机械}} = -U_{\text{机械}}. \quad (15.13)$$

世界上的总能量确实等于 $U_{\text{机械}}$ 的负值。比方，若我们需要磁偶极子的真实能量，则应写成：

$$U_{\text{总}} = +\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}.$$

只有当我们假定一切电流都维持不变的那种条件时才能只用其中某一部分能量、即 $U_{\text{机械}}$ （这始终等于真实能量的负值）来求那机械力。在更普遍的问题中，我们就必须细心地把所有一切能量都包括进去。

在静电学中，我们已见过类似的情况。我们曾经证明，一个电容器的能量等于 $Q^2 / (2C)$ 。当我们应用虚功原理去求作用于电容器两板上的力时，能量的改变等于 $Q^2 / 2$ 乘以 $1/C$ 的改变，这就是说，

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2} \Delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{\Delta C}{C^2}. \quad (15.14)$$

现在假设我们曾在保持两导体间的电压不变的条件下，计算把两个导体向不同位置移动时所做的功。那么若我们做某些假定，则可以从虚功原理获得关于力的正确答案。由于 $Q=CV$ ，所以真实的能量就是 $\frac{1}{2}CV^2$ 。但若我们定义一个等于 $-\frac{1}{2}CV^2$ 的人为能量，以及坚持使电压 V 维持不变，并令这一人为能量的变化等于机械功，则可应用虚功原理来求力。于是

$$\Delta U_{\text{机械}} = \Delta\left(-\frac{CV^2}{2}\right) = -\frac{V^2}{2}\Delta C, \quad (15.15)$$

上式与式（15.14）相同。即使我们忽略了为维持电压不变而由电系统所做的功，也仍能获得正确结果。这个电能又刚好是两倍的机械能而符号相反。

这样，若不把电压源必须作功以维持电压不变这个事实考虑在内，而人为地进行计算，则还是能够获得正确的答案。这与静磁学中的情况完全相似。

§15-3 恒定电流的能量

现在我们可以应用关于 $U_{\text{总}} = -U_{\text{机械}}$ 这一点知识来求出恒定电流在磁场中的真实能量。可以从一个小电流回路的真实能量出发，简单地称 $U_{\text{总}}$ 为 U ，便可写成

$$U = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}. \quad (15.16)$$

尽管这个能量是对平面矩形回路算出来的，但这同样的结果对于任何形状的小平面回路均适用。

一个任意形状的电回路可以设想为由许多小的电回路构成，从而可以求出该电路的能量。比方说，有一条如图15-4所示的回路 Γ 那种形状的导线。我们用一个 S 面来填满该曲线，并在该面上划出大量的小回路，其中每一个都可以认为是平面。如果让电流 I 沿每一小回路环行，净结果将犹如电流环绕 Γ 一样，因为在 Γ 内的那些电流将在所有线段上都互相抵消。物理上，这个小电流系统与原来的电路是不能区别的。能量也必然会相同，即刚好是那些小回路的能量之和。

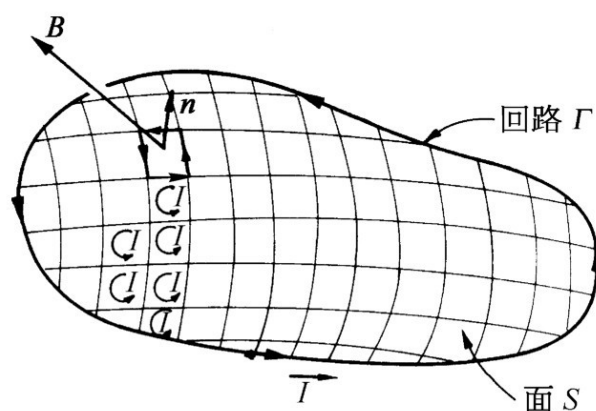


图15-4 一个大回路在磁场中的能量可以认为等于许多个小回路的能量之和

设每一小回路的面积为 Δa ，则它的能量为 $I \Delta a B_n$ ，其中 B_n 为垂直于 Δa 的分量。总能量为

$$U = \sum I B_n \Delta a .$$

当各回路趋于无限小的极限时，求和变成积分，即

$$U = I \int B_n da = I \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (15.17)$$

式中 $\mathbf{n}$ 是垂直于 $d\mathbf{a}$ 的单位矢量。

如果令 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，则可利用斯托克斯定理把一个面积分与一个线积分联系起来：

$$I \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.18)$$

式中 $d\mathbf{s}$ 是沿 Γ 的线元。因此我们就有了对于任意形状的能量：

$$U = \oint_{\text{电路}} I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.19)$$

在这个表式中， $\mathbf{A}$ 当然是指产生了导线所在处之 $\mathbf{B}$ 场的那些电流（而不是该导线中的电流 I ）所造成的矢势。

现在，恒定电流的任何分布都可以设想成由平行于电流线的一些细线电流所构成。对于这样的细线电路中的每一对，能量由式（15.19）给出，式中的积分是环绕其中一个电路取的，同时应用那来自另一个电路的矢势 $\mathbf{A}$ 。为求得总能量，我们需要对所有各对求和。如果不保持一对一对求和，而是把全部电流线都相加起来，则会计算能量两次（以前在静电学中也曾见过类似的结果），因而总能量可写成

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (15.20)$$

这一公式相当于我们以前对静电能所求得的结果：

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV. \quad (15.21)$$

因此，如果我们愿意，便可在静磁学中将 $\mathbf{A}$ 看成是关于电流的一种势能。可惜，这一概念不大有用，因为它只适用于静场。实际上，当场

随时间变化时，则式（15.20）和（15.21）均不会给出正确的能量。

§15-4 B 与 A 的对比

在本节中我们很想讨论下述问题：矢势是否只是一种用作计算的工具——如同在静电学中所用的标势那样——或者矢势是一个“真实”的场？难道磁场，由于造成了作用于一个运动粒子上的力，它就是一个“真实”的场吗？首先，我们应该说“一个真实的场”这一短语并不非常有意义。其一，无论如何你可能不会感觉到磁场十分“真实”，因为甚至整个有关场的概念都相当抽象。你不能伸出手来感受磁场。而且，磁场之值并不十分确定，例如，通过选用一适当的运动坐标系，你可以使在某一给定地点的磁场消失。

我们这里所谓“真实”的场是：一个真实的场就是被用来避免超距作用概念的一个数学函数。如果有一个带电粒子位于位置 P ，它会受到放在离 P 点某个距离处的其他电荷的影响。描述这相互作用的一种方法是讲其他电荷会在 P 点周围形成某种“状况”——不管它可能是什么状况。倘若知道了该状况，并通过给出电场和磁场来加以描述，则我们便能完全确定该粒子的行为——不需进一步询问那些情况是怎样产生的。

换句话说，若其他电荷以某种方式发生了改变，但由 P 点的电场和磁场所描述的 P 点的状况却依然未变，则该电荷的运动也将保持一样。这么一来，一个真实的场就是我们用某种方法规定的一组数字，即在某点所发生的无论什么事情都仅取决于该点的这些数字。我们不必知道其他地方将发生的更多事情。正是在这一种意义上我们将要来讨论矢势是否是一种“真实”的场。

你可能对这个事实感到奇怪，即矢势并不是单值的，它可以通过加上任一标量的梯度而改变，但丝毫不会改变施于粒子上的力。然而，这却与我们现在所谈的这种意义上的真实性问题毫不相干。比如，在某种意义上磁场可以通过相对论性变换而改变（ $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}$ 场也都如此），但我们却不会去操心如果场可以这样改变而发生的事情。这实际上并不会造成任何差别，与矢势是否是一种用来描述磁场的适当的“真实”场或只是一个有用的数学工具的问题毫无关系。

关于矢势 $\mathbf{A}$ 的用处我们也应作出一些评论。我们已见到，利用它并通过正常步骤即可以计算已知电流的磁场，正如可用 ϕ 来求电场。在静电学中我们曾看到， ϕ 是由一个标量积分给出的：

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2. \quad (15.22)$$

通过三次微分运算，便可从这个 ϕ 获得 $\mathbf{E}$ 的三个分量。这个步骤通常要比在下列矢量式中算出三个积分较易于掌握：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.23)$$

首先这里就有三个积分，其次，每个积分一般又较困难。

对静磁学来说，优点远没有那么明显。 $\mathbf{A}$ 的积分就已经是一个矢量积分：

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}, \quad (15.24)$$

这当然包含了三个积分。并且，当我们取 $\mathbf{A}$ 的旋度以获得 $\mathbf{B}$ 时，不得不做六次微商把它们一对一对地结合起来。在大多数问题中，这一步骤是否确实比直接从下式算出 $\mathbf{B}$ 来较为容易，就不是立即能看清楚的：

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.25)$$

对于简单问题，应用矢势往往较为困难，那是由于下述原因。假设我们只对一点的磁场 $\mathbf{B}$ 感兴趣，而问题又具有某种好的对称性——比如说，我们要求出在一环形电流的中轴上某一点的场。由于对称性，我们可以通过对式 (15.25) 的积分而很容易地获得 $\mathbf{B}$ 。然而，假如我们先求出 $\mathbf{A}$ ，则还得从 $\mathbf{A}$ 的微商 算出 $\mathbf{B}$ ，因而就一定要知道在所注意点邻近 所有点的 $\mathbf{A}$ 值。而这种点大多数位于对称轴的外面，从而使 $\mathbf{A}$ 的积分变得较复杂。例如，在那圆环问题中，我们不得不用到椭圆积分。在这样的問題中， $\mathbf{A}$ 显然不是十分有用。但对于许多复杂问题，用 $\mathbf{A}$ 来计算比较容易，那却是真的。不过为了证明技术上的这点方便就认为使你多学习一种矢量场是正当的，那就有点困难了。

我们引进了 $\mathbf{A}$ 是因为它的确 具有重要的物理意义。它不仅与电流的能量有关，如在上节中我们曾经见到的；而且它还是在上述意义上的一种“真实”的物理场。在经典力学中我们显然可把作用于一粒子上的力写成下式：

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (15.26)$$

因而若给出了力，则关于运动的一切事情就都确定了。在任何 $\mathbf{B} = 0$ 的区域中即使 $\mathbf{A}$ 不为零，诸如在一螺线管外面，那里并没有可觉察到的

A 的效应。因此人们早已相信 A 不是一个“真实”的场。然而事实却证明，存在着涉及量子力学的现象，它们表明场 A 实际上就是我们定义过的那种意义的“真实”的场。在下一节中我们将向你们说明那是怎么回事。

§15-5 矢势与量子力学

当我们从经典力学过渡到量子力学时，在什么概念是重要的方面有了很多改变。我们曾在第1卷中谈过其中的一些，特别是，力的概念逐渐消失，而能量和动量的概念却成为最重要的了。你应当记得，人们与之打交道的乃是在空间和时间里变化着的概率幅，而不是粒子的运动。在这些振幅中，既有与动量相联系的波长，又有与能量有关的频率。因此，那些能确定波函数相位的动量和能量就成了量子力学中重要的量了。我们处理的是改变波的波长的相互作用，而不是力。力的概念变得十分次要，如果它多少还存在一点的话。比方，当人们谈论核力时，他们经常加以分析和计算的是两个核子间的相互作用能量，而不是它们之间的力。从没有人会为了找出力是个什么样子而对能量取微分。在这一节中我们要描述矢势和标势是怎样进入量子力学的。实际上，正因为动量和能量在量子力学中起着重要作用，才使得 A 和 ϕ 提供了把电磁效应引进量子描述的最直接途径。

我们必须稍微复习一下量子力学是如何处理问题的。让我们再次考虑在第1卷第37章中曾经描述过的假想实验，在其中电子经两个狭缝而衍射。这个装置再次表示在图15-5上。能量几乎相同的电子离开了源而向具有两条狭缝的壁前进。在壁的外面是“挡板”，在其上有一个可移动的探测器，我们称之为 I ，它是用来测量电子到达挡板上距离

对称轴为 x 处的一个小区域中的比率。这比率正比于各个别电子在离开了源之后到达该挡板区的概率。这概率具有如图所示的那种复杂形状的分布，我们认为这是由于两个波——每个来自一个狭缝——相互干涉所致。这两个波的干涉结果取决于它们间的相位差。也就是说，若振幅分别为 $C_1 e^{i\Phi_1}$ 和 $C_2 e^{i\Phi_2}$ ，则相位差 $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ 就确定了它们的干涉图样 [见第1卷，式 (29.12)]。设屏与狭缝之间的距离为 L ，又若通过两狭缝的电子所走过的程差为 a ，如图所示，则这两个波的相位差为

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \quad (15.27)$$

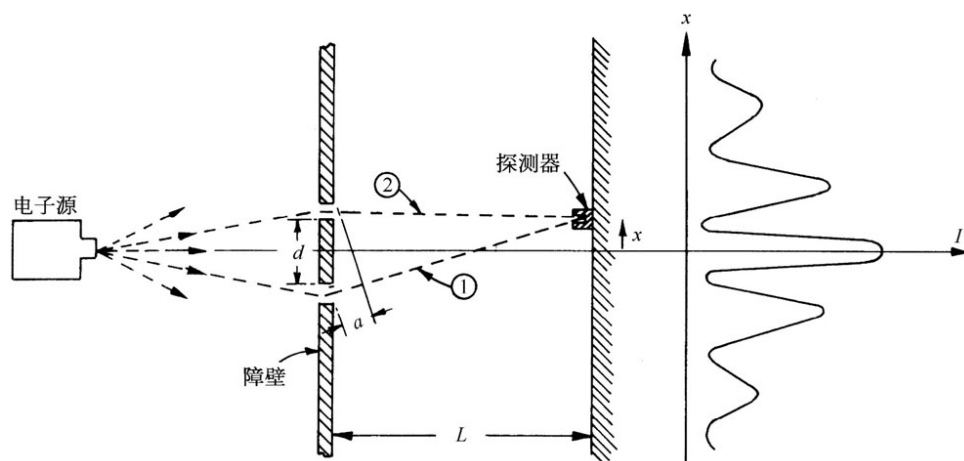


图15-5 用电子做的一个干涉实验（同时参阅第1卷第37章）

照例，我们令 $\lambda = \lambda/(2\pi)$ ，其中 λ 就是概率幅空间变化的波长。为简单起见，将只考虑那些远小于 L 的 x 值，这样便可令

$$a = \frac{x}{L}d$$

和

$$\delta = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda}. \quad (15.28)$$

当 x 等于零时， δ 为零，两波同相，因而概率有一个极大值。当 δ 等于 π 时，两波反相，它们就会干涉相消，而概率成为极小。因此，我们将得到有关电子强度的那种波形函数。

现在我们要说明用来代替力的定律 $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的量子力学定律。这将是用来确定具有量子力学性质的粒子在电磁场中的行为的那种定律。由于发生的事件都要由概率幅来确定，所以这一定律就必然会告诉我们磁效应如何影响概率幅；我们不再与粒子的加速度打交道了。这定律是这样的：经过任一轨道的粒子，其概率幅的相位因磁场存在而改变的量，等于矢势沿整个轨道积分乘该粒子的电荷再除以普朗克常量。也就是，

$$\text{磁所引起的相位变化} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{轨道}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.29)$$

要是没有磁场，波到达时会有某一定的相位。但若某处存在磁场，则到达波的相位增加了式（15.29）中的积分。

尽管对于目前的讨论不必用上它，但我们还是要提出静电场的效应在于产生一个相位变化，它等于标势 ϕ 的时间积分的负值：

$$\text{电所引起的相位变化} = -\frac{q}{\hbar} \int \phi dt.$$

上述两式不仅对于静场正确，而且合起来对于静的或动的任何电磁场也都正确。这就是用来代替 $\mathbf{F}=q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的定律。然而，现在我们只考虑静磁场。

假设在双狭实验中存在磁场，则我们要问，通过两狭缝的两个波在到达屏上时其相位如何。两波的干涉确定概率的极大值将出现在何处。我们可把沿路径（1）的波的相位叫作 Φ_1 。若 $\Phi_1(B=0)$ 为在没有磁场时的相位，则当加上磁场时这个相位便将是

$$\Phi_1 = \Phi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.30)$$

同理，关于路径（2）的相位为

$$\Phi_2 = \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.31)$$

这两个波在探测器上的干涉取决于其相位差

$$\delta = \Phi_1(B=0) - \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.32)$$

无场时的相位差我们将称之为 $\delta(B=0)$ ，那恰好就是在上面式（15.28）中曾经算出来的那个相位差。并且，我们注意到，这两个积

分还可以写成一个沿路径（1）向前并沿路径（2）返回的积分，我们称这个路径为闭合路径（1-2）。因而有

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.33)$$

上式告诉我们，电子的运动如何被磁场所改变。有了这个式子，我们就能求出在挡壁上强度为极大和极小的那些新位置。

可是，在做这件事之前，我们要提出下面有趣而又重要的一点。你会记起，矢势函数具有某种任意性。其差为某一标量函数梯度 $\nabla \psi$ 的两个不同的矢势函数 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ ，都代表同一个磁场，因为梯度的旋度为零。因此，它们将给出相同的经典力 $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。如果在量子力学中其结果取决于矢势，则在许多可能的 $\mathbf{A}$ 函数中究竟哪一个是正确的呢？

答案是， $\mathbf{A}$ 同样的任意性在量子力学中依然存在。如果我们把式（15.33）中的 $\mathbf{A}$ 改变成 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ ，则对于 $\mathbf{A}$ 的积分变成

$$\oint_{(1-2)} \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{(1-2)} \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}.$$

$\nabla \psi$ 的积分仍环绕闭合路径（1-2），但根据斯托克斯定理，梯度的切向分量沿一闭合路径的积分总等于零。因此， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 两者都给出相同的相位差和相同的量子力学干涉效应。在经典和量子力学的两种理论中只有 $\mathbf{A}$ 的旋度才是要紧的，对 $\mathbf{A}$ 函数的任何选择，凡具有正确旋度的，都给出了正确的物理意义。

如果我们引用§14-1的那些结果，则结论明显相同。那里我们曾求得 $\mathbf{A}$ 沿一闭合路径的线积分为穿过该路径的 $\mathbf{B}$ 的通量，在这里就是穿

过路径（1）与（2）之间的通量。如果我们愿意，式（15.33）便可以写成：

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} [\text{路径(1) 与(2) 之间 } \mathbf{B} \text{ 的通量}], \quad (15.34)$$

式中 $\mathbf{B}$ 的通量通常指 $\mathbf{B}$ 的法向分量的面积分。这结果仅取决于 $\mathbf{B}$ ，从而也仅取决于 $\mathbf{A}$ 的旋度。

由于用 $\mathbf{B}$ 或用 $\mathbf{A}$ 都能写出结果，因此你可能倾向于认为 $\mathbf{B}$ 保持它本身为“真实”的场，而 $\mathbf{A}$ 仍可视为作为一种人为的结构。但我们原来提出的“真实场”的定义，是建筑在真实场不会对粒子做超距作用的概念上的。然而，我们能够举出一个例子，其中在有某种机会找到粒子的任何地方， $\mathbf{B}$ 都等于零或至少任意地小，因而不可能认为磁场会直接对粒子作用。

你应当记得，对于通有电流的长螺线管，管内有 $\mathbf{B}$ 场，而管外则无；但却有许多 $\mathbf{A}$ 环绕在管的外面，如图15-6所示。若我们安排一种情况，其中电子只在螺线管外被发现——即在那个只有 $\mathbf{A}$ 的地方——则按照式（15.33）对其运动的影响依然存在。从经典方面看，这是不可能的。按经典理论是，力仅取决于 $\mathbf{B}$ ；为了知道螺线管是否正通有电流，就必须使粒子穿过它。但从量子力学方面看，通过粒子围绕螺线管运转，甚至不用靠近它，你就能发现有磁场存在于螺线管内！

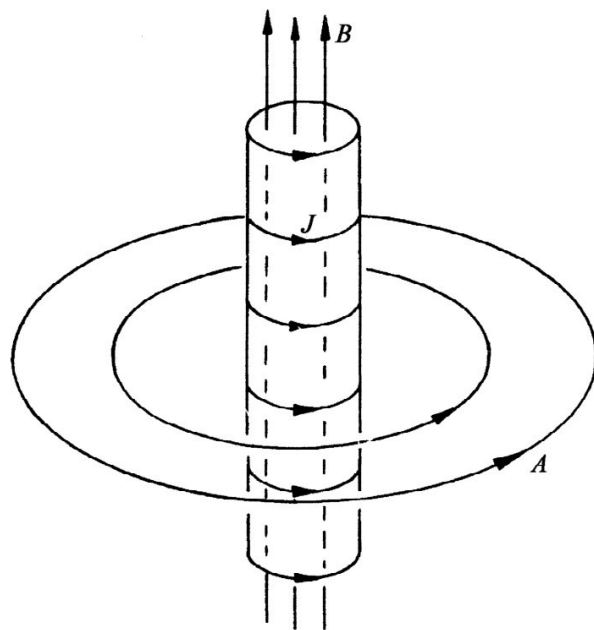


图15-6 一个长螺线管的磁场和矢势

假设我们把一个直径很小的长螺线管恰好放在障壁后面的两缝之间，如图15-7所示。螺线管直径要比两狭缝间的距离 d 小得多。在这种情况下，电子在狭缝处的衍射不会提供电子接近该螺线管的相当大的概率。这对我们的干涉实验将会产生什么影响呢？

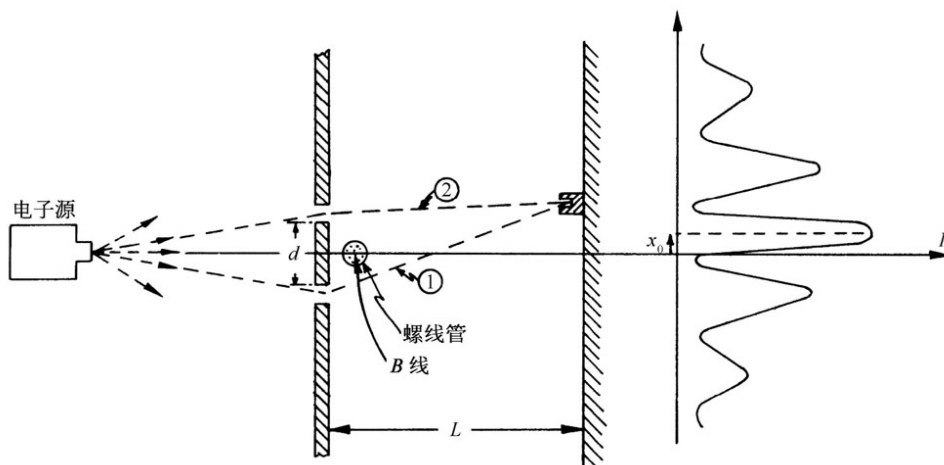


图15-7 磁场能够影响电子的运动，哪怕场仅存在于其中找到电子的概率是任意小的区域里

试比较电流有否流经螺线管的两种情况。若没有电流，我们便不会有 $\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{A}$ ，因而就得到挡板处电子强度的原来图样。但若对螺线管通电流并在管内建立磁场 $\mathbf{B}$ ，则在管外便有 $\mathbf{A}$ 。于是就存在一个正比于管外 $\mathbf{A}$ 的环流的相位差方面的移动，这意味着整个极大和极小的图样被移至一个新位置。事实上，由于对任一对路径来说，穿过其中的 $\mathbf{B}$ 的通量是常数，因而 $\mathbf{A}$ 的环流也是常数。对于每一到达点来说就有相同的相位变化；也就是相当于使整个图样在 x 方向上移动一个常数，比方说 x_0 ，那是容易算出的。极大强度将出现在两个波的相位差为零的地方。应用关于 δ 的式 (15.32) 或 (15.33) 以及关于 δ ($B=0$) 的式 (15.28)，我们得

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{h} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.35)$$

或

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{h} [\text{路径(1)与(2)之间 } \mathbf{B} \text{ 的通量}]. \quad (15.36)$$

从螺线管所在的位置来看，出现的图样^[1]应如图15-7所示。至少，这是量子力学的预言。

的确如此，这一实验最近已经做成了。它是一个十分难做的实验，由于电子的波长很短，所以仪器必须以微小的尺度来观察干涉现象。两狭缝必须互相紧靠，这意味着需要有一个非常细的螺线管。事实证明，在某些场合下，铁晶体将会生长成十分长而又只在显微镜下才能看得到的细丝，即所谓晶须。当这些铁晶须被磁化时，像微小的螺线管，因而除了靠近两端的地方，外面就没有任何磁场。电子相干

实验，是把这种晶须放在两狭缝之间做出来的，而所预言的电子图样中的移动被观测到了。

于是，在我们的意义上 A 场是“真实”的。你可能会说：“但磁场本来就有的。”本来就有，不过要记住我们原来的概念——所谓场是“真实”的，那只要它是为了得到运动而就必须在粒子所在的位置 被规定的。在晶须里的 B 场却有着超距的作用。如果我们不愿意用超距作用来描写它的影响，则非得用矢势不可。

这一课题曾有过一段有趣的历史。我们所描述的理论从1926年量子力学问世时人们就知道了。矢势出现在量子力学的波动方程（薛定谔方程）中的事实，从该方程最初被写出来的那一天起就已经明显了。它不可能以任何轻易的方式由磁场代替，这已由企图做此种尝试的人们陆续注意到了。从我们对于在没有磁场的区域里运动的电子仍然受到影响的例子来看，那也是清楚的。但由于在经典力学中 A 没有显示出任何直接的重要性，并且由于它可以通过加上一梯度而改变，人们便不断地说矢势不具有直接的物理意义——即使在量子力学中也只有磁场和电场才是“正确”的。在进行回顾时似乎觉得奇怪，为什么从没有人想要讨论这一实验，一直到了1956年才由博姆和阿哈罗诺夫最先对此提出建议，从而使整个问题明朗化。其意义始终存在，但就是没有人曾注意到它。于是，当这一事情被提起时许多人都颇受震动。这就是为什么会有人认为值得做实验以弄明白它确实是对的，尽管这么多年来已被人们确信的量子力学给出过明确的答案。有趣的是，像这样一件事情竟搁置达30年之久，只是由于对什么东西有意义而什么东西没有意义的某些偏见，就使这件事一直被忽视。

现在我们希望继续做稍微进一步的分析。要证明量子力学公式与经典公式间的关系，即证明为什么结果是：若以足够大的尺度来考察

事件，则它看起来好像粒子被等于 $q \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$ 的力所作用着似的。为要从量子力学得到经典力学，需要考虑这种情况，其中所有波长比起如场那样的外加条件做出可观变化所跨越的距离来都远为微小。我们将不在最普遍的场合下证明这一结果，而只是以一个十分简单的例子表明它是如何得出来的。我们再次考虑相同的狭缝实验，但不再把所有磁场都局限在两狭缝间的一个十分微小的区域里，而是设想磁场延伸至狭缝后面较广阔区域中，如图15-8所示。我们将考虑一种理想情况，其中磁场在与 L 相比相当小的、宽度为 w 的狭窄长条中是均匀的（那很容易安排，挡板可以随意地放在某一远处）。为了要算出相位的移动，必须算出沿路径（1）和（2）的两个积分。正如我们曾经见到的，它们间的差值恰好就是在两路径间 $\mathbf{B}$ 的通量。对于我们的近似程度，这通量为 Bwd 。这样，对于这两路径的相位差就是

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} Bwd. \quad (15.37)$$

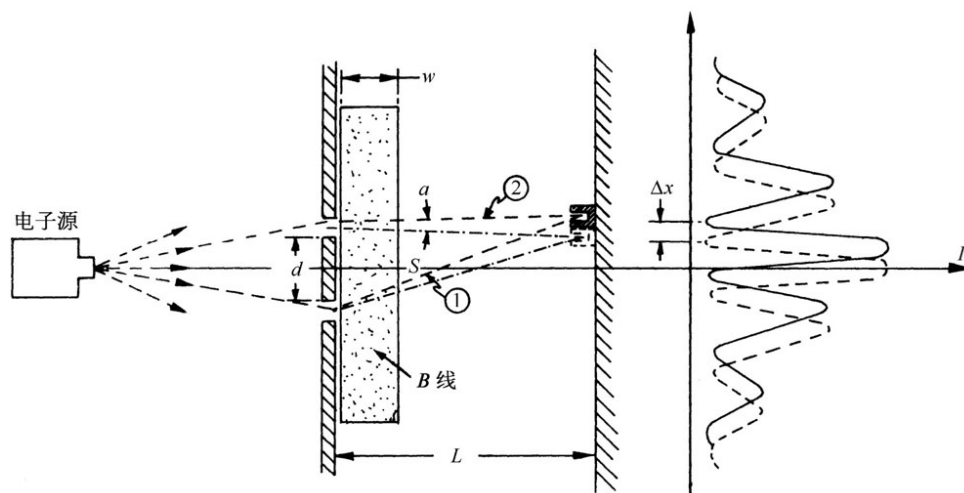


图15-8 由狭长条磁场所引起的干涉图样的移动

我们注意到，对于我们所取的近似程度，这一相位移动与角度无关。因此，这一效应又把整个图样向上移动一个距离 Δx 。利用式

(15.35) ,

$$\Delta x = -\frac{L\lambda}{d}\Delta\delta = -\frac{L\lambda}{d}[\delta - \delta(B=0)].$$

对于 δ - δ ($B=0$) , 利用式 (15.37) 得

$$\Delta x = -L\lambda\frac{q}{h}Bw. \quad (15.38)$$

这样的移动相当于把所有轨道都偏转了一个角度 α (见图15-8) , 这里

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = -\frac{\lambda}{h}qBw. \quad (15.39)$$

原来按照经典理论, 我们也会期待薄狭长条磁场会把所有轨道都偏转某一个小角度, 比如说 α' , 如图15-9 (a) 所示。当电子通过磁场时, 它们将感受到一个持续了时间 w/v 的横向力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。它们横向的动量的改变就恰好等于这个冲量, 因此

$$\Delta p_x = -qwB. \quad (15.40)$$

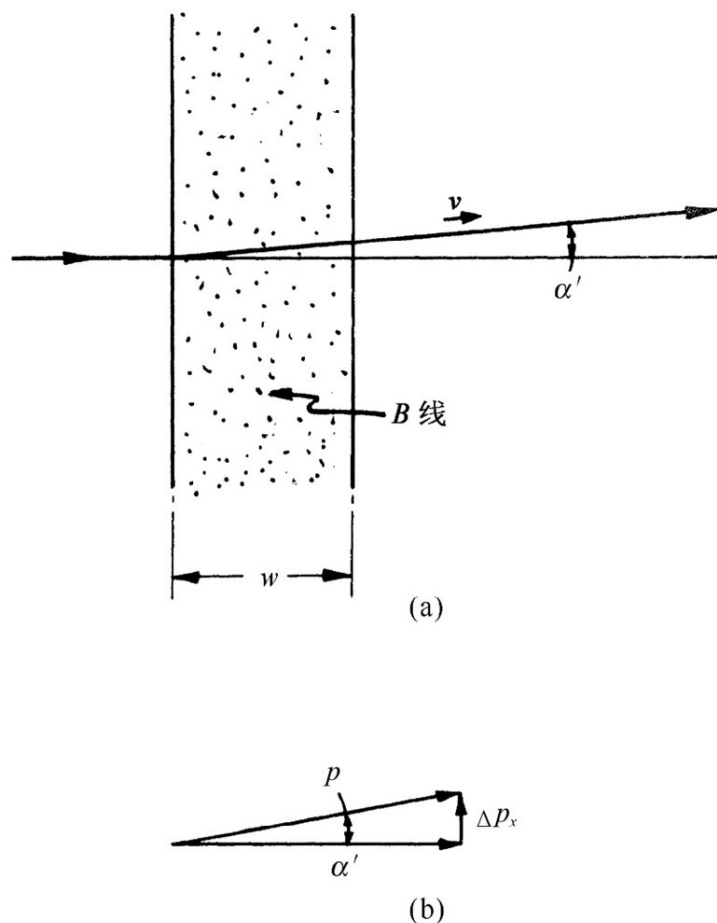


图15-9 粒子通过狭长条磁场时被偏转

角偏转 [图15-9 (b)] 等于这一横向动量对总动量 p 的比。我们得到

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = -\frac{q\omega B}{p}. \quad (15.41)$$

可以把这个结果同由量子力学算出来的相同的量 α 做比较。但经典力学与量子力学之间的关系则是这样：一个具有动量 p 的粒子相当于随波长 $\lambda = \hbar / p$ 变化的量子振幅。应用这个等式， α 和 α' 就彼此全等。经典的与量子的两种计算给出相同的结果。

从这个分析我们看到，在量子力学中以明显的形式出现的矢势怎样产生一个仅取决于其微商的经典力。在量子力学中重要的是邻近路径间的相干作用，结果往往是该效应仅取决于从一点至另一点场 A 变化了多少，因而仅取决于 A 的微商而并不取决于 A 本身之值。虽然如此，矢势 A （以及与相随的标势 ϕ ）看来似乎给出了物理学的最直接描述。我们越是深入到量子理论中去，这一点就变得越清楚。在量子电动力学的普遍理论中，人们把矢势和标势作为代替麦克斯韦方程的一组方程中的基本量： E 和 B 逐渐从物理定律的现代表示式中消失，它们正在被 A 和 ϕ 所代替。

§15-6 对静态是对的而对动态将是错的

我们现在处于探索静场这一主题的末尾了。在这一章中，我们已经冒险地开始接近必须对付场随时间变化时所发生的情况。我们过去处理磁场能量时，仅仅依靠躲入相对性论证的避难所才逃避了它。即使如此，我们对能量问题的处理还是多少带着人为性和也许甚至是神秘性，因为曾经忽略了实际上运动的线圈必定产生变化的场这个事实。现在正是学习处理随时间变化的场——电动力学这一门学科的时候。我们将在下一章中做这件事。然而，首先将要强调下面几点。

尽管在这一课程中，我们是从一组完整而又正确的电动力学方程的表达方式出发的，但我们立刻开始学习某些不完整的部分——因为那是比较容易的。从静场的简单理论出发，并只在后来才逐步进入包括动态场在内的更复杂的理论，是有很大大优越性的。马上要学习的新

材料比较少，因而也就有时间给你去发展智力，为更加艰巨的任务做准备。

但在我们开始了解全部事情之前的这一过程中会存在这样的危险性，我们以这种方式学习过的那些不完整真理可能变成了根深蒂固的东西并误认为是全部真理——把那些正确的与那些有时才是正确的理论互相混淆起来。因此，我们在表15-1中提供一个我们已经接触过的重要公式的总结，把那些普遍正确的与那些只有对静态才正确、而在动态则是错误的东西区别开来。这个总结表也部分地表达了我们今后的动向，因为在今后处理动态时就将详细地发展此刻我们仅仅必须提出来而没有加以证明的那些东西。

表 15-1

一般是错的(只有对静态才正确)	总是对的
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (库仑定律)}$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ (洛伦兹力)}$ $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (高斯定律)}$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ $\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$ 对于导体, $\mathbf{E} = 0$, $\phi = \text{常数}$, $Q = CV$	$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ (法拉第定律)}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 在导体中, $\mathbf{E}$ 造成电流
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \text{ (安培定律)}$ $\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ (不存在磁荷)}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\rightarrow c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (泊松方程)}$ $\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \\ \text{而} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{和} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \\ \text{而} \\ c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \end{cases}$
$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2$ $\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2)}{r_{12}} dV_2$	$\begin{cases} \phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t')}{r_{12}} dV_2 \\ \text{和} \\ \mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2, t')}{r_{12}} dV_2 \\ \text{而} \\ t' = t - \frac{r_{12}}{c} \end{cases}$
$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV$	$U = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV$

那些用箭头 ($\rightarrow$) 标明的方程都是麦克斯韦方程。

对这张表做一些说明可能会有用处。首先，你应该注意到，我们最初处理的那些方程都是正确的方程——在那里并没有给你错误的印象。电磁力（常称为洛伦兹力） $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ 是正确的。只有库仑定律才是错误的，它仅适用于静态。关于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的四个麦克斯韦方程也是正确的。当然，那些我们对静态取的方程则是错的，因为已删去了所有含有时间微商的了。

高斯定律 $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0$ 依然正确，但 $\mathbf{E}$ 的旋度一般并不等于零。所以 $\mathbf{E}$ 不能总是等于一个标量——静电势——的梯度。我们将看到标势依然保存，但它是一个随时间变化着的量了，必须与矢势一起配合才能用作对电场的完整描述。所以，那些支配这个新标势的方程也必然都是新的。

我们也必须把在导体里 $\mathbf{E}$ 等于零的概念丢掉。当场正在变化时，导体里的电荷一般没有时间安排它们本身使得电场为零。它们被迫运动，但却永远达不到平衡。唯一普遍的说法是：导体里的电场产生了电流。所以在变化的场中导体并不是一个等势体。由此可知，电容器的概念不再是准确的。

由于不存在磁荷，所以 $\mathbf{B}$ 的散度就永远为零，因此， $\mathbf{B}$ 总可以等于 $\nabla\times\mathbf{A}$ （一切都不变）。但 $\mathbf{B}$ 的产生不仅来自电流： $\nabla\times\mathbf{B}$ 正比于电流密度加上一个新的项 $\partial\mathbf{E}/\partial t$ 。这意味着， $\mathbf{A}$ 由一个新的方程同电流相联系，而且也同 ϕ 有关。如果为了我们自身的方便而利用对 $\nabla\cdot\mathbf{A}$ 进行选择的自由，则可以把关于 $\mathbf{A}$ 或 ϕ 的方程安排成一种简单

而又优美的形式。因此，建立 $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial \phi / \partial t$ 的条件，就能使有关 $\mathbf{A}$ 或 ϕ 的微分方程表现出如表中所列的形式。

$\mathbf{A}$ 和 ϕ 这两种势仍可通过对电流和电荷的积分而求得，但已不同于静态积分。然而，最令人惊异的是，真实的积分很像静态的积分，只有一个小小的、在物理方面引人注意的修改。当我们计算积分求某一点、比如图15-10中的点（1）的势时，就必须使用较早时刻 $t' = t - r_{12}/c$ 、位于点（2）处的 $\mathbf{j}$ 和 ρ 值。正如你所预期的，影响以速率 c 从点（2）传播至点（1）。用这一点小改变，人们就能求解关于变化电流和电荷的场。因为一旦我们知道了 $\mathbf{A}$ 和 ϕ ，就能像以前那样从 $\nabla \times \mathbf{A}$ 得到 $\mathbf{B}$ ，而又从 $-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 得到 $\mathbf{E}$ 。

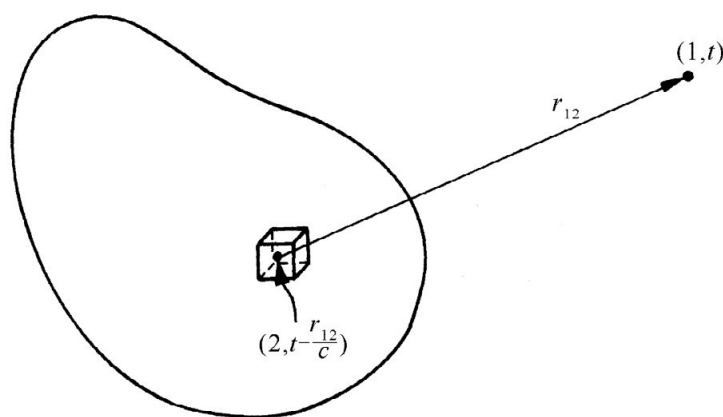


图15-10 通过把在游动点（2）处源的每个体积元中较早时刻 $t - r_{12}/c$ 的电流和电荷的贡献相加起来，而给出 t 时刻点（1）处的势

最后，你将注意到，有些结果——比如，在电场中的能量密度为 $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2$ ——对于电动力学与对于静电磁学一样都是正确的。你应当不会误解以致认为这完全是“自然”的。在静态中导出的任何公式的正确性都必须在动态情况下再度加以论证。一个相反的例子是，由 $\rho \phi$ 的体积分所表达的有关静电能的表示式，这个结果仅仅对于静态才正确。

在适当的时候我们将更加详细地考虑上述所有这些内容，但记住这个总结表也许是有用的，这样你就会知道哪些可以忘记，哪些作为永远正确的东西应该记住。

[1] 如果 $\mathbf{B}$ 是从图面向外，则根据我们曾对其下过的定义，通量为正，而因电子的电荷 q 为负，所以 x_0 为正。

第16章 感生电流

§16-1 电动机与发电机

1820年对电和磁间密切关系的发现曾令人十分兴奋——在那以前，电和磁这两个课题一直被认为是完全互相独立的。首先发现的是导线中的电流会产生磁场，接着于同一年中，又发现载流导线在磁场中会受到力的作用。

每当机械力存在时，令人兴奋的一件事是，利用它在机器中做功的可能性。当上述现象被发现后，几乎立即就有人开始利用这些作用于载流导线上的力来设计电动机了。这种电磁式发动机的原理如图16-1中裸露轮廓图所示。用一块永磁铁——通常配合一些软铁片——在上下两槽里产生磁场。在每一个槽的对面都有南北两极，如图所示。在每个槽中放置铜制矩形线圈的一边。当电流通过线圈时，在两槽处的电流互相反向，因而力也反向，这样便产生一个环绕轴线的力矩。如果线圈安装在传动轴上以便转动，则可与滑轮或齿轮互相配合而做功了。

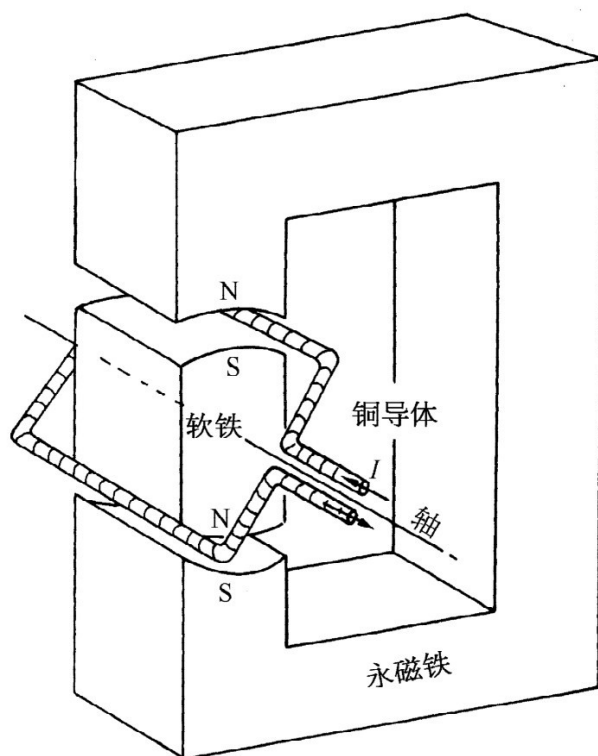


图16-1 一部简单电磁式发动机的示意轮廓图

同样的设想也可用来制作电学测量方面的灵敏仪器。自从该力的规律被发现之后，电学测量的精确度就大大提高了。首先，可以使电流绕行许多匝而不仅仅是一匝，以促使这种电动机的力矩大大增加。于是，这个线圈又可以装配得用一个很小的力矩便能够转动——或者把它的转轴装在一个十分精致的宝石轴承上，或者用十分细小的金属丝或石英丝来悬挂该线圈。于是一个极小电流便能使线圈转动，而对于小角度来说这转动的大小将与电流成正比。把一指针粘紧在该线圈上，或对于非常精密的仪器，则通过安装在线圈上的一个小镜子来观察标尺的像的移动，这转动的大小就可以测到了。这样的仪器叫作电流计。至于伏特计和安培计，也是基于相同的原理工作的。

这一概念也可用来大规模地制造提供机械动力的大型电动机。利用安装在轴心上的一组触点可使线圈每转半周接法就变换一次，这

样，线圈便能不断旋转，于是力矩将始终朝同一方向。小型直流电动机就是这样制成的。较大型的电动机，无论是直流的或交流的，往往利用一个由电源激励的电磁铁来代替永磁铁。

在认识了电流能够产生磁场之后，人们立即提出，也可以设法使磁铁产生电场。各种实验都尝试过。例如，将两根导线平行排列，当电流通过其中之一时就希望能在另一根导线中也找到电流。当时的想法是：磁场或许会用某种方法在第二根导线中拖动电子前进，给出诸如“同类喜欢以同样的方式运动”的规律。结果是否定的，尽管已利用了当时可资用的最大电流，以及为探测电流用的最灵敏电流计。把大块磁铁置于导线旁边也产生不出可观测到的效应。最后，法拉第于1840年发现最重要的特点给漏掉了——只有当某种东西正在变化时电效应才存在。如果两导线之一中存在着正变化着的电流时，则另一根导线中会有电流感生，或者如果一块磁铁在一电路附近运动，则在该电路中会有电流存在。我们讲，这些电流是给感生出来了。这就是法拉第所发现的电磁感应效应。它把相当沉闷的静场课题转变成包括大量奇异现象的、十分激动人心的动力学课题。本章专为其中某些现象做出定性描述。正如以后将会见到的，人们很快就将遇到难以详细做出定量分析的一些相当复杂的情况。但不要紧，这一章的主要目的首先在于使你熟悉所涉及的现象，我们在以后才做详细分析。

从我们所学过的知识可以容易理解磁感应现象的一个特性，尽管在法拉第时代还没有被人知道。它来自作用于运动电荷的 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 这种力，而该力正比于电荷在磁场中的速度。假设有一根导线在一块磁铁附近经过，如图16-2所示，并将这根导线的两端连接至一电流计。如果移动导线使其通过磁铁的一端，电流计的指针就会摆动。

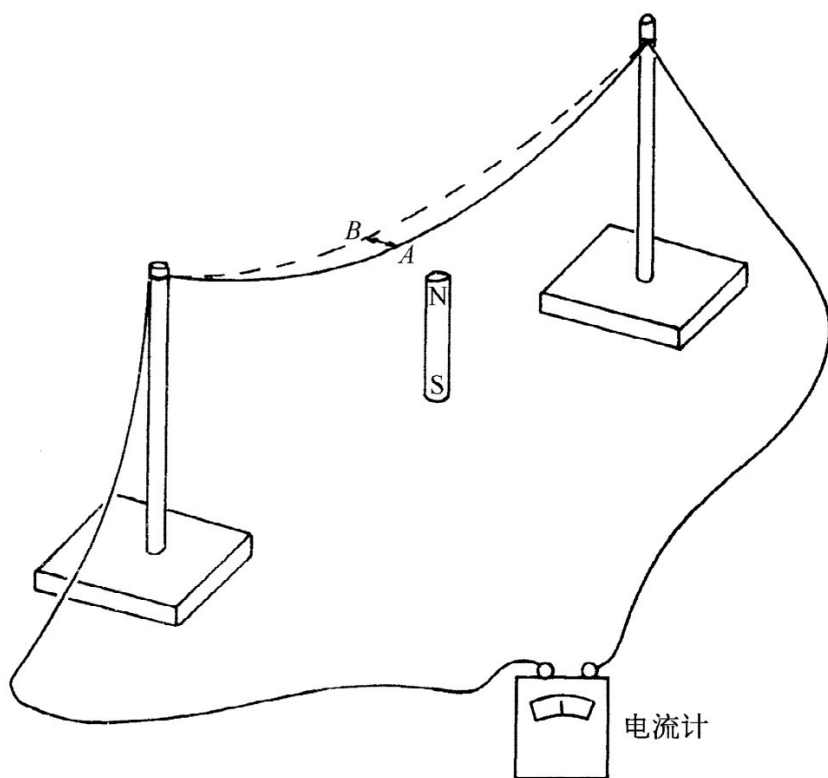


图16-2 一根导线在磁场中运动会产生电流，并由电流计显示出来

磁铁产生了某个竖向磁场，而当我们把导线推过该磁场时，导线里的电子便会感受到一个侧向力——既垂直于场也垂直于运动。该力沿着导线推动电子。但为什么会使电流计摆动呢，它与那个力相距有那么远？这是由于当那些感受到磁力的电子试图运动时，它们——通过电的排斥——沿导线推稍远的电子，这些被推的电子又依次排斥更远一些的电子，以此类推，在一个长距离上的电子也受到排斥，简直令人吃惊。

最早制成电流计的高斯和韦伯感到如此惊异，以致试图弄清楚这些力在导线中会传到多远。他们把导线跨越整个市区。在一端，高斯先生将导线接至电池组（电池在发电机之前就为人们所熟悉），而韦伯先生则在另一端观察电流计的摆动。于是他们有了一种在长距离上

通讯的办法——这就是电报的起源！当然，这并非直接与感应有关，它只是使导线载流必须用的方法，不管电流是不是由感应推动的。

现在假设在图16-2的装备中，我们让导线静止不动而令磁铁运动。这样，仍然会看到在电流计上的效应。正如法拉第所发现的那样，把磁铁在导线下面朝某一方向移动与将导线在磁铁上面朝反向移动，具有相同的效应。但当磁铁被移动时，就不再有作用于导线内部电子上的任何 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 力了。这是法拉第找到的一个新效应。今天，我们也许希望从相对论性的论证中来理解它。

我们已经了解到一块磁铁的磁场是来自它的内部电流。所以如果不用图16-2上的那块磁铁，而是用一个载有电流的线圈，我们预料也会观察到相同的效应。如果使导线运动并经过线圈，则将有电流流经该电流计，或如果让线圈运动并经过导线，情形也是如此。但现在有一个更动人的事态发生了：若我们不是通过运动而是通过改变其中的电流变更线圈的磁场，那么在电流计中又再度会发生效应。例如，设有一导线回路放在一线圈附近，如图16-3所示，此时若保持回路与线圈两者都不动，而断开线圈中的电流，就会有一电流脉冲通过电流计。当我们再对线圈通上电流时，电流计则将向相反的方向摆动。

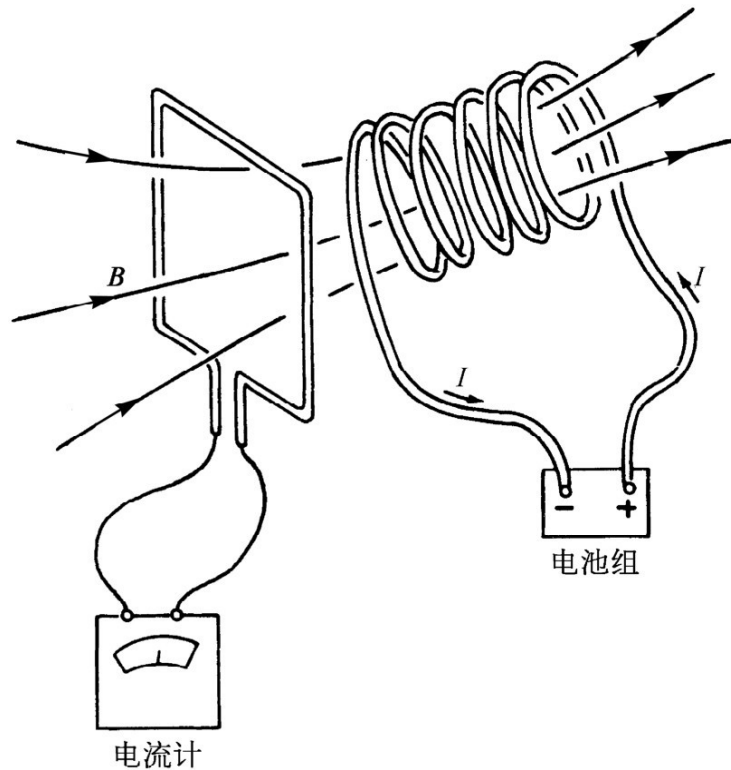


图16-3 如果移动一个载流线圈或将其中的电流变化，这个线圈会在第二个线圈中产生电流

每当在诸如图16-2或图16-3所示情况中电流计有电流通过时，导线里的电子总会受到沿着导线某一方向的一个净推力。在不同位置可能有不同方向的推力，但在某一方向的推力比其他方向的大。这推力绕整个电路的累积是什么，这个净的累积起来的推力叫作该电路的电动势（emf）。更准确地说，电动势被定义为导线中单位电荷所受的沿线切向力对整个电路环绕一周的路程所作的积分。法拉第的整个发现在于可以由三种不同方法在导线中产生电动势：通过使导线运动，通过使磁铁在导线附近运动，或通过改变邻近导线中的电流。

让我们再考虑图16-1的那部简单机器，只是现在不再输入电流通过导线使之转动，而是由一外力，比如是用手或水轮机使该回路旋

转。当线圈转动时，它的导线在磁场中运动，而我们便将在该线圈电路中发现电动势。电动机变成了发电机。

发电机的线圈由于运动就有感生电动势。这电动势大小由法拉第所发现的一个简单法则给出（目前仅陈述这一法则，等待以后再详细分析）。法则是这样的：当穿过回路的磁通量（这通量就是 $\mathbf{B}$ 的法向分量对整个回路所包围面积的积分）随时间变化时，电动势等于这通量的变化率。我们称这一法则为“通量法则”。你看到当图16-1中的线圈转动时，穿过它的通量改变了。开始时有某一通量朝一个方向穿过，然后当线圈转过了 180° 时相同的通量朝另一个方向穿过。如果继续转动线圈，该通量首先是正，然后是负，再又是正，如此等等。通量的变化率必然也是正负交替地改变的。因而在该线圈中就有一个交变电动势。如果将这线圈的两端通过某种滑动接触——称为汇电环——（只有这样导线才可不至于扭绕起来）与外面导线连接，则我们具有了一部交流发电机。

或者，也可以这样安排：通过某些滑动接触，使在每转动半圈之后线圈端点与外导线之间的连接便反转过来，因而当电动势反转时，连接方式也反转了。因而电动势的脉冲始终在同一方向推动电流通过外电路。这样，我们就有一部所谓的直流发电机。

图16-1上的那部机器既是电动机也是发电机。利用两部结构全同的永磁式直流“电动机”，在它们的线圈间用两根铜线相连，则关于电动机与发电机之间的互易性就可以漂亮地显示出来。当其中一个线圈的轴做机械旋转时，它便成为一部发电机而推动另一部作为电动机。如果将第二部的轴旋转，则它变成发电机而把第一部当成电动机驱动。因此，这里是自然界中新型等效性的一个有趣例子：电动机与发

电机彼此等效。事实上，这种定量的等效性并非完全出于偶然，它是与能量守恒律密切相关的。

能够用来既产生电动势又响应电动势的装置的另一种例子，是一部标准电话机的接收器——即“听筒”。贝尔原来的电话机由用两根长导线连接起来的这样两个听筒构成，其基本原理如图16-4所示。一块永磁铁在由软铁制成的两块“轭铁”以及在一薄铁膜片中产生了磁场，该膜片则由声压引起运动。当这膜片运动时，改变了轭铁中的磁场大小。因此，当声波撞击膜片时，在环绕其中一块轭铁的线圈中所穿过的磁通量就改变了。因而在该线圈中就有电动势。如果线圈的两端与一电路相连接，则一种以电的方式表达声音的电流就会建立起来。

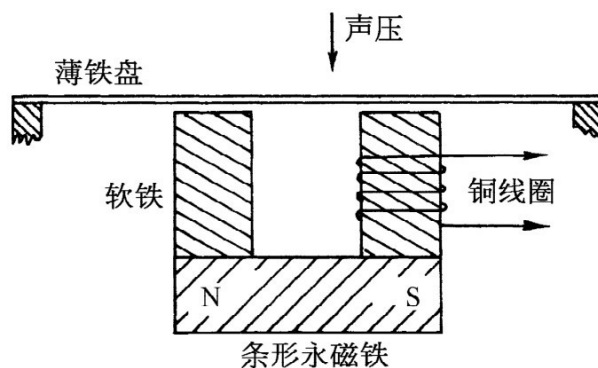


图16-4 电话的送、受话器

如果图16-4的线圈两端用两根导线连接至另一个完全相同的装置，则那变化着的电流将在第二个线圈中流动。这些电流将产生一个变化着的磁场，并将对该铁膜片造成一个变化的吸引作用。这膜片将上下振动而造成声波，这些声波大体上与原来使膜片振动起来的那些声波相似。这就是说，利用几块铜和铁就能使人们的声音在导线上传递！

（现代的家用电话所用的受话器与上面所描述的相似，而其送话器改进了，它利用了一种新发明以获得较强大的功率。那就是“炭粒传声器”，它利用声压以改变来自电池组的电流。）

§16-2 变压器与电感

法拉第发现的最重要的特征之一，不是在一运动线圈中存在电动势——那是可以用磁力 $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 来理解的——而是在一个线圈中变化的电流会在另一个线圈中产生电动势。而十分令人惊奇的是，在第二个线圈中所感生的电动势其大小也由同样的“通量法则”给出：电动势等于穿过线圈的磁通量的变化率。假设我们有两个线圈，各绕在彼此分开的一捆铁片上（这些铁片起着使磁场增强的作用），如图16-5所示。现在把其中一个线圈 a 连接到一交流发电机上。那不断变化的电流产生一个不断变化的磁场。这变化的磁场就在第二个线圈 b 中产生一个交变电动势。这一电动势能够，例如，产生足够大的能量使一个灯泡发亮。

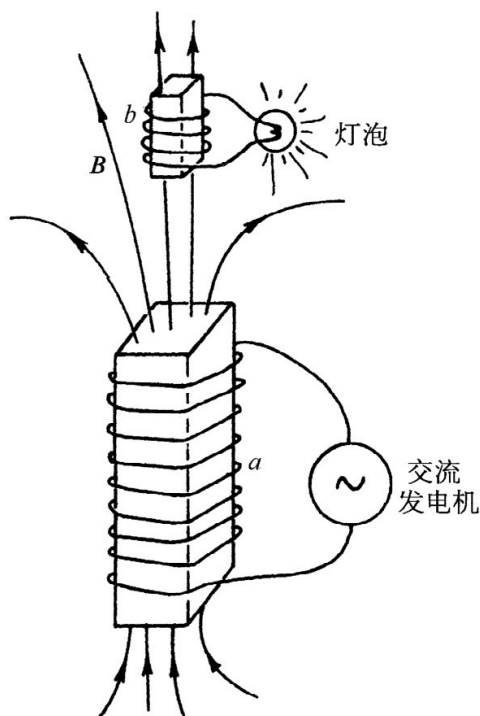


图16-5 各围绕在一捆铁片外面的两个线圈，能让一部发电机在没有直接连接的情况下使一个灯泡发亮

线圈 b 中的电动势的频率当然与原来发电机的频率相同。但线圈 b 中的电流则可能大于或小于线圈 a 中的电流。线圈 b 中的电流取决于其中的感应电动势以及线路中其余部分的电阻和电感。这电动势可能比发电机的小，例如，若通量的变化较少。要不然，线圈 b 中的电动势可以通过增加围绕其的线圈匝数而比发电机中的大许多，因为在一定磁场中此时穿过线圈的通量增加了（或者，若你喜欢用另一种方式来看它，则由于每一匝的电动势彼此相同，而总电动势等于分开的各匝的电动势之和，所以如有许多匝串联起来就会产生一个较大的电动势）。

两个线圈的这种组合——通常用配置的铁片来引导磁场——称为变压器。它能把一个电动势（也叫“电压”）“变换成另一个电动势”。

在单个线圈中也会有感应效应发生。例如在图16-5的那种装置中，有一个变化的磁通量不但穿过线圈***b***以使灯泡发亮，而且也穿过线圈***a***。在线圈***a***中变化着的电流会在它自己内部产生一个变化着的磁场，因而这个场的通量也就不断变化，结果在线圈***a***中有一个自感电动势。当任何电流正在建立磁场时——或更普遍地说，当它的场以任何方式变化时——便有一个电动势作用于该电流上。这个效应称为自感。

当我们在上面给出“通量法则”、即电动势等于磁通匝连数的变化率时，还未确定电动势的方向。有一个简单法则，叫楞次法则，就是为了判断电动势指向的：电动势企图反抗任何磁通变化。也就是说，感生电动势的方向总是这样：如果电流沿该电动势的方向流动，则它总会产生一个 ***B*** 通量，该通量抗拒产生该电动势的 ***B*** 发生变化。楞次法则可以用来找出图16-3 [\[1\]](#) 中那部发电机的电动势方向，或图中变压器绕组内电动势的方向。

特别是，如果在单一线圈（或任何导线）中存在变化的电流，则在该电路中就会有“反”电动势。在图16-5的线圈***a***中，这个反电动势作用于流动的电荷上以反抗磁场的变化，从而也处在反抗电流改变的方向。它力图保持电流恒定不变，当电流增加时它与电流反向，当电流减少时则与电流同向。在自感中的电流具有“惯性”，因为该感应效应力图保持电流恒定，正如机械惯性力图保持物体的速度恒定一样。

任何大型电磁铁中都会有大的自感。假设一个电池组连接于一个大型电磁铁的线圈上，如图16-6所示，则一个强磁场就被建立起来了（电流达到了一个由电池组电压和线圈中导线电阻所确定的稳恒值）。但现在假定我们试图通过打开开关而切断电池组。要是真的断

开电路，电流就会迅速趋于零，而在这样做时会产生一个巨大电动势。在大多数情况下，这一电动势会大到足以在开关的断路接点间发展成一个跨越接点的电弧。这样出现的高电压也许会损害线圈中的绝缘——甚至会把你击伤，如果你正是打开开关的那个人！由于这些原因，电磁铁往往被接成像图16-6所示的那种电路。当开关打开时，电流并不做迅速变化，而是保持稳定，这是由于受线圈中的自感电动势所驱使的电流正在流经灯泡。

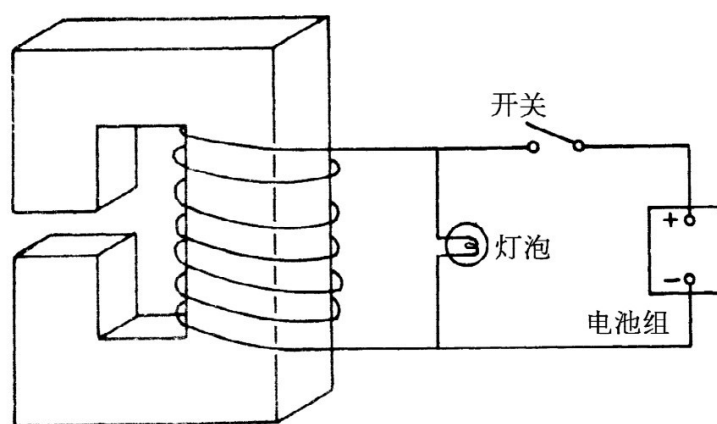


图16-6 电磁铁的电路连接法。灯泡允许在开关打开时仍然有电流通过，这是为了避免出现过高的电动势

§16-3 作用于感生电流上的力

你也许曾经见过利用如图16-7所示的那种装置来戏剧性地演示楞次法则。这是一个电磁铁，非常像图16-5中的线圈 a ，一个铝质圆环放在电磁铁的顶端。当闭合开关使线圈连接至一交流发电机时，这个环就飞向空中。当然，力来自环中的感生电流。环会飞开这一事实表明，环里的电流反抗穿过其中的磁场的变化。当电磁铁正在其顶端形成北极时，在环里的感生电流正在形成一个朝下的北极。环与线圈犹

如两块同极磁铁那样互相排斥，但如果在环里制造一个狭窄的径向裂缝，力就会消失，这表明力确实来自环中的电流。

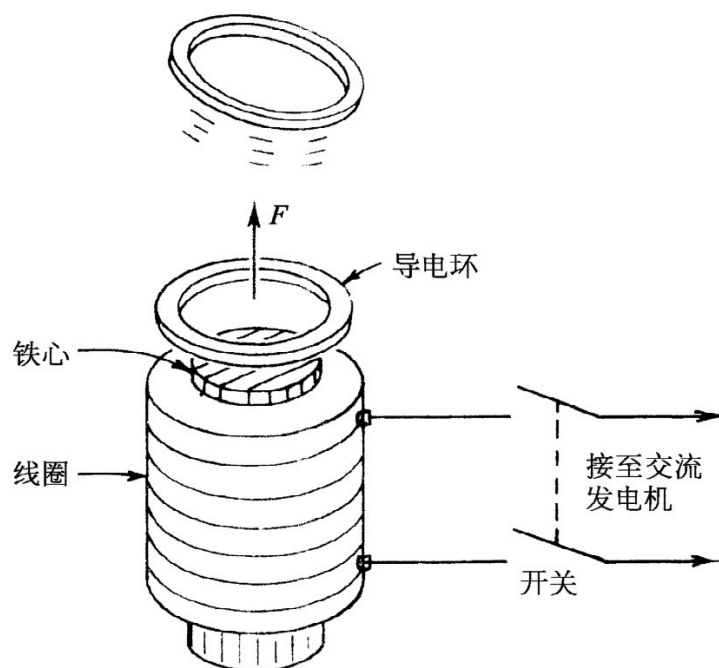


图16-7 一个导电环会被一块通有变化电流的电磁铁强烈推开

如果不采用圆环而改用一個鋁盤或銅盤橫放在圖16-7中磁鐵上端，它也被推开；感生電流在盤的材料里形成環流，再度產生了排斥作用。

其根源與此相類似的一個重要的效應發生在一片理想的導體中。要知道，理想導體無論對於什麼電流都不會有電阻，所以如果電流一旦在其中產生，它們就能夠永遠保持下去。事實上，一個最微小的電動勢都會產生一個任意大的電流——這實際上意味著完全可以沒有電動勢。任何要把磁通量送進這樣一片理想導體里的嘗試都產生引起相反 $\boldsymbol{B}$ 場的電流——所有這一切都由於無限小的電動勢，因而沒有磁通量進入理想導體中。

如果有一片理想导体并把一块电磁铁放在其附近，则当我们接通电磁铁的电流时，被叫作涡流的那种电流会出现在该片导体里，使得磁场不能进入其中。场线看来会像图16-8所示。当然，如果把一条形磁铁移近一理想导体，这同样的情况也会发生。由于涡流正在产生相反的磁场，磁铁就受到导体的排斥。这样就有可能让一条形磁铁悬浮在形状有点像个盘子那样的理想导体片之上，情形如图16-9所示。这磁铁受到理想导体里感生涡流的排斥而被悬浮于空中。在通常温度下不存在理想导体，但某些材料在足够低的温度下会变成理想导体。例如，在3.8K以下的锡，导电就十分完美。它被称为超导体。

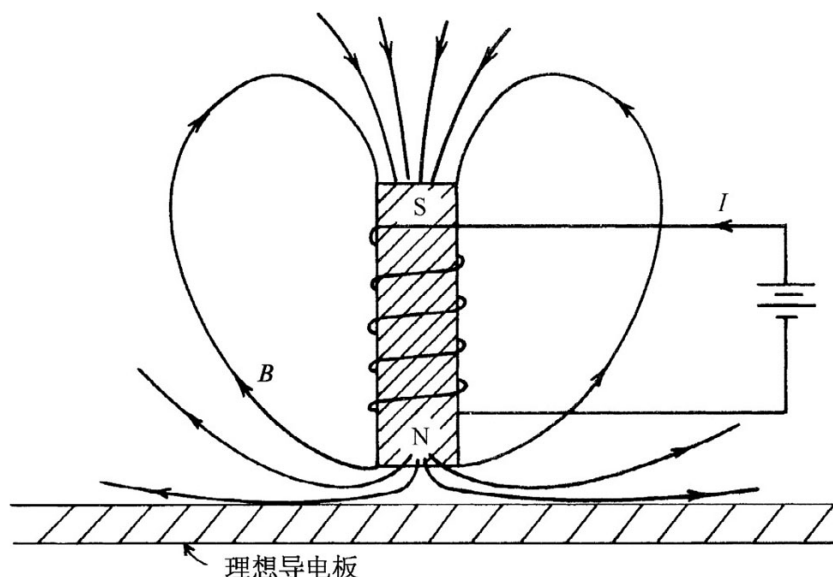


图16-8 靠近一块理想导电板的电磁铁

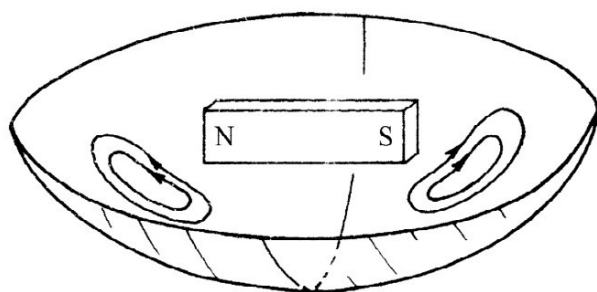


图16-9 由于受到涡流排斥，一根条形磁铁会悬浮在一个超导体碗上面

如果图16-8中的那块导体不是很理想的导体，则对于涡流的流动会有一些阻力。电流将逐渐消失而磁铁便将慢慢落下。在一非理想导体中，涡流需要电动势来维持，而要有电动势，通量必须保持不断变化。这样，磁通量就会逐渐透入导体中去。

在正常导体中，来自涡流的不仅有排斥力，而且也可能有侧向力。例如，若把一块磁铁沿导体表面向旁边移动，则涡流将产生一个阻力，因为这些感生电流正在反抗通量配置的变化。这种力的大小与速度成正比，像一种黏性力。

这些效应在图16-10所示的仪器中得到令人满意的表现。一块方形铜片悬挂在一根棒的下端而构成一个摆。这铜片在一电磁铁的两极间来回摆动。当电磁铁的电流接通时，摆动突然被抑制。这块金属板当进入电磁铁的缝隙中时，板里就有感生电流，它起着抗拒通过该板磁通量变化的作用。假若该板是理想导体，即其中电流会大到足以将板重新推出去——即它会反弹回去。若采用的是一块铜板，由于板里有一些电阻，因而当它开始进入磁场中时，板中的电流将先把该板阻止到几乎停止运动的地步。然后，当电流降低时，板就会在磁场中缓慢地降到静止。

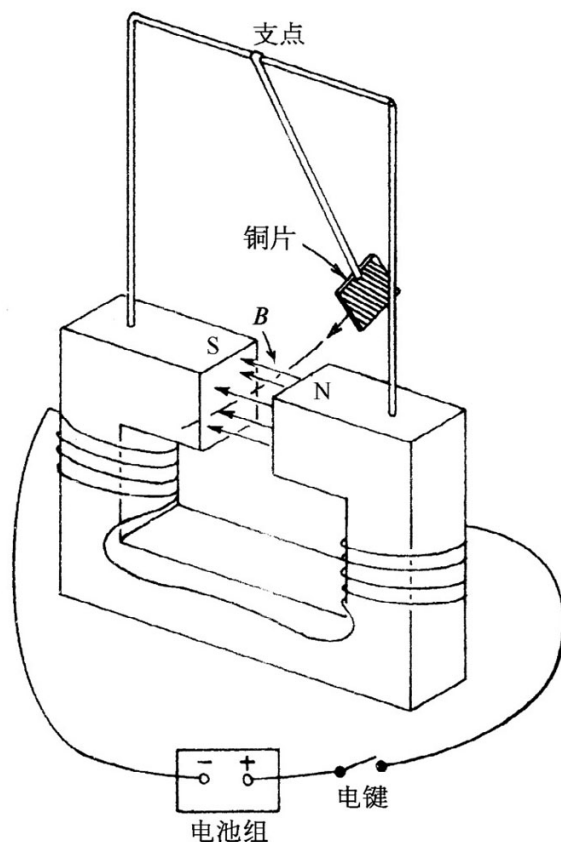


图16-10 摆的制动表明有起因于涡流的力

铜摆中涡流的性质如图16-11所示。这种电流的强度及几何图形对板的形状很敏感。例如，若像图16-12所示，用一块中间割成几条狭槽的铜板来代替原来的铜板，则涡流效应会剧烈地减弱。摆通过磁场摆动，仅有一微小的阻尼力。原因是：在铜板的每个截面内激励电流的磁通量减少了，因而使每个回路电阻的作用增大。电流变小而阻力也就小了。如果把一块铜板放在图16-10的磁铁两极间然后释放，则力的黏滞特性还会看得更加清楚。铜板不会掉落下来，只是缓慢地下沉。涡流对该运动会施加一个强大阻力——就像蜂蜜中的黏性阻力一样。

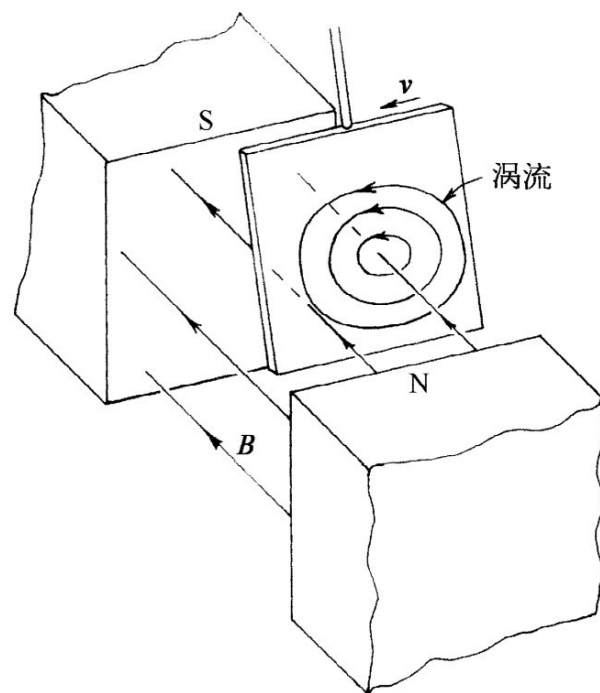


图16-11 铜摆中的涡流

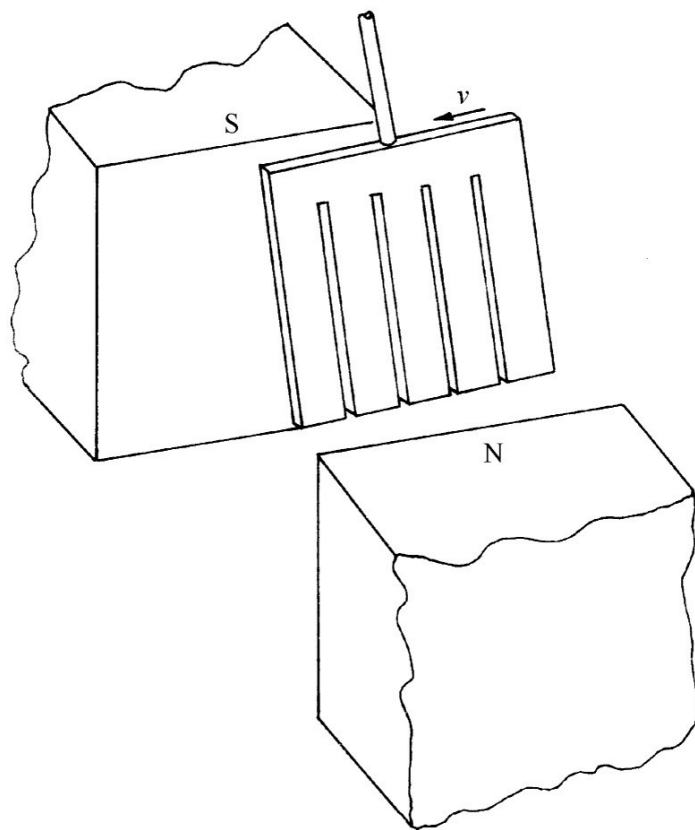


图16-12 在铜板中割出一些狭槽，涡流效应会剧烈下降

如果不是将一块导体拉着经过磁铁，而是在磁场中尝试转动导体，则将有来自同样效应的抵抗力矩。反之，若在导电板或导电环附近旋转一块磁铁，则板或环将被拖着在一起旋转，板或环里的电流将产生一个倾向于使其跟随磁铁旋转的力矩。

一个恰好像那转动磁铁的磁场可以用如图16-13所示的那种排列的线圈来完成。我们取一个铁环（也就是一个像炸面圈那样的铁环）并绕上六个线圈。如果如图（a）所示使（1）和（4）两绕组通有电流，就会有一个如图所示方向的磁场。现在若把电流转移到（2）和（5）两绕组上，则磁场将指向图（b）所示的新方向。继续这个步骤，便会得到图上其他部分所示的磁场顺序。倘若这一过程顺利地进行，就会有一“旋转”磁场了。把各线圈连接至一套三相电源线上就能轻易地获得所需的电流顺序，因为三相电源线正好提供这种电流。“三相电源”是利用图16-1的原理在一部发电机中形成的，只是有三个回路以对称的方式一起固定在同一根轴上——也就是说，一个回路与邻近的一个回路之间要相隔 120° 。当各回路作为整体旋转时，先是在一个线圈中的电动势为极大，然后在下一个线圈中达到极大，以此类推。三相电源有许多实际优点，其中之一就是可能造成一个旋转磁场。由这种旋转磁场在导体中所产生的力矩可轻易地由刚好在铁环上面的绝缘台上一个竖立的金属环来演示，如图16-14所示。这旋转磁场会引起该导电环绕着一根垂直轴线旋转。在这里看到其基本原理与在一部大型商用三相感应电动机中实际上起作用的原理完全相同。

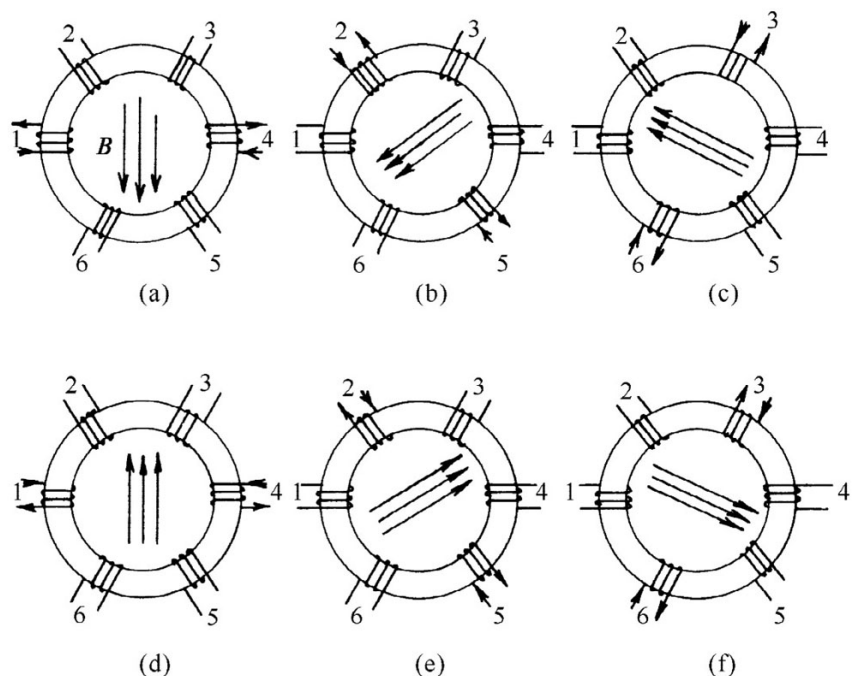


图 16-13 构成一个旋转磁场

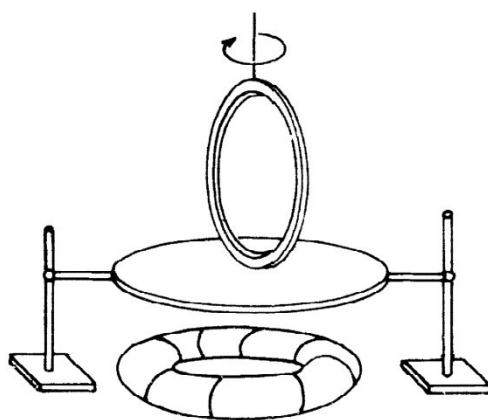


图 16-14 图 16-13 中的旋转磁场可用来对一个导电环提供力矩

感应电动机的另一种形式如图 16-15 所示。这里所示的配置对一部实用的高效率电动机虽不适用，但能说明原理。电磁铁 M 由一捆多层铁片和在其外面绕着的螺线管式线圈构成，用一部发电机的交变电流来提供动力。这电磁铁会产生一个穿过该铝盘的变化着的 B 通量。但如果我们仅仅有这两个部件，如图 (a) 中所示的，则还不能构成一部

电动机。盘中虽然有了涡流，但它们是对称的，因而不会产生任何力矩（由于这些感生电流，盘里多少总会发生一些热）。现在若用一个铝板刚好遮盖磁极的一半，如图（b）所示，则盘便将开始转动，而我们便有一部电动机。这种运转有赖于两个涡流效应。首先，在铝板中的涡流抗拒着穿过它的通量变化，因而在这块板上面的磁场就总会落后于不受遮盖的一半磁极在上面产生的磁场。这种所谓“屏蔽磁极”效应在那“被屏蔽”区中会产生一个其变化非常像在“非屏蔽”区中的磁场，只不过在时间上被延迟了一个恒定的值。整个效应就像只有一半宽的一块磁铁不断从非屏蔽区移至屏蔽区。于是，这些正在变化着的磁场就会与铝盘中的涡流互相作用而产生一个作用于铝盘上的力矩。

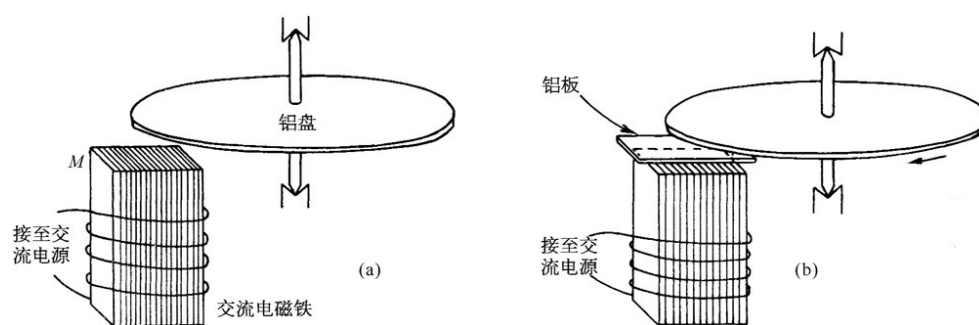


图16-15 磁极屏蔽式感应电动机的一个简单例子

§16-4 电工技术

当法拉第最初将其著名的发现——即关于变化着的磁通量会产生电动势——公诸于世时，他曾被人质问（像任何人在发现自然界的新事物时被人质问一样）：“这有什么用处呢？”其实他所发现的不过是当他在块磁铁近旁移动一根导线时就会有一小电流产生的奇事。这有什么被“利用”的可能呢？他的回答是：“一个新生的婴儿有什么用处呢？”

然而想一想他的发现已经导致多么巨大的实际应用。我们上面所描述的不只是一些玩具，但是选择的这些例子在大多数情况下是为了说明某种实用机器的原理的一些例子。例如，在一旋转磁场中的转动环就是一部感应电动机。当然，它与实际的感应电动机之间存在某些区别。那个环只有很小的力矩，你用手就可以止住它。对于一部优良电动机，结构就必须安排得更加紧凑：不能让那么多的磁场“浪费”在外面空气中。首先，利用铁芯以集中磁场。我们还未讨论过铁芯如何会完成这一使命，但铁芯的确能使磁场比单靠铜线圈时强几万倍。其次，铁片与铁片间的缝隙被缩小了，为此，有些铁片甚至被嵌入该旋转环之中。每一件东西都被安排得能够获得最大的力和最高效率，也就是说，把电功率转变成机械功率，一直到该“环”不再能够用手去阻止它转动并使其停下来。

封闭缝隙以及使事情按最实用的方式进行，这些问题属于工程技术。这需要对设计做认真的研究，尽管从获得力来说并不存在任何新的基本原理。但要从基本原理过渡到一种实用而又经济的设计却仍然有一段漫长的道路要走。然而，正是这种细致的工程技术设计才使得像博尔德（Boulder）水坝^[2]这类庞然大物及其所有附属的东西成为可能。

博尔德水坝是什么？一条大河给一座混凝土的墙壁挡住了。但究竟是怎样的墙壁呢？它是按一条经过十分仔细计算过的理想曲线来建造的，使用了最少量的混凝土，便能挡住整条河流。它的底部得到了加厚，它的奇妙形状为艺术家们所喜欢，而工程师们对它则能够理解，因为他们懂得这样的加厚与压力随水的深度而增加有关。但我们却已离开了电学。

然后，河水被导入一条巨大的管道。这件东西本身就已经是工程上绝妙的一项成就。管道把水提供给水轮——一座巨大涡轮机——而使水轮旋转（另一项工程业绩）。但为什么要转动水轮呢？它们同一大堆精巧而复杂的、又相互交织纠缠在一起的铜和铁耦合起来，其中包括两部分——一部分在转动而另一部分不动。几种材料的复杂混合物，其中绝大多数是铁和铜，但也有供绝缘用的一些纸片和虫胶。一件会旋转的巨大怪物，也就是一部发电机。在这一大堆铜和铁之外还有铜制的几个特殊配件。水坝、轮机、铁和铜，所有这些都配置在那里以使某一特殊事物终于发生在几根铜杆之间——一个电动势。然后，这些铜杆伸出去并在一变压器的另一铁块上绕了几圈，于是它们的任务完成了。

可是环绕那同一铁块的却还有另外的铜缆，看上去它与来自发电机的那几根铜杆毫无直接联系。铜杆由于在磁场附近经过而正受影响——因而获得了电动势。变压器把对发电机的有效设计所需的那种相对低的电压转变成十分高的电压，这对于电能跨越长电缆而做有效传输是再好不过的了。

每一件东西都必须效率非常高——不能有任何浪费或损失。为什么？一个都市的动力全部经由此通过。要是有一小部分损失了——比方说百分之一二——想一想留给后面的能量！要是有一百分之一的能量留在变压器里，这些能量就必须设法取出来，否则，若它表现为热，就会马上将全部机件都熔掉。当然，采取下述做法也有点降低效率，然而这是必需的。那就是要有几部液泵，使某种油循环流过散热器中以保证变压器不致过热。

从博尔德水坝出来的是几十根铜棒——也许有手腕那样粗的长长的铜棒伸向四面八方，越过数百英里。这些小铜棒把一条大河的动力

都载上了。然后这些棒又分叉成更多的棒，再又接至更多的变压器，有时则接至能产生其他形式电流的巨大发电机，有时接至为了庞大工业目标而运转着的机器，接至更多的变压器，然后又再行分叉和散开，直到最后该河流就遍布了整个城市——驱动着电动机、发热、发光以及使许多小机器运转。从600 mile外的冷水变成炽热灯光这样一种奇迹——全都由一些特殊布置的铜、铁块完成。轧钢用的大型电动机或牙科医生用来钻牙齿的微小电动机，千万个小轮子都随着博尔德水坝那边巨轮的运转而转动。如果停止该巨轮的转动，所有一切小轮就都会停止；电灯也会熄灭。它们确实是互相联系着的。

此外，还有更多的东西。获取河流的庞大动力，和把这些动力散布于各地农村，直到几滴水流便足以驱动牙科医生用的牙钻，都是相同的一些现象，它们也一再出现在一些非常精密仪器的建造上，对于异常微小电流的探测，对于口语、音乐和图像的传递，对于计算机，对于惊人准确的自动化机器。

所有这一切之所以成为可能就是由于对铜和铁的精心设计安排——有效地产生出来的磁场，具有6 ft直径的铁块当旋转时其缝隙才有1/16 in宽，为了获得最高效率而对铜选取的最仔细比例，所有一切的古怪形状，都像该水坝的曲线那样，为的是达到同一个目标。

如果未来的某一位考古学家发现博尔德水坝，那么我们可能推测他将对那些曲线的优美加以赞叹。但出自未来某一伟大文明时代的探险者也将望着该发电机和变压器说：“注意每一块铁片都各有其美妙的有效形状。想想渗透到每块铜片里面去的思想吧！”

这就是工程的威力以及电工技术的精心设计。在发电机中已创造出一种在自然界其他地方都不存在的东西，果然不错，在其他地方存

在感应的力，在太阳和星球周围的某些地方肯定也会有电磁感应。例如地球磁场或许（虽然还不确定）也是由对地球内部的环行电流产生影响的一种类似发电机的东西维持着。但什么地方都没有这样的部件，它们与运动的部分一起构成一个整体——用很高的效率和规则性——像发电机那样产生电能。

你可能会想，设计发电机不再是一门有趣科目，而是一门呆板的科目了，因为各种发电机都已被设计出来了，几乎完美的发电机或电动机都可从货架上取下来。即使这是真的，但我们可以对这个问题接近圆满解决的惊人成就表示钦佩。何况还保留着许多没有解决的问题，甚至发电机和变压器正再度成为问题。整个低温和超导体技术领域都有可能很快就被用于电力分配课题上。由于在这一课题中已经出现了一个根本上崭新的因素，所以新的最佳设计就非得创造出来不可。未来的动力网可能与今天的仅有很少类似之处。

在学习感应定律时你可以看到有数不清的应用和问题可以供我们研究。关于电机设计的研究本身就是一项终身的工作。虽然我们不能再这方面走得太远，但应该意识到这个事实，即当人们发现了电磁感应规律之后，便突然把理论和大量的实际发展联系了起来。然而我们总必须把这一科目留给那些对算出特殊应用细节感兴趣的工程师和应用科学家们。物理学只是提供基础——无论哪一种应用的基本原理（我们还未完成这种基础，因为还得详细考虑铁和铜的性质。稍后一些我们将会见到，物理学对于这些都会有所论述）。

现代电工技术是由于法拉第的发现而开始的。那个毫无用处的初生婴儿竟会培养成一位非凡的天才，以一种连他那自豪的父亲都从来没有想象到的方式把地球的面貌改变了。

[1] 原书中为图16-1，拟有误。——译者注

[2] 博尔德水坝位于美国西南部科罗拉多河上，坝长360 m，深222 m，蓄水量 $3.95 \times 10^{10} \text{ m}^3$ 。
。——译者注

第17章 感应定律

§17-1 感应的物理过程

在上一章中我们曾描述过许多现象，它们表明电感效应既很复杂又很有趣。现在我们要讨论控制这些效应的基本原理。我们已经把导电电路中的电动势定义为作用在电荷上的力对该回路全长的总累积。更具体地说，它是作用于单位电荷上力的切向分量，沿该电路一周的线积分。因此，在数量上就等于环绕电路一周对单位电荷所作的总功。

我们也已给出这样的“通量法则”，它讲：电动势等于穿过这样一个导电电路的磁通量的变化率。让我们来看看能否理解其中的原因。首先，我们将考虑由于电路在恒定磁场中移动而导致通量变化的情况。

在图17-1中，我们表示一个面积可以改变的简单导线回路。这回路有两部分，固定的U形部分（a）和一根可以在该U的两腿上滑动的横杆（b）。它始终是一个完整电路，不过其面积是在变化的。假设现在把该回路置于一匀强磁场中，使U形平面垂直于磁场。按照通量法则，当横杆移动时在回路中就该产生一个电动势，它与穿过回路通量的变化率成正比。这电动势将在回路中引起电流。我们将假定导线中的电阻相当大以致电流很小，于是便可以略去来自这个电流的任何磁场。

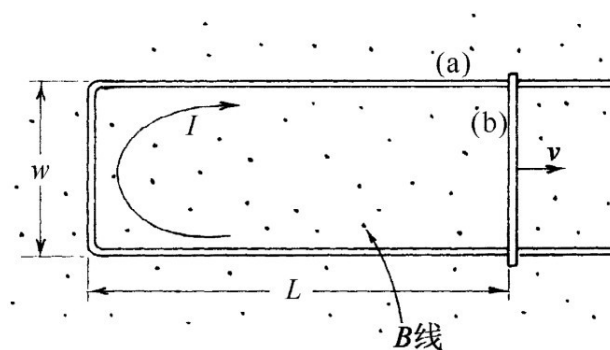


图17-1 如果通量是由于改变电路面积而改变的，则在该回路中会感生一电动势

穿过该回路的磁通量为 wLB ，因而对于电动势——我们将把它写成 $\mathcal{E}$ ——“通量法则”给出

$$\mathcal{E} = wB \frac{dL}{dt} = wBv,$$

式中 v 是该横杆的移动速率。

现在应该能够从作用于移动杆里电荷上的磁力 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 来理解这一结果。这些电荷会感受到一个力，该力与导线相切，每单位电荷所受的力等于 vB 。在沿横杆的长度 w 上这力恒定，而在别处则都是零，因此力沿整个电路的积分为

$$E = wvB,$$

这与上面从通量的变化率所获得的结果相同。

刚才所给出的论证可以推广至导线在固定磁场中移动的任何情况。在一般情况，人们能够证明：对于任何电路，当其部分在固定磁场中移动时，产生的电动势等于通量对时间的微商，而与该电路的形状无关。

反之，若回路固定不动而改变磁场，情况将会怎样呢？我们不能根据同一论证来导出对这一问题的解答。那是法拉第在实验上的发现，即不管通量怎样变化，该“通量法则”总是正确的。作用于电荷上的力，普遍地说，是由 $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ 给出的，并没有任何新的特殊的、“由于变化磁场而产生的力”。任何作用于固定导线中的静止电荷上的力都是来自 $\mathbf{E}$ 的项。法拉第的观察导致发现电场和磁场是由一个新的规律联系起来的：在一个其中磁场正在随时间变化的区域里，电场被产生了。正是这一电场驱使着电子围绕该导线移动——因而当有变化磁通量时在一固定电路中引起电动势。

对于与变化磁场有关的电场，其普遍的定律为

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \quad (17.1)$$

我们将这称之为法拉第定律。它是由法拉第发现的，但首先是麦克斯韦将其写成一微分形式并作为他方程组中的一个方程。让我们看一看这方程怎样给出电路中的“通量法则”。

利用斯托克斯定理，这一定律可以写成积分形式：

$$\oint_r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_s (\nabla\times\mathbf{E})\cdot \mathbf{n}da = -\int_s \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{n}da, \quad (17.2)$$

式中 Γ 通常指任意闭合曲线，而 S 则是由它所包围的任何曲面。这里应该记住， Γ 是一条固定于空间中的数学曲线，而 S 则是一个固定曲面。于是该时间微商就可以移至积分符号的外面，因而我们有

$$\oint_r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{B}\cdot \mathbf{n}da = -\frac{d}{dt}(\text{穿过 } S \text{ 的通量}). \quad (17.3)$$

把这个关系式应用到沿一个固定的导电电路而行的曲线 Γ ，我们便再度获得“通量法则”。左边的积分为电动势，而右边积分则是由该电路包围着的通量的负变化率。所以式（17.1）应用在一个固定电路上时，就相当于“通量法则”。

因此，“通量法则”——电路中的电动势等于穿过该电路磁通量的变化率——无论由磁场变化还是由电路运动（或两者兼有）所引起的通量变化都适用。在该法则的表述中这两种可能性——“电路移动”或“磁场变化”——不能加以区别。然而在我们对该法则的解释中，则对于这两种情况已用了两条完全不同的定律——在“电路移动”中用 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，而在“磁场改变”中则用 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 。

我们知道，在物理学的其他领域里还没有一个这么简单而又准确的普遍原理，为了真正理解它需要依据两种不同现象的分析。通常，这么一个优异的普遍性总是发源于一个单一而又深刻的基本原理。然而，在我们这种情况下一点没有任何这样的深刻的含意。因此，我们得把这个“法则”理解为两种完全独立现象的组合效应。

我们必须按照下述方式来看待“通量法则”。一般地说，对单位电荷的作用力为 $\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。在移动导线时，有一个来自第二项的力。并且，如果某处有变化着的磁场，则该处也有一个 $\mathbf{E}$ 场。它们是两个独立效应，但环绕该导线回路的电动势则始终等于穿过其中的磁通量的变化率。

§17-2 “通量法则”的一些例外

现在我们将举一些例子，其中部分起源于法拉第。这些例子表明，清楚地记住导致感生电动势的两种效应之间的差别是十分重要的。下述例子将包括“通量法则”不能够应用的一些情况——或者由于根本没有导线，或者由于感生电流所取的路径在一导体的扩展体积内运动。

作为开始，我们指出如下一个要点：来自 $\mathbf{E}$ 场的那部分电动势并不依赖于实体导线（如 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 那部分所要有的实体导线那样）的存在。 $\mathbf{E}$ 场可以存在在自由空间中，而它环绕任一固定在空间中的想象曲线的积分就等于穿过该曲线的 $\mathbf{B}$ 通量的变化率（注意，这与由静止电荷所产生的 $\mathbf{E}$ 场完全不同，因为在那种情况下 $\mathbf{E}$ 绕一闭合回路的线积分永远为零）。

现在我们将描述一种情况，其中穿过电路的通量没有改变，但仍然存在电动势。图17-2表示一个可以在磁场存在的条件下绕一固定轴旋转的导电盘，其一个接触点装在轴上，而另一个接触点则与该盘的外缘相擦，通过电流计使该电路闭合。当盘旋转时，该电路——意思就是在空间中有电流经过的那些地方——总是一样。但在盘中的那部分“电路”是在运动着的材料里。尽管穿过该“电路”的磁通量固定不变，但仍然有一电动势，可以由电流计的偏转观察到。很清楚，这里的情况就是转动盘中的 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 力产生了电动势，但它却不能被等同于通量的变化。

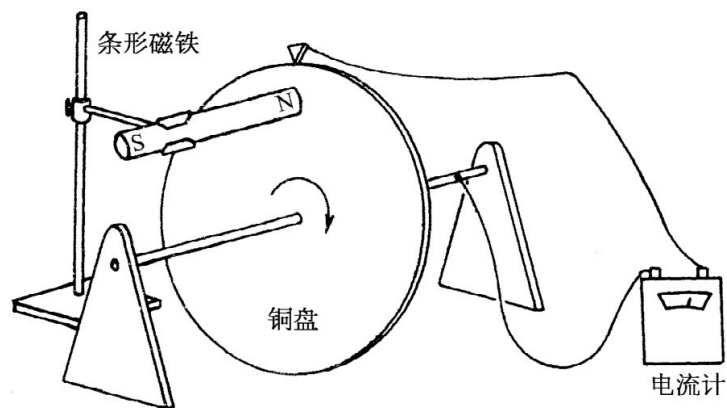


图17-2 当金属盘旋转时，有一个来自 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的电动势，但在被包围的通量中却没有什么变化

现在作为一个相反例子，我们将考虑一种稍微有点异常的情况，即在其中穿过“电路”（又是指在有电流通过的那些地方）的磁通量发生了变化，但却没有什么电动势。设想两块边缘稍微弯曲的金属板，如图17-3所示，这两块板被放在与其平面垂直的匀强磁场中。每一块板连接到电流计的一端，如图所示。两板在 P 点相接触，因而构成了一个闭合电路。如果现在两板辗转过一个小小角度，接触点将转移至 P' 。如果设想该“电路”沿图中所示的那条虚线经两板而形成，则当两板往复辗转时，穿过这一电路的磁通量变化就很大。然而这种转动却可由微小运动来完成，以致 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 很小，实际上不存在电动势。“通量法则”在此不适用，它必须应用于其中电路材料保持相同的那些电路。当电路的材料正在变化时，就必须回到基本定律中去。正确的物理意义总是由这两个基本定律

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

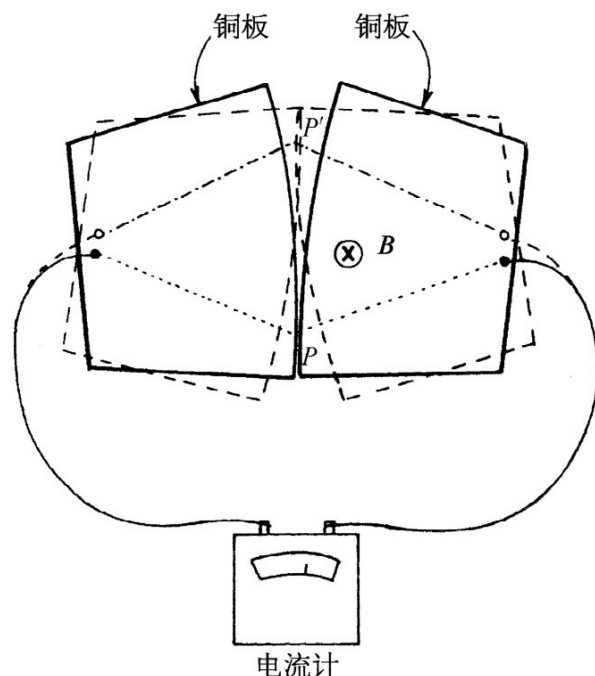


图17-3 当两板在一匀强磁场中辗转而过时，可以有巨大的磁通量链变化，但却没有电动势产生

给出的。

§17-3 感生电场使粒子加速；电子感应加速器

我们已说过，由变化磁场而产生的电动势即使在没有导体时也能存在，这就是说，没有导线也可以有电磁感应。我们仍然可以想象环绕空间中任意数学曲线的电动势，它被定义为 $\mathbf{E}$ 的切向分量绕该曲线的积分。法拉第定律讲，这个线积分等于穿过该闭合曲线磁通量的变化率的负值，即式 (17.3)。

作为这种感生电场效应的例子，我们现在要考虑在变化磁场中电子的运动。想象有这么一个磁场，在一个平面上处处都指向其垂直方向，如图17-4所示。磁场是由电磁铁产生的，但其细节我们将不予考虑。对于这一例子我们将设想磁场对某个轴是对称的，也就是说，磁场强度将仅取决于离轴的距离。这一磁场也是随时间变化的。现在设想有一个电子在这磁场中正沿以轴为中心、半径恒定的圆周运动着（我们稍迟将看到，如何才能安排这一种运动）。由于变化着的磁场，因此就会有一个与电子轨道相切的场 $\mathbf{E}$ ，这将驱动电子环绕着该圆周运动。又由于对称性的缘故，这电场在圆周上各处将有相同的值。若电子轨道具有半径 r ，则 $\mathbf{E}$ 环绕其轨道的线积分将等于穿过该圆周的磁通量的变化率的负值。 $\mathbf{E}$ 的线积分恰好就是它的大小乘以圆的周长 $2\pi r$ 。一般说来，这磁通量必须从一积分求得。这时，我们令 $B_{\text{平均}}$ 代表该圆周内的平均磁场，于是通量为这平均磁场乘圆的面积，我们将有

$$2\pi r \mathbf{E} = \frac{d}{dt} (B_{\text{平均}} \cdot \pi r^2).$$

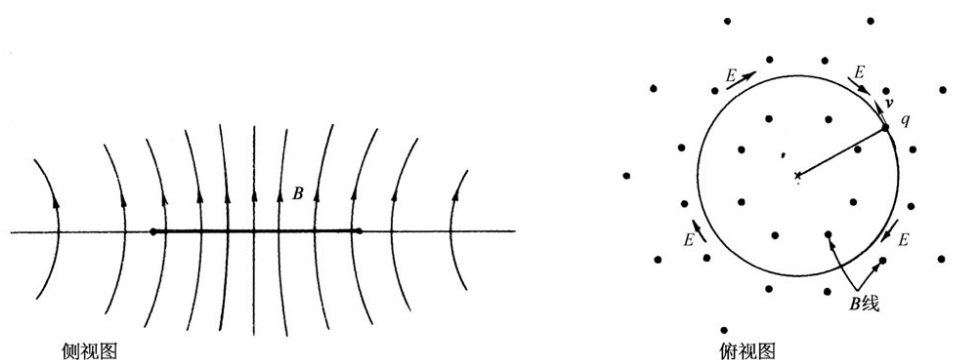


图17-4 电子在一个轴对称的、正在增强的磁场中被加速

由于假定 r 为常数，所以 $\mathbf{E}$ 与一平均场的时间微商成正比：

$$\mathbf{E} = \frac{r}{2} \frac{dB_{\text{平均}}}{dt}. \quad (17.4)$$

电子将感受到电力 $q\mathbf{E}$ 并将被加速。想起有关运动的相对论性的正确方程乃是动量的变化率正比于力，所以我们得

$$q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (17.5)$$

对于已假定的圆周轨道，电子所受的电力始终指向其运动方向，因而它的总动量将按式（17.5）所给出的时间变化率增加。合并式（17.5）和（17.4），我们就可将动量变化率与平均磁场的变化率互相联系起来：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{qr}{2} \frac{dB_{\text{平均}}}{dt}. \quad (17.6)$$

对 t 进行积分，可得到电子的动量

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \frac{qr}{2} \Delta B_{\text{平均}}, \quad (17.7)$$

式中 $\mathbf{p}_0$ 为电子开始时的动量，而 $\Delta B_{\text{平均}}$ 则是 $B_{\text{平均}}$ 接着发生的改变。

电子感应加速器——一种用来把电子加速至高能的机器——的运行就是以这一概念为基础的。

为了详细看看电子感应加速器是怎样工作的，我们现在就必须探讨如何才能把电子约束在一个圆周上运动。我们曾在第1卷第11章中讨论过所涉及的原理。如果能够这样安排，使得在电子的轨道上有一磁场 $\mathbf{B}$ ，则将有一横向力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，对于一个适当选择的 $\mathbf{B}$ ，这个力就能够使电子保持在所预定的轨道上运动。在电子感应加速器中，正是这

一横向力引起了电子在一固定半径的圆周轨道上运动。通过再度应用关于运动的相对论性方程（不过这回却是关于力的横向分量的），我们便能找出在该轨道上的磁场强度应有多大。在这电子感应加速器中（见图17-4），由于 $\mathbf{B}$ 垂直于 $\mathbf{v}$ ，因而横向力为 qvB 。于是这个力就等于动量的横向分量 p_t 的变化率：

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \quad (17.8)$$

当一粒子在圆周上运动时，它的横向动量的变化率等于总动量的大小乘以转动角速度 ω （根据第1卷第11章中的论证）：

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \quad (17.9)$$

这里，由于是圆周运动，所以

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (17.10)$$

合并式（17.8）、（17.9）及（17.10）得

$$qvB_{\text{轨道}} = p \frac{v}{r}, \quad (17.11)$$

式中 $B_{\text{轨道}}$ 为半径 r 处的磁场。

当电子感应加速器运行时，电子的动量会按照式（17.7）正比于 $B_{\text{平均}}$ 而增长。而若电子继续在其原来的圆周上运动，且当其动量增大时式（17.11）仍应继续维持正确，则 $B_{\text{轨道}}$ 的值就必须随动量 p 成比例地增大。将式（17.11）与确定 p 的式（17.7）做比较，我们看到，

在半径为 r 的轨道内的平均磁场 $B_{\text{平均}}$ 与在轨道上的磁场 $B_{\text{轨道}}$ 必须有如下关系：

$$\Delta B_{\text{平均}} = 2\Delta B_{\text{轨道}} . \quad (17.12)$$

电子感应加速器的正确运行要求：在轨道内的平均磁场的增长率比轨道处磁场本身的增长率要大一倍。在这种情况下，当粒子能量被感生电场增加时，轨道处的磁场以维持该粒子在圆周上运动所需要的比例增长。

电子感应加速器被用来加速电子，使其达到几千万乃至几亿电子伏的能量。然而，要把电子加速至远高于几亿电子伏的能量就变得不切合实际，这里有几个原因。原因之一是，要在该轨道内获得所需的高平均值磁场在实际上有困难。另一个原因则是，式（17.6）在能量高的情况下已不再正确，因为它并没有把由于粒子电磁辐射（即在第1卷第34章中所称为同步加速器辐射的）而损失的能量包括在内。由于这些原因，要把电子加速至更高能量——达到几十亿电子伏——就得采用另一种称为同步加速器的机器来完成。

§17-4 一个佯谬

现在要向你们描述一个显而易见的佯谬。佯谬指的是这样一种情况，当用一种方法分析时得出一个答案，而用另一种方法分析时又得出另一个答案，因而对于实际上究竟会发生什么我们就会陷于某种困境。当然，在物理学中从未有过任何真正的佯谬，因为实际上只有一个正确答案，至少我们相信自然界只按照一种方式行动（不用说，那

就是正确方式)。因此，在物理学中佯谬只是我们本身理解上的一种混乱。下面是我们将要提出的一个佯谬。

试想象构造一个如图17-5所示的装置。一个薄而圆的塑料盘被支撑在一根装有优良轴承的同心轴上，从而能够十分自由地旋转。在该盘上，与转轴同心地放着一个短螺线管形状的线圈。通过这个线圈的恒定电流 I 由一个同样是装在盘上的小电池组供应。靠近盘的边缘绕圆周边等距离地分布着若干个金属小球，它们相互之间以及与线圈之间均由制造该盘的塑料材料绝缘。这些小导体球，每一个都各带有等量的静电荷 Q 。每件东西都完全固定，而盘则静止不动。假设现在由于某一偶发事件或由于预先的安排，线圈中的电流被中断了，然而却没有受到任何外界干扰。只要继续通电流，便有或多或少与盘的轴平行的磁通量穿过该线圈。当电流中断时，这通量一定会趋于零。因此，就必然会感生一电场，而这电场将以该轴为中心环绕成一些圆周。在盘的周边那些带电球体均将感到一个与圆盘边缘相切的电场。这个电力对于所有电荷来说都在与圆盘边缘相切的方向，因而将产生一个作用于该盘上的净力矩。从上面的论证，我们预期当线圈中电流消失时，圆盘将开始转动。要是我们已知道盘的转动惯量、线圈中的电流以及小球上的电荷，那我们就能算出所要的角速度。

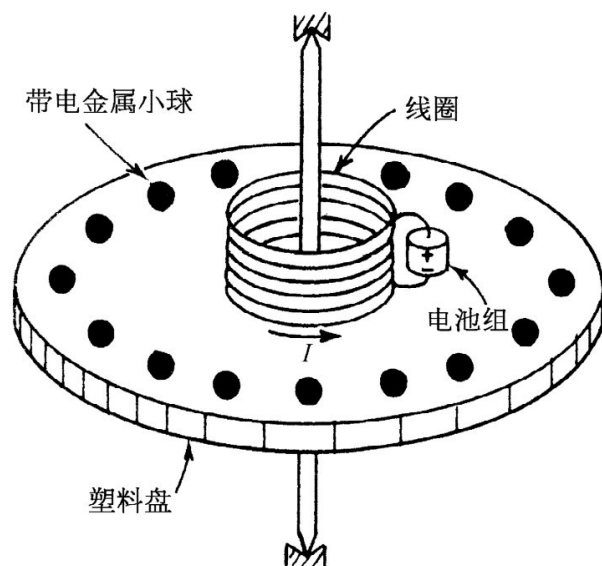


图17-5 如果电流 I 停止了，该盘是否会转动

但我们也可轻易地做出不同的论证。利用角动量守恒原理，我们可以说，盘及其一切部件的角动量在开始时为零，因而这整套装置的角动量就应该保持等于零。当电流中断时不应有转动。究竟哪一种论证才是正确的呢？盘将转动还是不转动？我们将把这一问题留给你们去思考。

必须提醒你们一点，正确的答案并不有赖于任何非本质的特征，诸如电池组的非对称位置等等。事实上，你可以想象一种诸如下述的理想情况：该螺线管是由超导电性绕成的，里面通有电流。在该盘已经小心地被安置于静止状态后，让螺线管的温度缓慢上升。当导线的温度达到介乎超导电性与正常导电性之间的转变温度时，螺线管里的电流便将因导线的电阻而趋向零。如前所述磁通量将降低至零，因而环绕着该轴心将产生一个电场。我们也应该提醒你，这个解答并不容易得到，但也不是一种诡计。当你把它想出来时，你已经发现了一个重要的电磁学原理。

§17-5 交流发电机

在本章的其余部分，我们将应用§17-1中的原理来分析第16章中曾讨论过的若干现象。我们首先要对交流发电机更详细地加以审察。这种发电机基本上由一个在匀强磁场中转动的导电线圈构成。相同的结果也可用磁场中的固定线圈来获得，而磁场的方向按上一章所描述的方法旋转。我们将仅仅考虑前一种情况。假设有一个圆形线圈能够以它的一根直径为轴而旋转。让这个线圈安放在一个垂直于该转轴的匀强磁场之中，如图17-6所示。我们并且设想该线圈两端通过某种滑动触点被引至外电路。

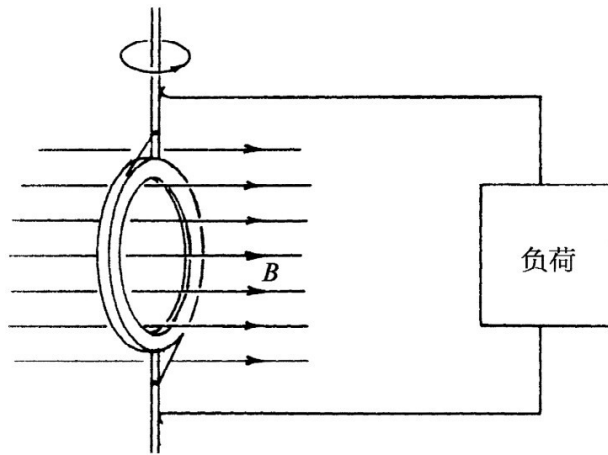


图17-6 一个导电线圈在匀强磁场中旋转——交流发电机的基本原理

由于线圈转动，穿过它的磁通量便将发生改变。因此，在线圈的电路中就有一个电动势。令 S 为该线圈的面积^[1]，而 θ 为磁场与线圈平面法线之间的夹角。于是穿过线圈的磁通量就是

$$BS \cos \theta . \quad (17.13)$$

如果线圈以匀角速度 ω 旋转，则 θ 随时间变化为 $\theta = \omega t$ 。

线圈中每匝的电动势都等于该通量的变化率。若线圈有 N 匝，则总电动势就大 N 倍，所以

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = NBS\omega \sin \omega t. \quad (17.14)$$

如果把来自发电机的导线引导至离转动线圈相当远的地方，那里的磁场为零，或至少磁场已不随时间变化，那么在这个区域里 $\mathbf{E}$ 的旋度将为零，因而我们可以定义一个电势。事实上，若没有电流从发电机中引出，则两根导线间的电势差 V 将等于该旋转线圈中的电动势。这就是说，

$$V = BS\omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t.$$

两根导线间的电势差随 $\sin \omega t$ 变化。这样变化的电势差称为交变电压。

既然两根导线之间存在电场，那么它们就必然是带电的。显然，发电机的电动势已经把某些超额电荷推出至导线上，直到这些电荷产生的电场强大到足以抵消该感应力时为止。从发电机的外面看，两根导线表现出似乎像在静电场中那样，被充电至电势差 V ，而电荷又似乎是随时间变化的，因而给出一个交变电势差。与静电情况还有另一个不同。如果把发电机与一个容许电流通过的外电路连接，则我们将发现该电动势并不允许导线放电，而是当电流从导线引出来时继续对导线供应电荷，企图使两导线之间永远保持一个不变的电势差。事实上，若发电机与一总电阻为 R 的电路连接，则流经该电路的电流将与发电机的电动势成正比与 R 成反比。由于电动势具有正弦形式的时间变化，所以电流也是一样。即有一个交变电流：

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t.$$

关于这一种电路的原理图如图17-7所示。

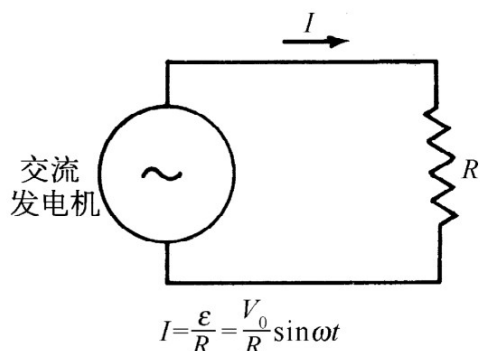


图17-7 包含一部交流发电机和一个电阻的电路

我们也能看到，电动势确定了发电机供应能量的多少。导线中的每个电荷都以 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 的功率接受能量，其中 $\mathbf{F}$ 为作用于该电荷上的力，而 $\mathbf{v}$ 为电荷的速度。现在设单位长度导线中的运动电荷数目为 n ，则对导线的任意线元 ds 所供应的功率为

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} n ds.$$

对于一条导线来说， $\mathbf{v}$ 总是沿着 $d\mathbf{s}$ ，所以这功率可以写成

$$nv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

对整个电路提供的总功率等于这一表式环绕整个回路的积分：

$$\text{功率} = \oint nv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (17.15)$$

现在应当记得， qnv 就是电流 I ，而电动势则被定义为 F/q 环绕该电路的积分。因此就得到这么一个结果：

$$\text{发电机提供的功率} = \mathcal{E}I. \quad (17.16)$$

当发电机的线圈中有电流通过时，也将会有机械力作用于其上。事实上我们知道，作用于线圈上的力矩与它的磁矩、磁场强度 B 以及它们间夹角的正弦成正比，磁矩等于线圈中的电流乘以线圈面积，因此该力矩为

$$\tau = NISB \sin\theta. \quad (17.17)$$

为维持线圈转动必须做机械功，其功率等于角速度 ω 乘以力矩：

$$\frac{dW}{dt} = \omega\tau = \omega NISB \sin\theta. \quad (17.18)$$

把上式和式（17.14）比较，可见为了转动线圈而抵抗磁力所需的机械功率恰好等于 $\mathcal{E}I$ ，即发电机的电动势所输送出来的电能的功率。在发电机中用掉的全部机械能表现为电路上的电能。

作为由于感生电动势而产生的电流和力的另一个例子，让我们分析在§17-1中曾描述过、如图17-1所示的设备中发生的事情。那里有两根平行导线和一根滑动横杆放置在一个垂直于该平行导线平面的磁场中。现在让我们假定该U形“底”部（图中的左端）是由高电阻导线制成，而那两根侧线由像铜一样的良导体制成——于是我们就不必担心当横杆移动时电路的电阻会发生改变。和以前一样，电路的电动势为

$$E = vBw. \quad (17.19)$$

电路中的电流与这个电动势成正比而与电路的电阻成反比：

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBw}{R}. \quad (17.20)$$

由于这个电流，所以就会有作用于横杆上的磁力，这力与杆的长度、杆中的电流以及磁场均成正比，即

$$F = BIlw. \quad (17.21)$$

由式（17.20）取 I ，因而对于力便有

$$F = \frac{B^2 w^2}{R} v. \quad (17.22)$$

我们看到，力与横杆的速度成正比。正如你可以很容易就明白，这个力的方向与杆的移动速度相反。这种像黏力那样与“速度正比”的力，每当在磁场中移动导体而产生感生电流时总会出现。在上一章中我们所举的有关涡流的例子，也会产生作用在导体上、与导体速度成正比的力，尽管一般来说，这样的情况都会给出难以进行分析的复杂电流分布。

在机械系统的设计中，要得到与速度成正比的阻尼力往往是方便的。涡流力提供一个获得这种与速度有关的力的最方便办法。应用这种力的一个例子就是普通的家用电表。在电表中有个旋转于永磁铁两极间的薄铝盘。这个盘由一个小电动机驱动，其力矩与家庭电路中所消耗的功率成正比。鉴于在盘中的这个涡流力，便会有一个正比于速度的阻力，当平衡时该速度与电能消耗的速率成正比。利用一个连接于转盘上的计数器，就把它的转数记录下来。这个数目就是总能量消耗、亦即所用去的瓦时数的指示。

我们也可以指出，式（17.22）表明来自感生电流的力——也就是任何涡旋电流的力——均与电阻成反比。材料的导电性能越好，这力就越大。当然原因在于电阻低，电动势所产生的电流就更强，而较强的电流表示较大的机械力。

从那些公式我们也可以看出，机械能是如何转变成电能的。如前所述，对电路中电阻所提供的电能为积 $\mathcal{E} I$ 。当移动导电横杆时对其所做的功率，为杆受到的作用力乘以杆的速度。利用关于力的式（17.22）后，所做的功率为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2 B^2 \omega^2}{R}.$$

我们看到，这确实等于由式（17.19）和（17.20）所该获得的积 $\mathcal{E} I$ 。机械功再次表现为电能。

§17-6 互感

现在我们想要考虑一种导线线圈固定而磁场在变化的情形。当我们过去描述磁场由电流产生时，仅考虑恒定电流的情况。但只要电流变化缓慢，磁场在每一时刻就几乎与一恒定电流的磁场相同。在这一节的讨论中，我们将假定电流总是足够缓慢地变化着，使得这种情况保持正确。

导致变压器起作用的那些基本效应，可由图17-8所示的那两个线圈的配置来加以演示。线圈1由绕成长螺线管形状的一根金属导线构成。在这个线圈外面——与之绝缘的——还绕上一个仅有几匝导线的

线圈2。现在，若电流通过线圈1，我们知道在其内部将出现一磁场，这磁场也穿过线圈2。当线圈1中的电流变化时，磁通量也起变化，从而将会在线圈2中感生一电动势。现在我们将计算这一感生电动势。

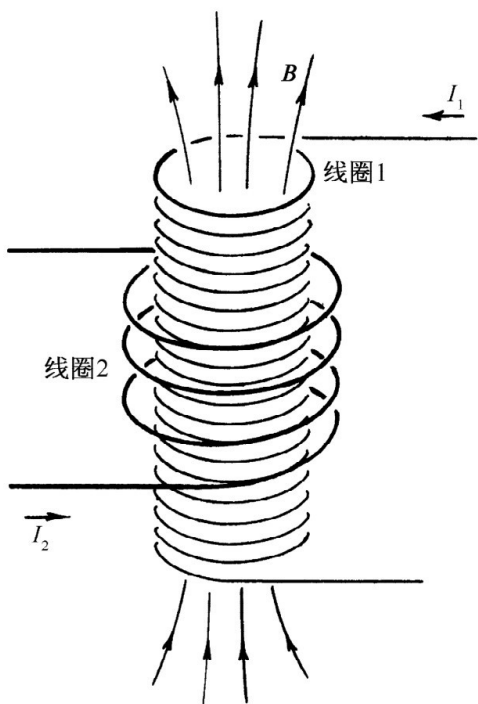


图17-8 线圈1中的电流会产生一个穿过线圈2的磁场

在§13-5中我们曾看到，在一长螺线管内磁场是均匀的，而其大小为

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (17.23)$$

式中 N_1 为线圈1的匝数， I_1 为通过其中的电流，而 l 即为线圈长度。令线圈1的横截面积为 S ，那么 $\mathbf{B}$ 的通量就是它的大小乘以 S 。如果线圈2共有 N_2 匝，则这通量与线圈2耦合了 N_2 次。因而在线圈2中的电动势就由下式给出：

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}. \quad (17.24)$$

在式（17.23）中，唯一随时间变化的量为 I_1 。因此电动势为

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.25)$$

我们看到，线圈2中的电动势与在线圈1中的电流变化率成正比。该比例常数基本上是两线圈的一个几何因数，称为互感，而往往被记作 M_{21} 。于是式（17.25）便可以写成

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.26)$$

现在假设电流通过线圈2而要问线圈1中的电动势。我们应该计算出磁场，它处处与电流 I_2 成正比。穿过线圈1的磁通匝连数应与几何形状有关，但同时又应与 I_2 成正比。因此，在线圈1中的电动势再次正比于 dI_2/dt ，可以把它写成

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.27)$$

要算出 M_{12} ，比起刚才对于 M_{21} 所做的计算更困难一些。我们不打算现在就来进行计算，因为在本章稍后将会证明 M_{12} 必然等于 M_{21} 。

由于任何线圈中的磁场总是与其电流成正比，因此对任何两个线圈就会获得同种类型的结果。式（17.26）和（17.27）具有相同形式，只是常数 M_{21} 和 M_{12} 不同，它们之值应取决于两线圈的形状和它们的相对位置。

假设我们希望求得任意两个线圈——比如如图17-9所示的那两个线圈——之间的互感，我们知道在线圈1中的电动势其一般表式可写成

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d}{dt} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da,$$

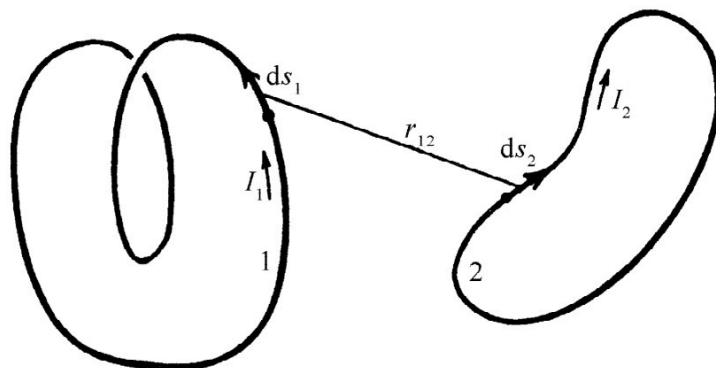


图17-9 任何两个线圈都有与 $d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 / r_{12}$ 的积分成正比的互感 M

式中 $\mathbf{B}$ 为磁场，而积分是对以电路1为边界的整个面进行的。在§14-1中我们已经知道，这种对 $\mathbf{B}$ 的面积分可以与矢势的一个线积分相联系。具体地说为

$$\int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1,$$

式中 $\mathbf{A}$ 代表矢势，而 $d\mathbf{s}_1$ 则是电路1的一个线元。该线积分必须环绕电路1进行。因此，在线圈1中的电动势可以写成

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1. \quad (17.28)$$

现在让我们假设在电路1处的矢势是由电路2中的电流产生的。于是这矢势便可以写成环绕电路2的一个线积分：

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \quad (17.29)$$

式中 I_2 代表电路2中的电流，而 r_{12} 则是从电路2中的线元 $d\mathbf{s}_2$ 至电路1上我们正在计算其矢势的那一点之间的距离（见图17-9）。合并式（17.28）和（17.29），则可将电路1中的电动势表达成一个双重的线积分：

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \cdot d\mathbf{s}_1.$$

式中的积分全都是对于固定电路进行的。唯一与积分的变量无关的只有电流 I_2 。因此，我们可以把它提到两个积分号之外。于是电动势就可以写成

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

式中系数 M_{12} 为

$$M_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}. \quad (17.30)$$

从这一积分我们见到， M_{12} 仅取决于电路的几何结构，它依赖于两电路间的一种平均间距，而在这个平均过程中对两线圈互相平行的那些节段必须加权。我们的式子可以用来计算两个任意形状电路间的互感。并且，它表明 M_{12} 的积分与 M_{21} 的积分全同。因此，我们已证

明了这两系数是全等的。对于只含有两个线圈的系统，这两个系数 M_{12} 和 M_{21} 常被表示成没有任何下角标的符号 M ，简单叫作互感：

$$M_{12}=M_{21}=M.$$

§17-7 自感

在对图17-8或17-9的两个线圈中的感生电动势进行讨论时，我们仅仅考虑了其中一个线圈中电流的情况。如果两个线圈中同时载有电流，则耦合到每一线圈的磁通量就将是那些分开存在着的两个通量之和，因为叠加定律对于磁场是适用的。因此，每个线圈中的电动势不仅正比于另一线圈中的电流变化，而且也正比于该线圈本身的电流变化。于是，在线圈2中的总电动势就应当写成^[2]

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} + M_{22} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.31)$$

同理，线圈1中的电动势将不仅依赖于在线圈2中的变化电流，而且也依赖于本身的变化电流：

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} + M_{11} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.32)$$

系数 M_{22} 和 M_{11} 都永远是负数，通常被写成

$$M_{11}=-L_1, \quad M_{22}=-L_2, \quad (17.33)$$

其中 L_1 和 L_2 分别称为两个线圈的自感。

当然，即使仅有一个线圈，自感电动势依然存在。任一线圈因自身的原因都有一个自感 L 。电动势将正比于其中电流的变化率。对于单个线圈，通常采取这样的惯例，即如果电动势与电流的方向相同，那它们就被认为是正的。按照这种惯例，我们可以把单个线圈的电动势写成

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (17.34)$$

负号指明该电动势反抗电流的变化——故常称为“反电动势”。

由于任何线圈都有反抗电流变化的自感，所以线圈里的电流就有一种惯性。事实上，如果想要改变线圈里的电流，就必须把线圈接至某一电池组或发电机的外电压源来克服这一惯性，原理图如图17-10（a）所示。在这样一个电路中，电流 I 按照如下关系依赖于电压 V ：

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (17.35)$$

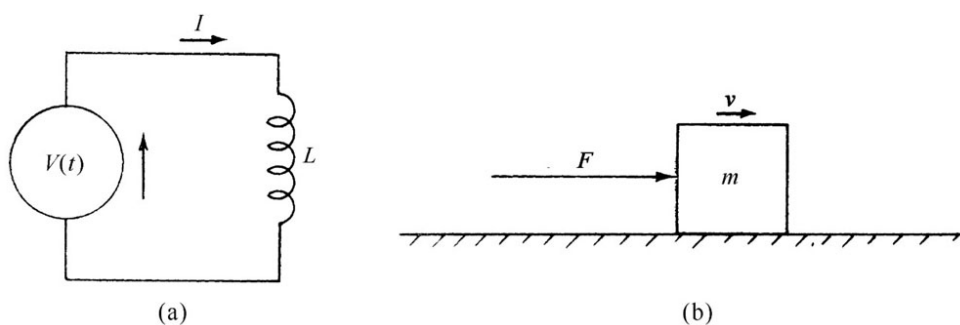


图17-10 (a) 含有一电压源和一自感的电路；(b) 类似的机械系统

这一方程与粒子在一维中情况下的牛顿运动定律具有相同形式。因此，我们可以按“相同的方程具有相同的解”的原则来对它进行研

究。这样，若把外加电压 V 对应于所加的外力 F ，而把线圈中的电流对应于粒子的速度，则该线圈的自感就对应于粒子的质量 m [3]。看一看图17-10（b）。我们可以编制一个关于各相应量的对照表：

粒子	线圈
F (力)	V (电势差)
v (速度)	I (电流)
x (位移)	q (电荷)
$F = m \frac{dv}{dt}$	$V = L \frac{dI}{dt}$
mv (动量)	LI
$\frac{1}{2}mv^2$ (动能)	$\frac{1}{2}LI^2$ (磁能)

§17-8 电感与磁能

继续上一节中所进行的类比，我们就会预期，对应于其变化率为作用力的机械动量 $p=mv$ ，就会有一个等于 LI 的类似量，其变化率为 V 。当然，我们并没有任何权利讲 LI 就是电路的真实动量，事实上，它并不是。整个电路可能固定不动而没有任何动量。 LI 与动量 mv 相类似只是在彼此都满足相对应的方程这一意义上说的。同样，对于动能 $\frac{1}{2}mv^2$ ，也有一类似量 $\frac{1}{2}LI^2$ 与之对应。但这里却使我们感到惊异，这 $\frac{1}{2}LI^2$ 在电的情况下的确就是能量。这是因为对电感做功的时间变化率为 VI ，而它在力学系统中相应的量为 Fv 。因此，就能量来说，这些量不但在数学上彼此对应，而且也具有相同的物理意义。

从下面所述情况我们可更详尽地明了这一点。就像在式（17.16）中我们曾经求得的那样，由感应力所做的电功其时间变化率为电动势

与电流之积：

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

将式（17.34）中用电流表示的 $\mathcal{E}$ 代入上式，我们得

$$\frac{dW}{dt} = -LI \frac{dI}{dt}. \quad (17.36)$$

对这一方程进行积分，则就求得在建立电流过程中为了克服自感电动势而需要从外部电源获得的能量^[4]（这必定等于所储存的能量 U ）为

$$-W = U = \frac{1}{2}LI^2. \quad (17.37)$$

因此，储藏于自感中的能量为 $\frac{1}{2}LI^2$ 。

把与此相同的论据应用于诸如图17-8或17-9中的那一对线圈，就可以证明该系统的总电能由下式给出：

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2. \quad (17.38)$$

为此，设开始时两线圈中的 $I=0$ ，然后可以先在线圈1中接通电流 I_1 ，让线圈2中的电流 $I_2=0$ 。此时所做的功正好为 $\frac{1}{2}L_1I_1^2$ 。但现在当接通 I_2 时，就不仅在电路2中对抗电动势做功 $\frac{1}{2}L_2I_2^2$ ，而且也做了附加的功

MI_1I_2 ，后者等于电路1中电动势 $[M (dI_2/dt)]$ 的时间积分，再乘以该电路中当时的恒定 电流 I_1 。

假设现在希望求出分别带有电流 I_1 和 I_2 的任意两个线圈之间的作用力。首先我们也许预期，可以应用虚功原理通过取式 (17.38) 中的能量变化而求得。当然，还必须记住，当我们改变两线圈的相对位置时，唯一变化的量是互感 M 。这样，我们也许会把虚功原理方程写成：

$$-F \Delta x = \Delta U = I_1 I_2 \Delta M \quad (\text{错了}).$$

但这个式子却是错误的。因为，正如我们以前曾经见过的，它只包括两线圈中的能量变化，而没有包括为使电流 I_1 和 I_2 保持恒定值的那些电源的能量变化。现在我们能够理解这些电源必须在线圈移动时供应能量以便抵抗线圈中的感生电动势。如果想要正确地应用虚功原理，就必须把这些能量也包括进去。然而，正如我们曾经见到的，可以取一捷径，通过回忆知道总能量等于所谓的“机械能” $U_{\text{机械}}$ 的负值后，再应用虚功原理。因此，我们可以把力写成：

$$-F \Delta x = \Delta U_{\text{机械}} = -\Delta U. \quad (17.39)$$

于是两线圈间之力由下式给出：

$$F \Delta x = I_1 I_2 \Delta M.$$

关于两线圈系统的能量表示式 (17.38)，可以用来证明两线圈间的互感 M 与自感 L_1 和 L_2 之间存在一个有趣的不等式。十分清楚，两

线圈的能量必须总是正的。如果把两线圈的电流从零开始增加到某个值，则我们就已经在给该系统输入能量了。要不然的话，电流便会自发增加而同时又对世界其他部分释放能量——一件不可能发生的事情！现在，我们的能量表示式（17.38）也同样可以写成如下形式：

$$U = \frac{1}{2}L_1\left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2. \quad (17.40)$$

这只是一个代数变换。这个量对于 I_1 和 I_2 的任何值都必须始终为正。特别是即使 I_2 恰巧为特殊值

$$I_2 = -\frac{L_1}{M}I_1, \quad (17.41)$$

它仍必须为正。但对于 I_2 这个电流，式（17.40）中的首项为零。如果能量一定是正值，则式（17.40）的末项就必须大于零。因而要求有

$$L_1 L_2 > M^2.$$

这样，我们就已证明了这个普遍结果：任意两个线圈互感 M 的大小必然小于或等于两个自感的几何平均值（ M 本身是可正可负的，这取决于对电流 I_1 和 I_2 的符号约定）。

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}. \quad (17.42)$$

M 与自感的关系常被写成

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}. \quad (17.43)$$

常数 k 称为耦合系数。如果来自一个线圈的通量大部分贯穿另一个线圈，则该耦合系数很接近于1，我们说该两线圈是“紧耦合”的。如果两线圈相距很远，或由另外的安排使得其互相贯串的通量很少，则耦合系数接近于零，而互感便很小了。

为计算两线圈的互感，我们在式（17.30）中已给出了一个环绕两电路的双重线积分公式。或许我们认为，可以利用相同的公式通过环绕同一个线圈进行两次线积分而获得单个线圈的自感。然而，这办法行不通，因为当线元 $d\mathbf{s}_1$ 和 $d\mathbf{s}_2$ 位于线圈同一点时，被积函数中的分母 r_{12} 将会趋于零，于是从这个式所得到的自感就会无限大。原因在于这个公式是一种近似，只有当两电路的导线截面比从一个电路至另一个电路的距离小时这个公式才适用。很清楚，这样一种近似对于单个线圈并不成立。事实上，单个线圈的自感，当其中导线的直径变得越来越小时，真的会按照对数函数方式趋于无限大。

这样，我们就必须寻找计算单个线圈自感的另一种方法。有必要将导线里的电流分布也计算在内，因为导线的大小是一个重要参数。因此，我们不应去追究一个“电路”的自感如何，而应去寻求导体分布的自感如何。或许求出自感最方便的办法是利用磁能。以前我们在§15-3中曾求出过关于恒定电流分布的磁能表示式：

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.44)$$

如果已知电流密度 $\mathbf{j}$ 的分布，则可以算出矢势 $\mathbf{A}$ ，并进一步算出式（17.44）的积分而获得能量。这个能量等于自感的磁能，即 $\frac{1}{2}LI^2$ 。令两者相等我们就给出了关于自感的公式：

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.45)$$

当然，我们期望，自感是只与该电路的几何形状有关而与电路中的电流 I 无关的一个数值。式 (17.45) 的确会给出这样的结果，因为这个式中的积分与电流的平方成正比，电流通过 $\mathbf{j}$ 出现一次，通过矢势 $\mathbf{A}$ 又出现一次。这积分除以 I^2 后将与电路的几何形状有关而与电流 I 无关了。

关于电流分布的能量表示式 (17.44)，可以写成一个十分不同的形式，后者有时更便于计算，并且，正如我们以后将见到的，它是一种重要形式，因为它的正确性更普遍。在关于能量的公式 (17.44) 中， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{j}$ 两者都可以联系到 $\mathbf{B}$ ，因而可以指望用磁场来表示这能量——就像过去我们能够把静电能同电场联系起来那样。我们通过用 $\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ 代替 $\mathbf{j}$ 开始，但不能那么容易地代替 $\mathbf{A}$ ，因为 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，所以并不能倒过来用 $\mathbf{B}$ 给出 $\mathbf{A}$ 。但无论如何，我们总可以写出

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.46)$$

有趣的是，附带一些限制条件，这个积分可以写成

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV. \quad (17.47)$$

为看清这一点，我们将其中一个典型项详细写出。假定我们处理式 (17.46) 积分中所含的项 $(\nabla \times \mathbf{B})_z A_z$ 。将其各部分写出，使得

$$\int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz$$

（当然，还有两个相同类型的积分）。现在就第一项对 x 进行积分——采用分部积分法，这就是说，我们可以有

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} dx.$$

现在假定我们的系统——指各源及各场——是有限的，因而在无限远处所有的场都趋于零。这样，若那些积分都是对全部空间进行的，则在积分限处项 $B_y A_z$ 的值将为零。剩下的就只有 $B_y (\partial A_z / \partial x)$ 那一项，这显然是 $B_y (\nabla \times \mathbf{A})_y$ 的一部分，因而也就是 $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ 的一部分。如果你又算出其余五项，就将看到式（17.47）的确与式（17.46）等效。

但现在我们可用 $\mathbf{B}$ 来代替 $\nabla \times \mathbf{A}$ ，从而获得

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (17.48)$$

上式已经把一静磁情况的能量仅用磁场来表示，这一表示式紧密地对应于我们曾经得到的静电能公式：

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (17.49)$$

之所以强调这两个能量公式，其中的一个原因是，有时它们更便于应用。而更为重要的是，事实证明，对于动态场（当 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 都随时间变化时）这两个表示式（17.48）和（17.49）都保持正确，而以往关于电能和磁能所曾给出的其他公式则不再正确——它们仅适用于静态场。

如果对单个线圈的磁场已经了解，则可以通过使能量表示式（17.48）等于 $\frac{1}{2}LI^2$ 而求出自感。让我们通过求出长螺线管的自感来看看这是如何计算出来的。以前就知道长螺线管里的磁场是均匀的而管外的 $\mathbf{B}$ 为零。管内磁场的大小为 $B = nI / (\epsilon_0 c^2)$ ，其中 n 为单位长度的绕线匝数，而 I 为电流。如果该线圈的半径为 r 而其长度为 l （我们设想 l 很长，也即 $l \gg r$ ，从而可以忽略边缘效应），则管内的体积为 $\pi r^2 l$ 。因而磁能为

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 \cdot (\text{体积}) = \frac{n^2 I^2}{2 \epsilon_0 c^2} \pi r^2 l,$$

它等于 $\frac{1}{2}LI^2$ ，即

$$L = \frac{\pi r^2 n^2}{\epsilon_0 c^2} l. \quad (17.50)$$

[1] 现在由于字母 A 已被用于矢势了，我们建议用 S 来表示表面积。

[2] 式（17.31）和（17.32）中 M_{12} 和 M_{21} 的符号取决于对该两线圈中正电流向指的任意选择。

[3] 附带说一下，这并不是在力学量与电学量之间能够建立起对应关系的唯一途径。

[4] 目前我们忽略电流在线圈的电阻中发热而引起的任何能量损耗。这种损耗需要来自电源的附加能量，但不会改变输入电感中的能量。

第18章 麦克斯韦方程组

§18-1 麦克斯韦方程组

本章我们将回到第1章中作为我们起点的、由四个式子构成的、完整的麦克斯韦方程组。到目前为止，我们已经零碎地研究过麦克斯韦方程组，现在是把最后一部分加进去并将其全都合起来的时候了。于是对于可能以任何形式随时间变化的电磁场，我们将有完整而又正确的描述。在这一章中所谈到的任何事情与以前谈到的事情发生矛盾的话，则都以本章为准，以前所谈到的是错误的——因为以前所论述的只适用于诸如恒定电流和固定电荷那样一些特殊情况。尽管过去每当我们写出一个方程时总是十分细心地指出它受到的限制，但很容易把所有的限制条件都忘记了，而且很容易对那些不正确的方程学得过分认真。现在我们准备给出全部真理，而不附带（或几乎不具有）任何限制条件。

整套麦克斯韦方程组列于表18-1中，其中包括语言和数学符号两种表达方式。语言与方程式等效这一事实从现在就应该熟悉它——你应当能够从一种形式顺利地变换到另一种形式。

表18-1 经典物理学

麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && (\text{穿过一闭合面的 } \mathbf{E} \text{ 通量}) = (\text{面内电荷})/\epsilon_0 \\ \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (\mathbf{E} \text{ 环绕一回路的路积分}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{穿过该回路的 } \mathbf{B} \text{ 通量}) \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (\text{穿过一闭合面的 } \mathbf{B} \text{ 通量}) = 0 \\ \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && c^2 (\mathbf{B} \text{ 环绕一回路的路积分}) = \text{穿过该回路的电流}/\epsilon_0 + \frac{d}{dt} (\text{穿过该回路的 } \mathbf{E} \text{ 通量}) \end{aligned}$$

电荷守恒

$$\left[\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \quad (\text{穿过一闭合面的电流通量}) = -\frac{d}{dt} (\text{闭合面内电荷})$$

力的定律:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

运动定律:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}, \text{ 其中 } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ (经爱因斯坦修正过的牛顿定律)}$$

引力:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

第一个方程—— $\mathbf{E}$ 的散度等于电荷密度除以 ϵ_0 ——是普遍正确的。无论对于动态场或静态场，高斯定律永远正确。穿过任何闭合面的 $\mathbf{E}$ 通量与面内电荷成正比。第三个方程是与第一个方程相对应的、关于磁场的一般定律。由于不存在磁荷，所以通过任一闭合面的 $\mathbf{B}$ 通量总是等于零。第二个方程，即 $\mathbf{E}$ 的旋度为 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，这就是法拉第定律，我们在前面两章中已经讨论过了，它也是普遍正确的。最末一个方程含有某种新的东西，以前我们只看到对恒定电流才适用的那一部分。在那种情况下，我们曾经说过 $\mathbf{B}$ 的旋度为 $\mathbf{j} / (\epsilon_0 c^2)$ ，但普遍正确的方程则还带有一个由麦克斯韦发现的新的项。

在麦克斯韦完成其工作以前，电和磁方面的已知定律就是从第3章至第17章中我们曾经学习过的那些。特别是，关于恒定电流的磁场方程仅仅知道为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.1)$$

麦克斯韦从考虑这些已知定律开始并将其表达成微分方程，正如我们这里曾经做过的那样（虽然当时 ∇ 这一符号尚未发明，但今天我们称为旋度和散度的那些微商组合的重要性，就是由于麦克斯韦才首次显示出来）。后来他又注意到式（18.1）有些奇怪。如果我们取这一方程的散度，左边将是零，因为一个旋度的散度始终等于零，所以这一方程要求 $\mathbf{j}$ 的散度也是零，但如果 $\mathbf{j}$ 的散度为零，则从任何闭合面跑出来的电流总通量也将是零。

来自一闭合面的电流通量等于该面内电荷的减少。一般地说，这肯定不能为零，因为我们知道电荷可以从一处移至另一处。事实上，方程

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.2)$$

几乎已是关于 $\mathbf{j}$ 的定义了。这一方程表示电荷守恒这样一个最基本定律——任何电荷流动都必须来自某个供应处。麦克斯韦认识到这一困难，并提出可以通过在式（18.1）右边加进 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 这一项来加以避免，于是他就得到了表18-1上所列的那第四个方程：

$$\text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

在麦克斯韦时代人们还不习惯于用抽象的场来进行思考。麦克斯韦曾利用好像弹性固体那种真空来讨论他的概念。他也尝试过用这种机械模型来解释他新方程的意义。当时对接受他的理论存在不少阻力，首先是由于他的模型，而其次则是由于当初尚未有实验证明。今天，我们更好地了解到，争论点在于那些方程本身，而并不是用来获得它们的那种模型。我们仅仅可以质问这些方程是正确的呢还是错误

的。这要通过做实验来回答，而无数实验都已证实了麦克斯韦方程组。如果把他用以建立他大厦的脚手架搬开，我们将发现麦克斯韦的华丽大厦本身仍巍然屹立。他把所有关于电学和磁学的定律都综合在一起而形成一套完整而又漂亮的理论。

让我们来证明这一附加项正好是为解决麦克斯韦所发现的那个困难所必需的。如果对他的方程（表18-1上的式IV）取散度，则右边的散度就应为零：

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (18.3)$$

在第二项中对坐标与对时间取微商的次序可以对调，因而该方程可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (18.4)$$

但麦克斯韦方程组中的第一个方程表明， $\mathbf{E}$ 的散度为 ρ/ϵ_0 。将这个等式代入式（18.4）中，则又回到式（18.2），我们知道它是正确的。反过来，若接受麦克斯韦方程组——事实上，我们接受了，因为没有任何人发现过一个实验与这些方程不相符——则我们必定得出结论：电荷总是守恒的。

物理规律没有回答下述问题：“如果电荷突然在这里产生，则会出现什么？有哪一些电磁效应该会发生？”对此没有答案可以提供，因为我们的方程组表明，上述情况是不会发生的。要是它真的发生的话，便需要一些新的定律，但我们无法讲清楚这些定律会是怎么样的，因为还没有机会去观察一个电荷不守恒的世界将会怎样行动。按照我们

的那些方程，如果你突然将一电荷放在某处，那你一定是从别处把它带到那里的。在那种情况下，你就能够说出将会发生什么了。

当我们对 $\mathbf{E}$ 的旋度方程添加一新项时，就发现有完整的一类新型现象可以得到描述。我们即将见到，麦克斯韦对 $\nabla \times \mathbf{B}$ 那个方程的一个小小附加也具有深远后果。在本章中，对这些后果我们只能提及其中的几个。

§18-2 新的项是如何起作用的

作为第一个例子，我们要考虑一个具有球对称的径向电流分布发生的情况。我们设想有一个其上面带有放射性材料的小球，这种放射性材料正喷射出一些带电粒子（或者也可以设想有一大块胶体，在其中心处有一个小空穴，用一支皮下注射针在空穴注入了一些电荷，并从那里慢慢地渗漏出来）。在上述任一种情况下，我们都具有处处沿径向流出的电流。下面将假定，这一电流的大小在各不同方向上都相同。

令在任意半径 r 以内的总电荷为 $Q(r)$ 。如果在相同半径处的径向电流密度为 $j(r)$ ，则式 (18.2) 要求 Q 减少的速率为

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (18.5)$$

现在我们要问，在这种情况下由电流所产生的磁场如何。假设在半径为 r 的球面处画出某一条回路 Γ ，如图18-1所示。这样就有一些电

流会穿过该回路，因而也许可以期望求出沿图上所示方向的磁场环流来。

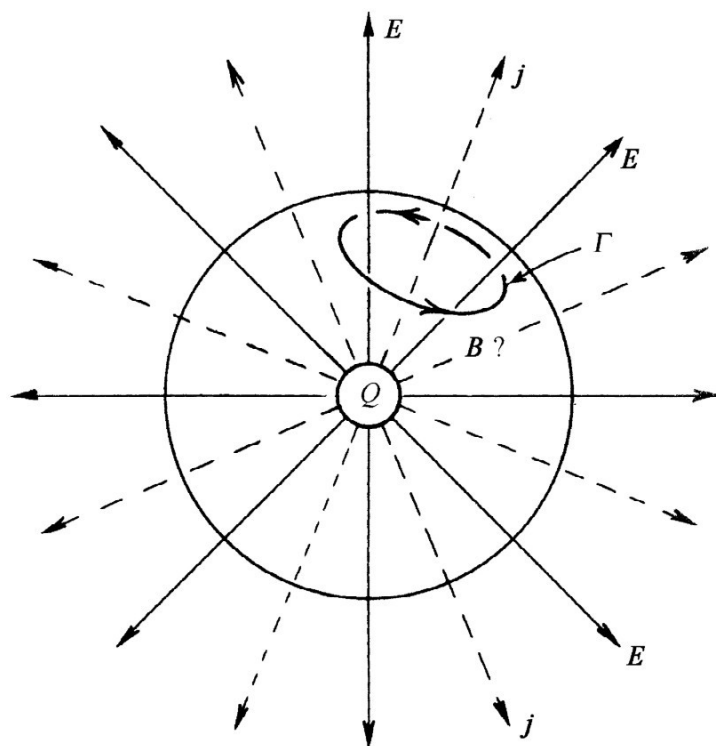


图18-1 一个具有球形对称的电流，其磁场如何

但这样我们就已经处于困难之中了。 B 如何能在该球面上有任何特殊方向呢？对 Γ 的另一种选择将会容许我们断定它的方向恰恰与所示的相反，所以怎么能够有环绕着那些电流的 B 的任何环流呢？

幸而麦克斯韦方程救了我们。 B 的环流不仅取决于穿过 Γ 的总电流，而且也取决于穿过它的电通量对时间的变化率，一定是这两部分刚好互相抵消。让我们看看是否能证明确实是这样。

在半径为 r 处的电场必定是 $Q(r) / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ ——只要如我们所假定的那样，电荷是球对称分布的。电场沿着径向，而其时间变化率为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (18.6)$$

将此式与式（18.5）比较，我们就知道在任何半径处

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \quad (18.7)$$

在方程IV中那两个源的项互相抵消了，因而 $\mathbf{B}$ 的旋度就永远为零。在我们的例子中不存在磁场。

作为第二个例子，我们考虑用来对平行板电容器充电的导线的磁场（参见图18-2）。如果板上的电荷随时间变化（但不是太快），则导线里的电流等于 dQ/dt 。我们会料到这电流将产生环绕着该导线的磁场。肯定地说，结束于极板的电流必定产生正常的磁场——它不可能依赖于电流在何处消失。

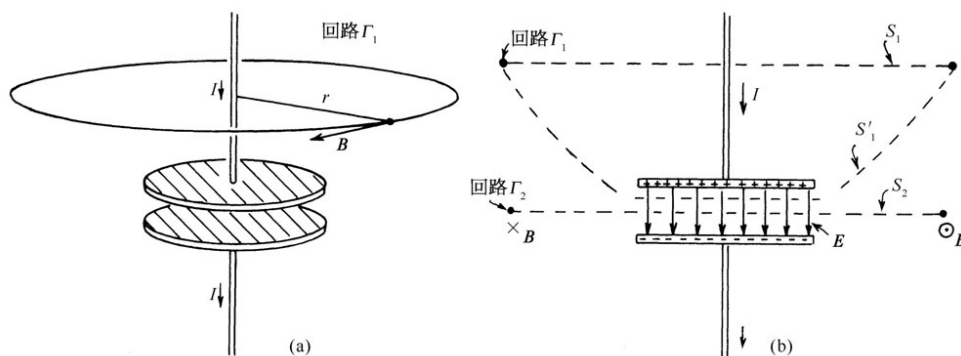


图18-2 一个正在充电的电容器附近的磁场

假定选取一条回路 Γ_1 ，那是一个如图（a）所示的半径为 r 的圆周。磁场的线积分应等于电流 I 除以 $\epsilon_0 c^2$ ，即

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.8)$$

这是对于恒定电流应该获得的结果，不过在加上麦克斯韦的附加项之后它仍然正确，因为如果我们考虑那个圆周内的平面 S ，则在该面上将不会有电场（假定那条导线是十分优良的导体），所以 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 的面积分为零。

然而，假设现在慢慢地把曲线 Γ_1 向下移动，直至电容器的极板水平为止，我们得到的结果总是相同。此时电流 I 变为零，磁场是否就消失了呢？这将是十分奇怪的。让我们来看看，对于那条其平面通过电容器两板之间而其半径为 r 的圆周曲线 Γ_2 [图18-2 (b)]，麦克斯韦方程对此将做何解释。 $\mathbf{B}$ 环绕 Γ_2 的线积分为 $2\pi r B$ ，它必然等于穿过该圆面 S_2 的 $\mathbf{E}$ 通量对时间的微商。我们从高斯定律得知，这个 $\mathbf{E}$ 通量应等于 $1/\epsilon_0$ 乘以电容器一个板上的电荷。于是就有

$$c^2 2\pi r B = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (18.9)$$

那很方便，这结果与我们在式(18.8)中得到的相同。对变化着的电场取积分与对在导线里的电流取积分给出相同的磁场。当然，这恰好就是麦克斯韦方程所讲的。对于图18-2 (b)所示的由同样的圆周曲线 Γ_1 为边界的两个面 S_1 和 S'_1 ，只要应用与上述相同的论证便很容易看出结果永远应该如此。穿过 S_1 的有电流 I ，但没有电通量。而穿过 S'_1 的则没有电流，但却有一个以速率 I/ϵ_0 变化着的电通量。如果把方程IV应用到任何一个面，则会得到相同的 $\mathbf{B}$ 。

从我们迄今对麦克斯韦新项的讨论，你可能会觉得有了它并没有增加多少东西——它只是把方程组安排得符合于我们已经预期的结果。诚然，若只是孤立地考虑方程IV，就不会发现任何特别新鲜的东西。

西。然而，“孤立地”这个词却十分重要。麦克斯韦在方程IV中的那个小小的改变，当它与其他的方程结合起来时，就的确会产生不少全新而又重要的东西。然而，在考虑这些事情之前，我们要对表18-1多说几句。

§18-3 全部经典物理学

表18-1包含了我们所熟悉的全部基本经典物理学，即在1905年以前已知的那种物理学。这里将其全都列在一个表上。借助这些方程，我们就能理解经典物理的整个领域。

首先，我们拥有麦克斯韦方程组——写成阐述的形式和简短的数学形式两种。然后就有电荷守恒，它即使是写在方括号之内的，也因为一旦我们有了完整的麦克斯韦方程组，就能够由其导出电荷守恒了，所以该表甚至还稍微有点重复。其次，我们已写出了力的定律，因为尽管有了电场和磁场仍不会告诉我们任何东西，除非我们知道它们对于电荷起着什么作用。可是，若知道了 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，我们就能求出作用于一个带有电荷 q 、以速度 $\mathbf{v}$ 运动着的物体上的力。最后，虽然有了这个力但并不告诉我们什么，除非我们知道当力推动某件东西时发生了什么，否则我们需要运动定律，那就是力等于动量的变化率（记得吗？我们早在第1卷中就已经有了）。我们甚至通过把动量写成 $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 而将相对论效应也包括了进去。

如果真正希望完美无缺的话，应该再加上一个定律——牛顿的引力定律——所以我们将其放在该表之末。

因此，在一个小小的表中，我们有了经典物理学的全部基本定律——甚至有的地方还用语言写出以及有一些重复。这是一个伟大时刻，我们已爬上了一座高峰，处在K-2高峰之上——正在准备攀登珠穆朗玛峰，那就是量子力学。我们已登上了“洛基山脉分水岭”的那个高峰，而现在可以从山的那边下去了。

我们一直在努力学习如何去理解那些方程式。现在我们已有了集合在一起的完整的方程组，以后将研究这些方程具有的意义——它们会说出我们还未见过的那些新东西。为到达这个目标，我们一直在努力工作。它已是一个伟大的成就，但现在当我们见到这一成就的全部结果时，我们将令人愉快地飘然下坡而去了。

§18-4 行移场

现在就来谈谈一些新的结果。它们是由于将所有的麦克斯韦方程集合在一起而产生的。首先，让我们看看在一个我们选定为特别简单的情况下会发生什么。假定所有的量都仅在一个坐标内变化，我们的问题就变成一个一维问题了。这样的情况如图18-3所示。我们具有置于 yz 平面上的一片电荷。该片电荷起初是静止的，然后瞬息得到一个平行于 y 轴的速度 v ，并保持以这一恒定速度运动。你也许会为有这种“无限大”的加速度而担心，但实际上并不要紧，只要想象该速度很快就提高到 v 。因此，我们突然就有一个面电流 J （ J 是在 z 方向的单位宽度中的电流）。为了保持问题简单，我们假定还有一片静止的异号电荷叠加在 yz 平面上，使得不会发生任何静电效应。并且，虽然在图上我们仅仅表明，在一个有限区域里所发生的情况，但应该想象该片

电荷伸展至 $\pm y$ 和 $\pm z$ 的无限远处。换句话说，我们有这么一种情况，即原本没有电流，但突然有了一个均匀的面电流。这样将发生什么呢？

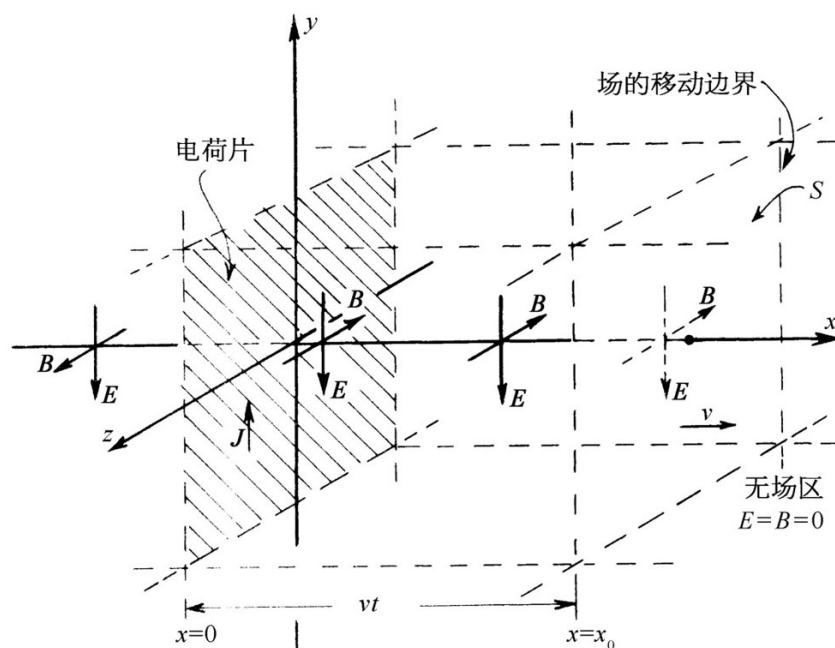


图18-3 一个无限大电荷片突然平行于其本身运动。这样就会有磁场和电场以一恒速率从该片传播出去

噢！当沿正 y 方向上有一片电流时，如我们所知，在 $x > 0$ 的地方就会产生一个沿负 z 方向的磁场，而在 $x < 0$ 的区域磁场则沿相反方向。我们可以通过应用磁场的线积分将等于电流除以 $\epsilon_0 c^2$ 这一事实来求出 B 的大小。这样，就会得到 $B = J / (2\epsilon_0 c^2)$ （因为在一宽度为 w 的长片上，电流 I 就是 Jw ，而 B 的线积分则为 $2Bw$ ）。

这向我们提供了在该片附近——即对于小 x 处——的磁场，但由于我们所设想的乃是一个无限大的片，因而也会期望这同样的论证应当给出在较大 x 值即在较远处的磁场。可是，这就意味着，接通电流的瞬间，磁场突然处处从零变到一个有限值。但请等一下！如果磁场

突然改变，也会产生巨大的电效应（只要它在改变，就有电的效应）。由于移动了该电荷片，因此，我们造成一个变化的磁场，因而电场也一定被产生。如果有电场产生，则它们必定从零开始而变化至某一个量值。这样就将有个 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ，与电流 $\mathbf{J}$ 一起将对磁场的产生做出贡献。因此，通过存在大量交相混合的各个方程求解时，我们不得不力图同时求解所有的场。

如果仅仅考察麦克斯韦方程组，还不容易直接看出如何去求得解答。因此，我们将首先向你们说明答案是什么，然后才证实它的确满足那些方程。答案是这样的：上面我们所算出的场 $\mathbf{B}$ ，实际上的确是在该电流片右面附近（即对于小 x 值）产生的。结果一定是这样，因为如果环绕该片做一个小回路，则不会有地方可供任何电通量穿过。但是在较远—— x 较大——处的 $\mathbf{B}$ 场起初为零，它保持了片刻为零，然后便突然增大。总之，我们一开通电流，磁场立即靠紧在它的地方跃升至一恒定值 $\mathbf{B}$ ，然后这个 $\mathbf{B}$ 的跃升又从源区再度扩展出去。经历了某一段时间后，在某一 x 值之内就将处处有一个均匀强磁场，在更远的地方则都等于零。由于对称的缘故，它会朝着正的和负的两个 x 方向扩展出去。

$\mathbf{E}$ 场也与此一样。在 $t=0$ （当我们开通电流时）之前，场处处为零。然后在经历了时间 t 之后， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 两者在扩展到 $x=\pm vt$ 的范围内都是均匀的，而再往外则均为零。这些场像潮汐波一样向前扩展，其波前以一匀速前进，这速度最终将弄清楚是 c ，但暂时我们却只叫它作 v 。关于 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{B}$ 的大小与 x 的关系曲线，在 t 时刻的表现如图18-4（a）所示。再回顾一下图18-3，在 t 时刻，在 $x=\pm vt$ 的区域内都“充满”着场，但这些场却还未到达更远的地方。这里要再次强调，我们是在假定该电流片以及由此产生的场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，都是在 y 和 z 方向上伸展至无

限远的（我们不能够画出一张无限大的片，因而图中所示的只是在有限大范围内所发生的事情）。

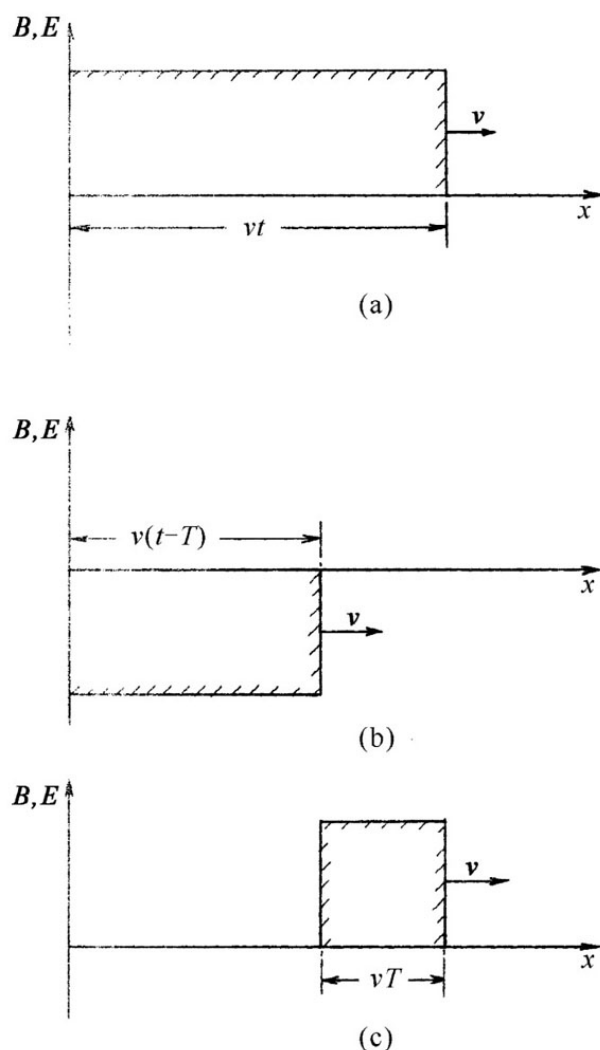


图18-4 (a) 在电荷片已经运动之后，在 t 时刻作为 x 函数的 B （或 E ）的大小；(b) 在 $t=T$ 时才将一电荷片朝着负 y 方向移动后的场；(c) (a) 与 (b) 之和

现在，我们要对所发生的情况做定量分析。为此，就要考察两个截面图，一个是沿 y 轴向下的俯视图，如图18-5所示；另一个则是沿 z 轴往回望的侧视图，如图18-6所示。我们从该侧视图开始，就会见到该电荷片正在向上移动，在 $+x$ 各处磁场都指向书内；而在 $-x$ 各处磁场则指向读者，电场处处向下——一直伸展至 $x = \pm vt$ 处。

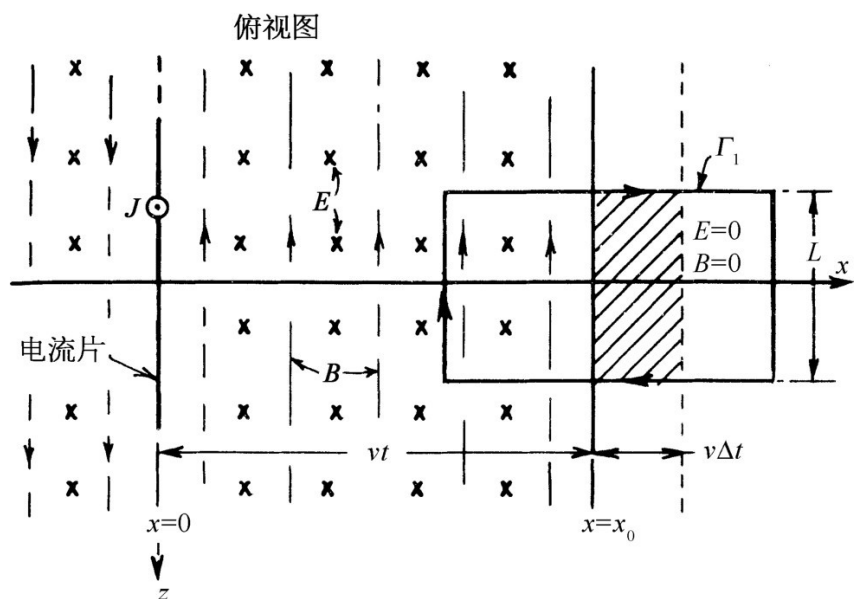


图 18-5 图 18-3 的俯视图

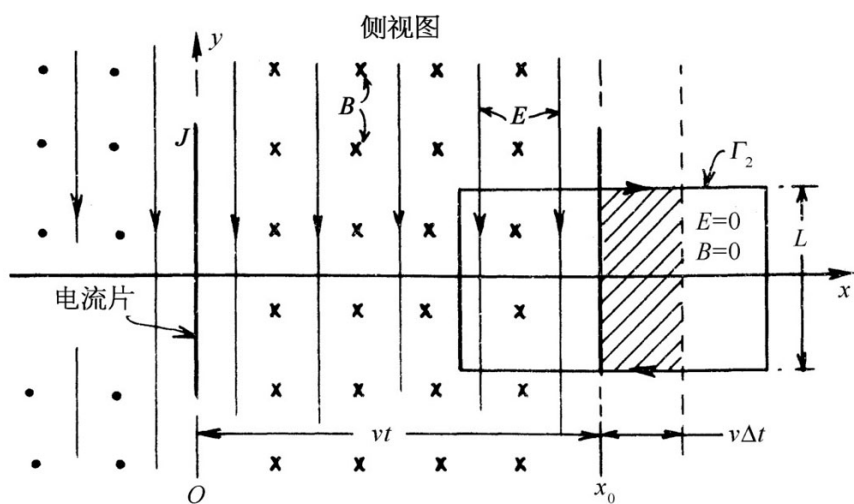


图 18-6 图 18-3 的侧视图

让我们看看这些场是否符合麦克斯韦方程组。首先，画出一条供计算线积分用的回路，比如说图18-6中所示的那个矩形 Γ_2 。你会注意到，这矩形的一边落在有场的区域，但另一边却落在场还没有到达的地方。有一些磁通量穿过这一回路。如果这通量正在变化着，则环绕该回路应有电动势。如果波前正在前进，就会有一个变化着的磁通

量，因为 $\mathbf{B}$ 所存在的区域正在以速度 v 逐渐扩大。在 Γ_2 内的通量等于 B 乘以存在磁场的那一部分面积。由于 $\mathbf{B}$ 的大小恒定，所以通量的变化率就等于 $\mathbf{B}$ 的量值乘以面积的变化率。要获得面积的变化率挺容易。若该矩形的宽度为 L ，则其中有 $\mathbf{B}$ 存在的面积在时间 Δt 内将改变 $Lv \Delta t$ （见图18-6）。于是通量的变化率便是 BLv 。按照法拉第定律，这应等于 $\mathbf{E}$ 环绕 Γ_2 的线积分，而

那恰好就是 EL 。于是我们就有方程：

$$E = vB. \quad (18.10)$$

因此，若 E 对 B 的比率为 v ，则我们所假设的这些场都将满足法拉第方程。

但那不是唯一的方程，我们还有联系着 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的另一个方程：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (18.11)$$

为了应用这个方程，我们考察图18-5那个俯视图。我们已经知道，这一方程将提供靠近该电流片的 B 值。并且，对于任何画在该片之外但在波前之后的回路，就不会有 $\mathbf{B}$ 的旋度，也不会有任何 $\mathbf{j}$ 或变化的 $\mathbf{E}$ ，因而方程式（18.11）在那里是正确的。现在让我们来看看对于如图18-5所示的那条与波前相交的回路 Γ_1 发生什么事情。这里并没有电流，因而方程式（18.11）可以——用积分形式——写成

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{在 } \Gamma_1 \text{ 之内}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (18.12)$$

$\mathbf{B}$ 的线积分恰好就是 B 乘以 L 。 $\mathbf{E}$ 通量的变化率仅仅是由前进的波前引起的。在 Γ_1 内 $\mathbf{E}$ 不为零的面积正在以 vL 的速率增大，于是式 (18.12) 的右边就是 vLE ，所以该方程式变成

$$c^2 B = Ev. \quad (18.13)$$

我们有这么一个解：即在波前后面 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 都是恒量，它们各与波前行进的方向垂直而且彼此之间也互相垂直。麦克斯韦方程组规定了 E 对 B 的比值。根据式 (18.10) 和 (18.13)，得

$$E = vB \text{ 和 } E = \frac{c^2}{v}B.$$

可是请等一等！我们已求得关于比值 E/B 的两个不同的条件。刚才描述的这种场能否确实存在呢？当然，要使这两个式都正确，只能有一个速度 v ，也即 $v=c$ ，波前一定要以速度 c 前进。这样我们就有了一个例子，其中来自电流的电效应以某个有限速度 c 传播。

现在试问，如果在经历了一段短时间 T 之后，突然把电荷片的运动停止下来，会发生什么情况呢？应用叠加原理我们能够看出将发生什么事情。我们有过电流原来为零，然后才突然开通的情况，并且已知道了那种情况的解。现在我们打算加上另一组场，即取另一片电荷，并仅在开通了第一个电流后的时刻 T ，在相反的方向以相同的速率突然使它开始移动。这两者相加起来的总电流起初为零，然后接通了一段时间 T ，之后又再中断——因为两电流恰好互相抵消，于是我们有一个电流的矩形“脉冲”。

这一新的负电流产生了与正电流相同的场，只是所有的符号都相反，当然都延迟了时间 T 。波前再次以速度 c 传播出去，在 t 时刻它已

到达了 $x = \pm c(t - T)$ 的远处，如图18-4(b)所示。因此，就有两“块”场以速率 c 向外推进，正如图18-4的(a)和(b)两部分所示。至于联合场则如图18-4(c)所示，在 $x > ct$ 处场为零，在 $x = c(t - T)$ 与 $x = ct$ 之间场为恒量（具有我们上面所求得的值），而在 $x < c(t - T)$ 处场又是零。

总之，我们有一小块场——厚度为 cT 的一块——离开了该电流片而独自穿越空间传播。场已经“起飞”了，它们正在自由地穿越空间传播着，不再与源有任何方式的联系。毛虫已变成了蝴蝶！

这组电磁场如何能维持它本身呢？答案是：依靠法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 和麦克斯韦新项 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$ 的联合效应。它们不得不维持其本身的存在。假定磁场已在消失，那就会有一个变化着的磁场，而这变化着磁场会产生一个电场。如果这个电场试图消逝，则这变化着的电场将再度产生磁场。因此，通过不断的相互影响——通过由一个场到另一个场的前后快速变换——它们必定会永远继续下去，而绝不会消逝^[1]，它们以一种舞蹈方式——一个围着另一个，第二个又围着第一个转——把它们自己维系在一起，穿越空间而向前传播。

§18-5 光速

我们已获得了一个离开了物质源、而以速度 c 即光速向外行进的波。可是，让我们回顾一下，从历史观点看，过去并不知道麦克斯韦方程组中的系数 c 就是光传播的速率，当时只是一个方程组中的常数。我们从一开始就叫它做 c ，那是因为已知道它最终应该变成什么。我们并不认为，让你学习了含有不同常数的公式后，才回过来在

它适当的地方代入 c ，这是切合实际的。然而，根据电学和磁学的观点，我们恰好开始就拿出两个常数 ϵ_0 和 c^2 ，它们分别出现在静电和静磁的方程式中：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.14)$$

与

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.15)$$

如果我们对于电荷的单位采取任何独立的定义，便可通过实验来确定式（18.14）中所需的那个常数 ϵ_0 ——例如利用库仑定律测量在两个静止的单位电荷之间的力。我们也必须在实验上测定式（18.15）中出现的常数 $\epsilon_0 c^2$ ，例如通过测量两单位电流之间的力而获得（单位电流指每秒流过的单位电荷）。这两个实验常数之间的比值为 c^2 ——正好是另一个“电磁常数”。

现在应该注意：无论我们选择什么作为电荷单位，这个常数 c^2 是相同的。如果把两倍“电荷”——如两倍的质子电荷——放进我们的电荷“单位”中，那么 ϵ_0 就必须是原来的四分之一大。当我们把两个这样的“单位”电流通过两根导线时，在每根导线中每秒通过的电荷将是两倍，因而在两导线之间的力就会大四倍。常数 $\epsilon_0 c^2$ 一定要减少至四分之一，但比值 $\epsilon_0 c^2 / \epsilon_0$ 不变。

因此，仅仅由电荷和电流所做的实验就能求出 c^2 的数值来，结果证明它是电磁影响传播速度的平方。从静态测量——通过对两单位电荷间和两单位电流间作用力的测量——我们求得 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ 。当麦克斯韦首先用他的方程组做出这个计算结果时，就宣布了一组电场和磁场应以这一速率传播。同时他也已经注意到这个数值与光速相同的神秘巧合。麦克斯韦说：“我们几乎不可避免地断定，光存在于相同媒质的横向波动之中，这种媒质是电和磁现象的起因。”

麦克斯韦完成了物理学中几项重大统一事业中的一项。在他之前，既有光，也有电和磁。这后两者是由法拉第、奥斯特和安培通过实验工作而统一的。然后突然地，光不再是“别的某种东西”，而只是在这种新形式下的电和磁——独自穿越空间而传播着的一小块一小块的电场和磁场。

曾提醒过你们要注意这种特解的某些特点，但事实却证明，任何电磁波都具有这些特点：即磁场和电场分别与波前运动的方向垂直；而且 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 这两矢量又彼此互相垂直。此外，电场的大小 E 等于磁场的大小 B 乘 c 。这三个事实——两种场都垂直于传播方向， $\mathbf{B}$ 垂直于 $\mathbf{E}$ ，而 $E = cB$ ——对于任何电磁波都普遍正确。我们的特殊情况是一个很好的例子——它表明了电磁波的所有主要特点。

§18-6 求解麦克斯韦方程组；势和波动方程

现在，我们愿意做些数学工作，要把麦克斯韦方程组写成比较简单的形式。你可能会认为我们正在使其复杂化，但倘若你稍微忍耐一

点，它们就会突然显得简单。尽管目前你已完全熟悉了麦克斯韦方程组中的每个方程，但其中有许多部分必须全部综合起来。这就是我们所要做的。

现在从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ——最简单的方程——开始。我们知道，这意味着 $\mathbf{B}$ 是某种东西的旋度。所以，如果写成：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (18.16)$$

则我们已解答了一个麦克斯韦方程（顺便提一下，你知道，若另一个矢量 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ ——其中 ψ 为任一标量场——则这个 $\mathbf{A}'$ 仍保持正确，因为 $\nabla \psi$ 的旋度为零，所以 $\mathbf{B}$ 还是一样。对此我们早已有所论述）。

其次，考虑法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，因为它并不涉及任何电流或电荷。如果将 $\mathbf{B}$ 写成 $\nabla \times \mathbf{A}$ 并对 t 微分，则可把法拉第定律写成如下形式：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

由于对时间或对空间取微商的先后次序是可以调换的，上式也可写成

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.17)$$

由此可见， $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 乃是一个旋度为零的矢量。因此，这一矢量便应当是某种东西的梯度。当我们处理静电学问题时，就有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，于是断定， $\mathbf{E}$ 本身就是某种东西的梯度，并假定为 $-\phi$ （负号是为了技术上的方便）的梯度。现在对于 $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ 也同样处理，即令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi. \quad (18.18)$$

这里采用了同样的符号 ϕ ，以致在没有东西随时间变化的静电情况下， $\partial \mathbf{A} / \partial t$ 项消失， $\mathbf{E}$ 就是我们原来的 $-\nabla \phi$ 。因此，法拉第方程可以写成这种形式：

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (18.19)$$

我们已经解决了麦克斯韦方程组中的两个方程，而且我们已发现，为了描述电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，总共需要四个势函数：一个标量势 ϕ 和一个矢量势 $\mathbf{A}$ ，后者当然就是三个函数。

现在那个 $\mathbf{A}$ 确定了 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 的一部分，那么当我们将 $\mathbf{A}$ 改成 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ 时，又会发生什么呢？一般说来，如果我们不采取某种特别预防措施的话， $\mathbf{E}$ 是会改变的。然而，仍然可容许 $\mathbf{A}$ 按照上述方式改变而不影响 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ——也就是说，不改变其物理本质——如果我们总是按下列法则一同改变 $\mathbf{A}$ 和 ϕ ，即

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (18.20)$$

则不论 $\mathbf{B}$ 或由式（18.19）得到的 $\mathbf{E}$ ，就都不会改变。

以前，我们曾选取 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，以便使静态方程组稍微变得简单些。现在我们不准备再这样做了，打算做另一种选择。但在告诉大家这种选择到底是什么之前，我们将稍微等一下，因为以后就会明白为什么要做这样一种选择。

现在回到余下的两个描写势与源（ ρ 和 $\mathbf{j}$ ）之间关系的麦克斯韦方程。一旦我们能够根据电流和电荷确定 $\mathbf{A}$ 和 ϕ ，就总可以从式（18.16）和（18.19）获得 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，所以我们将有另一种形式的麦克斯韦方程组。

首先，将式（18.19）代入 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ 中，我们便得：

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

这个式子也可写成：

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.21)$$

这是 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 与源相联系的一个方程。

最后的方程将是最复杂的一个方程。我们先把第四个麦克斯韦方程重新写成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

然后利用式（18.16）和（18.19）以势代替 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，得

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

再利用代数恒等式： $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ，得到：

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (18.22)$$

这不是很简单！

幸而我们现在可以利用任意选择 $\mathbf{A}$ 的散度的自由。下面将要做的就是利用这一选择以便使 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的方程互相分开而又具有相同形式。为此，选择可以按下式规定^[2]：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (18.23)$$

当我们这样做时，式（18.22）中关于 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的中间两项便互相抵消，因而该式也就比原来简单得多了：

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.24)$$

而关于 ϕ 的方程——式（18.21）——取相同的形式：

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.25)$$

多么漂亮的一组方程！它们之所以漂亮，首先是因为它们令人满意地互相分开了——电荷密度属于 ϕ ，电流则属于 $\mathbf{A}$ 。而且，尽管左边看来有点古怪——拉普拉斯算符加上一个 $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ——但当我们将其全都展开出来时看到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.26)$$

就 x, y, z, t 而言方程具有很好的对称性——这里 $-1/c^2$ 是必要的，因为时间和空间当然彼此不同，它们各有不同的单位。

麦克斯韦方程组已经把我们引导到关于势 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 这样一类新型方程以及所有四个函数 ϕ ， A_x ， A_y 及 A_z 的相同的数学形式。一旦掌握了如何求解这些方程，便能够由 $\nabla \times \mathbf{A}$ 和 $-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 获得 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 。所以我们具有一套完全同麦克斯韦方程组等价的另一种形式的电磁学定律，而在许多场合下它们处理起来简单得多。

事实上，我们曾经解过一个与式（18.26）十分相似的方程。早在第1卷第47章中学习声学时，我们就有这种形式的方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

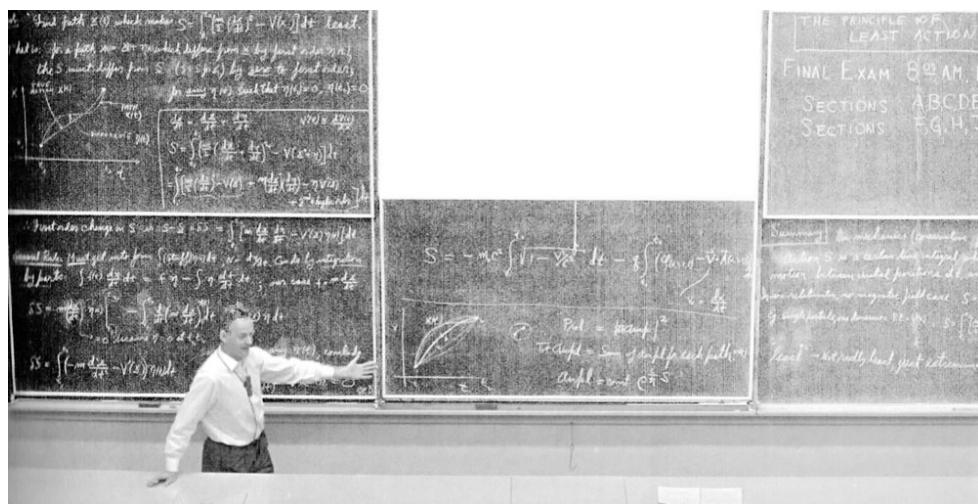
并且知道，它描述了波在 x 方向以速率 c 进行的传播。方程式（18.26）是关于三维空间相应的波动方程。所以在不再存在任何电荷和电流的那些区域中， ϕ 和 $\mathbf{A}$ 都等于零并不是这些方程的解（虽然它们的确也是一种可能的解）。会有一些解，其中某组 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 随时间变化，但却总是以速率 c 向外运动，那些场穿越自由空间向前传播，正如本章开头的例子那样。

借助方程IV中麦克斯韦的新项，我们就能用 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 将场方程组写成一种简单的而又能立即使电磁波的存在成为明显的那种形式。对于许多实用的目的来说，利用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的原来那些方程将仍然很方便。但这都在我们已经攀登过的山峰的那一边。现在我们准备跨越山峰到另一边去了。事情看来将会不同——我们准备看到一些新的和美妙的景色。

[1] 噢！并不完全正确。如果它们到达一个有电荷存在的区域，便可能被“吸收”。这意味着其他的场可以在某处产生而在与这些场互相叠加时，通过相消干涉就可将其“抵消”掉（见第1卷第31章）。

[2] 这样选取 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 称为“选取一个规范”。通过加 $\nabla \psi$ 来改变 $\mathbf{A}$ 的方法称为“规范变换”。式（18.23）称为“洛伦兹规范”。

第19章 最小作用量原理



§19-1 专题演讲（完全按演讲记录付印）[\[1\]](#)

当我在中学念书时，我的物理教师——他的名字是巴德（Bader）先生——有一次在讲完了物理课之后，把我叫住说：“看来你有点厌烦，我要给你讲点有趣的东西。”然后，他告诉我一件事，我发现它是绝对会令人神往的，并且自那时以来，我发现它总是那么引人入胜。每次提出这一课题时，我就会对它进行分析研究。事实上，当我开始准备这次演讲时，我发现自己对这个问题的分析正在做更详尽的分析。并不是为这一次演讲操心，实则我已被卷入到一个新的问题中去了。这个课题就是——最小作用量原理。

巴德先生这样告诉我：假定有一质点（例如，在一引力场中）通过自由运动从某处移动至另一处——你把它抛掷出去，它就会上升而又落下〔图19-1（a）〕。它在一定时间内由出发点到达最后的地方。现在，你尝试一个不同的运动。假设由这里到达那里是如图19-1（b）这样进行的，但所用时间却正好相同。然后他又这样说：如果你算出在该路径上每一时刻的动能，减去势能，再计算出在经历整条路径期间它对时间的积分，你将会发现所获得的数值比对实际运动所获得的要大。

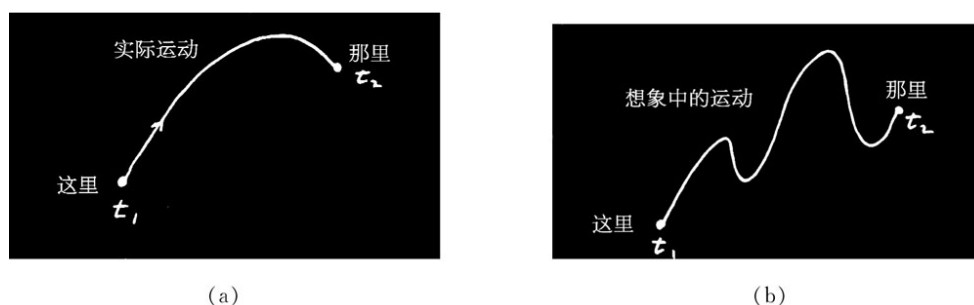


图19-1

换句话说，牛顿定律可以不写成 $F=ma$ 的形式而表述成：一物体从一点到另一点所走的路径其平均动能减去平均势能应尽可能地小。

让我把这里面的意义说得更清楚些。如果我们考虑引力场的情况，那么若粒子的路径为 $x(t)$ （让我们暂时只考虑一维，即是一条升高、降落、但绝不会偏斜的轨道），其中 x 是地面以上的高度，则在任一时刻动能为 $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ ，而势能为 mgx 。现在我沿该路径在每一时刻取动能减去势能再对时间自始至终进行积分。假定在起始时刻 t_1 由某一高度出发，并在结束时刻 t_2 确实到达了另外某一点〔图19-2（a）〕。

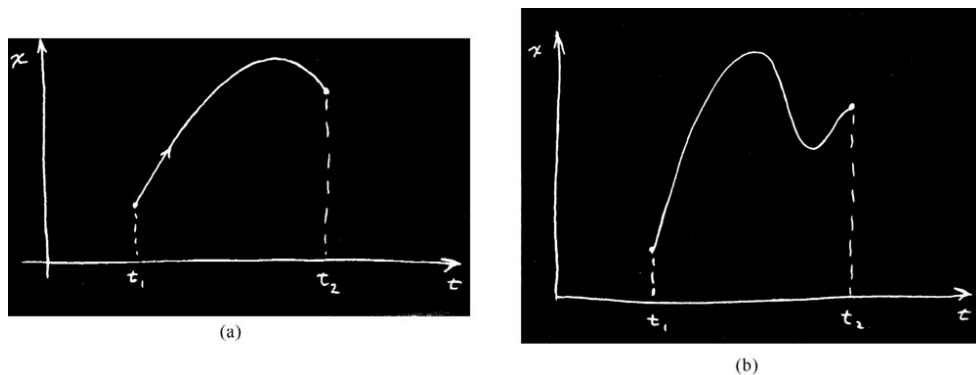


图 19-2

那么该积分就是

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

实际的运动为某种类型的一条曲线——如果作一个位置-时间图，它是一条抛物线——而对于该积分会给出一个确定的值。但我们也可以设想另一种运动，它升得很高，而且以某种特殊的方式上升和下落，如图19-2（b）所示。我们可以算出动能减去势能并对这么一个路径或其他任何我们所想要的路径积分。令人诧异的是，真正的路径就是那一条会使这一积分取得最小值的路径。

让我们把它们彻底检验一下。首先，假定取一个完全没有势能的自由质点的情况。那么，该法则讲：在给定时间内从一点跑至另一点的过程中，动能的积分是最少的，因而它一定要以均匀的速率行进（我们知道这是一个正确答案——以匀速率前进）。为什么是为什么呢？因为假如该质点以任何其他方式运动，则其速度将有时比平均值高，有时比平均值低。因为它一定要在给定的时间内由“这里”到达“那里”，所以平均速度对于每一情况都是相同的。

作为一个例子，比如你的任务是乘车在给定时间内从家里到达学校，你可以用几种方式做到这点：可以一开始就像疯子似的使车子加速，然后在接近终点时用刹车逐渐放慢速度；或者你可以匀速前进；甚至你也可向后走一会儿，然后再往前开，如此等等。事实是，平均速率当然必须是你所经过的总距离除以所用的时间。但如果你试用各种方式、但就是不以匀速前进，那么你总会有时太快而有时则太慢。如你所知，围绕平均值偏差的某事件，其均方值恒大于其平均值的平方。所以如果你不保持开车的速度，那么动能的积分就总比用均匀速度开车时为高。所以我们看到，如果速度固定不变（当没有力作用时），则该积分便是一个极小值。正确的路径如图19-3这样。

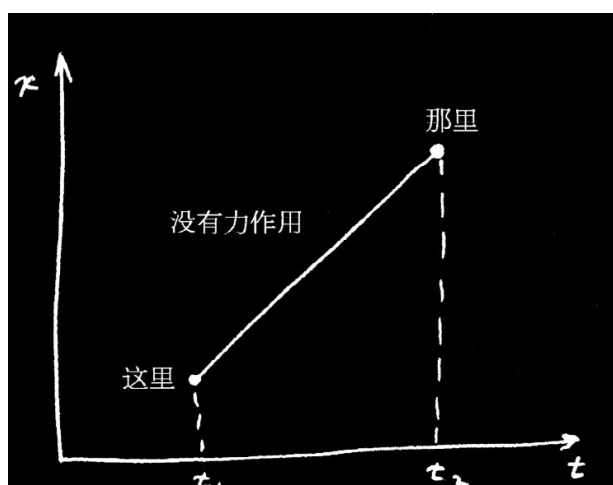


图 19-3

现在，一个在引力场中被上抛的物体起初升得较快，然后逐渐放慢。那是因为物体还具有势能，所以就平均而言必须有最小的动能与势能之差。由于在空中上升时势能增大，所以如果我们能够尽快上升到高势能的地方，则将获得一个较低的差值。这样该势能才能从动能那里扣除出去，从而获得较低的平均值。所以最好就是去选取能够升得高、从而可从势能处得到很多负值的那一条路径（图19-4）。

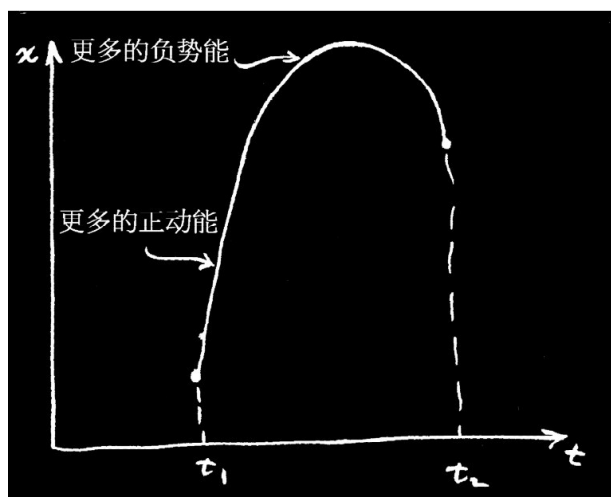


图 19-4

另一方面，你也不能够升得太快，或跑得太远，因为这么一来你将会包含过多的动能——你得很快达到高处以便在可利用的规定时间里再落下来。所以你也不宜升得太高，但总要升到某个高度。因此事实证明，答案是在试图获得更多的势能与最少的额外动能之间取得某一种平衡——以期获得动能减去势能的差值尽可能小。

这就是我的老师告诉我的全部内容，因为他是一位十分好的教师并懂得在什么时候应停止对话。但我却还未懂得要在什么时候结束谈话，所以并不会留给你一个有趣评论，而我却想要来证明它确是如此，这无异用生活中的复杂性来使你感到不安和焦躁。我们将遇到的数学问题会十分困难，而且是一个崭新的课题。我们有某一个叫作作用量 S 的量。它是动能减去势能后对时间的积分。

$$\text{作用量} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{动能} - \text{势能}) dt.$$

记住势能和动能两者都是时间的函数。对每条不同的可能路径你将获得有关这个作用量不同的值。我们的数学问题是找出使这个数值最小的那一条曲线。

你会说——呵，那不过是普通微积分学中的极大和极小问题罢了。在算出了作用量之后，只要求导就能找出那个极小值。

但是要小心。通常我们只有某变量的函数，而我们得求出使该函数为最小或最大的那个变量值。例如，设我们有一根棒，在其中部已加了热，因而热量将向两边传送出去。对于棒上每一点都有一个温度，而我们必须找出温度最高的那一点。但现在对于空间每一条路径我们有一个数值——完全不同的事件——而我们得找出那一条会使该数值极小的空间路径。那是完全不同的一个数学分支。它并不是普通的微积分。事实上，它被称为变分学。

有许多问题属于这一类数学。例如，圆周往往被定义为与一固定点的距离为常数的所有点的轨迹。但圆周还有另一种定义的方法：圆周是具有给定长度而包围最大面积的那条曲线。对于给定周长来说，任何其他曲线所包围的面积都比圆周包围的要小。因此，若我们提出这样一个问题：试求给定周长而能包围最大面积的那条曲线，我们就会有一个变分学问题——与你们熟悉的有所不同的一种微积分。

这样，我们就对一物体的路径进行计算。这里介绍一下将用的方法。我们的意图是：设想一条正确的路径，以及画出任何其他都是错误的路径，因而若对错误路径算出作用量，则将得到一个比按正确路径算得的作用量要大的结果（图19-5）。

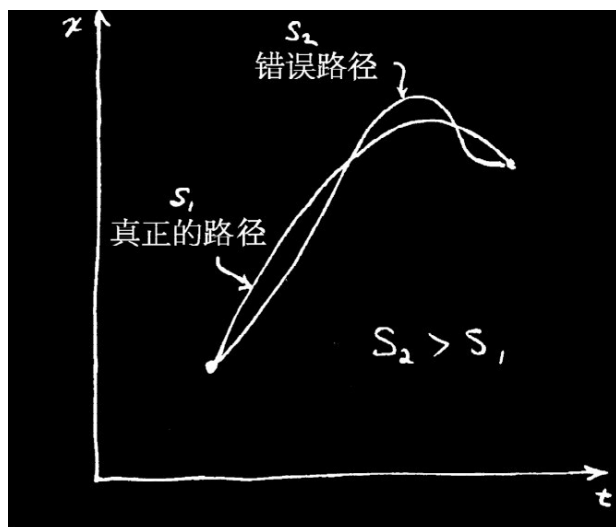


图 19-5

习题：试找出真实路径。它到底在哪里？当然，一种方法是去算出千千万万条路径上的作用量，再找出哪一条是最小的。当你找到了那条最小的时，它就是正确的路径了。

那是一种可能途径，但我们却能够比这做得更好些。当有一个具有极小值的量——例如像温度那样的普通函数——时，极小值就有这么一个特点：若变量 偏离极小值位置为一级小量，则函数与极小值的偏差仅为二级小量。在该曲线的任何其他部分，若原位置移动一个小距离，则函数值也将改变一级小量。但在极小处，一个微小的偏离在一级近似下函数不产生差异（图19-6）。

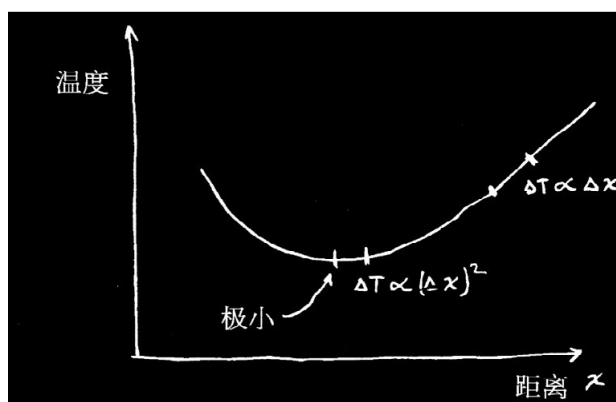


图 19-6

这就是我们将用来计算真实路径的办法。如果已有一条真实路径，那么一条与它只有微小差别的曲线，其作用量在一级近似下将不会造成什么差别。若确实有一个极小值的话，则任何差别都将在二级近似内。

那不难证明。若当我们使曲线偏离某个路径时发生一个一级小量的变化，则作用量就有一个与该偏离成正比的变化。这变化大概会使作用量变得较大，否则我们就不会得到一个极小值了。但是若该变化与偏离成正比，则改变偏离的符号将会使作用量变得较小。我们将获得这样的作用量，沿一条路径它增加，而沿另一条路径它减少。作用量真正能够是极小值的唯一路径，是作用量在一级近似下不做任何改变的路径。而作用量的改变是与对真实路径偏离的平方成正比的。

所以我们就这样来做：称 $x(t)$ （下边加一底线）为真实路径——即我们试图要寻找的。取某条尝试路径 $x(t)$ ，与该真实路径有一微小差别，这差别我们称之为 $\eta(t)$ ，见图 19-7。

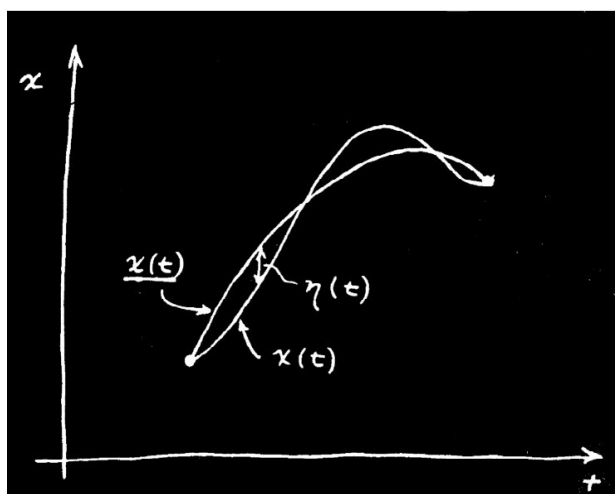


图 19-7

现在我们的想法是：若对路径 $x(t)$ 计算作用量 S ，则这个 S 与我们对路径 $\underline{x}(t)$ 所算出的作用量——为了简化写法，我们可叫它作 S ——之差，即 S 与 $\underline{S}$ 之差，在小 η 的一级近似下应等于零。这差可以是二级小量，但在一级近似下这差必须为零。

而这对于任何一个 η 都必定是正确的。噢，还未尽然。这方法不会具有任何意义，除非你所考虑的各路径彼此都有相同的起点和终点——每条路径都在 t_1 时刻从某点出发而在 t_2 时刻到达另一点，这些地点和时间都保持固定不变。因此，我们的偏离 η 在每一端都应等于零，即 $\eta(t_1)=0$ 和 $\eta(t_2)=0$ 。有了这个条件，我们的数学问题才告确定。

要是你完全不懂得微积分，为了求一普通函数 $f(x)$ 的极小值你或许也是这样做。你可能会讨论如果对 $f(x)$ 中的 x 加一小量 h 后会发生的情况，并论证以 h 的一次幂对 $f(x)$ 的修正在极小值处必然等于零。你会以 $x+h$ 取代 x 并展开至 h 的一次幂……正如我们将要对 η 做的那样。

于是我们的想法是，把 $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$ 代入作用量公式中，

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

式中 $V(x)$ 代表势能。而 dx/dt 这个微商当然就是 $\underline{x}(t)$ 的微商再加上 $\eta(t)$ 的微商，所以对于作用量我得到这个表达式：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

现在我必须写得更详尽些。对于该平方项得到

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2.$$

可是请等一等。对高于一次幂的项我并不在意，因而将所有含有 η^2 和更高次幂的项都取出来并放进一个标明“二次和更高次项”的小箱子中。从上式中的这一平方项我只得到二次幂，但从其他方面还可得到更多一些东西。因此，动能部分就是

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{二阶和更高阶项}).$$

现在我们需要一个在 $\underline{x} + \eta$ 处的势能 V 。我认为 η 是小量，因而可以将 $V(x)$ 写成泰勒级数。它近似地等于 $V(\underline{x})$ ，在下一级近似下（按微商的通常性质）则该修正的应该是 η 乘以 V 对 x 的变化率，如此等等：

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2} V''(\underline{x}) + \dots$$

为了简化书写，我已将 V 对 x 的微商写成 V' 。至于 η^2 项以及其后面各项则都落在“二阶和更高阶项”的范畴之内，而我们便不需对之操心了。将所有这一切都合起来，得：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (\text{二阶和更高阶项}) \right] dt.$$

现在，如果我们对事情观察得仔细些，则会见到我在这里整理好的头两项相当于用真实路径 $\underline{x}$ 应该计算出来的作用量 $\underline{S}$ ，而我要集中注意力的东西乃是 S 的变化—— S 与对正确路径所应得的 $\underline{S}$ 之间的差。我们把这差写成 δS ，并称之为 S 的变分。略去那些“二阶和更高阶项”，则对于 δS 得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt.$$

现在的问题是：这里是某个积分。虽然我还不知道 $\underline{x}$ 是什么，但我确实知道不管 η 是什么，这一积分必须等于零。噢，你试想想，这件事可能发生的唯一办法就是乘上 η 的部分应当是零。可是含有 $d\eta/dt$ 的第一项又怎么样呢？噢，归根到底，既然 η 可以是任何变量，它的微商也是任何变量，因而你可以断定 $d\eta/dt$ 的系数也必定等于零。那样讲不完全正确。之所以不完全正确是因为 η 与它的微商之间存在着联系，它们并非完全独立，因为 $\eta(t)$ 必须在 t_1 和 t_2 两个时刻都等于零。

在变分学中解决一切问题的方法总要用到相同的普遍原理。即首先对你所要变化的东西做一个移动（像我们上面通过加 η 而做到的那样），旨在寻找一级小量的项；然后 又总是把积分安排成含有“某种东西乘以移动（ η ）”的形式，而其中又不含有其他微商（没有 $d\eta/dt$ ）。为此必须重新安排以便总是“某件东西”乘以 η 。过了一会你将会看出这样做的巨大价值（也有一些公式会告诉你，在某些情况下如何不经实际计算就能获得结果，但这样一些公式都不够普遍，所以就不值得你去关注；最好的办法还是按照上述这一种方法把它算出来）。

怎么才能将 $d\eta/dt$ 项重新安排使其含有 η 呢？回答是通过分部积分就可以做到。事实证明，变分学的全部巧妙就在于先写下 S 的变分，然后利用分部积分使得 η 的微商消去。在微商会出现的每个问题中总是采取相同的办法。

你回忆一下分部积分的一般原理。如果你有任意函数 f 乘以 $d\eta/dt$ 并对 t 积分，可以写下 ηf 的微商：

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

你所要的积分是对末一项而积的，因此，

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

在我们关于 δS 的公式中，函数 f 就是 m 乘以 dx/dt ，因此，我得到下列关于 δS 的公式：

$$\delta S = m \left. \frac{dx}{dt} \eta(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x}) \eta(t) dt.$$

首项必须在 t_1 和 t_2 两个限上算出来。然后我还必须对那个从分部积分剩下的部分积分。末项则是照抄下来的，没有什么改变。

现在碰到一件总会发生的事情——积出的部分不见了（事实上，如果该被积出的部分不消失，则你就应当重申该原理，并加上一些条件以确保其消失）。我们已经说过，在路径两端 η 必须是零，因为该原理要求只有在该变化曲线开始并终结于选定的点时作用量才是一极

小值，这条件就是 $\eta(t_1) = 0$ 和 $\eta(t_2) = 0$ ，所以该项积分结果为零。我们将其他各项都集合起来并得到：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 x}{dt^2} - V'(x) \right] \eta(t) dt.$$

S 的变分现在就成为我们所希望得到的形式了——在该方括号内的各项，比方说 F ，全都乘上了 $\eta(t)$ 并从 t_1 积至 t_2 。

我们得到了某种东西乘以 $\eta(t)$ 的积分总等于零：

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

这里我有 t 的某个函数，再以 $\eta(t)$ 相乘，并从一端至另一端对它积分。而不论 η 是什么，结果始终为零。这意味着函数 $F(t)$ 是零。尽管这很明显，但无论如何我会给你证明看看。

假设对于 $\eta(t)$ ，我选取除了某一特定 t 值外其余一切 t 上都等于零的某变量。在到达这个 t 前它始终保持零值（图19-8），在时刻 t 它突然跃起，过了一会又骤然降下。当我们对这个 η 乘以任意函数 F 做积分时，唯一不等于零的地方就是 $\eta(t)$ 出现脉冲的地方，这时我们会得到在该处的 F 值乘以对脉冲的积分。对于脉冲本身的积分不会等于零，但当乘上了 F 之后它就必须等于零；所以函数 F 在脉冲处必然为零。但由于脉冲发生在我们想要它发生的任何地方，因而 F 就必须处处为零。

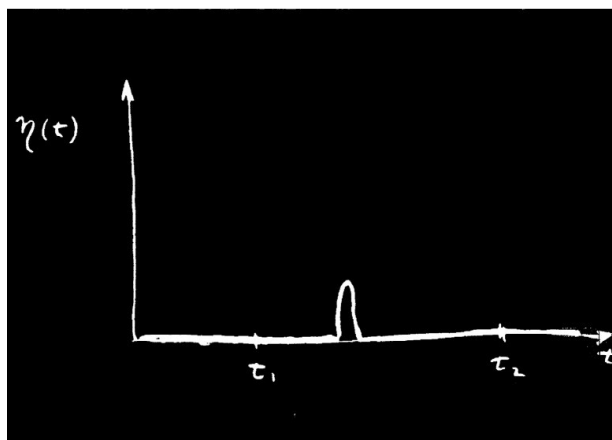


图 19-8

我们看到，如果对于任何 η ，我们的积分为零，则 η 的系数必须为零，只有满足这个复杂微分方程

$$\left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] = 0$$

的那条路径，作用量积分才将是极小值。实则它并非那么复杂，你以前就见过这方程，它不过是 $F=ma$ 罢了。第一项是质量乘加速度，而第二项则是势能的微商，那就是力。

所以，至少对于一个保守系统来说，我们已证明最小作用量原理给出了正确答案。它表明，具有最小作用量的那条路径就是满足牛顿定律的那条路径。

一个述评：我从未证明它是一个极小值——也许是一个极大值。事实上，它的确不必是一个极小值。这与我们过去在讨论光学时所发现的那个“最少时间原理”十分类似。在那里我们起初也曾说过是“最少”时间。然而事实却证明，会有时间并非最少的一些情况。基本原理是，对于任何离开光学路径的一级变化，时间的变化为零；情况与

此完全一样。所谓“最小”我们实在是说，当你改变路径时， S 值的一级变化为零。它未必是“极小”。

其次，我谈论一些推广的问题。第一，可以推广至三维，即不只是 x ，我可能有 x ， y 和 z 作为 t 的函数，此时作用量更为复杂。对于三维运动，你必须用到完整的动能—— $(m/2)$ 乘上整个速度的平方。这就是

$$\text{动能} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

并且，势能也是 x ， y 和 z 的函数。而路径究竟如何呢？路径是空间中某条一般的曲线，它很不容易画出来，但意思却是一样的。不过 η 又是怎么回事？噢， η 可以有三个分量。你可以在 x 方向、 y 方向或 z 方向——也可以同时所有三个方向移动路径，所以 η 应该是一个矢量。然而，这样做实际上并未把事情弄得过于复杂。由于只有一级变分必须为零，我们便可以通过三个连续移动而进行计算。可仅仅在 x 方向移动 η ，而说明它的系数必须为零，这样就得到一个方程，然后在 y 方向移动而得到另一个方程，又在 z 方向得到第三个。当然，或者按照你所喜欢的任一种次序进行。无论如何，你得到了三个方程。而牛顿定律实际上就是在三维空间中的三个方程——对每一分量就有一个。我想你实际上能够明白，这是一定行得通的，但这个三维问题仍留给你自己去证明。顺便提一下，你也可以采用任一种你所喜欢的坐标系，诸如极坐标或其他坐标，通过观察你在半径、角度或其他坐标方向移动 η 时发生的事情，就会立即得出适用于该坐标系的牛顿定律。

同样，这一方法也可推广至任何数目的粒子。例如，如果你有两个粒子，而在它们之间有作用力，因而就有相互作用势能，那么你只要将这两粒子的动能相加并取它们间的相互作用能作为势能。对此你想要变化什么东西呢？势必变化双粒子的路径。于是，对于在三维中运动的两个粒子，就总共有六个方程。你可以在 x 方向、 y 方向和 z 方向变更第一个粒子的位置，而对于第二个粒子也是这样做，因而就有六个方程。而这是理应如此的。其中三个方程确定了第一个粒子受力作用时的加速度，而另外三个则确定第二个粒子受力作用时的加速度。你继续坚持进行同样的游戏，就会得到关于任何数目的粒子在三维中的牛顿定律。

我刚才说过，我们得到了牛顿定律。这并非十分正确，因为牛顿定律还包括像摩擦一类非保守力。牛顿说 ma 等于任何 F ，可是最小作用量原理却只适用于保守系——那里所有的力都可以从势函数获得。然而，你知道，在微观层次——即在物理学最深入的层次——并没有非保守力。像摩擦力那样的非保守力，之所以出现乃是由于我们忽略了微观上的复杂性——存在的粒子实在太多难于分析。但基本定律却都可以放进最小作用量的形式之中。

让我继续来做进一步的推广。假定我们问起粒子做相对论性的运动时会发生什么情况，而上面还未获得正确的相对论性运动方程； $F=ma$ 只对于非相对论才正确。问题是：对于相对论性的情况是否有一个对应的最小作用量原理？回答是肯定的。对于相对论性情况其公式如下：

$$S = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\phi(x, y, z, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t)] dt.$$

这个作用量积分的第一部分是粒子的静质量 m_0 乘以 c^2 再乘以对于速度函数 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的积分。后一项不再是势能，却是一个对于标势 ϕ 和对于 $\mathbf{v}$ 乘以矢势 $\mathbf{A}$ 的积分。当然，此时我们只包括电磁力。所有的电场和磁场都是由 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 提供的。这一个作用量函数对于单个粒子在电磁场中的相对论性运动给出完整的理论。

当然，每当我写出 $\mathbf{v}$ 时，你总会明白，在试图做出任何计算之前，得先用 $d\mathbf{x}/dt$ 来代替 v_x ，并对其他各分量也都这样做。而且，你还必须把沿路径在 t 时刻的一点写成 $x(t)$ ， $y(t)$ ， $z(t)$ ，而這些在上式中我只是简单地写作 x ， y ， z 。严格讲，只有当你已经对 $\mathbf{v}$ 等做了这种代换以后，你才能有一个关于相对论性粒子的作用量公式。事实上这个作用量公式确能给出那些正确的相对论性运动方程，我将把这一问题的证明留给你们中那些较机敏的人去做。我是否可建议你们先做没有 $\mathbf{A}$ 、亦即没有磁场的情况？此时你应当得到运动方程 $d\mathbf{p}/dt = -q\phi$ 的各分量，其中你会记起 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。

把存在矢势的情况也包括进去就困难多了。那些变分变得相当复杂。可是最终，解得的力项确实为 $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，正该如此。但我将把这留给你们去考虑。

我想要强调，在一般情况下，比如在相对论公式中，那作用量的被积函数不再具有动能减去势能的形式。那是只有在非相对论性的近似下才正确的。例如， $m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$ 这一项就不是我们所称的动能了。对于在任何特定情况下作用量应该是什么的问题必须通过某种试试改改的办法来确定。这与首先确定什么是运动定律的问题恰好相同。你只要对所已知的一些方程反复尝试，就看出你能否把它们纳入最小作用量的形式之中。

还有一点是关于名称方面的。那个经过对时间积分就可以得到作用量 S 的函数称为拉格朗日函数 L ，它只是粒子的速度和位置的函数。因此最小作用原理也就可以写成

$$S = \int L(x_i, v_i) dt,$$

其中 x_i 和 v_i 指位置和速度的所有分量。所以如果你听到有人正在谈论“拉氏函数”，你就会知道他们是在谈论那个要用来求出 S 的函数。对于在电磁场中的相对论性运动，

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

并且，我还应该讲，对于大多数讲究准确和学究式的人物来说， S 实际上并非叫作“作用量”，它称为“哈密顿第一主函数”。现在，我讨厌的是，要来做一次关于“最小哈密顿第一主函数原理”的演讲。所以就把它叫作“作用量”吧。而且，会有越来越多的人正把它称为作用量。在历史上你看到还有许多不那么有用的东西也曾被称为作用量，但我想更合理的还是改用一个新一点的定义。所以现在你也将这个新函数叫作作用量，而不久人人都会用这个简单名字去称呼它了。

现在，我要对这一课题做些讨论，它们与以前我对最少时间原理所做的讨论相似。一个宣称从一处到另一处的某个积分是一极小值的定律——这会告诉我们有关全过程的某种东西——与一个宣称当你沿路径行进时、有一个力在使它加速的定律相比，它们的特性有很大差别。第二种办法，告诉你如何沿着路径一点一点地前进；而另一种办法，是关于整个路径的全面描述。在光的情况下，我们已谈论过这两者间的关系。现在，我来解释在有了这类最小作用原理时，为什么还会有微分定律。原因是这样的：试考虑在时间和空间中的那条实际路

径。如前一样，让我们仅仅考虑一维，从而可把 x 作为 t 的函数画成曲线。沿这一真实路径， S 是极小值。假定已有了该真实路径，而它在空间和时间上既通过某点 a ，又通过附近另一点 b ，见图19-9。现在，如果从 t_1 至 t_2 整个积分是极小值，那么就有必要沿 a 至 b 的小段积分也是极小值。不可能在 a 至 b 这一部分就稍微多一点。因为不然的话，就总能仅仅拨动这段路径而使整个积分值稍微降低。

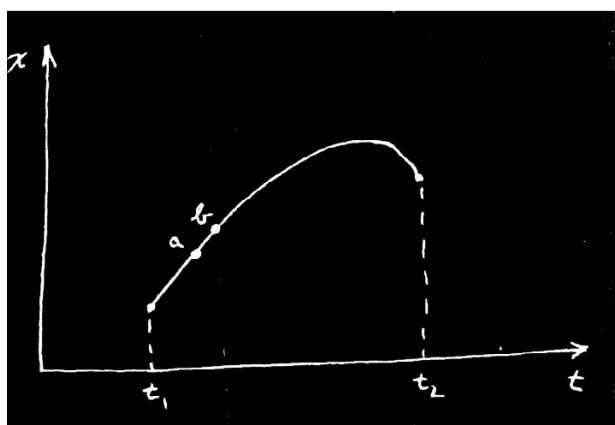


图 19-9

所以在这条路径中的每一小段也必然是极小值。并且不管该小段如何短，这都是正确的。因此，整个路径给出极小值的原理，也可说成路径的每一无限小线段也是具有最小作用量的那种曲线。现在若我们取路径上足够短的一段——在十分靠近的 a 与 b 两点之间——那么在遥远处势能如何逐点变化就是无足轻重的事情了，因为在那整整一小段路径上你几乎总是待在同一个地点。你必须加以讨论的唯一事情就是势能中的一级变化。答案只能取决于势能的微商而不是在各处的势能。所以关于整条路径的总性质的陈述就变成对一小段路径会发生的事情的陈述——一种微分式描述。而这一种微分式描述就仅仅涉及势能的微商，也就是在一点处的力。这就是总体定律与微分定律之间关系的一种定性解释。

在光的情况下，我们也曾讨论过这问题：粒子怎么会找到它的正确路径呢？从微分的观点，那是容易理解的。它获得加速度的每个瞬时仅仅知道在该时刻做些什么。可是如果你讲粒子决定选取将给出最小作用量的路径，那你关于因果的全部直觉就发生了混乱。为了找出邻近路径是否具有更多的作用量，它“闻出”它们了吗？在光的情况下，当我们放置一些光学元件在光所经过的道路上以致光子们不能检查所有的路径时，我们便发现它们不再能算出该走哪一条路，从而就有了衍射现象。

这类事情在力学中也会发生吗？粒子真的不仅仅能选取正确路径，而且还会审查所有其他的各种可能路径吗？而且，若在路途上设置一些东西以阻止其向四处张望，我们也能得到与衍射类似的现象吗？当然，一切令人惊奇之处就在于，事情恰恰是这样。这正是量子力学定律所说的。因此，我们的最小作用原理还是陈述得不完全。并非粒子选取了作用最小的那条路径，而是它对附近的所有路线都闻过，从而按照与光选择最短时间类似的方法来选取一条具有最小作用量的路径。你应记得，光选取最短时间的办法是这样的：要是它遵循一条需要不同时间的路径，则当它到达时就有不同相位。而在某一点上的总振幅等于光能到达的所有不同路径振幅贡献的总和。所有那些提供相位差异很大的路径将不会合成任何东西。但如果你能找出一整序列路径，它们都具有几乎相同的相位，则小小的贡献便将加在一起而在到达之处得到一个可观的总振幅。因此，重要路径就成为许多能给出相同相位彼此靠近的路径。

对于量子力学，事情恰巧完全相同。整个量子力学（对于非相对论情况，并略去电子自旋）是这样处理的：一个粒子在时刻 t_1 从点1出发，将在 t_2 到达点2的概率等于概率幅的平方。总概率幅可以写成

每一可能路径——每一条到达的途径——的各概率幅之和。对于我们可能有的每个 $x(t)$ ——对于每条可能想象出来的轨道——我们就得算出一个概率幅。然后再把它们相加起来。对于每条路径，我们认为概率幅是什么呢？上述作用量积分告诉我们，对于一条单独路径其概率幅应该是什么。概率幅正比于某个常数乘 $e^{iS/\hbar}$ ，其中 S 就是对那条路径的作用量。这就是说，如果我们用一个复数来表示概率幅的相位，则相角就是 $S/\hbar$ 。作用量 S 具有能量乘时间的量纲，而普朗克常量 $\hbar$ 也具有相同的量纲。它是判定量子力学什么时候才显得重要的一个常数。

这就是它工作的原理：假设对所有路径，与 $\hbar$ 相比 S 很大，则一条路径贡献一定的概率幅。对于附近一条路径，该相位已很不相同，因为对于巨大的 S ，即使 S 的一个小小变化也意味着一个完全不同的相位——因为 $\hbar$ 是那么小。所以在求和时，互相靠近的路径一般都会将其效应互相抵消——除了一个区域以外，而这个区域一条路径与其邻近路径在一级近似下全都会给出相同的相位（更准确地说，在 $\hbar$ 范围内给出相同的作用量），只有这些路径才是重要的。因此，在普朗克常量 $\hbar$ 趋于零的极限情况下，正确的量子力学规律可以总结成简单的一句话：“忘记所有这些概率幅吧。粒子就在一条特殊路径上运动，那是在一级近似下 S 不发生变化的一条路径。”这就是最小作用原理与量子力学之间的关系。量子力学可以用这种形式来表达的事实，是由本次演讲开头曾提及的同一位教师巴德先生的另一名学生在1942年发现的〔量子力学原本是通过给出关于概率幅的微分方程（薛定谔首创）以及通过某种其他矩阵数学（海森伯首创）而表达出来的〕。

现在要来谈谈物理学中其他的极小原理，其中有许多是很有意义的。我并不想马上就将它们全都罗列出来，而只打算再描述其中的一种。以后，当我们面临一个具有漂亮的极小原理的物理现象时，我将随时结合它来谈。现在我要来证明：不必通过给出场的微分方程，而是通过讲述某个积分是极大或极小值，就能够描述静电学。首先，让我们考虑电荷密度处处已知的情况，而问题就在于求出空间中每一处的电势 ϕ 。你知道答案应该是：

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0.$$

但表述这相同事件的另一种办法却是：计算积分 U^* ：

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV - \int \rho \phi dV,$$

这是一个对全部空间进行的体积分。对于正确的势分布 $\phi(x, y, z)$ ， U^* 是极小值。

我们可以证明，这两种关于静电学的表述是等效的。现在假定选取任意函数 ϕ 。要求证明：当我们认为 ϕ 是正确的势 $\underline{\phi}$ 加上一个小的偏离 f 时，则在一级近似下 U^* 的变化为零。因此我们记作

$$\phi = \underline{\phi} + f.$$

$\underline{\phi}$ 就是我们所要寻找的，但现在给它造成一种变化，以找出它必须怎样才能使 U^* 的变分在一级近似下为零。对于 U^* 中的第一部分，我们有必要写成

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\phi)^2 + 2 \nabla\phi \cdot \nabla f + (\nabla f)^2.$$

式中会变化的唯一一级项为

$$2 \nabla\phi \cdot \nabla f.$$

在 U^* 的第二项中，被积函数为

$$\rho\phi = \rho\phi + \rho f,$$

其变化部分为 ρf 。因此，若只保留那些变化的部分，则需要有下面的积分：

$$\Delta U^* = \int (\epsilon_0 \nabla\phi \cdot \nabla f - \rho f) dV.$$

现在，根据以往的普遍法则，我们必须得到经过了补缀的完全去掉 f 的微商的那种东西。让我们看看那些微商是什么。上式中的点积为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z},$$

我们得把它们对 x ，对 y 和对 z 进行积分。原来窍门就在这里：若要将 $\partial f/\partial x$ 去掉，就必须对 x 进行分部积分，这样就会把微商移到 ϕ 上

去。这与我们过去常用来去掉对 t 微商的那种一般想法是相同的。我们利用等式：

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f \frac{\partial \phi}{\partial x} - \int f \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx.$$

等号右边已积出的项为零，因为我们必须使 f 在无限远处为零〔这相当于使 η 在 t_1 和 t_2 时为零。因此，我们的原理就应该更准确地说成：

对于正确的势 $\underline{\phi}$ ， U^* 比对任何其他势 $\phi(x, y, z)$ 都小，而在无限远处 $\underline{\phi}$ 和 ϕ 则有相同的值〕。然后我们对于 y 和 z 也这样做。因而 ΔU^* 的积分为

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\phi} - \rho) f dV.$$

为了使这一变分对于任何 f ——不管是什么——都为零， f 的系数就必须为零，因而

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0.$$

我们又回到了原来的方程。因而上述的“极小”命题是正确的。

如果我们采用稍微不同的方法来做上述代数运算，就可以使命题普遍化。让我们回到原来的式子，不计算各分量，而直接做分部积分。注意下列这个等式：

$$\nabla \cdot (f \nabla \underline{\phi}) = \nabla f \cdot \nabla \underline{\phi} + f \nabla^2 \underline{\phi}.$$

如果算出左边的微分，就能证明它刚好等于右边。现在可以利用这一等式进行分部积分。在上述 ΔU^* 的积分中，用 $\nabla \cdot (f \nabla \phi) - f \nabla^2 \phi$ 代替 $\nabla \phi \cdot \nabla f$ ，而后对体积进行积分。其中散度项的体积分可以用面积分代替：

$$\int \nabla \cdot (f \nabla \phi) dV = \int f \nabla \phi \cdot \mathbf{n} da.$$

由于是对全部空间积分，所以积分的面位于无限远处。由于那里的 f 等于零，因而得到与前面相同的答案。

只有现在我们才明白怎样求解这样的问题，即我们不知道其中全部电荷如何分布。假设我们有些导体，电荷以某种方式分布在其上面，只要所有导体的电势都固定不变，则我们仍然能够应用极小原理。对 U^* 的积分仅在一切导体之外的空间中进行。这时，由于不能使导体上的 ϕ 发生变化，所以在所有导体的表面上 f 都等于零，因而面积分

$$\int f \nabla \phi \cdot \mathbf{n} da$$

仍然为零。剩下的体积分

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \phi - \rho) f dV$$

只在各导体之间的空间中进行。当然，我们再次得到泊松方程：

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0.$$

这样就证明了原来的积分 U^* 也是一个极小，只要在电势全都固定的各导体外的空间里进行计算〔这就是说，当 x, y, z 是导体表面上的一点时，任何尝试函数 $\phi(x, y, z)$ 都必须等于该导体的给定电势〕。

一个有趣的情况是电荷只存在于导体上。这时

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV.$$

我们的极小原理讲，在一组导体都处于某些给定电势的情况下，它们之间的势就会自动调整到使积分 U^* 为最小。这个积分是什么呢？由于项 $\nabla \phi$ 就是电场，因而该积分就是静电能。真实的场是在所有来自电势梯度的场中总能量最小的那个场。

我想要利用这一结果来算出某个具体的东西，从而给你们看看这些东西实际上是非常有用的。假设我取两个导体构成一柱形电容器（图19-10），内部的导体具有电势 V ，而外面的导体电势为零。令内、外两个导体的半径分别为 a 和 b 。现在可以假定它们之间的任意电势分布。如果我们采用正确的 ϕ 并算出 $\epsilon_0/2 \int (\nabla \phi)^2 dV$ ，则它应当是系统的能量，即 $\frac{1}{2}CV^2$ 。因此，也可以根据我们的原理算出 C 。但若采用错误的势分布并试图用这个办法来算出 C ，则我们得到的电容将太大。因为电势 V 已经被规定了，所以任何假定出来的、并非严格等于正确电势的 ϕ ，都会给出一个比正确值要大的假的 C 。不过如果

我的辅助的 ϕ 是任意的粗略近似，则 C 将是一个良好的近似，因为 C 的误差比 ϕ 的误差要高一级。

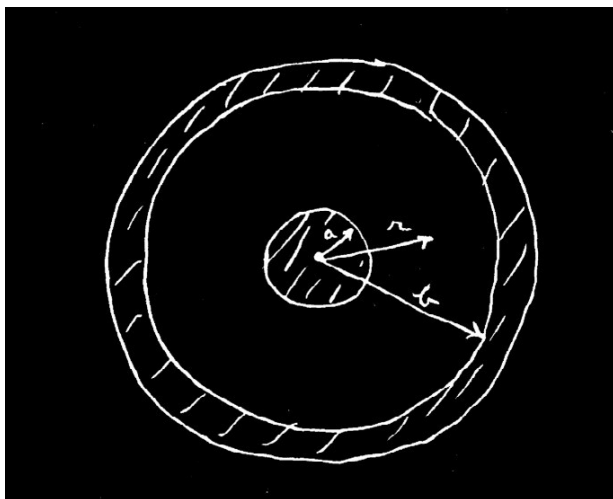


图 19-10

假设我不知道一个柱形电容器的电容，那我就可以利用这一原理来找到它。我只要不断对势函数 ϕ 进行猜测直到获得最低的 C 值为止。例如，假定我选取一个与恒定电场相对应的势（当然，你知道，这里的场实际上不是恒定的，它会随 $1/r$ 变化）。一个恒定场意味着一个与距离成正比的势。为适合两导体所在处的条件，它必须是

$$\phi = V \left(1 - \frac{r - a}{b - a} \right).$$

这个函数在 $r=a$ 处为 V ，在 $r=b$ 处为零，而在两者之间的势则有等于 $-V/(b-a)$ 的固定斜率。所以为了求得积分 U^* ，我们所要做的就是将这个 ϕ 的梯度的平方乘以 $\epsilon_0/2$ 并对全部体积求积分。让我们对单位长度的圆柱做这种计算。在半径 r 处的体积元为 $2\pi r \, dr$ ，进行积分，我对求电容的第一次尝试就得到

$$\frac{1}{2}CV^2 \text{ (第一次尝试)} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r dr.$$

这积分不难，它正好为

$$\pi V^2 \left(\frac{b+a}{b-a} \right).$$

这样我就有了一个关于电容的公式，它虽然不正确，但却是一种近似结果：

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

自然，它与正确答案 $C=2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ 不同，但并非太坏。让我们对几个 b/a 值把它与正确答案做比较，所得结果如下表所列：

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{正确}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C_{\text{(第一次近似)}}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.442 3	1.500
4	0.721	0.833
10	0.434	0.612
100	0.217	0.51
1.5	2.466 2	2.50
1.1	10.492 059	10.500 000

即使当 b/a 大至2时——就电场来讲，与一个线性变化的场相比它给出了相当大的改变——我仍获得了相当好的近似。当然，正如所预期的那样，答案稍微偏高一些。如果你把一根细导线放在一个大圆柱之中，事情就糟得多。这时场已有了巨大变化，而倘若你还是用一个恒

定场来代表它，那你就干得不太好了。当 $b/a=100$ 时，我们偏离了几乎2倍。对于小的 b/a ，则事情要好得多。试取与刚才极端相反的情况，当两导体相距不远——比方说 $b/a=1.1$ ——时，则恒定场就是一个相当好的近似，而我们会得到误差在千分之一以内的正确 C 值。

现在我要来告诉你，如何可改进这种计算（当然，对于柱形电容器来说你已经知道它的正确答案，但对于其他一些你还不知道其正确答案的古怪形状，所用方法仍然与此相同）。下一步对未知的正确 ϕ 尝试较好的近似。例如，你也许会试一试一个常数加上一个指数函数的 ϕ ，如此等等。但除非你已经知道正确的 ϕ ，否则你怎么会知道何时才能得到一个较好的近似呢？答案：你把 C 算出来，最低的 C 值就是最接近于正确的值。让我们来尝试这一想法。假定电势不是 r 的线性函数而是 r 的二次函数——电场不是恒定的而是线性的。能够适合在 $r=b$ 处 $\phi=0$ 、而在 $r=a$ 处 $\phi=V$ 这种条件的最一般的二次形式的 ϕ 为

$$\phi = V \left[1 + \alpha \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1 + \alpha) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right],$$

式中 α 为一任意常数。这公式稍微复杂了一点。在势中除了一个线性项外还包括一个二次项。很容易从它得到场，该场正好为

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1 + \alpha) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

现在我们必须将上式加以平方并对体积进行积分。但请等一等。我应当给 α 取个什么值呢？我可以对 ϕ 取一条抛物线，然而是什么样的抛物线呢？这里我所要做的是：用任意一个 α 算出电容。得到的结果是

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a} \left[\frac{b}{a} \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1 \right) + \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{3} \right].$$

这看来还是稍微复杂一点，但它是从对场的平方进行积分而得到的。现在我可以选择 α 了。我知道正确结果总是比我将要算出的任何值都小，因而不管我代入什么 α 值总会得到一个太大的答案。但如果我保持着玩弄 α 并得到一个我所能得到的最低的可能值，则这个最低值就会比其他任何值都更接近于真实的值。所以我将要做的下一件事就是去拣出会提供极小 C 值的那个 α 。按照普通的微积分来计算，我得到极小的 C 出现在 $\alpha = -2b / (b + a)$ 时，将此值代入上面的公式中，得到的极小电容为：

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

对于各种不同的 b/a 值我已经算出了由这一公式所给出的 C 值。我将称这些数值为 C （二次），这里是 C （二次）与正确 C 的对照表。

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{正确}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C_{\text{(二次)}}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.442 3	1.444
4	0.721	0.733
10	0.434	0.475
100	0.217	0.346
1.5	2.466 2	2.466 7
1.1	10.492 059	10.492 065

例如，当两半径之比为2比1时，我得到1.444，这对于正确答案1.4423来说已经是一个很好的近似。即使对于较大的 b/a ，它仍旧相当好——比一次近似要好得多。当 b/a 为10比1时，还是相当准确——只偏离10%。但当 b/a 达到100比1时，事情就开始变糟。我所得到的 C

$/2\pi\epsilon_0$ 是0.346而不是0.217。在另一方面，对于1.5的半径比，该答案非常好；至于1.1的 b/a ，答案表明是10.492065而不是10.492059。这里答案应该是好的，它就已经非常非常好了。

我已经举出了好几个例子，首先为了表明极小作用量原理和一般的极小原理的理论价值，其次在于表明它们的实用价值——不仅仅去算出我们已明知其答案的电容。对于任何其他形状的电容，你可以用某些像 α 那样的未知参数去猜测一个近似的场，并调整这些参数以获得一个极小值。对于其他方法难以处理的一些问题，用此法你将得极好的数值结果。

§19-2 演讲后补充的一段笔记

我愿意补充一点我没有时间在课堂上讲的东西（似乎我准备的材料总是比我有时间讲到的要多）。正如我曾经提到的，当准备这一演讲时我对一个问题产生了兴趣。我要告诉你们这是个什么问题。在我上面所提及的极小原理中，我曾注意到其中大多数以不同的方法来自力学和电动力学中的最小作用量原理。但也有一类并非如此。作为一个例子，若电流通过某一块材料时遵从欧姆定律，则在这块材料中的电流就会分布得使热量的产生率尽可能小。我们也可以讲（如果材料都保持等温的话），能量的产生率是一极小值。那么，按照经典理论，这一原理甚至也适用于确定载流金属内部电子的速度分布。速度的这种分布并非严格的平衡分布〔见第1卷第40章，式（40.6）〕，因为电子正在向侧面漂移。这一新的分布可以从下述原理找到，即对某个给定的电流，它是使得因碰撞每秒所产生的熵尽可能少的一种分布。然而，关于电子行为的正确描述应该是由量子力学给出的。于是

问题就是：当情况要用量子力学来描述时，同样的极小熵产生原理是否仍然正确？我对此还未找到答案。

当然，这问题在理论上是很重要的。像这样的原理是令人神往的，而且尝试看清其普遍性如何始终是值得的。但从一个更为实用的观点来说，我也希望去了解它。我与几位同事曾经发表过一篇论文，其中我们根据量子力学近似地计算过一个运动电子通过一块像NaCl那样的离子晶体时所感受到的电阻 [Feynman, Hellwarth, Iddings, and Platzman. Mobility of Slow Electrons in a Polar Crystal. *Phys. Rev.*, 1962, **127**:1004]。但要是极小原理存在，则我们可以用它做出更为精确的结果，就像有关电容器电容的极小原理曾经允许我们对电容获得那样高的准确度那样，尽管我们只有初步的电场知识。

[1] 这是一次专题演讲。以后各章并不依赖于这篇专题讲演的材料——这是特意为“娱乐”的目的而设置的。

第20章 麦克斯韦方程组在自由空间中的解_[1]

§20-1 自由空间中的波；平面波

在第18章中，我们就已经达到拥有完整形式的麦克斯韦方程组的目的。对电磁场的经典理论所要知道的一切知识，全都可以在下列四个方程中求得：

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \quad (20.1)$$

当我们把所有这些方程都合在一起时，一个惊人的新现象出现了：由运动电荷所产生的场可以离开源而独自通过空间传播。我们曾考虑过一个特殊例子，在其中一无限大电流片被突然地开通。当电流已经开通了时间 t 之后，就有均匀的电场和磁场从源处扩展至距离 ct 。假设该电流片被置在 yz 平面上，且具有沿正 y 方向的面电流密度 $\mathbf{J}$ ，则电场将只有一个 y 分量，而磁场只有一个 z 分量。在 x 轴的正方向， x 小于 ct 的地方，这些场的分量由下式给出：

$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.2)$$

但对于 x 大于 ct 的地方，这些场都是零。当然，也有相似的场从该电流片向负 x 方向传播而达到相同的距离（在图20-1中我们画出了作为 x 函数的场其大小在时刻 t 的图形）。随着时间的推移，在 ct 处的“波前”会以恒定速度 c 沿 x 方向往外传播。

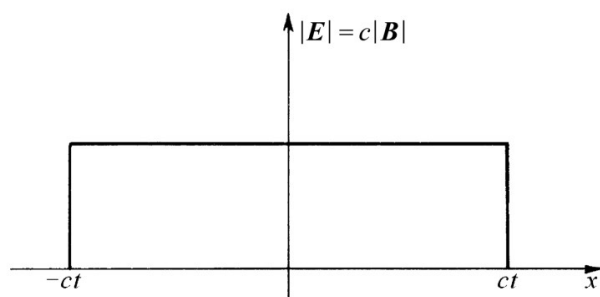


图20-1 在电流片接通后的 t 时刻，作为 x 函数的电场和磁场

现在，试考虑下述的事件次序。首先开通单位强度的电流并经历了一段时间，然后突然把电流强度增加至三个单位，并从此一直保持在这一数值上。这时场会像个什么样子呢？我们能够用如下方式来看个究竟。首先，设想有一单位强度的电流在 $t=0$ 时开通，并且永不改变。这样，对于在 x 正向的场，其图形就由图20-2（a）给出。其次，我们要问，若在 t_1 时刻开通两个单位的恒定电流又将发生什么呢？

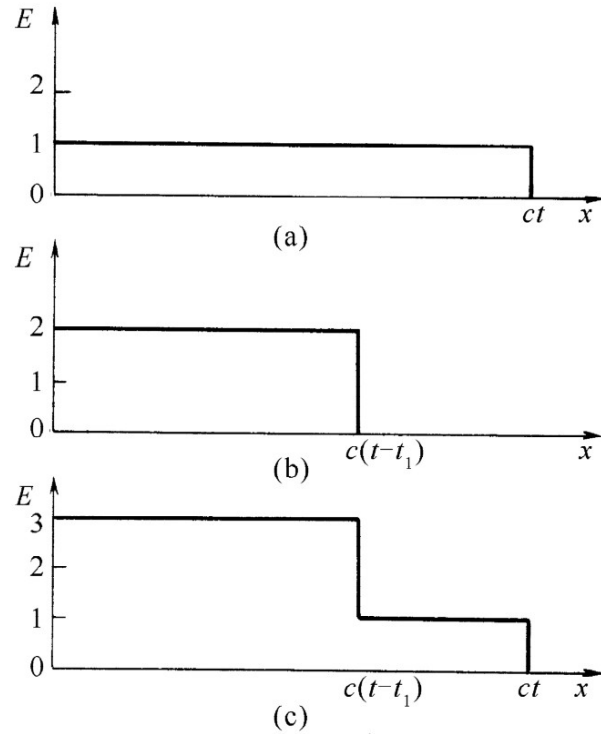


图20-2 由一电流片产生的电场。(a) 在 $t=0$ 时，一单位电流被接通；(b) 在 $t=t_1$ 时，二个单位的电流被接通；(c) (a) 和 (b) 两者的叠加

在这一情况下场将比原来增强一倍，但在 x 方向仅传播到 $c(t-t_1)$ 那么远的距离，如图20-2 (b) 所示。当我们运用叠加原理而把这两个解相加起来时，就会发现这两个源之和在从零至 t_1 的时间里电流为一单位而在大于 t_1 的时间里电流为三单位。在 t 时刻则场随距离 x 变化的情形如图20-2 (c) 所示。

现在，让我们处理一个较复杂的问题。考虑这样一种电流，开通至一单位强度，过了一会儿之后，又增强至三个单位，再过些时间便完全给截断。对于这么一种电流，场又将如何呢？我们能够按照同样的办法来求出解答——把三个分开着的问题的解都相加起来。首先，求一个单位强度的阶梯式电流的场（这问题我们已经解决）。其次，再求两个单位的阶梯式电流的场。最后，才解出三个单位的阶梯式

电流的场。当把这三个解相加起来时，我们将得到一个电流，它从 $t=0$ 起至某个往后时刻——比如说 t_1 ——有单位强度，然后又有三个单位强度，并一直持续到一个更后时刻 t_2 ，才将其完全切断——也就是变成零。作为时间函数的电流曲线如图20-3（a）所示。当我们将电场的那三个解相加起来时，便求得在某个给定时刻 t 电场随 x 的变化如图20-3（b）所示。场是电流的确定表象。场在空间中的分布就是电流随时间变化的一条漂亮曲线，只不过要倒转过来画才对。随着时间流逝整个图形会以速率 c 向外运动，因而就有一小截场朝正 x 方向传播，这里含有全部电流变化历史的完整而详尽的记录。要是站立在若干英里以外，我们能够从电场和磁场的变化情况中准确地说出在源处电流曾经是怎样变化的。

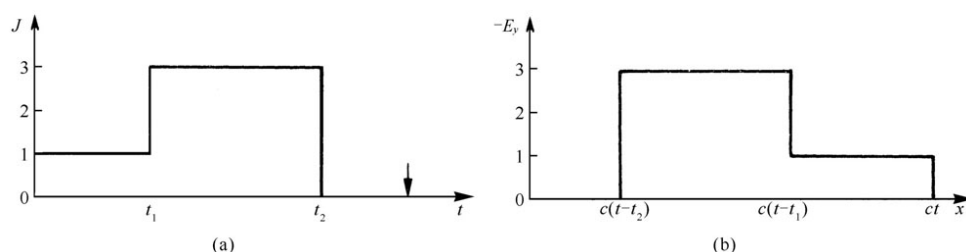


图20-3 如果电流源强度随时间的变化如图（a）所示，则在箭头所指的 t 时刻电场作为 x 函数就如图（b）所示

你也将注意到，在源处的所有活动都已完全停止后很久，一切电荷和电流都变为零，而那一小块场仍将继续通过空间传播。我们有了不依赖于任何电荷或电流而存在的一种电场和磁场分布。这就是来自完整麦克斯韦方程组的新效应。如果我们愿意，尽可以对刚才所做的分析给出一个完全数学形式的表示，即把在某一给定地点和给定时刻的电场写成与在源处的电流成正比，只不过不是在同一时刻，而是在较早时刻 $t - x/c$ 的电流。我们可以写成

$$E_y = -\frac{J(t-x/c)}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.3)$$

信不信由你，早在第1卷当与折射率理论打交道时，我们就已经从另外的观点导出过这种相同的公式。当一片具有偶极子系统的、电介质材料中的一薄层电偶极子，当受到照射进来的电磁波的电场驱动而发生振动时就产生电场。那时我们的问题是要算出原来的波与由振动偶极子辐射的波的合成场。在还没有（提到）麦克斯韦方程组时怎么能够算出由运动电荷产生的场呢？当时我们曾（不做任何推导）把加速点电荷在远处所产生的辐射场的一个公式作为我们的出发点。如果你查阅一下第1卷第31章，你就会看到，那里的式（31.17）同我们刚才写的式（20.3）完全一样。尽管我们以前的推导只有在距离源很远处才正确，但现在明白，即使在靠近源处相同的结果仍然是正确的。

现在，我们要一般地考察在离源也即离电流和电荷很远的真空中电场和磁场的行为。在十分靠近源处——近至足以使源在传播的延迟时间内还来不及做出大的变化——场与我们过去在所谓静电和静磁的情况下所求得的场几乎完全相同。然而，如果我们已离开足够远的距离以致延迟变得十分重要，则场的性质就可能与我们找到的那些解完全不同。在某种意义上，当场远离所有的源时，它便开始具有它们本身的特性。因此，我们便可以开始讨论在既没有电流也没有电荷的区域里场的行为了。

假设我们询问：在 ρ 和 $\mathbf{j}$ 两者都是零的区域里哪一种场可能存在呢？在第18章中我们曾看到，麦克斯韦方程组的物理内涵也可以利用标势和矢势的一组微分方程来表示：

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (20.4)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (20.5)$$

如果 ρ 和 $\mathbf{j}$ 都是零，则这些方程具有较简单的形式：

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.6)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.7)$$

这样，在自由空间里，标势 ϕ 和矢势 $\mathbf{A}$ 的每个分量就都满足相同的数学方程。假如令 ψ 代表 ϕ ， A_x ， A_y ， A_z 四个量中的任一个，则需要研究下列方程的通解：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.8)$$

这个方程称为三维的波动方程——所谓三维，是因为函数 ψ 通常可能依赖于 x ， y 和 z ，因而我们必须关心所有三个坐标的变化。如果将拉普拉斯算符的三项都明显写出，则上式就清楚地变成：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.9)$$

在自由空间中电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 也都满足波动方程。例如，由于 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，所以我们可通过取式(20.7)的旋度而得到一个关于 $\mathbf{B}$ 的微分方程。由于拉普拉斯算符是一标量算符，因而它与旋度算符可以互相交换次序：

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{B}.$$

同理，旋度算符与 $\partial/\partial t$ 的次序也可以互换：

$$\nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

利用这些结果，便可获得下列 $\mathbf{B}$ 的微分方程：

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.10)$$

因此，磁场 $\mathbf{B}$ 的每一分量就都满足三维波动方程。同样，若利用 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 这个事实，则由此得出在自由空间中的电场 $\mathbf{E}$ 也满足该三维波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.11)$$

一切电磁场都满足相同的波动方程（20.8）。也许我们还会问：这个方程最一般的解到底是什么？然而，与其马上去处理这个困难问题，倒不如先来看看对于不随 y 和 z 变化的那些解一般能够说些什么（常常要先解决容易的情况以便能看清将会发生的事情，然后你才能处理那些较复杂的情况）。让我们假定那些场的大小只取决于 x ——场不随 y 和 z 变化。当然，我们又在考虑平面波了。应该期待得到与前一节中多少有点相似的结果。事实上，我们将精确地求得相同的答案。你可能会问：“为什么还要全部重做一遍呢？”再做一遍很重要。第一，因为我们过去从未证明已找到的波就是关于平面波最普遍的解；其次，则因为我们当时仅从一个非常特殊类型的电流源找到了那些场。现在我们很想问：存在于自由空间中最普遍类型的一维波到底是什么？我们不能通过观看这个或那个特殊源所发生的事情而做到这一点，而必须以更大的普遍性来处理这个问题。而且这次将要处理微

分方程而不是处理一些积分形式。尽管将得到相同的结果，但仍不失为一种反复练习的途径，借以证明无论你采取什么方法都不会产生任何差别。你应该懂得如何去用多种方法来做事情，因为当碰到一个困难问题时，你往往会发现在各种方法中只有一种是易于处理的。

我们或许有可能直接考虑解某个电磁量的波动方程。但相反，我们要一开始就从自由空间中的麦克斯韦方程组出发，以便使你能够看到它们与电磁波之间的密切关系。因此，我们就从式（20.1）中的方程组开始，令电荷和电流都等于零。它们变成

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I.} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \text{II.} & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III.} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \text{IV.} & c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (20.12)$$

把第一个方程用分量写出：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (20.13)$$

我们假定场不随 y 和 z 变化，因而最后两项都为零。于是，这个方程告诉我们：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (20.14)$$

它的解 E_x 是在 x 方向的电场分量，它在空间里是一个恒量。如果你考察（20.12）中的IV式，同时假定 $\mathbf{B}$ 在 y 与 z 方向没有变化，那么你就能够看出 E_x 在时间上也是不变的。像这样的场，或许有可能来自远处

某个充电电容器极板的恒定直流场。此刻，我们对于这种枯燥乏味的静电场不感兴趣，目前感兴趣的只是一些动态变化的场。对于动态场来说， $E_x=0$ 。

于是我们就有一个重要结果，对于沿任何方向传播的平面波，电场必须垂直于传播方向。当然，它仍然能够以复杂的形式随坐标 x 变化。

这横向的 $\mathbf{E}$ 场总可以分解成两个分量，例如 y 分量和 z 分量。所以让我们先算出电场仅有一横分量的情况。我们将先考虑一个始终在 y 方向而不具有 z 分量的电场。显然，若已解出了这个问题，也就能解出电场总是在 z 方向的那种情况。通解始终可以表达成这样两种场的叠加。

现在，我们的方程组已变得多么容易。电场的唯一不等于零的分量为 E_y ，而所有的微商——除了对于 x 的微商以外——都等于零。这样，其余的麦克斯韦方程就变得很简单了。

其次，让我们来看看麦克斯韦方程组中的第二个方程〔式(20.12)中的II〕。将 $\mathbf{E}$ 旋度的各分量写出，得

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \\(\nabla \times \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \\(\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.\end{aligned}$$

$\nabla \times \mathbf{E}$ 的 x 分量为零，因为对 y 和对 z 的微商都是零。它的 y 分量也是零；其中第一项为零是因为 E_x 对 z 的微商为零，而第二项为零是由于 E_z 为零。 $\mathbf{E}$ 旋度唯一不等于零的分量为 z 分量，它等于 $\partial E_y / \partial x$ 。令 $\nabla \times \mathbf{E}$ 的三个分量对应 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ 的分量，我们可以得到下列结论：

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0. \quad (20.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (20.16)$$

由于磁场的 x 分量和 y 分量两者对时间的微商都为零，所以这两分量正好是恒定场并且与我们以前找到的静磁解相对应。可能某人曾将某个永久磁铁遗留在靠近波传播的地方。我们忽略这些恒定场，并设 B_x 和 B_y 等于零。

顺便提一下，我们可能已经得出结论：由于别的原因 $\mathbf{B}$ 的 x 分量应为零。由于 $\mathbf{B}$ 的散度为零（由第三个麦克斯韦方程得知），运用与我们上面关于电场所用的相同论证，就会得出结论，磁场的纵向分量不可能随 x 变化。既然我们忽略波动解中的这种匀强场，因此就应该令 B_x 等于零。在平面电磁波中， $\mathbf{B}$ 场以及 $\mathbf{E}$ 场都一定与传播方向垂直。

式（20.16）给我们提供一个附加定理：如果电场只有 y 分量，则磁场将只有 z 分量，所以 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 互相垂直。这正好是我们曾经考虑过的特殊波中所出现的情况。

现在准备利用关于自由空间中的最后一个麦克斯韦方程〔式（20.12）中的IV〕。写出分量后，得：

$$\left. \begin{aligned} c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_x &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_y &= c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_z &= c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

在关于 $\mathbf{B}$ 分量的六个微商中，只有 $\partial B_z / \partial x$ 一项不等于零。因此，这三个方程仅给了我们一个方程

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (20.18)$$

上述一切工作的结果表明，电场与磁场都仅有一个不等于零的分量，而这些分量应该满足式 (20.16) 和 (20.18)。如果前一式对 x 取微商而后一式对 t 取微商，则这两个方程可以结合成一个，这时两方程的左边（除了因数 c^2 之外）将相同。因此我们发现， E_y 满足下列方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (20.19)$$

在过去学习声音的传播时，我们就已经见过相同的微分方程。它是关于一维波的波动方程。

你应该注意到，在我们的推导过程中已经发现的某些东西比包含在式 (20.11) 中的要多。麦克斯韦方程组已给了我们进一步的知识，即电磁波只具有垂直于其传播方向的场分量。

让我们复习一下已知的关于一维波动方程的解。如果有任何量 ψ 满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.20)$$

则一个可能的解是如下形式的函数 $\psi(x, t)$:

$$\psi(x, t) = f(x - ct). \quad (20.21)$$

也就是说, 它是单变量 $(x - ct)$ 的某种函数。函数 $f(x - ct)$ 代表一个在 x 轴上的“刚性”图形朝着正 x 方向以速率 c 在传播 (见图20-4)。例如, 若函数 f 当它的自变量为零时有一个极大值, 则在 $t=0$ 时该极大值会出现在 $x=0$ 处。此后在某一时刻, 比方说当 $t=10$ 时, ψ 将在 $x=10c$ 处有它的极大值。随着时间的推移, 这极大值以速率 c 朝着正 x 方向行进。

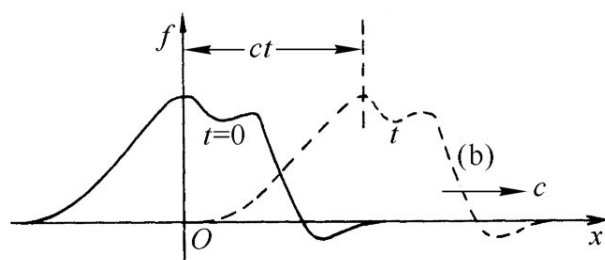


图20-4 函数 $f(x - ct)$ 代表一个朝正 x 方向以速率 c 行进的不变“形状”

有时这样说会更方便, 即一维波动方程的一个解是 $(t - x/c)$ 的一个函数。然而, 这里谈的是同一件事情, 因为 $(t - x/c)$ 的任何函数也是 $(x - ct)$ 的函数:

$$F(t - x/c) = F\left[-\frac{x - ct}{c}\right] = f(x - ct).$$

让我们来证明 $f(x - ct)$ 的确是波动方程的一个解。由于它是只有一个变量——即自变量 $(x - ct)$ ——的函数, 因此我们将令 f' 表示 f

对它的变量的微商，而 f'' 表示 f 的二次微商。求式（20.21）对 x 的微商，得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x - ct),$$

由于 $(x - ct)$ 对 x 的微商为1，所以 ψ 对 x 的二次微商显然等于

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct). \quad (20.22)$$

取 ψ 对于 t 的微商，得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f'(x - ct)(-c), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +c^2 f''(x - ct). \end{aligned} \quad (20.23)$$

我们看到， f 确实满足一维波动方程。

你可能感到诧异：“如果我有那个波动方程式，又怎么会知道应取 $f(x - ct)$ 作为它的解呢？我就不喜欢这种逆向的办法。是否有某种正向的办法来找出解答呢？”噢，一个好的正向的办法就是要了解那个解答。有可能“设计”出一个表面上看来是正向的数学论证，特别是因为我们已知道解答大致应该如何，但对于一个这么简单的方程来说就不必按部就班了。不久你将会达到这样的程度，当看到式（20.20）时，就几乎同时看出 $\psi = f(x - ct)$ 是一个解（就像现在当你看到 $x^2 dx$ 的积分时，你马上就知道答案是 $x^3/3$ ）。

实际上，你也应该看出稍微多一点的东西。不仅任何 $(x - ct)$ 的函数是一个解，而且任何 $(x + ct)$ 的函数也是一个解。既然波动方程中仅含有 c^2 ，所以改变 c 的符号就不会引起任何差别。事实上，一维波动方程最普遍的解乃是两个任意函数之和，其中一个是 $(x - ct)$ 的函数而另一个则是 $(x + ct)$ 的函数：

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (20.24)$$

第一项代表一个沿正 x 方向传播的波，而第二项则是沿负 x 方向传播的任意波。通解就是同时存在的两个这样的波的叠加。

我们将把下面一个有趣的问题留给你去思考。考虑如下形式的一个函数 ψ ：

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

这个式子并不取 $(x - ct)$ 或 $(x + ct)$ 的函数形式，但你可以通过将其直接代入式 (20.20) 中而轻易地证明这函数就是波动方程的一个解。那么，我们怎么能够说通解具有式 (20.24) 那样的形式呢？

将我们关于波动方程解的那些结论应用到电场的 y 分量 E_y 上去，就可以断言， E_y 能够按任何一种方式随 x 变化。然而，确实存在的场总可以认为是两个图形之和。一个波是在一个方向上以速率 c 通过空间飞驶，带有一个垂直于电场的相伴磁场；另一个波则是在相反方向上以同一速率传播，像这样的波相当于我们所已熟悉的各种电磁波

——光、无线电波、红外辐射、紫外辐射、X射线等等。我们曾在第1卷中详细讨论过光的辐射。由于在那里学过的每件事情都适用于任何电磁波，所以我们不需在这里详尽讨论这些波的行为了。

也许应当对电磁波的偏振问题进一步做几点评论。在上述的解中，我们曾选择考虑其中电场只有一个 y 分量的那种特殊情况。显然还有另一个解，其中电场只有一个 z 分量，但也是朝着正的或负的 x 方向传播的波。由于麦克斯韦方程组是线性的，所以对于沿 x 方向传播的一维波的通解就是 E_y 波和 E_z 波之和。这个通解可以综合在下列方程中：

$$\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$$

$$E_y = f(x - ct) + g(x + ct)$$

$$E_z = F(x - ct) + G(x + ct)$$

$$\mathbf{B} = (0, B_y, B_z) \quad (20.25)$$

$$cB_z = f(x - ct) - g(x + ct)$$

$$cB_y = -F(x - ct) + G(x + ct).$$

这样的电磁波具有一个 $\mathbf{E}$ 矢量，其方向并非固定而是在 yz 平面上按某种任意方式旋转。在每一点磁场总是垂直于电场，也垂直于传播方向。

如果只有在一个方向、比如在正 x 方向上传播的波，就存在一个简单法则，它告诉我们关于电场和磁场的相对取向。这法则是：叉积 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ——当然，那是一个既垂直于 $\mathbf{E}$ 又垂直于 $\mathbf{B}$ 的矢量——指向波传播的方向。如果按照右手螺旋法则 $\mathbf{E}$ 被转到 $\mathbf{B}$ ，则这个螺旋指向波的速度方向（往后我们将看到，矢量 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 具有一个特殊的物理意义：它是描述电磁场中能量流动的一个矢量）。

§20-2 三维波

现在要转到三维波的课题上来。我们已经看到，矢量 $\mathbf{E}$ 满足波动方程。通过由麦克斯韦方程组所做的直接论证不难得出这同样的结论。假设我们是从方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

出发，并取两边的旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (20.26)$$

你将记得，任何矢量旋度的旋度都可以写成两项之和，其中一项含有散度而另一项含有拉普拉斯算符，即

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

然而，在自由空间里， E 的散度等于零。因而只有拉普拉斯算符那一项才保留着。并且，根据自由空间中第IV个麦克斯韦方程〔式(20.12)〕， $c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ 的时间微商即是 $\mathbf{E}$ 对 t 的二次微商：

$$c^2 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

于是式(20.26)就成为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

上式是三维波动方程。若要反映出它的全部光辉，这一方程当然就是

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.27)$$

我们将如何找出波动方程的通解呢？答案是所有三维波动方程的解都可以表示为我们已找到的一维解的叠加，通过假定场并不依赖于 y 和 z ，我们已获得在 x 方向上运动的波的表示式。显然，还存在别的解，其中场并不依赖于 x 和 z ，它表示波在 y 方向上行进。然后还有与 x 和 y 都无关的解，它代表沿 z 方向传播的波。或者一般说来，由于我们已将方程写成了矢量形式，所以三维波动方程可以有在各点朝任何一个方向运动着的平面波之解。再则，由于那些方程都是线性的，因而可以同时具有任意多的、沿各种不同方向传播的平面波。这样，三维波动方程的最一般解就是在各种不同方向运动的所有各种平面波的叠加。

试想象此刻存在于这个课堂空间中的电场和磁场像什么样子。首先，有一个恒定磁场，它来自地球内部的电流——也就是地球的恒定磁场。然后，还有一些不规则的、几乎是静态的电场，这或许是由于各人在其椅子上移动并以其大衣袖口擦过椅臂时由于摩擦引起的电荷所产生的。然后也存在由电线里的振动电流所产生的其他磁场——以60 Hz的频率变化着、并且与水坝的发电机同步的场。但更为有趣的是那些以高得多的频率变化着的电场和磁场。例如，当光从窗口至地板、从这面壁至那面壁传播时，就会有电场和磁场的微小摆动以 $186\,000\text{ mile s}^{-1}$ 的速率跟着运动。然后也有从各个温暖的前额跑向较冷的黑板上的红外线。而我们已经把那些紫外光、X射线以及通过这个房间传播的各种无线电波都忘记了。

飞过这个房间里的还包括载有爵士乐队音乐的那些电磁波，也有由那些代表着世界上其他各地方发生的事故的图像、或代表着那种想象的退热药阿司匹林溶解在想象的肚子上的图像的一系列脉冲所调制了的那些波。要演示这些波的真实性，只需打开那种能把这些波转变成图像和声音的电子设备就行了。

如果我们更加详细地分析到那些甚至是最微小的摆动，便会发现从遥远距离进入这房间里的细小电磁波。此刻就有这一种电场的微小振动，其波峰相距一英尺，那是来自几兆英里以外、由水手二号空间飞船刚刚经过金星时所传送到地球表面上来的。它的信号载着它从那个行星所收集到的信息概要（信息由该行星传播至空间飞船上的电磁波所提供）。

此外还有电场和磁场的十分微小摆动，那是发源于几十亿光年以外——从宇宙间最遥远角落里的星系送来的波。这件事情的真实性已

由“用装满导线的房间”——即由建立像这房间那么大的天线组——证明了。这种从最大光学望远镜观测范围以外空间中一些地方来的无线电波被探测到了。甚至那些光学望远镜也不过是电磁波的收集器而已。所谓星星，只是一些推断，即从它们那里所已经获得的唯一物理实质所做出的推断——对到达地面上我们这里的电场和磁场的无比复杂的波动做了仔细研究而得出的结果。

当然，还有更多的电磁场：从若干英里外的闪电所产生的场，那些带电的宇宙射线粒子当其噓噓地通过我们的房间里时的场，此外还有更多更多。围绕着你四周的空间电场竟会如此复杂！但它却始终满足三维波动方程式。

§20-3 科学的想象

我曾要求你们对这些电场和磁场进行想象。到底应该做些什么呢？你们是否懂得了怎样去做？我如何设想电场和磁场呢？我实际看到的到底是些什么？对科学想象应有哪些要求？它与试着想象这房间里充满着一些看不见的天使究竟有何区别？不，这并不像对那些看不到的天使的想象。要理解电磁场，比理解那些看不见的天使，还要有高级得多的想象力。为什么？因为要使那些看不到的天使们可以理解，我所必须做的只是把他们的性质稍微改变一点点——即使得他们稍微看得见，这样我就能见到他们的翅膀、躯体和光环的形象。一旦我已成功地想象出一个见得到的天使，那么所必须做的抽象化——即接纳一些几乎看不见的天使而把他们想象成完全是看不见的——就相对地容易了。所以你会说：“教授先生，请给我一个关于电磁波的近似描述吧，哪怕它还可能有点不准确，以便使我也能像看到那些几乎看

不到的天使们那样看到它们。然后我才将该图像做必要的抽象化的修改。”

对不起，我不能为你做这件事。我不知道怎么办。我并没有关于这电磁场在任何意义上准确的图像。我知道电磁场已有很长时间了——25年前我所处的地位与你们现在所处的地位正好相同，而我已经有了这25年来琢磨这些摆动着的波的经验。当我开始描述磁场通过空间运动时，我谈及 E 场和 B 场并摇摆我的两只手臂，而你可能想象我已能够看到它们了。我将告诉你我看到了什么。我看到了某种模糊的阴影，摇摆着的线——莫名其妙在这里或那里的线上写着 E 或 B ，而也许有些线还带着箭头——当我对其考察得太细致时，这里或那里的一个箭头竟会消失不见。当我谈及嗖地通过空间的那些场时，在用来描述对象的符号与对象本身之间存在一种可怕的混乱。即使接近像真实波的图像我也确实不能做出。因此如果你对于做出这样一种图像感到困难的话，你就不必担心你的困难是异乎寻常的了。

我们的科学对想象竟会提出这么可怕的要求。所需的想象程度比起对一些古老概念所要求的要极端得多。现代概念远更难于想象。尽管如此，我们还是用了一大堆工具。使用数学方程式和法则，并构造许多种图像。我现在所认识的是：当我谈及在空间中的电磁场时，我所看到的乃是所有那些我曾见过的关于它们的图形的某种叠加，并未看到在周围奔跑着的那些小束场线，因为我担心如果我以另一速率走过则那些线束将会消失不见。甚至我并非自始至终都在注视着那些电场和磁场，因为我有时还想到应当有一幅用矢势和标势来表示的图像，原因是，它们也许是正在摇动着的更具有物理意义的东西。

你会说，也许唯一的希望就是采取数学图像。那么数学图像又是怎么回事呢？从数学的观点看，空间中每一点有一个电场矢量和一个

磁场矢量，即共有六个数目与每一点相联系。你能否想象出与空间中每一点联系着的竟有六个数目之多？那太难了。哪怕只有一个数目与每点联系，你能够想象得出来吗？我就不能！我只能想象在空间中每一点像温度那样的东西，那似乎还是可以理解的。若这里存在冷和热，则这里的温度就逐点变化。但老实说，我并不理解在每一点上就有一个数值的那种概念。

因此，也许应该这样来提出问题：我们能否用更像温度的某种东西来表示电场呢？比方说，像一块胶质的位移。假设我们这样开始，即通过想象世界充满着一种稀疏胶质而场代表胶质中的某种畸变——比如说伸长和扭曲，那么我们就能够使场看得见。在已经“看到”了它像个什么样子之后，我们就该能将胶质抽象化掉。这就是许多年来人们所企图做到的。麦克斯韦、安培、法拉第以及其他一些人都曾经尝试过按这一途径去理解电磁学（有时他们叫这抽象化了的胶体为“以太”）。但事实证明，按那种方式去想象电磁场的尝试实际上是在前进道路上设置的一道障碍。可惜我们始终仅局限于去做抽象化，去应用仪器来探测场，去利用数学符号来描述场，等等。但无论如何，在某种意义上场却是真实的，因为在我们完全结束了对数学方程式的反复摆弄之后——不管有无做出图像和图画或试图去看那种东西——我们仍然能够使仪器探测出从水手二号送来的信号并找出远在几十亿英里以外的那些银河，等等。

科学中的整个想象问题往往被从事其他学科的人们所误解。他们以下述办法企图来试验我们的想象力。他们说：“这里就是某些人在某种情况下的一幅图像。你想象以后将会发生什么呢？”当我说“我想象不出来”时，他们可能认为我的想象力太弱了。他们忽视了一个事实，即在科学中容许我们去想象的无论什么东西都必须与我们所已知道的

其他每件事情相一致：我们所谈及的电场和波并不只是我们随心所欲地自由创造出来的某些愉快思想，而是必须与我们所已知的一切物理规律都符合一致的一些概念。我们不能容许去认真地想象那些明显与所知的自然规律发生矛盾的东西，因而我们的那一种想象乃是十分困难的玩艺。人们得具有想象从未见过或从未听说过的某些事物的想象力。同时这些思想又好比是被束缚在一件紧身衣里，即受到来自自然界确实情况的知识的那些条件所限制。去创造出某种新的东西，但又同以前已知的每一件东西相一致，这是一个极端困难的问题。

趁正在谈这个课题的时候，我要来谈一下是否有可能想象出我们所不能见到的那种美丽。那是一个饶有趣味的问题。当我们凝望着彩虹时，它对我们来说好像是美丽的。每个人都会说：“啊，彩虹”（你看我多么科学。我不敢说某一件东西是美丽的，除非我有定义它的实验方法）。可是假如我们都是瞎子，则又该如何去描述彩虹呢？当我们测量NaCl的红外反射系数时，或者当我们在谈到来自不能看到的某个星系之波的频率时，我们都是瞎子——我们制作了一幅图，画出了一条曲线。例如，对于彩虹来说，这样的曲线可能是在天空中的每一个方向用分光光度计所测得的辐射强度对频率的关系。在一般情况下，这样的测量会给出一条相当平坦的曲线。于是在某一天，有人发现对于某种气候条件以及在天空中某个角度，作为波长函数的强度谱发生了一种奇异行为，它可能有扰动。当仪器的角度只稍微改变时，这个扰动的极大值就从某一波长移向另一波长。然后有一日，这些盲人办的物理评论杂志也许会发表一篇标题为《在某种气候条件下作为角度函数的辐射强度》的专门论文。在这篇论文中也许会出现一条像图20-5所示的那种曲线。作者可能要指出，在较大的角度处较多辐射集中在长波上，而对于较小角度，则辐射的峰出现在较短的波长上

（从我们的观点出发，我们可能会说，在 40° 角绿色光占优势，而在 42° 角则红色光占优势）。

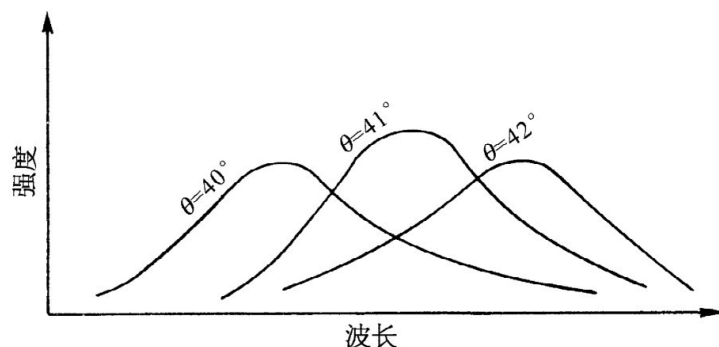


图20-5 在（从与太阳相反的方向量起的）三个角度处作为波长函数的电磁波强度，这只是在某种气象条件下进行测量的结果

那么，我们发现图20-5上的那些曲线很优美吗？它所包含的内容比我们看到彩虹时所理解的要详细得多，因为我们的眼睛不能够在光谱的形状中看到其精确细节。然而，眼睛却会发现到彩虹是美的。是否我们的想象力足以在光谱曲线中看到如同当我们直接瞭望彩虹时所看得到的同一种美丽？我不知道。

但假定有一幅作为红外区波长函数、也作为角度的函数的关于NaCl的反射系数的曲线图。要是眼睛能看到红外线——也许是一种灿烂夺目的“绿色”混杂着从该表面上反射而来的“金属红”——那么我该有一种对于我的双眼来说它看起来会是什么样子的图像了。那该是一件华丽的东西，但我还不知道我是否会有一天在看到用某种仪器测量出的关于NaCl的反射系的曲线图时，便能说出它具有同样的那种美丽。

另一方面，即使我们不能在具体的测量结果中看到美丽，我们也已能够声称在那些描述普遍物理规律的方程式中看到了某种美丽。例

如，在波动方程式（20.9）中，就存在关于 x ， y ， z 和 t 表现出来的规则性的某些优美的东西。而在 x ， y ， z 和 t 外表所呈现出来的优美对称性，在人们的心中就会浮现出一种必须用四维空间完成的更伟大的美丽，该空间会有四维对称的可能性以及经过分析之后发展成为狭义相对论的可能性。所以存在许许多多与这个方程有关的智力上的美丽。

§20-4 球面波

我们已看到波动方程具有与平面波相对应的解，而任何电磁波都可描述为许多平面波的叠加。然而，在某些特殊情况下，用不同的数学形式来描写波场更为方便。现在，我们很想讨论球面波——与从某一中心扩展开去的球形表面相对应的波——的理论。当你把一块石头扔到湖里时，那些涟漪会在水面上以圆形波的形式扩展开去——它们是二维波。球面波与此相似，只不过它是在三维中扩展出去而已。

在我们开始描述球面波之前，需要一点数学。假设有一个函数仅取决于离某一原点的径向距离 r ——换句话说，这是一个球对称的函数，让我们叫它函数 $\psi(r)$ ，其中 r 是指

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

即与原点间的径向距离。为了求出满足波动方程的函数 $\psi(r)$ ，我们将需要关于 ψ 的拉普拉斯表示式。因此，就要求出 ψ 对 x ， y 和 z 的二次微商之和。我们将采用这种符号，即 $\psi'(r)$ 代表 ψ 对 r 的微商，而 $\psi''(r)$ 代表 ψ 对 r 的二次微商。

首先，求对 x 的微商。第一次微商为

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}.$$

ψ 对 x 的二次微商为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi'' \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \psi' \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

可以由下列两式计算 r 对 x 的偏微商：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right).$$

因此， ψ 对 x 的二次微商就是

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.28)$$

同理，

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \psi', \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.30)$$

拉普拉斯算符等于这三个微商之和。记住 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ，我们便得

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r). \quad (20.31)$$

把这一方程写成如下形式往往更为方便：

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi). \quad (20.32)$$

如果你将式（20.32）中所标明的微分算出，则将看到右边与式（20.31）的右边相同。

如果希望讨论能够像球面波那样传播出去的球对称场，则场量就必须是 r 与 t 两者的函数。这时，假如我们问起下列三维波动方程

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0 \quad (20.33)$$

之解是怎样的函数 $\psi(r, t)$ 。由于 $\psi(r, t)$ 仅仅通过 r 而依赖于空间坐标，因而可以采用上面求得的那个拉普拉斯算符方程式（20.32）。然而，为了准确起见，由于 ψ 也是 t 的函数，所以我们应该把对 r 的微商写成偏微商。这样该波动方程便变成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0.$$

现在我们必须解出这一方程，这看来比平面波的情况复杂得多。可是注意，如果我们以 r 乘这一方程，则得到

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) = 0. \quad (20.34)$$

上式告诉我们，函数 $r\psi$ 满足以 r 为变量的一维波动方程。应用曾经经常强调过的普遍原理，即相同的方程总会有相同的解，那么我们知道，如果 $r\psi$ 仅仅是 $(r-ct)$ 的函数，则它将是方程式(20.34)的解。因此，我们就知道球面波一定具有下面这种形式：

$$r\psi(r, t) = f(r-ct).$$

或者，正如我们以前曾见过的，同样可以说 $r\psi$ 可能具有这种形式：

$$r\psi = f(t-r/c).$$

两边各除以 r ，便得到场量 ψ （不管它可能代表什么）具有如下形式：

$$\psi = \frac{f(t-r/c)}{r}. \quad (20.35)$$

这样一个函数表示从原点以速率 c 传播出去的普遍的球面波。如果暂时忘却那个在分母上的 r ，则在某一给定时刻波幅作为离原点距离的函数会具有一定形状并以速率 c 向外传播。然而，那个分母中的因子 r 却说明当波传播时波幅正比于 $1/r$ 减小。换句话说，和平面波不同，当平面波向前行进时波幅维持不变，而在一球面波中波幅却是恒定地减小，如图20-6所示。这一效应不难从简单的物理论证得到理解。

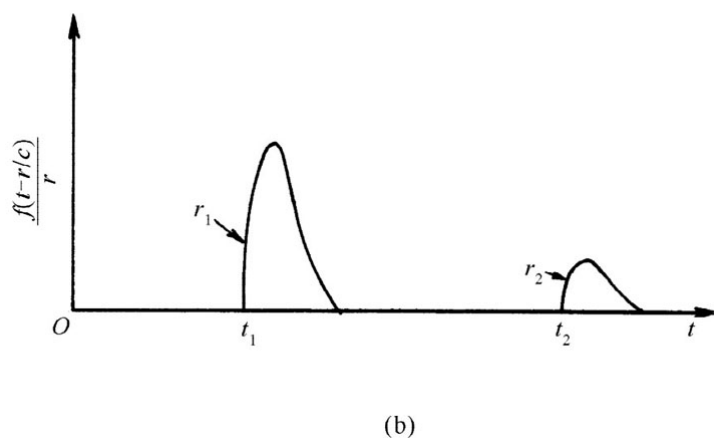
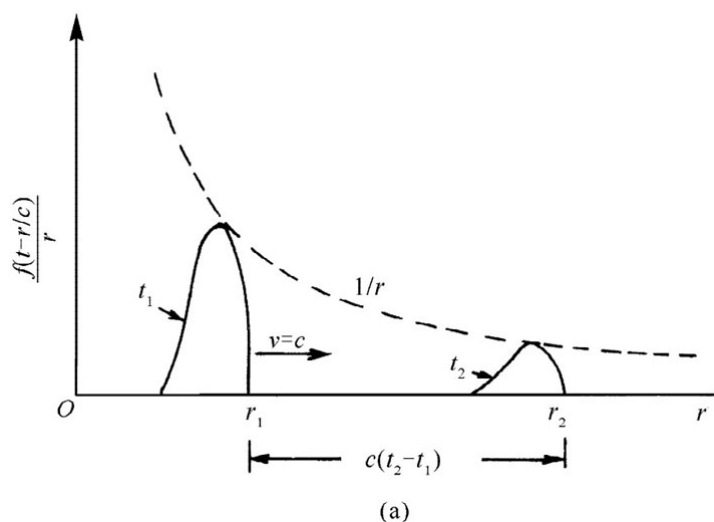


图20-6 球面波 $\psi = f(t - r/c)/r$ 。(a) 作为 r 函数的 ψ 在 $t = t_1$ 时刻的情况和同一个波在一个较后时刻 t_2 时的情况；(b) 作为 t 函数的 ψ 在 $r = r_1$ 处的情况和同一个波在 r_2 处所看到的情况

我们知道，波的能量密度取决于波幅的平方。当波向外传播时，其能量分布在与径向距离的平方成正比的越来越大的面积上。如果总能量守恒的话，则能量密度必定随 $1/r^2$ 下降，而波幅则一定随 $1/r$ 减小。因此，式 (20.35) 是关于球面波的“合理”形式。

我们已忽略了对于一维波动方程的第二种可能解：

$$r\psi = g(t + r/c)$$

或

$$\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}.$$

这也代表一个球面波，不过是一个从较大的 r 朝着原点向内 传播的波。

现在打算做一个特殊假定，但不做任何证明。我们讲，由源所产生的波仅是向外 行进的波，由于我们知道波是由电荷的运动所引起的，所以我们认为波是从电荷那里向外发出来的。要想象在电荷还未开始运动以前就有一个球面波从无限远处出发而恰恰在那些电荷刚要开始动起来的那一瞬到达它们那里，这应该是相当奇怪的。虽然这是一个可能的解，但经验表明，当电荷被加速时波是从电荷那里向外传播的。尽管麦克斯韦方程组会允许这两种可能性，但我们还要放进一个附加事实——基于经验——只有向外行进波的解才产生“物理意义”。

然而，也应该指出，对于这一附加假设存在一个有趣的后果：我们正在消除存在于麦克斯韦方程组中的时间对称性。关于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 原来的方程组，以及从它们导出的波动方程式，都具有这么一种性质，即如果改变 t 的符号，方程式仍将保持不变。这些方程表明，对应于沿某一方向行进波的每一个解，就有一个沿相反方向传播的波作为同样有效的解。我们关于将只考虑向外的球面波的陈述是一个重要的附加假设（一种旨在避免这一附加假设的电动力学表达方式已由人们仔细

地研究过。令人惊异的是，在许多场合下它并未在物理上导致荒谬的结论，但若此刻就来讨论这些想法，那就可能把我们引入歧途太远了。我们将在第28章对它们稍微多讨论一些）。

必须提出另一要点。在一个向外行进波的解即式（20.35）中，函数 ψ 在原点处等于无限大。那是有点特别的。我们很想有一个处处平滑的波动解。但我们的解必须在物理上代表某个源位于原点的情况。换句话说，由于疏忽我们已犯了一个错误。我们并未处处对自由波动方程式（20.33）求得解答，只是求得了在其右边除了原点之外处处都为零的方程式（20.33）的解。我们所以会不知不觉犯错，是由于在上述求导过程中，在 $r=0$ 的某些步骤是不“合法”的。

让我们来证明，在静电问题中也很容易犯同样类型错误。假定要求出自由空间里静电势方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 的解。这拉普拉斯方程所以等于零，是因为我们假设处处都没有电荷。但关于这一方程的一个球对称解——即仅仅取决于 r 的某个函数 ψ ——将会怎么样呢？利用式（20.32）关于拉普拉斯算符的公式，就有

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0.$$

对上式乘以 r ，便得到一个易于积分的微分方程：

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0.$$

如果对 r 积分一次，就求得 $r\phi$ 的一次微商为一常数，我们可称之为 a ：

$$\frac{d}{dr}(r\phi) = a.$$

再积分一次，求得 $r\phi$ 的形式为：

$$r\phi = ar + b,$$

其中 b 是另一积分常数。因此，我们发现，下列 ϕ 是自由空间中静电势方程的一个解：

$$\phi = a + \frac{b}{r}.$$

显然出现了某种差错。在不存在电荷的区域中，我们知道静电势的解为：势处处为恒量。这相当于我们解中的第一项，但还有那第二项，这说明有一个与离原点的距离成反比变化的势的贡献。然而，我们知道，这样一个势相当于在 origin 处有一个点电荷。所以，虽然我们当初设想对自由空间中的势求解，但上述的解却也给出了在 origin 上有一个点源的场。你是否看到目前所发生的事情与上面我们对波动方程求球对称解时所发生的事情之间存在的相似性？要是真的在 origin 上没有任何电荷或电流，那么就不会有任何往外跑的球面波了。当然，球面波一定是由 origin 处的源产生的。在下一章中我们将探讨那些正在往外行进的电磁波与产生了这些波的电流和电压之间的关系。

[1] 参考：第一卷47章声，波动方程；第一卷28章，电磁辐射。

第21章 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解

§21-1 光与电磁波

在上一章我们看到，在麦克斯韦方程组的解中就有电与磁的波。这些波相当于无线电波、可见光、X射线等现象，视波长如何而定。我们曾在第1卷中详尽地学习过光学。本章将把这两门学科互相结合起来——证明麦克斯韦方程组确实能够形成我们前期处理光学现象的基础。

过去当我们学习光学时，是由写出一个以任意方式运动着的电荷所产生的场的方程开始的，即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right], \quad (21.1)$$
$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}$$

[见第1卷式(28.3)及式(28.4)。正如下面所述，这里的符号是原来符号的负值。]

如果电荷是以任意方式运动，则我们现在在某一点所求得的电场并非取决于电荷此刻所处的位置和运动，而仅仅取决于在一个较早时刻——早于光以速率 c 从电荷传播至该场点的距离 r' 所需的时间的那个时刻——的位置和运动。换句话说，若要得到 t 时刻在点(1)处的

场，就必须算出在 $(t - r'/c)$ 时刻电荷所处的位置 $(2')$ 及其运动，其中 r' 是在 $(t - r'/c)$ 时刻从电荷位置 $(2')$ 至点 (1) 的距离。加上一撇是为了说明 r' 是从点 $(2')$ 至点 (1) 的所谓“推迟距离”，而非电荷在 t 时刻的位置即点 (2) 至该场点 (1) 的实际距离（见图21-1）。注意，现在我们正在采用一种关于单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 方向 的新规则。在第1卷第28和34两章中我们曾取 $\mathbf{r}$ （因而 $\mathbf{e}_r$ ）指向 源处，那是方便的。但现在却要按照上面关于库仑定律的定义，其中 $\mathbf{r}$ 是从点 (2) 处的电荷指向点 (1) 处的场点的。当然，唯一不同之处是，现在的新 $\mathbf{r}$ （和 $\mathbf{e}_r$ ）就是过去那些量取负值。

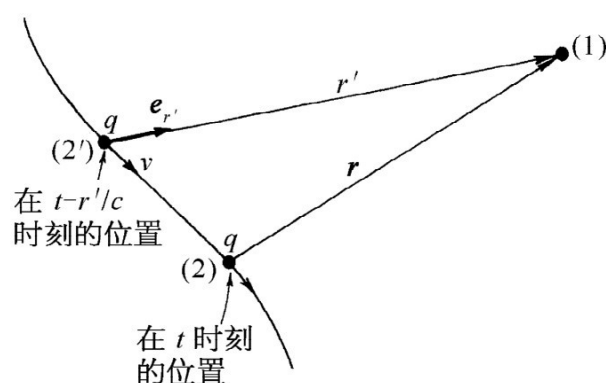


图21-1 t 时刻在点 (1) 处的场取决于在 $(t - r' / c)$ 时刻电荷 q 所占据的位置 $(2')$

我们也已知道，若电荷的速度 v 总是比 c 小得多，而且只考虑那些距离电荷很远的点，以致只有式 (21.1) 中最后一项才算重要，则场也就可以写成

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[\begin{array}{l} \text{电荷在 } (t - r'/c) \text{ 时刻的加速度} \\ \text{垂直于 } \mathbf{r}' \text{ 方向的投影} \end{array} \right] \quad (21.1')$$

和

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

让我们稍微详细地考察一下整个公式(21.1)讲些什么。矢量 $\mathbf{e}_{r'}$ 乃是从推迟位置(2')至点(1)的单位矢量。那么第一项是我们预期的在推迟位置处的电荷的库仑场，可以把它叫作“推迟库仑场”，电场与距离的平方成反比，并且从电荷的推迟位置上指向外（也就是在 $\mathbf{e}_{r'}$ 的方向上）。

但那只是第一项。其他两项告诉我们，电学定律并未讲过除了推迟场外所有场都与静场相同（这是人们有时喜欢说的）。对于“推迟库仑场”我们还必须加上其他两项。式中的第二项讲，对于推迟库仑场有一项“修正”，那就是推迟库仑场的电荷变化率乘以延迟时间 r'/c 。在某种意义上，这一项势必对第一项的推迟做出补偿。这前面两项相当于在算出了“推迟库仑场”之后再把它往后推 r'/c 这个量，即一直推至时刻 t ！这一外推是线性的，好像我们必须假定“推迟库仑场”应该以电荷在点(2')处所算得的变化率继续变化。如果场变化得很慢，则推迟效应几乎完全被修正项所抵消，而这两项一起给我们提供了“瞬时库仑场”那样的电场——也就是在点(2)处的电荷的库仑场——趋向于很好的近似。

最后，式(21.1)中还有第三项，它是对单位矢量 $\mathbf{e}_{r'}$ 的二项微商。在学习光学现象时我们曾利用过这样的事实，即在离电荷很远的地方，前两项都与距离的平方成反比，因而对于巨大的距离来说，它们比起随 $1/r$ 减少的第三项来就变得十分微弱。因此，我们完全把注意力集中在这第三项上，并证明（又是对于大距离而言）这一项与电荷

的加速度在视线上的垂直分量成正比（并且，我们在第1卷中的大部分工作都是考虑其中电荷正在做非相对论性运动的情况，仅在第36章中才考虑过相对论性效应）。

现在应该尝试把这两件事联系起来。我们既有麦克斯韦方程组，也有关于点电荷场的方程式（21.1），肯定会问这两者是否等效。若我们能从麦克斯韦方程组导出式（21.1），则我们将确实懂得光学与电磁学间的关系。建立这种关系是本章的主要目标。

事实证明，我们不想完全解决这个问题——数学的细节变得过于复杂以致我们不能将其彻底完成。但将进行到足够接近完成的地步，以便使你们能够轻而易举地看出如何才能把联系建立起来，所遗漏的部分将只是一些数学细节。你们当中有些人可能会发觉这一章中的数学相当复杂，因而也就不愿意非常仔细地领会这种论证了。然而，我们认为这样做是十分重要的，即要把你以前学到的与现在正在学习的东西联系起来，或者至少指出这种联系如何才能建立。倘若你对以前各章大致看一看，你就会注意到，每当我们把一种说法作为讨论的起点时，总是要小心地解释它是某个“基本规律”的一种新的“前提”，还是最终可以从别的某些规律推导出来的结果。多亏你们对这些演讲的热切心意，我们才来建立光与麦克斯韦方程组之间的关系。若在某些地方变得太困难，噢，那就是生活——没有其他别的途径可走。

§21-2 由点源产生的球面波

在第18章中我们曾发现，麦克斯韦方程组是可以求得解答的，即通过设

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.2)$$

和

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.3)$$

式中 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 这时必定是下列两方程的解，

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21.4)$$

和

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (21.5)$$

而且也必须满足条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (21.6)$$

现在要来求出式（21.4）和（21.5）两方程之解。为此，就得求方程

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -s \quad (21.7)$$

的解 ψ ，这里我们称之为源的 s 是已知的。当然，对于式（21.4）来说， s 相当于 ρ/ϵ_0 而 ψ 相当于 ϕ ，或者若 ψ 为 A_x ，则 s 为 $j_x/(\epsilon_0 c^2)$ ，等等。但我们要作为一个数学问题来解方程式（21.7）而不管 ψ 和 s 在物理上指的是什么。

在 ρ 和 $\mathbf{j}$ 都分别等于零的那些地方——即在我们称之为“自由”空间里——势 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 以及场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 都满足无源的三维波动方程，其数学形式为

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (21.8)$$

在第20章中就知道这一个方程的解可表示不同类型的波：在 x 方向上的平面波 $\psi = f(t - x/c)$ ；在 y 方向、 z 方向或任何其他方向上的平面波；或者具有如下形式的球面波：

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (21.9)$$

方程的解也可以按其他方式写出，比方从一根轴线向外传播的柱面波。

我们也曾指出，在物理上，式（21.9）不代表自由空间里的波——必须在原点处有电荷才能获得开始向外行进的波。换句话说，式（21.9）是方程（21.8）在每个地方的解，除了很靠近 $r=0$ 处，在那里它必然是包括某些源的完整方程式（21.7）的解。让我们看看如何处理这个问题，方程式（21.7）中要有什么样的源 s 才能产生像式（21.9）那样的波？

假设已有了式（21.9）的球面波，并考察在 r 十分微小处所发生的情况。这时， $f(t - r/c)$ 中的推迟 $-r/c$ 可以忽略——只要 f 是一个平滑函数——因而 ψ 变成

$$\phi = \frac{f(t)}{r} \quad (r \rightarrow 0). \quad (21.10)$$

所以 ψ 很像在原点处随时间变化的电荷产生的库仑场。这就是说，要是有一小堆电荷被限制在原点附近的一个小区域里，并具有密度 ρ ，那么我们知道

$$\phi = \frac{Q/(4\pi\epsilon_0)}{r},$$

式中 $Q=\int\rho dV$ 。现在我们懂得这样的 ϕ 满足方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

根据相同的数学，我们总可以讲，式(21.10)中的 ψ 满足

$$\nabla^2\psi = -s \quad (r \rightarrow 0). \quad (21.11)$$

这里 s 与 f 的关系为

$$f = \frac{S}{4\pi},$$

而

$$S = \int s dV.$$

唯一不同之处是在这种普遍情况下， s ，从而 S ，都可以是时间的函数。

现在重要的事情在于：若对于小 r 来说 ψ 满足方程式（21.11），则它也满足方程式（21.7）。当我们进至极靠近原点时， ψ 对 $1/r$ 的依存关系使空间微商变得十分大。但时间微商却仍保持它们原有的值〔它们不过是 $f(t)$ 的时间微商〕。所以当 r 趋于零时，式（21.7）中的 $\partial^2 \psi / \partial t^2$ 项比起 $\nabla^2 \psi$ 来就可以忽略，而方程式（21.7）也变得与方程式（21.11）等价。

因此扼要地说，若方程式（21.7）中的源函数 $s(t)$ 被置在原点处并具有总强度

$$S(t) = \int s(t) dV, \quad (21.12)$$

则该方程式（21.7）的解便是

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{S(t - r/c)}{r}. \quad (21.13)$$

式（21.7）中 $\partial^2 \psi / \partial t^2$ 项的唯一影响是在库仑势中引入了推迟时间（ $t - r/c$ ）。

§21-3 麦克斯韦方程组的通解

我们已求得关于点源方程式（21.7）的解。下一个问题是：对于一个分布源来说其解是什么呢？那是容易求得的；可以把任何源 $s(x, y, z, t)$ 都想象为由许多个“点”源所组成，而对于每个体积元 dV

就有一个其源强为 $s(x, y, z, t) dV$ 的“点”源。由于方程式 (21.7) 是线性方程，所以合成场就等于所有这种源的基元产生的场的叠加。

利用上一节的结果 [式 (21.13)] 我们知道，在 t 时刻在点 (x_1, y_1, z_1) ——或简称点 (1) ——处的来自点 (x_2, y_2, z_2) ——或简称点 (2) ——的一个源的基元 $s dV$ 的场 $d\psi$ 由下式给出：

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t - r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

式中 r_{12} 是从 (2) 至 (1) 的距离。把来自源所有部分的贡献都相加起来，那意思当然是指对所有 $s \neq 0$ 的区域进行积分，因而我们有

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} dV_2. \quad (21.14)$$

这就是说，在 t 时刻在点 (1) 处的场是在 $(t - r_{12}/c)$ 时刻离开位于 (2) 处的各个源的基元的球面波之和。这就是对于任何一组源的有关波动方程的解。

现在我们来看看如何才能得到麦克斯韦方程组的通解。若 ψ 指的是标势 ϕ ，则源函数 s 便变成 ρ/ϵ_0 。我们也可以令 ψ 代表矢势 $\mathbf{A}$ 的三个分量中的任一个，同时由 $\mathbf{j}/(\epsilon_0 c^2)$ 的对应分量来取代 s 。这样，若我们对各处的电荷密度 $\rho(x, y, z, t)$ 和电流密度 $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ 都已知道，则可立即把式 (21.4) 和 (21.5) 两方程的解写出来。它们是

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \quad (21.15)$$

和

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (21.16)$$

于是利用式（21.2）和（21.3），场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 便可以通过势的微分而求得〔顺便提一下，我们有可能核实由式（21.15）和（21.16）得到的 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 的确满足方程式（21.6）〕。

我们已解出了麦克斯韦方程组。在任何情况下，如果给出电流和电荷，便能够从这些积分直接求得势，然后通过微分而获得场。因此，我们已经学完了麦克斯韦理论。而且这也使我们能够把这一个环节与光的理论衔接起来，因为要联系到我们以前关于光方面的工作，所以只需要算出来自运动电荷的电场。尚待做的就是取一个正在运动的电荷，从这些积分算出各个势来，然后再通过微分而由 $-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 找出 $\mathbf{E}$ ，这样就会得到式（21.1）。事实证明，需要做的工作很多很多，但那是原则。

因此，这里是电磁领域的中心——电和磁，以及光的完整理论；对于由任何运动电荷所产生的场的完整描述；以及另外的一些，全都在这里了。这里就是由麦克斯韦建立起来的、以它的全部功能和美丽而使其完满的建筑物，它可能是物理学中最伟大的成就之一。为要使你想起它的重要性，我们将把它全都收集在一个精致的框架中。

麦克斯韦方程组：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

它们的解：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \phi(1, t) &= \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \\ \mathbf{A}(1, t) &= \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2\end{aligned}$$

§21-4 振荡偶极子的场

导出一个运动的点电荷的场公式（21.1）的这个诺言，我们迄今还未曾实现。即使是已有的一些结果，但要把它导出来仍是一件相当复杂的事情。除了在这本讲义的第1卷之外，我们从未在已经发表的文献的任何地方找到过式（21.1）[\[1\]](#)。因此，你可以看出它不容易导出（当然，一个运动电荷的场已经被写成许多种互相等价的其他形式）。这里，我们不得不把自己限制在几个例子中，这正是为了证实式（21.15）和（21.16）会给出与式（21.1）相同的结果。首先，将证明式（21.1）只在带电粒子的运动是非相对论性的条件下才给出正确的场（仅仅这一特殊情况就能处理我们过去关于光学方面所谈及的90%或更多的内容）。

我们考虑一小团电荷在一个小区域里以某种方式运动的情况，并将找出在远处的场。换一种说法，就是我们正在寻找距离点电荷任意

远处的场，而该点电荷正以很小的幅度上下振动。由于光往往从诸如原子那种中性物体内部发射出来，所以我们将认为摆动电荷 q 是处在一个静止不动的等值异号电荷附近。如果这两电荷中心间的距离为 d ，则这两电荷将具有偶极矩 $\mathbf{p} = q \mathbf{d}$ ，这我们将认为是时间的函数。现在应该期待，如果靠近电荷对场进行观察，便无须担心那个推迟效应，电场将与我们以前对静电偶极子所算出的场完全相同——当然，要用到瞬时偶极矩 $\mathbf{p}(t)$ 。但若我们离开得很远，则应该在场中找到一项，它按 $1/r$ 下降而又依赖于与视线垂直的电荷加速度。让我们来看看是否会得到这样的结果。

利用式(21.16)由算出矢势 $\mathbf{A}$ 开始。假设运动电荷处于一小团内，其中的电荷密度由 $\rho(x, y, z)$ 给出，而在任一时刻整团东西以速度 $\mathbf{v}$ 运动，那么电流密度 $\mathbf{j}(x, y, z)$ 就等于 $\mathbf{v}\rho(x, y, z)$ 。为了将来方便选取我们的坐标系使 z 轴指向 $\mathbf{v}$ 的方向，这时问题的几何结构就如图21-2所示。现在要求下面的积分：

$$\int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.17)$$

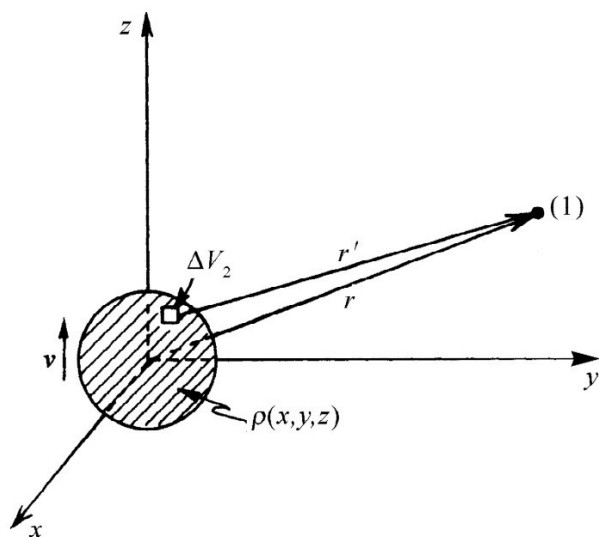


图21-2 点(1)处的势由对电荷密度 ρ 的积分给出

若电荷小团的尺度比起 r_{12} 来确实很小，那么可令分母中的 r_{12} 等于 r ，即到该小团中心的距离，并把 r 取出积分符号之外。其次，也要令该式分子中 $r_{12} = r$ ，尽管这实际上并不完全正确。其所以不对，是因为我们在小团的顶端取 $\mathbf{j}$ 与在该小团的底部取 $\mathbf{j}$ 在时间方面稍微有点不同。当在 $\mathbf{j}(t - r_{12}/c)$ 中令 $r_{12} = r$ 时，我们是在同一个时刻 $(t - r/c)$ 对整个小团取电荷密度。那只有当电荷的速度 v 远比 c 为小时才算是良好的近似。因此，我们正在做一种非相对论性计算，用 $\rho \mathbf{v}$ 来代替 $\mathbf{j}$ ，积分式 (21.17) 便变成

$$\frac{1}{r} \int \mathbf{v} \rho(2, t - r/c) dV_2.$$

由于所有电荷都有相同的速度，这个积分正好是 $\mathbf{v}/r$ 乘以总电荷 q 。但 $q \mathbf{v}$ 恰好就是 $\partial \mathbf{p} / \partial t$ ，即电偶极矩的时间变化率——那当然必须是在推迟时刻 $(t - r/c)$ 算出来的。我们将把它写成 $\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$ 。因此对于矢势来说就得到

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \quad (21.18)$$

上述结果表明：变化偶极子中的电流会产生一个矢势，这矢势具有源强度为 $\dot{\mathbf{p}}/(\epsilon_0 c^2)$ 的球面波的形式。

现在就可以由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 得到磁场。由于 $\dot{\mathbf{p}}$ 完全在 z 方向上，所以 $\mathbf{A}$ 只有一个 z 分量；在它的旋度中只有两个不等于零的微商。因此， $B_x = \partial A_z / \partial y$ 及 $B_y = -\partial A_z / \partial x$ 。让我们首先来考察 B_x ：

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \quad (21.19)$$

为了求得微商，必须想到 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，从而得出

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c). \quad (21.20)$$

记住 $\partial r / \partial y = y/r$ ，则第一项就给出

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3}, \quad (21.21)$$

这类似于一个静态偶极子的势，随 $1/r^2$ 而下降（因为对于给定的方向来说， y/r 是个常数）。

式（21.20）中的第二项为我们提供一些新的效应。在进行微商后得

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{cr^2} \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c), \quad (21.22)$$

式中 $\ddot{p}$ 当然是指 p 对时间的二次导数。这一项来自对式中分子的微商，它是造成辐射的主要原因。首先，它描述了一个仅按 $1/r$ 随距离下降的场。其次，它取决于电荷的加速度。你可能开始明白，我们是如何打算得到一个像式 (21.1') 那样的结果，而它是描述光辐射的。

让我们稍微详细一点检查一下这个辐射项是如何得来的——它是这么一个有趣而又重要的结果。由表示式 (21.18) 开始，它具有 $1/r$ 的依存关系，因而除了式中分子上的那个推迟项外就像一个库仑势了。那么，当我们为获得场而对空间坐标取微商时，为什么并不恰好得到 $1/r^2$ 的场——当然还会有那相应的时间推迟？

按照下述办法我们就能够看出其所以然：如让偶极子作正弦式上、下振动，那么就会有

$$p = p_z = p_0 \sin \omega t$$

和

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega(t - r/c)}{r}.$$

若在某一给定时刻把作为 r 函数的 A_z 画成图，则可获得如图21-3所示的那种曲线。该峰的振幅会随 $1/r$ 减小，但除此之外在空间还有一受 $1/r$ 的包络线调制的振动。当我们对空间取微商时，它们将与该曲线的斜率 成正比。从图中我们看出有一些斜率比 $1/r$ 曲线本身的斜率要峻峭得多。事实上，对于某一给定频率来说，那些峰的斜率显然正比于随 $1/r$ 变化的波的振幅。因此，这就说明了该辐射项的下降率。

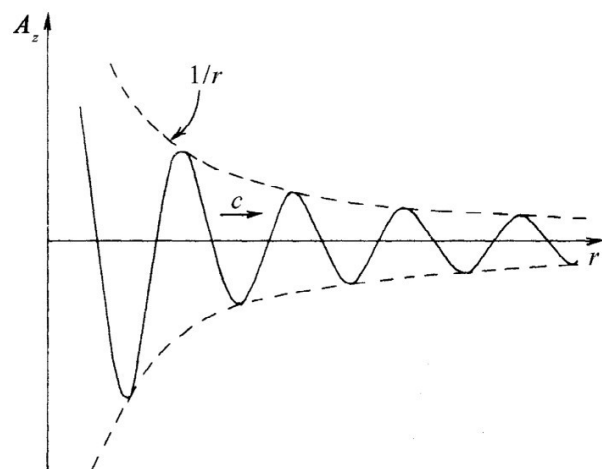


图21-3 对来自一振荡偶极子的球面波，在 t 时刻矢势 $\mathbf{A}$ 的正分量作为 r 函数而画成的图

事情的发生完全是由于当波向外传播时源对时间的变化已变换成在空间里的变化，而磁场则是取决于势的空间微商。

让我们回过来完成对磁场的计算。关于 B_x 已有式 (21.21) 和 (21.22) 两项，因而

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} - \frac{y \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{c r^2} \right].$$

利用相同的数学，得到

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{x \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} + \frac{x \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{c r^2} \right].$$

或者，可将其集合在一个漂亮的矢量式中：

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c) \ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.23)$$

现在让我们来看看这个公式。首先，若 r 很大，就只有那 $\ddot{p}$ 项才重要。 $\mathbf{B}$ 的方向由 $\ddot{p} \times \mathbf{r}$ 给出，它既垂直于矢径 $\mathbf{r}$ ，也垂直于加速度，如图21-4所示。一切都表明不错，那也是我们由式(21.1')所得到的结果。

现在，让我们来看看以往不熟悉的东西——即在源附近所发生的事情。在§14-7中我们曾求出关于电流元磁场的毕奥萨伐尔定律。求得一个电流元 $\mathbf{j} dV$ 对于磁场贡献的量为：

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (21.24)$$

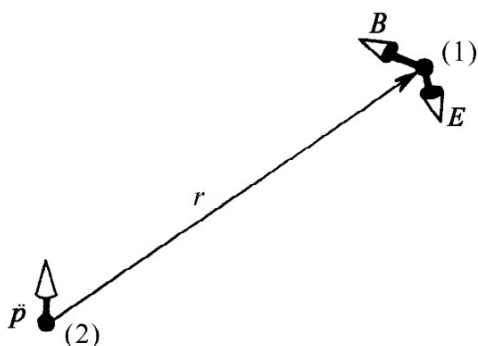


图21-4 一个振荡偶极子的辐射场 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$

若记得 $\dot{p}$ 就是电流，则你知道这个公式看来很像式(21.23)中的第一项。但有一点不同。在式(21.23)中，电流必须在 $(t - r/c)$ 时刻被算出，而这一点在式(21.24)中就没有出现。然而，事实上，对于小 r 来说式(21.24)还是十分精确的，因为式(21.23)中的第二项有助于抵消掉第一项中的推迟效应。当 r 很小时这两项合起来给出的结果很接近于式(21.24)。

关于这一点我们可以这样来认识：当 r 小时， $(t - r/c)$ 与 t 相差无几，因而可以把式(21.23)中的方括号展开成泰勒级数。对于第一项，

$$\dot{\mathbf{p}}(t - r/c) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \text{其他},$$

而第二项展开至 r/c 的同一级，则为

$$\frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c) = \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \text{其他}.$$

当求和时，含 $\ddot{\mathbf{p}}$ 的两项互相抵消，而留给我们是非推迟电流 $\dot{\mathbf{p}}$ 也即 $\dot{\mathbf{p}}(t)$ ——加上 $(r/c)^2$ 级的项或更高级的项 $\left[\text{如} \frac{1}{2}(r/c)^2 \dddot{\mathbf{p}} \right]$ ，对于 r 足够小以致 $\dot{\mathbf{p}}$ 在时间 r/c 内没有显著改变的情况，这些项的贡献将是十分微小的。

因此，式(21.23)给出的场很像瞬时理论中的场——比带有推迟的瞬时理论要接近得多，推迟的一级效应已被第二项所消除。该静态公式十分准确，其准确程度远比你可能想到的要高。当然，这补偿作用仅对接近源的点才有效。对于远离源的点这个修正变得十分差，因为时间延迟产生了很大的影响，所以我们得到重要的含 $1/r$ 的辐射项。

仍然存在这样的问题，即算出电场并证明它与式(21.1')相同。对于大的距离来说我们能够看出该答案将完全正确。我们知道，离源很远、有波传播的地方， $\mathbf{E}$ 垂直于 $\mathbf{B}$ （而且也垂直于 $\mathbf{r}$ ），如图21-4所示，并且 $c\mathbf{B} = \mathbf{E}$ 。因此， $\mathbf{E}$ 与加速度 $\ddot{\mathbf{p}}$ 成正比，正如式(21.1')所料到的那样。

要完全得到在所有距离上的电场，我们需要先解出静电势。当计算 $\mathbf{A}$ 的电流积分以获得式 (21.18) 时，就曾做过这样一种近似，即把推迟项中 r 的微小变化忽略不计。这对于静电势来说将行不通，因为这样一来我们获得 $1/r$ 乘以电荷密度的积分，那将是一个常数。这种近似太粗糙了。我们需要达到一个较高级的近似，但又要避免直接在有关较高级近似的计算中找麻烦，我们还是能够做某一种其他事情的——可以利用已找到的矢势从式 (21.6) 确定标势。在我们的情况下， $\mathbf{A}$ 的散度只是 $\partial A_z / \partial z$ ——因为 A_x 和 A_y 都恒等于零。用上面求 $\mathbf{B}$ 的同样办法取微分，

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\dot{p}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \dot{p}(t-r/c) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{z\dot{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{z\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2} \right].\end{aligned}$$

或者，采用矢量符号，

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

应用式 (21.6)，我们得到关于 ϕ 的方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

对于 t 的积分不过是从每一个 $\dot{\mathbf{p}}$ 或 $\ddot{\mathbf{p}}$ 中除去顶上的一点，因而

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.25)$$

积分常数大概相当于某个叠加上去的静场，那当然是有可能存在的静场。但对于我们所考虑的振荡偶极子来说，却不存在静场。

现在我们能够按照

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

求出电场 $\mathbf{E}$ 。由于计算冗长而不直截了当 [只要你记住 $\mathbf{p}(t-r/c)$ 和它对时间的微商之所以与 x, y, z 有关，是通过推迟时间 r/c 来的]，所以我们将仅仅给出结果：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[3 \frac{(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}^* + \frac{1}{c^2} \{ \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) \times \mathbf{r} \} \times \mathbf{r} \right], \quad (21.26)$$

式中

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t-r/c) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c). \quad (21.27)$$

尽管看来它相当复杂，但这个结果还是容易解释的。矢量 $\mathbf{p}^*$ 就是已经被推迟、然后又对推迟“修正”的偶极矩，因而带有 $\mathbf{p}^*$ 的两项就恰恰给出当 r 很小时的静态偶极子场 [见第6章式 (6.14)]。当 r 大时，含 $\ddot{\mathbf{p}}$ 的项占了优势，而电场正比于电荷的加速度，且垂直于 $\mathbf{r}$ ，事实上即是指向 $\ddot{\mathbf{p}}$ 在垂直于 $\mathbf{r}$ 的平面上的投影。

这一结果与我们应用式 (21.1) 所能得到的结果相符。当然，式 (21.1) 会更加普遍，它适用于任何运动，而式 (21.26) 则仅仅适用于推迟时间 r/c 对于整个源都可以认为是一常数的那种小的运动。无

论如何，我们现在已提供了整个以前有关光学讨论的基础（除了某些在第1卷第36章中曾经讨论过的内容以外），因为这种讨论全都与式（21.26）中的末项有关。接下来我们将讨论如何才能得到迅速运动的电荷的场（引导至第1卷第34章中的相对论性效应）。

§21-5 运动电荷的势；李纳和维谢尔通解

在上一节，由于我们仅仅考虑低速的情况，所以在计算 A 的积分时做了简化。但在这样做时我们遗漏了一个要点，而这一点也正是容易出错的地方。因此，现在我们将对一个以任何方式——甚至以相对论性速度——运动的点电荷的势进行计算。一旦有了这个结果，我们便将拥有关于电荷的整个电磁学。这时就连式（21.1）也可以通过取微商而推导出来。由于故事将是完整的，所以请耐心听下去。

让我们尝试计算由一个不管以任何方式运动的点电荷（诸如一个电子）在点 (x, y, z) 上所产生的标势 $\phi(1)$ ，所谓“点”电荷我们指的是一个十分微小的电荷球，可以缩小到任意程度，并带有电荷密度 $\rho(x, y, z)$ ，我们可以由式（21.15）求得 ϕ ：

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, r_{12} - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.28)$$

答案似乎应该是——而几乎每个人最初总会认为—— ρ 对整个这样一个“点”电荷的积分恰好就是其总电荷 q ，因而

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} (\text{错了}).$$

对于 $\mathbf{r}'_{12}$ ，我们指的是在推迟时刻 $(t - r_{12}/c)$ 从电荷所处位置点 (2) 至点 (1) 的矢径。但这个式子是错的。

正确的答案是

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \frac{1}{1 - v_{r'}/c}, \quad (21.29)$$

式中 $v_{r'}$ 为平行于 $\mathbf{r}'_{12}$ ——即指向点 (1) ——的电荷速度分量。现在要向你们解释其中原因。为使论证易于接受，我们将先对一个具有小立方体形状而以速率 v 朝向点 (1) 运动的“点”电荷进行计算，如图 21-5 (a) 所示。令该立方体的每边长度为 a ，我们假定它比 r_{12} （即从电荷中心至点 (1) 的距离）要小很多很多。

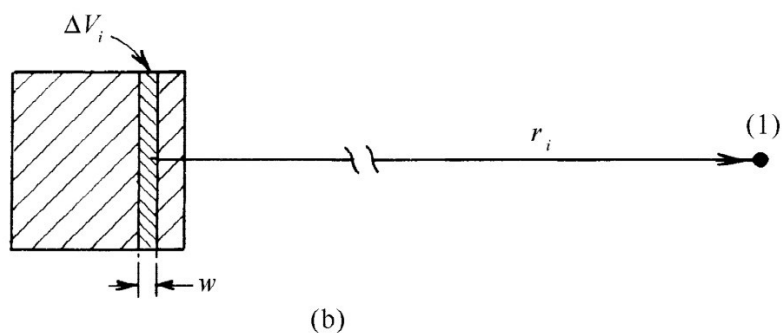
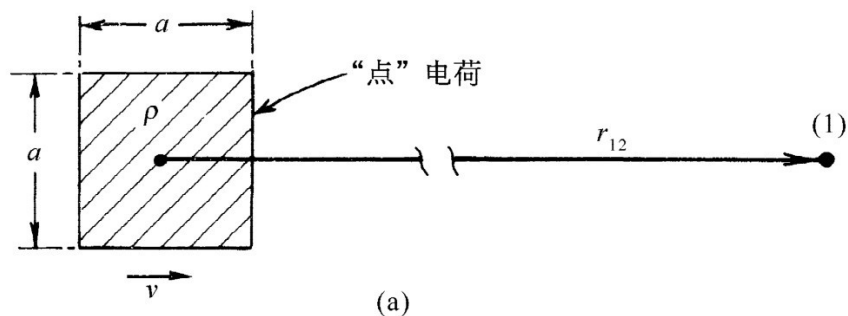


图21-5 (a) “点”电荷——视作一个小立方体的电荷分布——以速率 v 朝着点(1)运动；(b) 用来计算势的体积元 ΔV_i

现在计算式(21.28)的积分，我们将回到基本原理上去；将它写成求和式

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i}, \quad (21.30)$$

其中 r_i 是从点(1)至第 i 个体积元 ΔV_i 的距离，而 ρ_i 则是在 $t_i = t - r_i/c$ 时刻 ΔV_i 处的电荷密度。由于始终 $r_i \gg a$ ，因而把 ΔV_i 取为垂直于 r_{12} 的一个矩形薄片将是方便的，正如图21-5(b)所示。

设我们事先假定每个体积元 ΔV_i 的厚度 w 远小于 a ，于是单独的体积元看来就像图21-6(a)所示的那样，其中已放上了比完全覆盖电荷还要多的体积元。但我们却还没有把电荷表示出来，而这是有充分理由的。我们应该把它画在哪里呢？对于每个体积元 ΔV_i 来说，必须在 $t_i = (t - r_i/c)$ 的时刻取 ρ ，但由于电荷正在运动，因此对每个体积元 ΔV_i 来说它处在不同的位置！

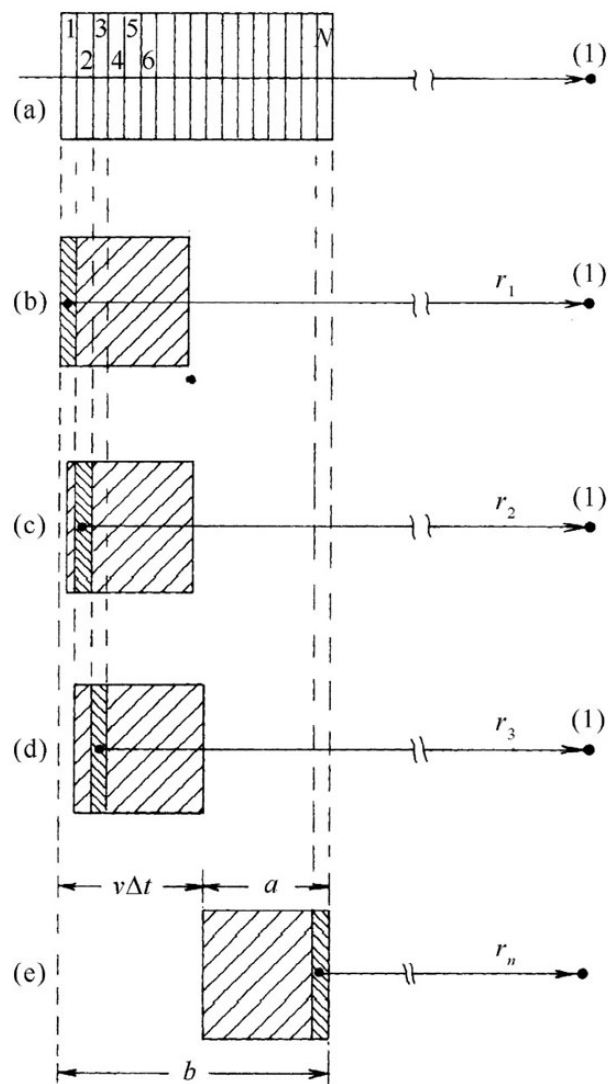


图21-6 对一个运动电荷的 $\rho(t - r'/c) dV$ 进行积分

让我们说，我们从图21-6 (a) 中标明为“1”的体积元开始，该体积元是这样选取的，即在 $t_1 = (t - r_1/c)$ 时刻电荷的“后”端占据着 ΔV_1 ，如图21-6 (b) 所示。然后当我们计算 $\rho_2 \Delta V_2$ 时，就必须用到在稍微迟 一点的时刻 $t_2 = (t - r_2/c)$ 的电荷位置，这时电荷所处位置如图21-6 (c) 所示。对于 ΔV_3 ， ΔV_4 等等，可依此类推，现在就能算出那个和了。

由于每个 ΔV_i 的厚度为 w ，所以它的体积为 wa^2 。于是与电荷分布重叠的每个体积元含有电量 $wa^2\rho$ ，其中 ρ 为立方体内的电荷密度——我们认为它是均匀的。当电荷至点（1）的距离很大时，通过令一切位于分母上的 r_i 都等于某一平均值，如令等于该电荷中心的推迟位置 r' ，那么我们这样做造成的误差将是忽略的。于是式（21.30）的总和便是

$$\sum_{i=1}^N \frac{\rho wa^2}{r'},$$

在这里， ΔV_N 就是如图21-6（e）所示的、与电荷分布重叠的最后那一个 ΔV_i 。于是总和显然是

$$N \frac{\rho wa^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{Nw}{a} \right).$$

现在 ρa^3 恰好就是总电荷 q ，而 Nw 则是如图21-6（e）所示的那个长度 b 。因此我们有

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right). \quad (21.31)$$

b 是什么？它是立方体电荷的边长再加上 $t_1 = (t - r_1/c)$ 与 $t_N = (t - r_N/c)$ 之间电荷移动的距离——这就是在如下时间内

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N) / c = b / c$$

电荷所行经的距离。由于电荷的速率为 v ，所以经过的距离为 $v \Delta t = vb / c$ ，但长度 b 却是这个距离加上 a ，

$$b = a + \frac{v}{c}b.$$

解出 b ，得

$$b = \frac{a}{1 - v/c}.$$

当然，所谓 v ，我们指的是在推迟时刻 $t' = (t - r'/c)$ 的速度，这可以通过写成 $(1 - v/c)_{\text{推迟}}$ 而指明出来，因此关于势的方程式(21.31)就变成

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{(1 - v/c)_{\text{推迟}}}.$$

这一结果与我们上面的断言即式(21.29)相符。这里存在一个修正项，它是由于积分“扫过该电荷”时电荷正在运动引起的。当电荷朝着点(1)运动时，它对该积分的贡献增加了一个比值 b/a 。因此，正确的积分就是 q/r' 乘以 b/a ，后者即是 $1/(1 - v/c)_{\text{推迟}}$ 。

如果电荷速度方向并非朝着观察点(1)，那就可以看出，重要的只是朝着点(1)的速度分量。把这个速度分量称为 v_r ，则修正因子

为 $1/(1-v_r/c)$ 推迟。并且，对于任何形状——不一定是立方体——的电荷分布，我们做过的分析按完全相同的方式进行。最后，由于电荷的“尺寸” a 并未进入最终的结果，所以当把电荷缩小至任何尺寸——甚至缩小成一点时，上述结果同样成立。对于一个以任意速度运动的点电荷，普遍的结果是标势为

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' (1 - v_r/c)_{\text{推迟}}}, \quad (21.32)$$

这个式子往往写成等效的形式：

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)_{\text{推迟}}}, \quad (21.33)$$

式中 $\mathbf{r}$ 是从电荷指向正在计算 ϕ 的那个点 (1) 的矢量，而所有在括号内的量都必须是它们在推迟时刻 $t' = t - r'/c$ 的值。

当我们由式 (21.16) 计算有关一个点电荷的势 A 时，同样的事情也会发生。电流密度为 $\rho \mathbf{v}$ ，而对 ρ 的积分与刚才求 ϕ 时相同。所以矢势为

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{q\vec{\mathbf{v}}_{\text{推迟}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 (\mathbf{r} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)_{\text{推迟}}}. \quad (21.34)$$

有关点电荷的势最初是由李纳和维谢尔导出的，因而被称为李纳-维谢尔势。

要把这一环节接回到式 (21.1) 上去，只需从这些势算出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ (利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$)。现在这仅是个算术问题。然

而，这项算术相当繁复，所以将不列出所有的细节。也许你会相信我们所说的话，式（21.1）就同上面所导出的李纳-维谢尔势相当^[2]。

§21-6 匀速运动电荷的势；洛伦兹公式

下一步我们希望应用李纳-维谢尔势于一种特殊情况——即找出电荷沿一直线做匀速运动时所产生的场，以后再用相对论原理来求它。现在已经知道，当我们站在电荷的静止参照系中时势会怎样。当电荷在动时，则可以通过从一个参照系到另一个参照系的相对论性变换把每样东西都算出来。但相对论起源于电和磁的理论。洛伦兹变换式（第1卷第15章）是洛伦兹在研究电和磁的方程式时发现的。为了使你能理解事情的由来，我们希望证明麦克斯韦方程组确会导致洛伦兹变换。我们从直接按照麦克斯韦方程组的电动力学来计算一个匀速运动电荷的势开始。我们已经证明，麦克斯韦方程组对一个运动电荷会导致曾在上一节中得到的势。因此，当我们引用这些势时，也就是在应用麦克斯韦理论。

设有一个沿 x 轴以速率 v 运动的电荷。我们要求出如图21-7所示的点 $P(x, y, z)$ 的势。如果 $t=0$ 时电荷处在原点，则在时刻 t 该电荷已处于 $x=vt$ ， $y=z=0$ 的点。可是，我们所必须知道的却是在推迟时刻

$$t' = t - \frac{r'}{c} \quad (21.35)$$

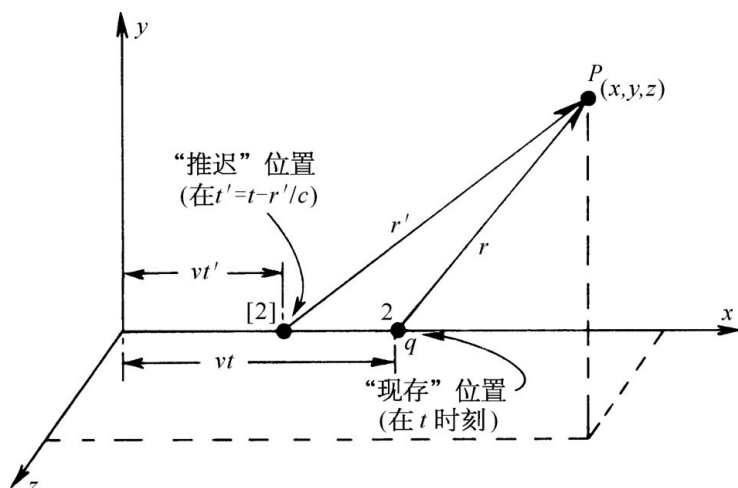


图21-7 求出一个沿 x 轴以匀速运动的电荷在 P 点的势

电荷的位置，式中 r' 为从该推迟时刻的电荷位置至 P 点的距离。在这一较早时刻 t' ，电荷位于 $x = vt'$ 处，因而

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}. \quad (21.36)$$

为求得 r' 或 t' ，得将这个方程同式 (21.35) 结合起来。首先，通过式 (21.35) 解出 r' 并代入式 (21.36) 中把 r' 消去。然后对两边平方得到

$$c^2 (t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2,$$

这是关于 t' 的一个二次方程。把那些平方的二项式都展开，并把含 t' 的相似项收集起来，则可得

$$(v^2 - c^2) t'^2 - 2(xv - c^2 t) t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$

由此解出 t' ，

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}. \quad (21.37)$$

为求得 r' ，就得把这个 t' 的表示式代入下式：

$$r' = c(t - t').$$

现在我们准备由式（21.33）来求 ϕ ，由于 $\mathbf{v}$ 是恒量，所以这个式子变成

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'/c}. \quad (21.38)$$

$\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{r}'$ 方向的分量为 $v(x - vt')/r'$ ，因而 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'$ 正好是 $v(x - vt')$ ，而整个分母为

$$c(t - t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'\right].$$

代入来自式（21.37）中的 $\left(1 - v^2/c^2\right)t'$ ，对于 ϕ 我们获得

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}.$$

如果我们将上式重新写成下式，则更易于理解：

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (21.39)$$

矢势 $\mathbf{A}$ 是有附加因子 $\mathbf{v}/c^2$ 的相同的表示式：

$$\mathbf{A} = \frac{v}{c^2} \phi.$$

从式（21.39）中我们可以清楚地看到洛伦兹变换的起源。要是该电荷位于它本身的静止参照系中的原点，则它的势应该为

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}.$$

由于我们是在一个运动参照系中对它进行观察的，因而好像坐标应该通过下列式子进行变换：

$$x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$y \rightarrow y,$$

$$z \rightarrow z.$$

那正好就是洛伦兹变换，而我们刚才所做的实质上也就是洛伦兹发现它时所用过的方法。

不过，出现于式（21.39）前面的那个附加因子 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 又是怎么回事呢？另外，若在粒子的静止参照系中矢势 $\mathbf{A}$ 处处为零，则它在运动坐标系中表现成什么？我们不久将要证明， $\mathbf{A}$ 和 ϕ 在一起构成一个四元矢量，像粒子的动量 $\mathbf{p}$ 和总能量 U 那样。式（21.39）中

那个附加因子 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 就是当人们在变换一个四元矢量的分量时总会出现的同样的因子——就像电荷密度变换成 $\rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 那样。事实上，由式 (21.4) 和 (21.5) 就几乎可以明显地看出， $\mathbf{A}$ 和 ϕ 是一个四元矢量的分量，因为我们已在第13章中证明 $\mathbf{j}$ 和 ρ 是一个四元矢量的分量。

以后我们还将更详细地考虑有关电动力学方面的相对论；这里只希望向你们表明，麦克斯韦方程组如何自然地导致洛伦兹变换。这样，当你发现电和磁的规律已经符合爱因斯坦的相对论时，将不会感到诧异。我们无须像对牛顿力学定律所必须做的那样去加以“修补”。

[1] 这一公式首先由 *Oliver Heaviside* 于1902年发表。约在1950年它由R.P. 费曼独立导出，并作为对同步加速器辐射的一种优良想法在某些讲稿中曾经给出过。

[2] 如果你有大量纸张和时间，就可以自己试试将它算出来。那么，我们要提出两个建议：首先，不要忘记对 r' 取微商很复杂，因为它是 t' 的函数。其次，不要试图导出式 (21.1)，而是要算出其中所有各种微商，然后同你从式 (21.33) 和 (21.34) 的势所获得的 $\mathbf{E}$ 比较。

第22章 交流电路

§22-1 阻抗

在本课程中，我们的大部分工作目的在于与完整的麦克斯韦方程组相联系。在以上两章中，曾讨论了这些方程的重要结果。我们已经清楚，那些方程含有以前所算出的一切静态现象，以及在第1卷中就已相当详尽地谈及的那些有关电磁波和光的现象。麦克斯韦方程组给出上述两方面的现象，这些现象取决于人们所计算的场是靠近电流和电荷还是远离它们。对于中间的区域则没有什么有意义的东西可说，那里并未出现什么特殊现象。

然而，在电磁学中还有几个课题有待我们去处理。我们将要讨论有关相对论和麦克斯韦方程组的问题——即当人们相对于运动坐标系而观望那麦克斯韦方程组时所发生的情况，以及关于在电磁系统中的能量守恒问题，还有关于材料电磁性质的广泛课题。迄今为止，除了对于电介质的特性有过一点研究以外，我们只讨论过自由空间中的电磁场。而且，尽管在第1卷中我们已相当详尽地谈及光学的课题，但还有几件事情我们很想从场方程的观点出发重新讨论。

特别是要重新考虑有关折射率的课题，尤其是关于稠密材料方面的问题。最后，还要考虑与局限于一有限空间区域里的波相联系的现象。我们过去曾在研究声波时简单接触过这类问题。麦克斯韦方程组也导致表示电场和磁场约束波的那些解。我们将在以后某些章节中考

考虑这一具有重要技术应用的课题。为了引导到该课题上去，我们将从考虑低频时的电路特性着手。然后就可对下述两种情况进行比较：一种是麦克斯韦方程组的准静态近似适用的情况，而另一种则是高频效应占优势的情况。

因此，我们就将从上面几章中那巍峨而险峻的高峰降回到相对低水平的电路课题上来。然而将会见到，即使这么一个世俗课题，只要足够详细地加以考察，也能发现它包含极大的复杂性。

我们已在第1卷第23和25两章中讨论过电路的某些性质。现在再来重复其中某些内容，但会详细得多。我们将再度只同一些线性系统和全都按正弦形式变化的电压和电流打交道，这时，应用第1卷第23章中所描述的那种指数函数符号，就可应用复数来表示所有的电压和电流。于是，一个随时间变化的电压 $V(t)$ 就将被写成

$$V(t) = \hat{V} e^{i\omega t}, \quad (22.1)$$

式中 $\hat{V}$ 代表一个与 t 无关的复数。当然，实际上随时间变化的电压 $V(t)$ 是由上式右边的复数函数的实部给出的。

同样，所有其他随时间变化的量也都将被视作以相同的频率 ω 按正弦形式变化。因此，我们写出

$$\begin{aligned} I &= \hat{I} e^{i\omega t} && \text{(电流),} \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} && \text{(电动势),} \\ E &= \hat{E} e^{i\omega t} && \text{(电场),} \end{aligned} \quad (22.2)$$

等等。

多半时间我们将用 V , I , E ... (而不是用 $\hat{V}$, $\hat{I}$, $\hat{E}$...) 来写出方程, 但得记住, 时间的变化是由式(22.2)给出的。

在以往的电路讨论中曾经假定, 像电感、电容和电阻这种东西你们都已熟悉。现在要来稍微详尽地看看这些所谓理想电路元件指的是什么。我们将从电感开始。

电感是这样制成的, 即把许多匝的导线绕成一个线圈形式, 并从其两端接至距离线圈相当远的接头上, 如图22-1所示。我们要假定, 由线圈中电流所产生的磁场并未强烈地向外扩展到全部空间, 从而不会与电路的其他部分发生相互作用。通常可以这样安排, 把线圈绕成一个环形的式样, 或把线圈绕在某一块适当的铁芯上, 从而约束磁场, 或通过把线圈放在某一个适当的金属盒之内, 如图22-1所简略指明的那样。在任何情况下, 我们都假定, 在端点 a 和 b 附近的外部区域里仅有微不足道的磁场。我们也要假定, 可以忽略线圈导线里的任何电阻。最后, 还将假定, 那些出现在导线表面上用以建立电场的电荷量是可以忽略的。

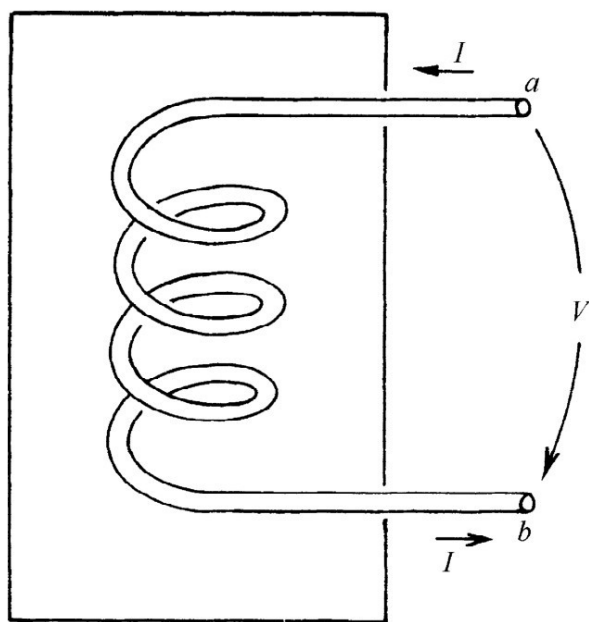


图22-1 电感

具备了所有这些近似性，就可以有一个所谓“理想”电感（以后我们还会回过头来讨论在实际电感中所发生的事情）。对于理想电感，我们说它的端路电压等于 $L (dI/dt)$ 。现在来看看为什么会这样？当有电流通过电感时，正比于这个电流的磁场在线圈内部便建立了起来。若电流随时间变化，则这磁场也会变化。一般说来， $\mathbf{E}$ 的旋度等于 $d\mathbf{B}/dt$ ；或者换句话说， $\mathbf{E}$ 环绕任何闭合路径的线积分等于穿过该回路 $\mathbf{B}$ 通量的变化率的负值。现在假设我们考虑下述路径：由端点 a 开始沿线圈（总是保持在导线之内）抵达端点 b ，然后在该电感外面的空间经过空气从端点 b 回到端点 a 。 $\mathbf{E}$ 环绕这一闭合路径的线积分可以写成两部分之和：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\substack{a \\ \text{经由线圈}}}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\substack{b \\ \text{线圈外面}}}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.3)$$

正如以前已经了解的，在一理想导体内部不可能有电场（最微小的场都可能产生无限大的电流）。因此，从 a 至 b 经由线圈的积分等于零。 $\mathbf{E}$ 线积分的整个贡献都是来自该电感外面从 b 至 a 的那一段路径。既然我们已经假定，在该“盒子”外面的空间里不存在磁场，则这部分积分就与所选取的路径无关，因而我们可以对两端的电势下定义。这两端电势的差就是所谓的电压差或简称为电压 V ，因而我们有

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

这个整个线积分以前曾称为电动势 $\mathcal{E}$ ，当然也就等于线圈里磁通量的变化率。我们早已明白，这一电动势与电流的负变化率成正比，因而就有

$$V = - \mathcal{E} = L \frac{dI}{dt},$$

式中 L 是线圈的自感。由于 $dI/dt = i\omega I$ ，所以我们有

$$V = i\omega LI. \quad (22.4)$$

描述理想电感的方法，举例说明了解决其他理想电路元件——通常称作“集总”元件——的一般方法。这些元件的性质完全由出现在两端点处的电流和电压来描述。通过做些适当近似，就有可能忽略那些出现在物体内部的场的巨大复杂性，在内部与外部发生的事情之间划清了界限。

对于一切电路元件，我们都会找到一个像式（22.4）那样的关系式，其中电压正比于电流，而其比例常数一般说来都是一复数。这个复值比例系数称为阻抗，并通常写为 z （不要同 z 坐标混淆起来）。它一般是频率 ω 的函数。因此，对于任何集总元件来说就可以写出

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z. \quad (22.5)$$

对于电感则有

$$z \text{（电感）} = z_L = i\omega L. \quad (22.6)$$

现在让我们从同样观点来看看电容^[1]。一个电容器包括两块导电板，并各自引出导线至适当的终端。这两块板可以有任何形状，并且通常由某种介电材料隔开。我们大略地把这样一种情况画在图22-2上，再做出几个简化假定。首先，假定板和导线都是理想导体。其

次，假定两板间的绝缘相当完美，以致不会有电荷能够通过该绝缘物质从一板流至另一板。再其次，假定这两块导体互相靠近但远离其他一切导体，以致所有离开其中一板的场线都将终结在另一板上。这样，在两板上的电荷就将永远等量异号，而在板上的电荷比起那些在接线表面上的要多得多。最后，我们假定在该电容器附近不会有磁场。

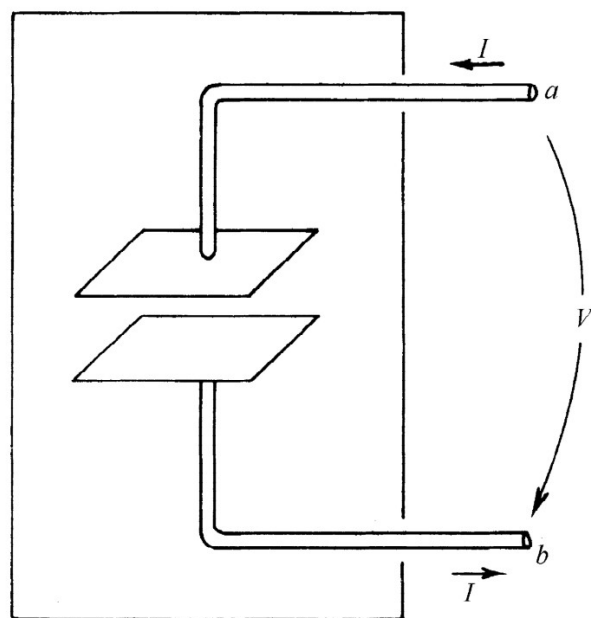


图22-2 电容

现在设想考虑 $\mathbf{E}$ 环绕下述回路的线积分，即从端点 a 开始，沿导线内部达到该电容器的上板，然后越过两板之间的空间，又从下板通过导线而到达端点 b ，并在电容器外面的空间返回到端点 a 。由于没有磁场，所以 $\mathbf{E}$ 绕这个闭合路径的线积分就是零。这个积分可以分成三部分：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{沿着导线}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{在两板间}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.7)$$

沿导线的积分为零，因为在理想导体里不存在电场。在电容器外面从 b 至 a 的积分等于在两端点间的电势差的负值。由于我们设想这两块板总是孤立于世界上其他部分的，故在这两块板上的总电荷就必须为零；如果上板有电荷 Q ，则在下板会有相等而相反的电荷 $-Q$ 。以前我们已知道，若两导体拥有相等而相反的电荷，即正负 Q ，这两板间的电势差就会等于 Q/C ，其中 C 称为这两个导体的电容。根据式(22.7)， a 和 b 两端点间的电势差等于两板间的电势差。因而我们有

$$V = \frac{Q}{C}.$$

从端点 a 进入（并从端点 b 离开）电容器的电流 I 等于 dQ/dt ，即板上电荷的变化率。把 dV/dt 写成 $i\omega V$ 后，便可按照如下方式写出电容器的电压与电流的关系：

$$i\omega V = \frac{I}{C},$$

亦即

$$V = \frac{I}{i\omega C}. \quad (22.8)$$

这样，电容器的阻抗 z 为

$$z(\text{电容器}) = z_c = \frac{1}{i\omega C}. \quad (22.9)$$

我们要考虑的第三种元件是电阻。可是，由于还没有讨论过实际材料的电学性质，所以我们不准备谈论在真实导体内部发生的事情。因此，只好接受这样一个事实，即在真实材料内部会有电场存在，而这些电场能够引起电荷流动——也就是说，产生了电流——并且这个电流与电场从导体的一端至另一端的积分成正比。然后，我们设想一个按照简图22-3建立起来的理想电阻。两条被认为由理想导体构成的导线分别从 a 点与 b 点连接至一根电阻性材料棒的两端。根据我们常用的论证方法，两端点 a 和 b 间的电势差等于外电场的线积分，而这也等于通过电阻性材料棒的电场的线积分。从而得出通过该电阻的电流 I 与端电压 V 成正比：

$$I = \frac{V}{R},$$

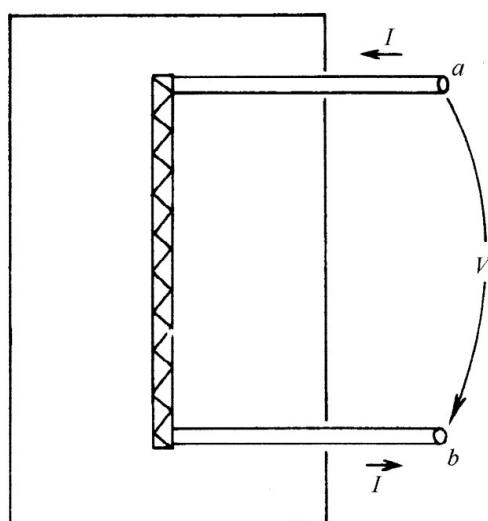


图22-3 电阻

式中 R 称为电阻。以后我们还将看到，对于实际导电材料，电流与电压间的关系只近似为线性。我们也将看到，这一近似的正比性只有当频率不太高时才被预期与电流和电压的变化频率无关。于是，对交变电流来说，跨越电阻的电压与电流同相位，这意味着该阻抗是实数：

$$z \text{ (电阻)} = z_R = R. \quad (22.10)$$

关于三种集总电路元件——电感、电容和电阻——的上述结果，我们将其概括在图22-4中。在该图中，以及在上面那些图中，我们都用一个从一端指向另一端的箭头来表明电压。如果电压是正的——也就是说，端点 a 比端点 b 处于较高的电势——那么该箭头便指向一个正“电压降”的方向。

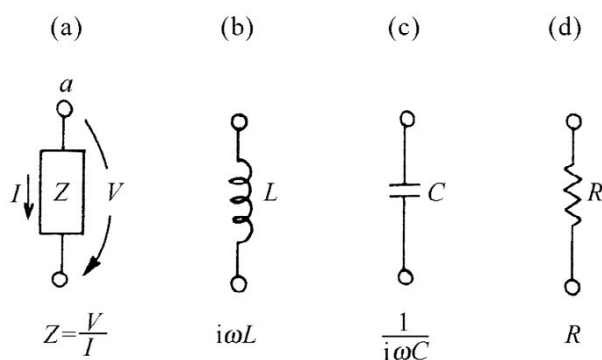


图22-4 理想的集总电路元件（被动的或无源的）

尽管我们现在所谈的是交流电，但当然也可通过取频率 ω 趋于零的极限而包括载有稳恒电流电路的特殊情况。对于零频率——也即对于直流——来说，电感的阻抗趋于零；它变成短路了。对于直流，电容器的阻抗趋于无限大；它变成断路了。由于电阻的阻抗与频率无关，所以它是分析一个直流电路时唯一遗留下来的元件。

迄今为止所描述过的那些电路元件中，电流与电压都是相互成比例的。倘若其中一个等于零，另一个也同时为零。我们往往会这样想：一个外加电压是造成电流的“原因”，或者电流会引起两端点间的电压，因此，在某种意义上，元件是会对所“施”的外部条件发生“响应”的。由于这一原因，这些元件便称为被动元件（或无源元件）。这样，与它们形成对照的是，即将在下节讨论的、作为电路中的交变电流或电压之源的、诸如发电机那一类的主动元件（或有源元件）。

§22-2 发电机

现在要来谈谈有源电路元件——一种电路中电流和电压的源——即发电机。

假定有一个像电感那样的线圈，只是它的匝数很少，以致可以忽略它本身电流的磁场。然而，这一线圈被置于或许由诸如旋转磁铁所产生的变化磁场之中，如图22-5所示（以前就知道，像这样的旋转磁场也可由通有交变电流的一组适当的线圈产生）。我们必须再做出几个简化假定，这些假定全都与上面对电感情况所描述的相同。特别是，我们将假定，该变化磁场被局限在线圈附近的确定区域而不会出现在发电机外面两端点之间的空间里。

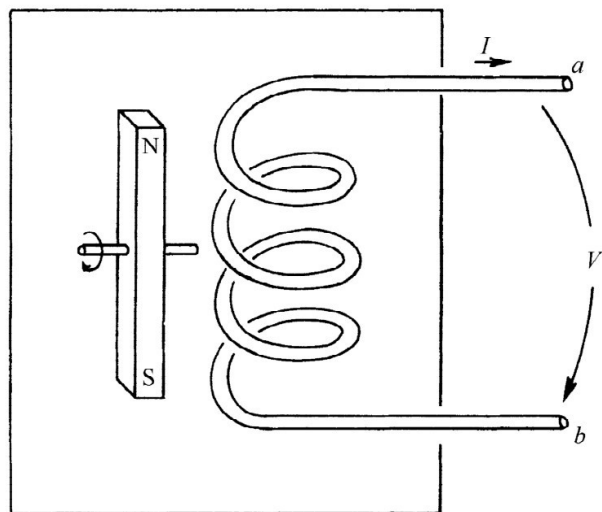


图22-5 含有一个固定线圈和一个旋转磁场的发电机

仔细地按照我们曾对电感所做的分析，考虑环绕如下一个闭合回路对 $\mathbf{E}$ 进行线积分，即从端点 a 开始，经过线圈到达端点 b ，并在两端点之间的空间里返回到起点。我们再次得出结论，两端点间的电势差等于 $\mathbf{E}$ 环绕该回路的总线积分：

$$V = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

这个线积分等于该电路中的电动势，因而跨越发电机两端点的电势差 V 也就等于该线圈的匝连磁通量的变化率：

$$V = -\mathcal{E} = \frac{d}{dt}(\text{磁通量}). \quad (22.11)$$

对于一部理想发电机来说，我们假定该线圈的匝连磁通量是由一些外加条件——诸如旋转磁场的角速度——所确定的，而无论如何不受流经发电机电流的影响。这样看来，发电机——至少是我们现在所考虑的理想发电机——并不是一个阻抗，跨越它两个端点的电势差由任意给定的电动势 $\mathcal{E}(t)$ 所确定。这种理想发电机由图22-6所示的符号表

示，小箭头代表电动势取正值时的方向，图中发电机的正电动势将产生一个 $V=E$ 的电压，其中 a 端的电势比 b 端高。

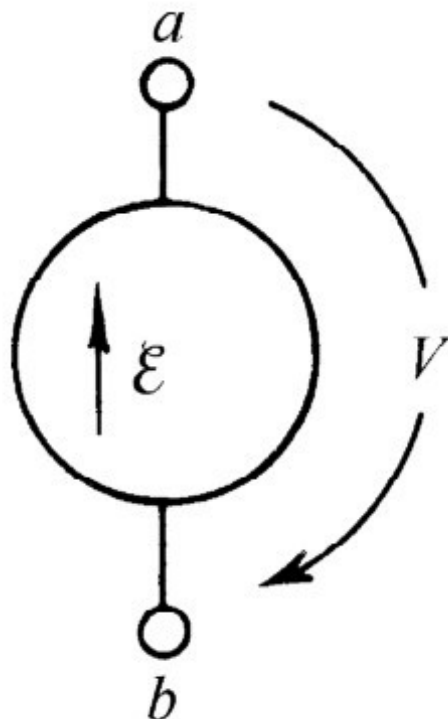


图22-6 理想发电机的符号

还有另一种制造发电机的方法，虽然内部很不相同，但在两端点以外所发生的事态则与刚才所描述的无法加以区别。假设有一个金属线圈在一固定的磁场中旋转，如图22-7所示。我们画出一个条形磁铁来表明有磁场存在；当然，它也可以由任何其他恒定磁场源、诸如一个载有恒定电流的附加线圈来代替。就像图中所示的那样，利用滑动接触或“汇电环”就可把旋转线圈同外界的连接建立起来。我们仍然对出现在 a 与 b 两端点间的电势差感兴趣，当然，它就是沿着发电机之外一条路径从端点 a 至端点 b 的电场积分。

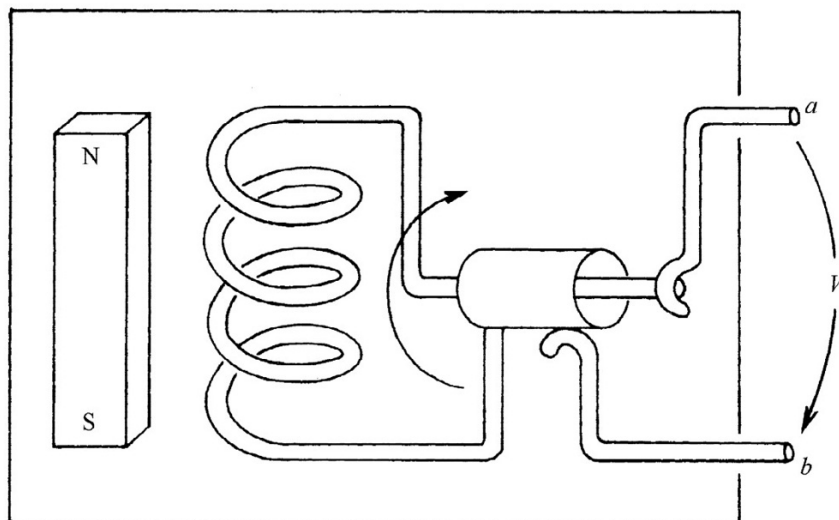


图22-7 含有一个旋转于一固定磁场中的线圈的发电机

此刻在图22-7的系统中不存在变化着的磁场，因而我们起初也许会怀疑怎么会有任何电压出现在发电机的两端。事实上，在发电机内部的任何一处都没有电场。我们照常假定，作为理想元件，在其内部的导线是由理想的导电材料制成的，而正如我们曾经多次说过的那样，在一理想导体内部电场等于零。但那是不正确的。当导体在一磁场中运动时，它就不正确了。正确的说法是，在一理想导体内部作用于任一电荷上的合力必须为零，否则就会有自由电荷无限大地流动。所以永远正确的是，电场 $\mathbf{E}$ 加上导体速度与磁场 $\mathbf{B}$ 的叉积——那就是作用在单位电荷上的合力——在导体内部必须为零：

$$\mathbf{F}/\text{单位电荷} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{在理想导体中}), \quad (22.12)$$

式中 $\mathbf{v}$ 代表导体的速度。只要导体的速度 $\mathbf{v}$ 为零，则我们以前关于理想导体内部没有电场的说法是完全正确的，不然的话，正确的说法应由式 (22.12) 所提供。

回到图22-7的发电机上来，我们现在明白，通过发电机的导电路径从端点 a 至端点 b 电场 $\mathbf{E}$ 的线积分必定等于在相同路线上 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的线积分，即

$$\int_{\substack{a \\ \text{在导体内}}}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\substack{a \\ \text{在导体内}}}^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.13)$$

可是，这仍然是正确的：即环绕一个包括该发电机外面从 b 至 a 的归途在内的那条完整的回路 $\mathbf{E}$ 的线积分仍必定为零，因为这里并不存在变化的磁场。因此，式（22.13）中的第一个积分也就等于 V ，即两端点间的电压。事实证明，式（22.13）右边的积分恰好就是穿过该线圈的通量匝连数的变化率，因而——根据通量法则——等于线圈中的电动势。因此，我们再度得到：跨越两端点间的电势差等于该电路中的电动势，它与式（22.11）相符。所以，无论是其内部磁场在一固定线圈附近变化着的发电机，还是其内部线圈在一固定磁场中运动的发电机，它们的外部性质都相同。有一个电势差跨越两端点之间，它与电路中的电流无关而仅仅取决于该发电机内部一些任意给定的条件。

只要我们试图从麦克斯韦方程组的观点来理解发电机的作用，我们也许会问及像手电筒电池那样的普通化学电池。这也是一种发电机，即是一个电压源，尽管它只出现在直流电路中。原理最简单的一种电池如图22-8所示。我们设想有两块浸没在某一种化学溶液中的金属板。假定该溶液含有正的和负的离子。也假定其中一种离子（如负离子）比那带有异号电荷的离子要重得多，以致它依靠扩散过程而通过溶液的运动慢得多。其次，我们还假定，用种种方法来安排使得溶液浓度从液体的一部分变化至另一部分，以致两种符号的离子在比方说下板附近的数目要远大于在上板附近。由于正离子的迁移率较大，

它们便将更快地漂移到浓度较低的那一个区域里，使得有稍微超额的正离子到达上板。于是上板就将带有正电而下板则有一净负电荷。

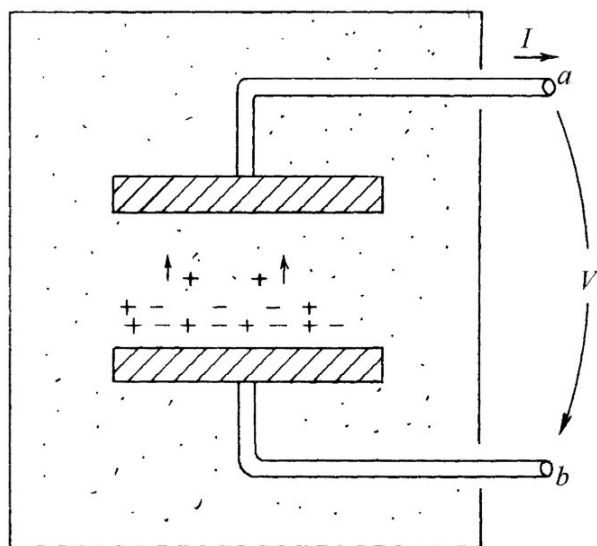


图22-8 化学电池

当有越来越多的电荷扩散至上板时，这一块板的电势就将升高至这样一种程度，即在两板间所引起的电场对离子所施之力恰好抵偿其超额迁移率，因而电池中的两极板就迅速达到一个标志其内部结构性能的电势差。

正如上面对于一理想电容器所论证的那样，我们见到，当不再有任何离子扩散时， a 和 b 两端点间的电势差恰好等于两极板间的电场的线积分。当然，电容器与这样一个化学电池之间是有本质差别的。倘若把电容器的两端短路一会儿，电容器将会放电而不再有任何电势差跨越两端点之间。而在化学电池的情况下，电流却可以继续从端点引出而不致在电动势上有任何改变——当然一直到电池内的化学药品耗尽时为止。在一个实际电池中，会发现跨越端点的电势差随着从电池所引出的电流增大而降低。然而，在保持已做出的那种抽象化情况

下，我们可以设想一个理想电池，跨越于端点间的电压与电流无关。这样，一个实际电池便可视作一个串联着一个电阻的理想电池。

§22-3 理想元件网络：基尔霍夫法则

就像上一节中我们曾见到的，利用元件外面所发生的事情来描述一个理想电路元件是十分简单的。电流与电压彼此线性地联系着。可是在元件内部真正发生的情况却是非常复杂的，凭借麦克斯韦方程组来给出一个精确的描述十分困难。试想象对一部含有数以百计的电阻、电容和电感的收音机里面的电场和磁场设法提供精确描述。要对这样一件事情运用麦克斯韦方程组来加以分析，那会是无法做到的。但通过做出曾在§22-2中描述过的多种近似以及对实际电路元件的基本特点用理想化的办法加以概括，对一个电路用相对直截了当的方法来分析就成为可能的了。现在我们要来说明那是怎样进行的。

设有一个电路，含有一部发电机和几个互相连接在一起的阻抗，如图22-9所示。按照我们的近似条件，在各个电路元件的外部区域并没有磁场，因此环绕任何未曾通过任何元件的曲线 $\mathbf{E}$ 的线积分为零。然后考虑由虚线所构成的曲线 Γ ，它完全围绕着图22-9中的电路。 $\mathbf{E}$ 环绕这一条曲线的线积分由好几部分构成，每一部分就是从一电路元件的一端至另一端的线积分。这个线积分已被我们称为跨越该电路元件的电压降，于是整个线积分就恰好是跨越电路中所有元件的电压降之和：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum V_n.$$

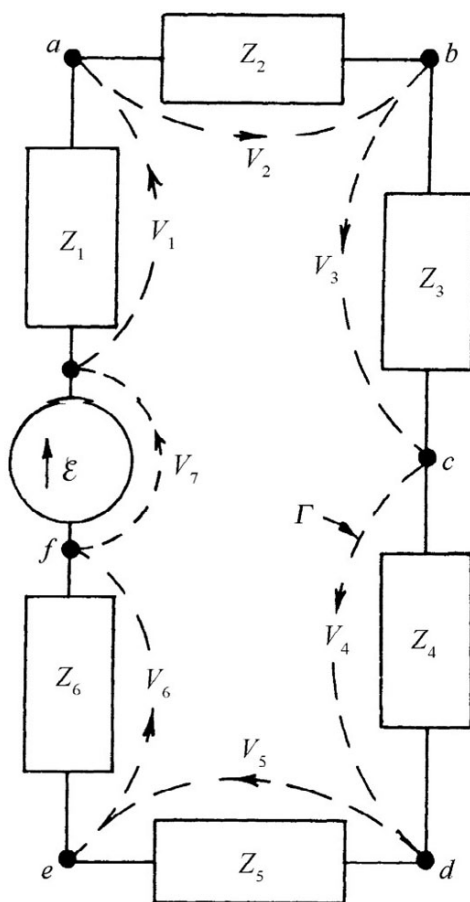


图22-9 环绕任一闭合路径的电压降之和为零

由于这一线积分为零，所以我们得到：环绕整个电路回路的电势差之和等于零，即

$$\sum_{\text{环绕任一回路}} V_n = 0. \quad (22.14)$$

这一结果得自麦克斯韦方程组中的一个方程——即在没有磁场的区域里，环绕任一闭合回路 $\mathbf{E}$ 的线积分为零。

假设现在考虑一个像图22-10所示的电路。连接 a ， b ， c 和 d 各端点的那条水平线是为着表明这些端点都互相连接着，或者它们都是由电阻可以忽略的导线连接着。无论如何，这种画法的意思是： a ， b ，

c 及 d 诸端点全都处于相同的电势；同样地， e ， f ， g 及 h 诸端点也都处于共同的电势。于是横跨四个元件中每一个的电压降 V 都相同。

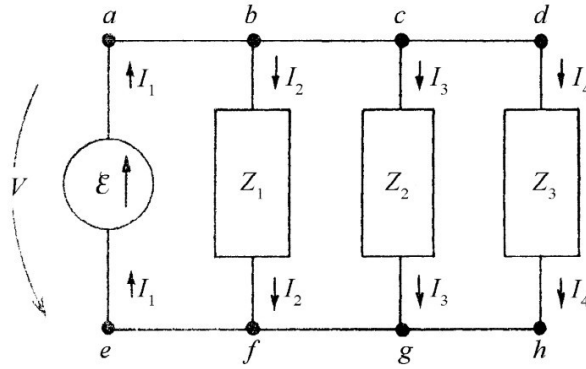


图22-10 流入任一个分支点的电流之和为零

现在我们的理想化条件之一已经成为，在各阻抗的端点上所积聚起来的电荷都可以忽略。现在再进一步假定，任何连接各端点的导线上的电荷也都可以忽略。于是电荷守恒律要求，任何离开某个电路元件的电荷都应立即进入另一个电路元件。或者，也同样可以说，我们要求流入任何分支点的电流之代数和必须为零。当然，所谓分支点我们指的是诸如 a ， b ， c ， d 等互相连接着的任何一组端点。像这样互相连接的一组端点我们往往称之为“节点”。于是对于图22-10的电路，电荷守恒便要求

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (22.15)$$

进入由 e ， f ， g 和 h 四端点构成的那个节点的诸电流之和也是零：

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (22.16)$$

当然，这和式 (22.15) 是一样的。这两个方程并非互相独立。普遍的法则是，流进任一个节点的电流之和必须为零。

$$\sum_{\text{流进一个节点}} I_n = 0. \quad (22.17)$$

上面关于环绕一个闭合回路的电压降之和为零的结论，在一个复杂电路中必须应用于其中任一回路。并且，有关流进一个节点的电流之和为零的结果对于任何个节点也必然是正确的。这两个方程称为基尔霍夫法则。有了这两个法则，就能够在无论任何网络中解出其中的电流和电压。

现在假定考虑图22-11中那个更复杂的电路。在这一电路中我们将怎样找出其中的电流和电压呢？可以按照下述直截了当的办法把它们求出。分别考虑出现在该电路中的那四个附属闭合电路（例如，其中一个回路从端点 a 至端点 b 又至端点 e 和 d 而返回到端点 a ）。对于每一个回路，我们写出基尔霍夫法则的第一个方程——环绕每一回路的电压之和为零。必须记住：若顺着电流的方向行进，则电压降就算作为正，但若在经过某一元件时与电流的方向相反，则电压降应算为负；并且还必须记住，跨越一部发电机的电压降是在该方向上电动势的负值。这样，若我们考虑那一个从端点 a 出发而又结束于其上的小回路，就会得出如下方程：

$$z_1 I_1 + z_3 I_3 + z_4 I_4 - E_1 = 0.$$

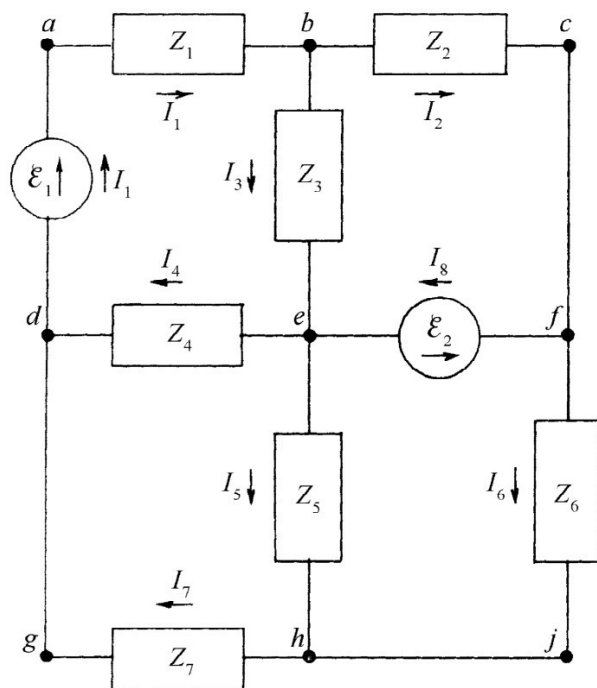


图22-11 用基尔霍夫法则来分析电路

应用相同的法则于其余的回路，我们便会获得三个以上同类型的方程。

其次，对于该电路中每一个节点，还必须写出电流方程。例如，对那些流入节点***b***的电流求和时便会给出方程

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0.$$

同理，对那个标明为***e***的节点则会有电流方程

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

图上所表示的这个电路总共有五个这样的电流方程。但是，结果证明，这些方程中的任一个都可从其他四个导出来，因此就只有四个独立的电流方程。这样，我们总共有八个独立的线性方程：四个电压方

程和四个电流方程。有了这八个方程，就可以解出八个未知电流。一旦这些电流求出，该电路便算是已经解决了。跨越每个元件的电压降由流经该元件的电流乘以其阻抗而给出（或者，在有电压源的情况下，电压降是已知的）。

我们已见到，当写出电流方程时，会获得一个与其他诸方程并不独立的方程。一般也可能写下太多的电压方程。例如，在图22-11的电路中，虽然我们只考虑那四个小回路，但还有大量的其他回路，对它们也可以写出电压方程。例如，有一个沿路径 $abcfeda$ 的回路，还有另一个回路是沿 $abcfehgda$ 路径。你能够看出，存在许多个回路。在分析一个复杂电路时极易于得到太多的方程。有一些法则会告诉你如何处理以便仅仅写下最低限度数目的方程，但往往只要略微思考一下便能看出该怎样去得到形式最简单的适当数目的方程。而且，写出一两个超额方程也没有什么妨碍。它们将不会导致任何错误的答案，只是或许要做一些不必要的代数运算罢了。

在第1卷第25章中，我们曾经证明过，若两阻抗 z_1 和 z_2 互相串联，则它们等价于由下式给出的一个单独阻抗 z_s ：

$$z_s = z_1 + z_2. \quad (22.18)$$

我们也曾证明过，若两阻抗并联，则它们等价于一个由下式给出的单独阻抗 z_p ：

$$z_p = \frac{1}{1/z_1 + 1/z_2} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (22.19)$$

你如果回顾一下就将会看到，在导出这些结果时我们实际上已应用了基尔霍夫法则。往往可以通过反复运用关于阻抗串联和并联的公式来分析一个复杂电路。例如，图22-12中的电路就是可以这样分析的。首先， z_4 和 z_5 两阻抗可以由其并联等效阻抗来代替，而 z_6 和 z_7 两阻抗也是一样。然后，阻抗 z_2 可以同 z_6 和 z_7 的并联等效阻抗按串联法则结合起来。按照这样的方式进行下去，整个电路就可以简化成一部发电机同一个单独阻抗 Z 的串联。于是流经该发电机的电流就不过是 $\mathcal{E}/Z$ 。然后反过来进行计算，人们就能求出通过每一阻抗的电流了。

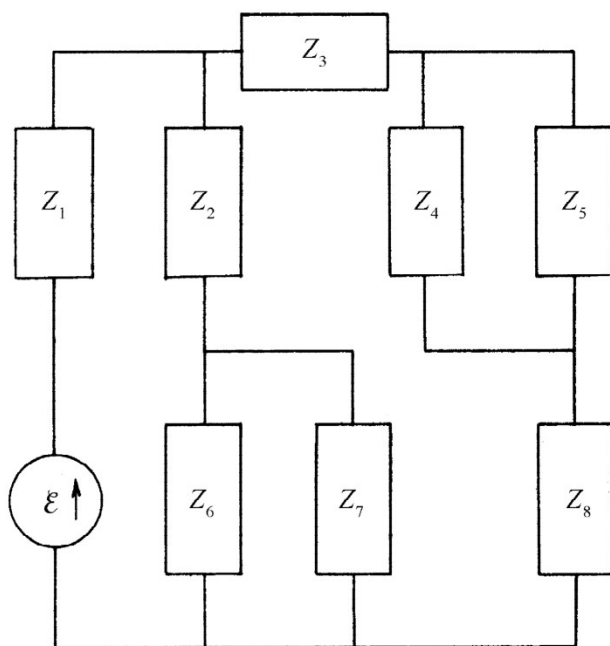


图22-12 一个可以用串联和并联组合来分析的电路

然而，也有一些十分简单的电路不能用这种办法来分析，图22-13所示的电路就是一个例子。要分析这个电路，一定要按照基尔霍夫法则写出电流和电压的方程。让我们来试一试吧。这里只有一个电流方程：

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

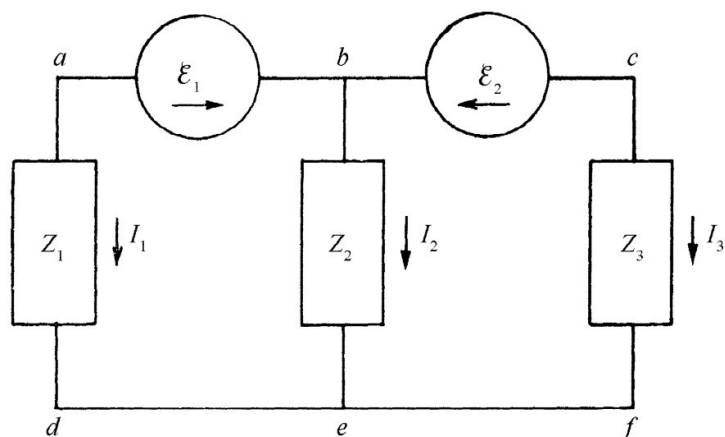


图22-13 一个不能用串联和并联组合来加以分析的电路

因而我们立即知道

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$

如果马上利用这一结果写出电压方程，便能节省一些代数运算。对于这个电路存在两个独立的电压方程，它们是

$$-\mathcal{E}_1 + I_2 z_2 - I_1 z_1 = 0$$

和

$$\mathcal{E}_2 - (I_1 + I_2) z_3 - I_2 z_2 = 0.$$

这里有两个方程和两个未知的电流。对这两个方程解出 I_1 和 I_2 ，使得

$$I_1 = \frac{z_2 \mathcal{E}_2 - (z_2 + z_3) \mathcal{E}_1}{z_1 (z_2 + z_3) + z_2 z_3} \quad (22.20)$$

和

$$I_2 = \frac{z_1 \mathcal{E}_2 + z_3 \mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3}. \quad (22.21)$$

第三个电流可从这两个电流之和获得。

另一个不能利用阻抗的串联和并联法则加以分析的电路例子如图22-14所示。像这样的电路称为“电桥”，它出现在许多用来测量阻抗的仪器中。对这一电路人们感兴趣的问题往往是：各阻抗必须怎样联系，才能使通过阻抗 Z_3 的电流为零。符合这一要求的条件将留给你们去找。

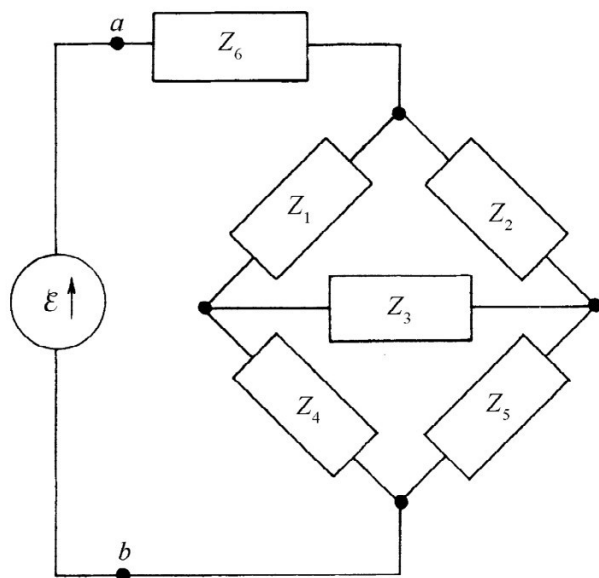


图22-14 一个桥式电路

§22-4 等效电路

假定把一部发电机 E 连接到一个含有某种复杂的阻抗互连电路中，如图22-15（a）所示。由于所有从基尔霍夫法则获得的方程都是

线性的，因而当解出流经该发电机的电流 I 时，我们就会得出结论： I 与 E 成正比。即可以写成

$$I = \frac{\mathcal{E}}{z_{\text{有效}}},$$

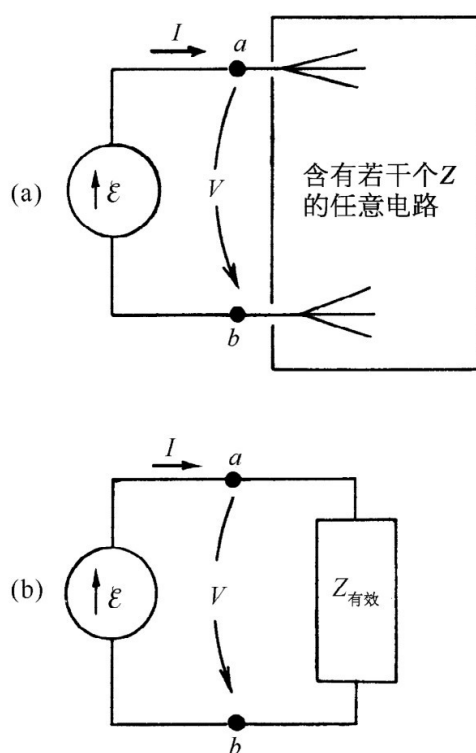


图22-15 任何无源元件的二端网络都相当于一个有效阻抗

现在式中 $z_{\text{有效}}$ 是某个复数，是该电路中所有元件的代数函数（如果该电路除了图中所示的那部发电机之外没有其他发电机，那么就不会有与 E 无关的任何附加项）。但这恰好就是我们应写出的关于图22-15 (b) 的电路方程。只要我们仅对 a 和 b 两端点左侧所发生的情况感兴趣，则图22-15的两个电路就是等效的。因此，我们能够做出一个

普遍陈述：无源元件的任何二端网络都可以由一个单独阻抗 $z_{\text{有效}}$ 来代替而不改变电路中其余部分的电流和电压。当然，这个陈述的内容不过是来自基尔霍夫法则——而最终来自麦克斯韦方程组的线性性质的一种表示。

这一概念可推广至同时含有若干部发电机和若干个阻抗的电路。假定我们是“从其中某一阻抗的观点”来看这样一个电路，而这个阻抗被称为 z_n ，如图22-16（a）所示。要是必须对整个电路的方程求解，则会发现两端点 a 和 b 之间的电压 V_n 是 I_n 的线性函数，我们可以把它写成

$$V_n = A - BI_n, \quad (22.22)$$

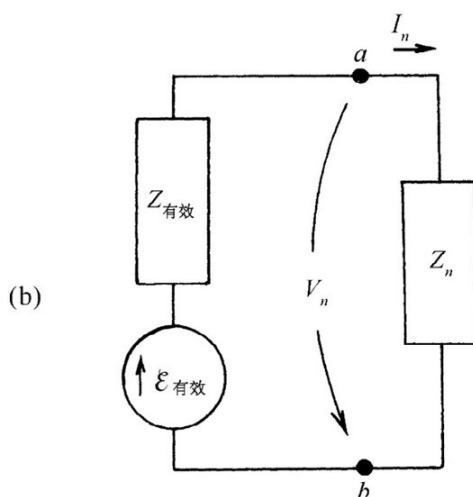
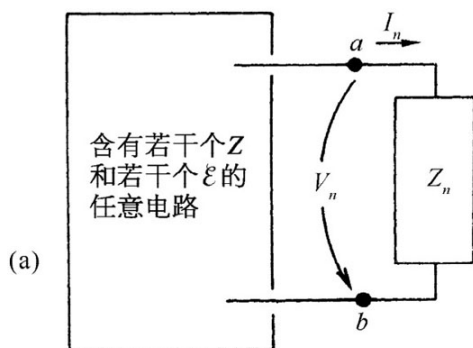


图22-16 任何二端网络都可以由串联一个阻抗的发电机来代替

式中 A 和 B 依赖于电路中端点左侧的发电机和阻抗。例如，对于图22-13的那种电路，我们求得 $V_1 = I_1 z_1$ 。这可以写成〔通过对式（22.20）的重新布置〕：

$$V_1 = \left[\left(\frac{z_2}{z_2 + z_3} \right) \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \right] - \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} I_1. \quad (22.23)$$

于是，把这一方程与有关阻抗 z_1 的方程，即 $V_1 = I_1 z_1$ ，互相结合就可获得全部的解，或者在一般情况下，通过将方程式（22.22）与

$$V_n = I_n z_n$$

相结合而获得全部的解。

现在若考虑把 z_n 连接至由发电机和阻抗构成的简单串联电路，如图22-16（b）所示，则与式（22.22）相应的方程为

$$V_n = \mathcal{E}_{\text{有效}} - I_n z_{\text{有效}},$$

只要我们令 $\mathcal{E}_{\text{有效}} = A$ ，而 $z_{\text{有效}} = B$ ，上式与式（22.22）完全相同。因此，若我们只对于在 a 和 b 两端点右侧所发生的情况感兴趣，则图22-16的那个任意电路始终可以由发电机与阻抗串联而成的等效结合体来代替。

§22-5 能量

我们已经看到，要在一个电感中建立起电流 I ，能量 $U = \frac{1}{2}LI^2$ 必须由外电路供应；当电流下降到零时，这能量又交还给外电路。在一个理想电感中并没有能量损耗机制。当有一交变电流通过一电感时，能量在它与电路的其他部分之间来回流动，递交给电路的能量的平均速率为零。这样，我们便说电感是一个无耗元件，在其中没有电能被消耗掉——也就是“损失”掉。

同样，一个电容器的能量 $U = \frac{1}{2}CV^2$ ，当电容器放电时，会归还给外电路。当一电容器置于交流电路中时，能量在其中流进流出，但每一周期中的净能流为零。一个理想电容器也是一个无耗元件。

我们知道，电动势是一个能源。当电流 I 沿电动势的方向流动时，能量以 $dU/dt = EI$ 的速率释放给外电路。如果电流是被电路中的其他发电机驱使——逆着电动势的方向流动，则这电动势将以速率 $E I$ 吸收能量；由于 I 是负的，所以 dU/dt 也将是负的。

如果一部发电机与一个电阻 R 相接，则通过该电阻的电流为 $I = E/R$ 。由发电机以速率 EI 供应的能量为该电阻所吸收。这一能量在电阻中变成热，从而使该电路的电能损失掉。这样，我们便说电能在电阻中耗散了。在电阻中能量被耗散的速率为 $dU/dt = RI^2$ 。

在交流电路中，能量消耗于电阻中的平均速率等于 RI^2 在一周中的平均值。由于 $I = \hat{I} e^{i\omega t}$ ——这我们实际指的是 I 正比于 $\cos\omega t$ ——所以在一周中 I^2 的平均值就是 $|\hat{I}|^2/2$ ，因为电流峰值为 $|\hat{I}|$ ， $\cos^2 \omega t$ 的平均值为1/2。

当一部发电机接至任意一个阻抗 z 时，能量的损失又将如何呢（当然，所谓“损失”，我们指的是电能转变为热能）？任何阻抗 z 都可以写成它的实部及虚部之和。这就是说，

$$z = R + iX, \quad (22.24)$$

式中 R 和 X 都是实数。从等效电路的观点出发，我们可以讲，任何阻抗相当于一个电阻与一个纯虚数阻抗——称为电抗——相串联，如图22-17所示。

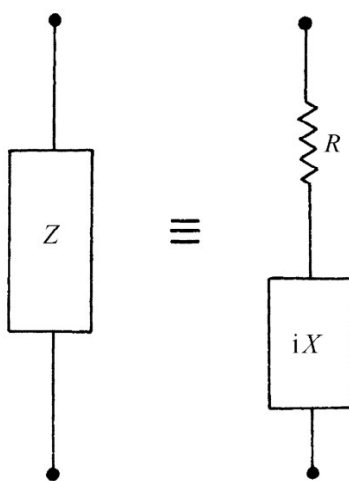


图22-17 任何阻抗都与纯电阻及纯电抗的串联组合等效

我们以前就知道，任何仅由一些 L 和 C 组成的电路都具有纯虚数的阻抗。由于平均来讲没有任何能量会在某一个 L 和 C 中损失，因而仅含有一些 L 和 C 的纯电抗将不会有能量损失。我们可以看到，在一般情况下对于电抗来说这必定是正确的。

如果一部具有电动势 $\mathcal{E}$ 的发电机被连接至图22-17的那个阻抗 z 上，则来自该发电机的电动势和电流便应有这样一个关系：

$$\mathcal{E} = I (R + iX). \quad (22.25)$$

要找出能量输出的平均速率，就要求出乘积 $\mathcal{E} I$ 的平均值。此刻我们必须小心！当处理这种乘积时，应与实数值 $\mathcal{E}(t)$ 和 $I(t)$ 打交道（只有当我们具有线性方程时，复变数函数的实部才会代表实际的物理量；现在我们所关心的是一个乘积，它肯定就不是线性的）。

假定我们选取 t 的原点以便使振幅 $\hat{I}$ 是一实数，比如 I_0 ，那么 I 的实际时间变化就由下式给出：

$$I = I_0 \cos \omega t .$$

式（22.25）的电动势是下式

$$I_0 e^{i \omega t} (R + iX)$$

的实部，也即

$$E = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t . \quad (22.26)$$

式（22.26）中的两项分别代表跨越图22-17中 R 和 X 的电压降。我们看到，那跨越电阻的电压降与电流同相，而那跨越纯电抗部分的电压降则与电流异相。

由发电机供应的能量消耗的平均速率 $\langle P \rangle_{\text{平均}}$ ，等于乘积 $\mathcal{E} I$ 在一周内的积分除以周期 T ，换句话说，

$$\langle P \rangle_{\text{平均}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} I dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t dt .$$

第一个积分为 $\frac{1}{2}I_0^2R$ ，而第二个积分为零。所以在阻抗 $z=R+iX$ 中的平均能量损失只取决于 z 的实部，并且等于 $I_0^2R/2$ 。这同我们以往关于在电阻中的能量损失结果相符，而在电抗部分并没有能量损失。

§22-6 梯形网络

现在我们来考虑一个可用串联和并联组合加以分析的有趣电路。假定从图22-18（a）的那个电路开始。可以立刻看出，从端点 a 至端点 b 的阻抗仅是 z_1+z_2 。现在让我们考虑一个稍微困难一点的电路，如图22-18（b）所示。本来可以利用基尔霍夫法则来分析这个电路，但用串联和并联的组合也容易加以处理。可用一个单独阻抗 $z_3=z_1+z_2$ 来代替右端的两个阻抗，如图22-18（c）所示。然后， z_2 和 z_3 两阻抗又可以用它们的等效并联阻抗 z_4 来代替，如图22-18（d）所示。最后， z_1 和 z_4 与一个单独阻抗 z_5 等效，如图22-18（e）所示。

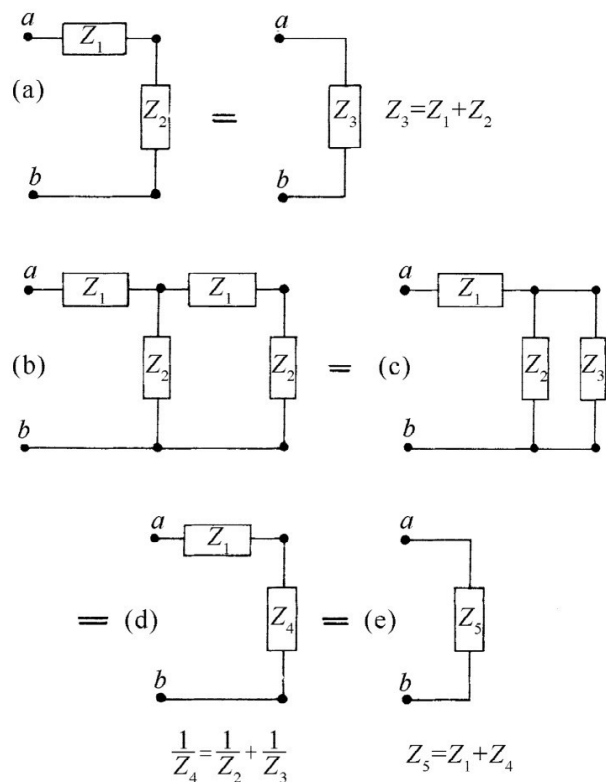


图22-18 梯形网络的有效阻抗

现在可以提出一个有趣的问题：要是我们在图22-18（b）的那个网络上永远保持增多一些节段——如图22-19（a）中虚线所示——将会发生什么样的情况呢？我们能否解出这样一个无限长的网络？噢，那并不怎么困难。首先，我们注意到，如果在这一无限长网络的“前”端再添加一节，它仍不会改变。的确，若我们添加一节于一无限长网络，它仍然是同样的无限长网络。假设把在这个无限长网络两端点 a 和 b 之间的阻抗称为 z_0 ，则在 c 和 d 两端点右侧的所有东西的阻抗也将是 z_0 。因此，就其前端来说，可以将该网络表达成如图22-19（b）所示。构成 z_2 与 z_0 的并联组合，并将这个结果与 z_1 相串联，我们便能立即写下这个组合的阻抗：

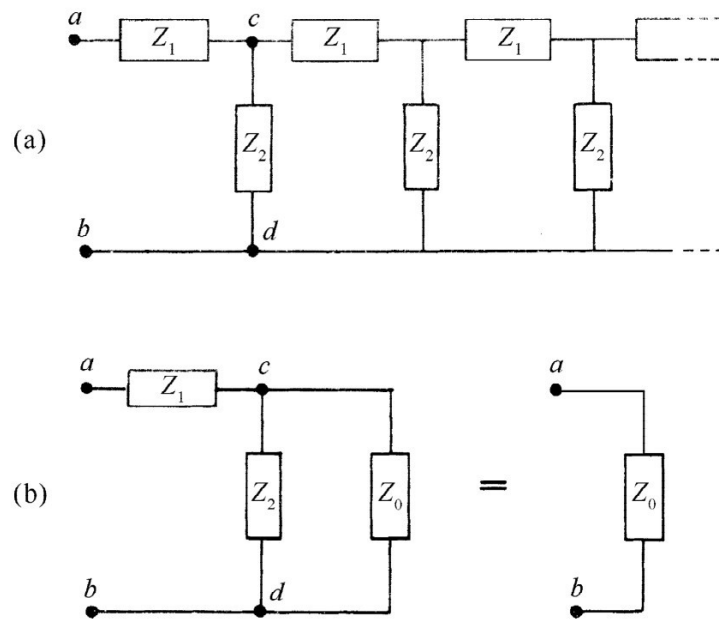


图22-19 无限长梯形网络的有效阻抗

$$z = z_1 + \frac{1}{1/z_2 + 1/z_0} \text{ 或 } z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

但这一阻抗也等于 z_0 ，因而得到这么一个方程：

$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

由此可以解出 z_0 ：

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{z_1^2/4 + z_1 z_2}. \quad (22.27)$$

因此，我们已求得含有反复串联和并联阻抗的无限长梯形网络的阻抗的解。阻抗 z_0 被称为这样一个无限长网络的特性阻抗。

现在让我们来考虑一个特殊例子，其中串联元件是一自感 L 而并联元件是一电容 C ，如图22-20（a）所示。在这种情况下，通过令 $z_1 = i\omega L$ 和 $z_2 = 1/(i\omega C)$ ，我们便可求得该无限长网络的阻抗。注意式（22.27）中的第一项正好是那头一个元件阻抗的一半。因此，要是把该无限长网络画成像图22-20（b）所示的那样，似乎就更为自然，或至少较为简单。若从端点 a' 去观看该无限长网络，则会知道该特性阻抗为

$$z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4}. \quad (22.28)$$

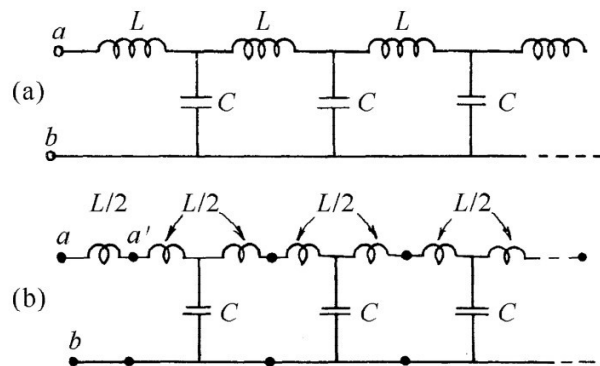


图22-20 一个 L - C 梯形网络以两种等效方式画出

现在就有两种有趣的情况，都取决于频率。如果 ω^2 小于 $4/(LC)$ ，则根号内的第二项将比第一项小，因而阻抗 z_0 将是一实数，反之，若 ω^2 大于 $4/(LC)$ ，则阻抗 z_0 将是一个纯虚数，并可写成

$$z_0 = i\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C}.$$

我们以前就曾经说过，一个仅含有诸如电感和电容那种虚数阻抗的电路，将有一个纯虚数的阻抗。目前正在研究的电路——仅含有一些 L 和一些 C ——在频率低于 $\sqrt{4/(LC)}$ 时其阻抗怎么能够是纯电阻呢？对于较高频率，阻抗为一纯虚数，这与我们以前的说法一致。对于较低频率，阻抗是一纯电阻，因而将吸收能量。该电路为什么会像电阻那样不断吸收能量，要是它仅由电感和电容所构成呢？答案：由于有无数个电感和电容，以致当源被连接到该电路上时，它会对第一个电感和电容供应能量，然后又供应那第二个、第三个，等等。在这种电路中，能量不断以一恒定速率被吸收，即从发电机那里稳恒地流出并进入该网络中去，所供应的这些能量被储存在下行线路中的那些电感和电容中去了。

这一概念暗示着在该电路中发生的情况有一个有趣的地方。我们预期，如果把一个源接到其前端，则这个源的效应将经由该网络向无限远的一端传播。波沿线向下的这种传播很像一根从它的驱动源吸收了能量的天线所发出的辐射。也就是说，我们期望，当阻抗是一实数、即 ω 比 $\sqrt{4/(LC)}$ 小时，这样一种传播就会发生。但当阻抗是一纯虚数、亦即 ω 比 $\sqrt{4/(LC)}$ 大时，就不该指望看到任何这种传播。

§22-7 滤波器

在上一节中，我们看到图22-20中的无限梯形网络会不断地吸收能量，如果它被低于某个临界频率 $\sqrt{4/(LC)}$ 的源所驱动，这个频率将被称为截止频率 ω_0 。我们曾经建议，这一效应可以用能量不断沿线向下传输来理解。另一方面，在高频时，即对于 $\omega > \omega_0$ ，便没有这种

能量的连续吸收，这时我们应该期待，电流或许不会沿线向下“透入”得很远。让我们来看看这些想法是否对头。

假设已把该梯形网络的起始端连接到某个交流发电机，试问：梯形网络第754节处电压的情况如何？由于该网络无限长，因而从一节至次一节电压所发生的任何变化总是一样，所以就让我们只来看看当从某节、比如说第 n 节至下一节所发生的情况。我们将像图22-21 (a)所示的那样对电流 I_n 和电压 V_n 下定义。

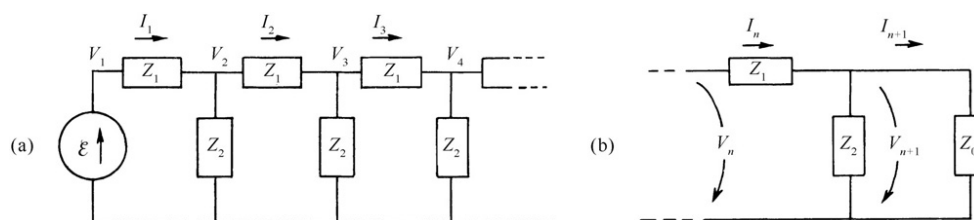


图22-21 找出梯形网络的传播因子

记住在第 n 节之后，我们总能用特性阻抗 z_0 来代替该梯形网络的其余部分，这样就可以从 V_n 得到 V_{n+1} ，于是只需对图22-21 (b)中的那个电路进行分析。首先，我们注意到，由于 V_n 是横跨 z_0 的电压，因而它必须等于 $I_n z_0$ ，并且 V_n 与 V_{n+1} 之差恰好是 $I_n z_1$ ：

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

因此，便可得到比值

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0}.$$

这个比值叫作梯形网络每节的传播因子，我们将记为 α 。当然，这对于所有的节都是相同的：

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z_0}. \quad (22.29)$$

这样，在第 n 节之后的电压就是

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E}. \quad (22.30)$$

现在你可以找出在第754节之后的电压，它刚好就是 α 的754次幂乘以 $\mathcal{E}$ 。

我们看看图22-20 (a) 中 LC 梯形网络的 α 大概是什么。利用式(22.27)的 z_0 以及 $z_1 = i\omega L$ ，我们得

$$\alpha = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} - i(\omega L/2)}{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + i(\omega L/2)}. \quad (22.31)$$

如果驱动频率低于截止频率 $\omega_0 = \sqrt{4/(LC)}$ ，则平方根是一实数，而在分子及分母中两个复数的大小值便相等，因此， $|\alpha|$ 的量值为1，我们便可写成

$$\alpha = e^{i\delta},$$

这意味着在每节的电压大小都相同，只是相位有变化。事实上，这相位的改变 δ 是一负数，并代表当沿网络从一节至下一节时电压的“延迟”。

对于比截止频率 ω_0 高的频率，最好是把式（22.31）的分子和分母中的 i 消去而重新写成

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} - \omega L/2}{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} + \omega L/2}. \quad (22.32)$$

现在该传播因子 α 是一实数，而且是一个小于1的数目。这意味着在任一节上的电压比起其前一节上的电压总要小一个因子 α 。对于任一比 ω_0 高的频率，当我们沿该网络下行时，电压降落得很快。 α 的绝对值作为频率函数而画成的图看来就像图22-22中的那条曲线。

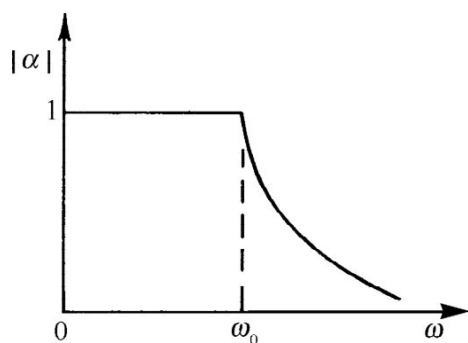


图22-22 在 LC 梯形网络中每节的传播因子

我们看到，对高于和低于 ω_0 的频率， α 的行为都与我们的这种解释相一致，即对于 $\omega < \omega_0$ ，该网络会传播能量；而对于 $\omega > \omega_0$ ，则能量被阻塞。我们说，这网络会“通过”低频而“舍弃”或“滤去”高频。任何一个其特性被设计成按某一规定方式随频率变化的网络都称为“滤波器”。我们刚才分析了一个“低通滤波器”。

你可能会觉得奇怪，为什么要讨论一个显然不能够实现的无限长网络。重要的是，同样的特性可以在一个有限网络中找到，只要我们用一個等于该特性阻抗 z_0 的阻抗接在其末端使它结束。虽然在实际上

是不能够用几个像 R ， L 和 C 那样的简单元件来严格地复制出该特性阻抗，但对于某个范围内的频率却往往能够以相当好的近似程度做到这一点。这样，就可以做成性质十分接近于一个无限长网络的一个有限长滤波器。例如，若用一纯电阻 $R = \sqrt{L/C}$ 来结束那个 LC 梯形网络，则它的表现就像上面对它所描述的那样。

如果在那个 LC 梯形网络中交换各个 L 和 C 的位置，以形成如图22-23 (a)所示的那种梯形网络，就成为一种传播高频而抑制低频的滤波器。通过利用已有的结果，很容易看出在这一网络中发生的事情。你将会注意到，无论什么时候当把 L 变成 C 或倒过来时，也就由每一个 $i\omega$ 变成 $1/i\omega$ 。因此，过去在 ω 上所发生的事情现在在 $1/\omega$ 上发生了。特别是，可以通过利用图22-22并将其在横轴上的标记改成 $1/\omega$ ，就像图22-23 (b)所表示的那样，我们可以看出 α 如何随频率而变化。

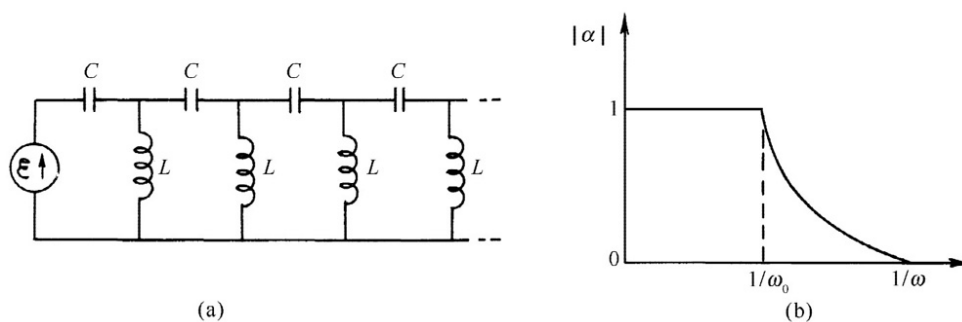


图22-23 (a) 高通滤波器；(b) 它的传播因子作为 $1/\omega$ 的函数

刚才所描述的低通和高通滤波器具有各种技术应用。 LC 型低通滤波器常在直流动力供应单元中用作“平流”滤波器。如果要把一个交流电源制造成直流电源，那么先要用一个只允许电流单向流动的整流器。从整流器将会得到看来像图22-24所示的函数 $V(t)$ 那样的一系列脉冲，那是一种糟糕的直流，因为它上下摆动。假定想要一个漂亮

的纯粹直流，像一个电池组所供应的那样，通过在整流器与负载之间放置一个低通滤波器，我们可以接近这一目标。

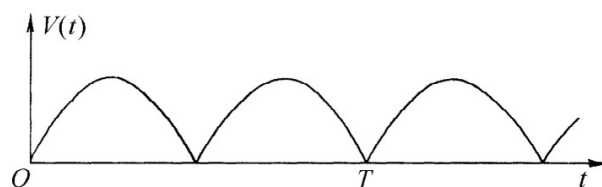


图 22-24 一个全波整流器的输出电压

从第1卷第50章中我们知道，图22-24的那个时间函数可以表示为一个恒定电压加上一个正弦波、再加上一系列更高频率的正弦波的叠加——即由一个傅里叶级数来表示。如果滤波器是线性的（正如我们曾经假定的，只要那些 L 和 C 都不随电流或电压而变），那么从滤波器出来的就是对输入端每一成分的各项输出的叠加。如果安排得使滤波器的截止频率 ω_0 远低于函数 $V(t)$ 中的最低频率，则直流（ $\omega=0$ ）便能够很好地通过，但第一谐波的振幅将被削弱得很厉害，而那些更高谐波的振幅被削弱得更多。所以我们能够获得一个想要的平滑输出，它只决定我们乐意购买多少节滤波器。

如果希望抑制某些低频波，则常用高通滤波器。例如，在一留声机的放大器中，高通滤波器可以用来让音乐通过，而避开那些来自转盘电动机的低调隆隆声。

也可能制成一种“带通”滤波器，它会抑制比某一频率 ω_1 低而比另一频率 ω_2 （大于 ω_1 ）高的一些频率，而却让 ω_1 与 ω_2 之间的那些频率通过。这可很容易地把一个高通与一个低通滤波器放在一起而做到，但更经常的却是通过制造一个梯形网络来实现的。在该网络中，其阻抗 z_1 和 z_2 更加复杂——每一个都是若干个 L 和 C 的组合。这样一

个带通滤波器也许具有如图22-25 (a) 所示的那种传播常数。这可能用来把一些仅占据一个频率间隔的信号——诸如在一高频电话电缆中的许多声音信道的每一个，或在无线电传递中受了调制的每一个载波——分开来。

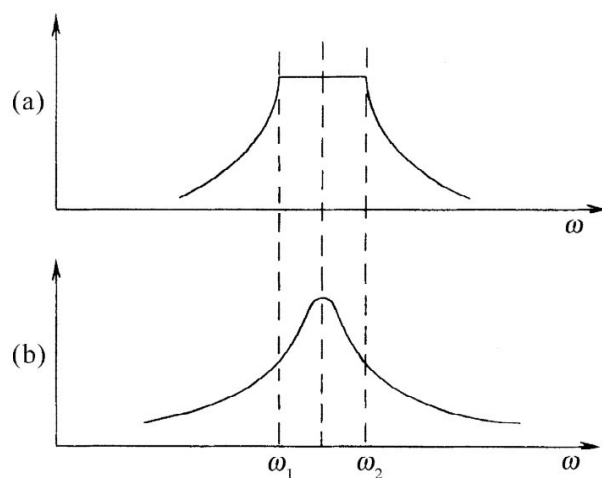


图22-25 (a) 带通滤波器；(b) 简单的共振滤波器

在第1卷第25章中我们曾经见到，像这样的滤波作用也可利用一普通共振曲线的选择性来做到，为了比较，我们已把该共振曲线画在图22-25 (b) 上。但对于某些目的来说，这一种共振式滤波器不如带通滤波器那么优越。你会记得（第1卷第48章），当频率为 ω_c 的载波受到“信号”频率 ω_s 所调制时，整个讯号不仅含有载频，而且还含有两个边带频率 $\omega_c + \omega_s$ 和 $\omega_c - \omega_s$ 。采用共振式滤波器时，这些边带总多少会受到衰减，而且信号的频率越高则衰减越厉害，正如你可以从图上见到的。因此存在不良的“频率响应”，那些较高频的乐音通不过去。但若滤波作用是由一个设计得使宽度 $\omega_2 - \omega_1$ 至少两倍于最高信号频率的那种带通滤波器来完成的话，则该频率响应对于所需的那些信号来说就将是“平坦”的了。

关于梯式滤波器我们还要再强调一点：图22-20的 LC 梯形网络也是传输线的一个近似表示。如果有一长导体与另一导体平行并列——诸如在一根同轴电缆中的导线或一根悬挂在地面之上的导线——那么便会有某些电容存在于两导体之间，以及由于它们之间存在磁场所以还有某些电感。若我们设想该传输线被分割成众多小段 Δl ，每一段看起来就像在 LC 梯形网络中由串联电感 ΔL 和并联电容 ΔC 所构成的一节。然后，我们便能应用有关梯式滤波器的结果。若取 Δl 趋于零时的极限，则对于传输线就有一个极好描述。注意当 Δl 变得越来越小时， ΔL 和 ΔC 两者都会减少，但都在同一比例上，因而比值 $\Delta L / \Delta C$ 仍将保持不变。因此，若取 ΔL 和 ΔC 都趋于零时式(22.28)的极限，则我们发现该特性阻抗是一个大小为 $\sqrt{\Delta L / \Delta C}$ 的纯电阻。我们也可将比值 $\Delta L / \Delta C$ 写成 L_0 / C_0 ，其中 L_0 和 C_0 分别代表传输线每单位长度的电感和电容，于是我们得

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (22.33)$$

你也将会注意到，当 ΔL 和 ΔC 各趋于零时，截止频率 $\omega_0 = \sqrt{4/(LC)}$ 会变成无限大，即对于一条理想的传输线来说不存在截止频率。

§22-8 其他电路元件

迄今我们仅仅定义了那些理想电路的阻抗——电感、电容和电阻——还有理想电压发生器。现在我们要来证明，诸如互感、晶体管或真空管等其他元件都可以仅利用同样的基本元件来加以描述。假设有两个线圈，而有意或无意地使其中一个线圈的某些磁通量耦合到另一

个线圈中去，如图22-26（a）所示。此时这两个线圈会有互感 M ，使得当其中一个线圈的电流变化时，在另一个线圈中将有一电压产生。我们是否能够将这种效应算进等效电路中？按下述方法来做是能够的。我们已经知道，在两个相互作用线圈的每一个中感生电动势均可以写成两部分之和：

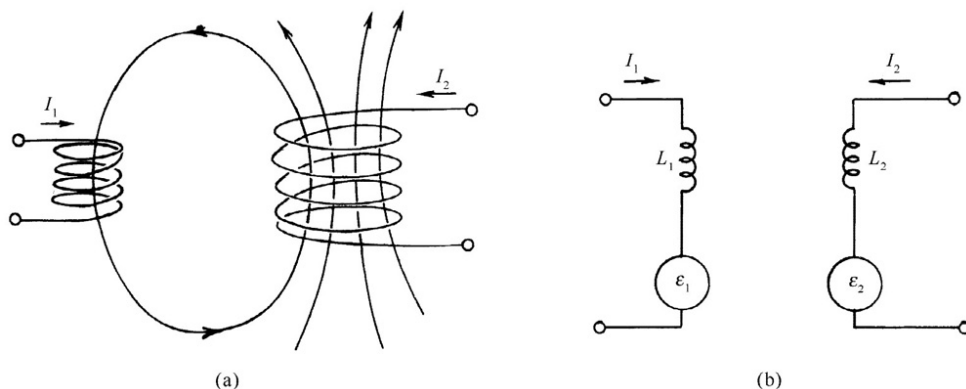


图22-26 互感的等效电路

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}, \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.\end{aligned}\tag{22.34}$$

第一项来自线圈的自感，而第二项则来自它与另一线圈间的互感。第二项的符号可正可负，取决于来自一个线圈的磁通量耦合到另一个线圈上去的方式。做了我们以前在描述理想电感时用过的同样的近似，我们便可以说，跨越每个线圈两端的电势差等于该线圈中的电动势。于是式（22.34）的两个方程将和我们从图22-26（b）的电路中获得的方程相同，只是图示的每一电路中的电动势是按照下列关系式取决于对方电路中的电流：

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2, \quad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1.\tag{22.35}$$

因此我们所能做的是，以正常方式表示自感效应，但对于互感效应则由一个辅助的理想电压发生器来代替。当然，此外我们还应有关于这个电动势与电路某一部分中的电流的关系的方程式，但只要这一方程式是线性的，我们不过是在电路方程中加进了更多的线性方程，因而我们以前关于等效电路的所有结论仍然是正确的。

除了互感之外，也可能还有互容。迄今，当我们谈及电容器时总是想象只有两个电极，但在许多情况下，比如在一个真空管中，就有许多个彼此靠近的电极。如果把一电荷放在其中任何一个电极上，它的电场将会在其他每个电极上感生一些电荷并影响其电势。作为一例，试考虑如图22-27（a）所示的那四块板。假定这四块板分别由 A ， B ， C 和 D 四根导线连接至外电路。只要我们所关心的仅限于静电效应，则像这样一种电极布置的等效电路就如同图22-27（b）所示。任一电极对于其他每一电极的静电互作用相当于在这两电极之间的一个电容。

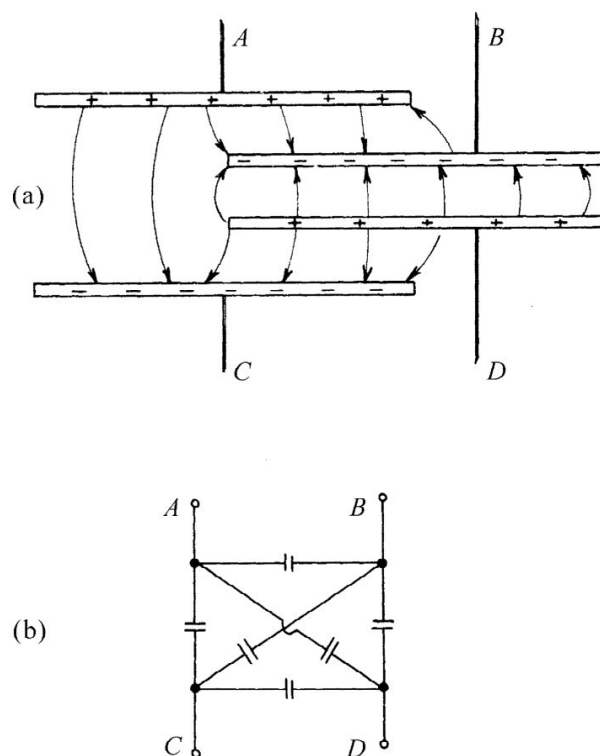


图 22-27 互容的等效电路

最后，让我们来考虑交流电路中像晶体管和真空管那么复杂的器件应该怎样来表示。本该一开始就指出，这种器件通常是这样运行的，其中电流与电压的关系是完全非线性的。在这种情况下，我们曾做出的有赖于方程线性的那些说法当然不再正确。另一方面，在许多种应用中，晶体管和真空管的运行特性曲线还是足够线性的，以致可把它们视作线性器件。这意味着例如在真空管中，板极内的交变电流与出现在其他各电极上的电压，诸如栅极电压和板极电压形成了线性正比关系。当我们具备这样的线性关系时，就能够将该器件纳入等效电路的表示之中。

正如在互感的情况那样，我们的表达方式将不得不包含一些辅助的电压发生器，用以描述在该器件一部分中的电压或电流对于其他部分中的电流或电压所产生的影响。例如，一个三极管的板极电路经常

可表示为一个电阻串联于一个其源强正比于栅极电压的理想电压发生器。我们便得到如图22-28所示的那个等效电路[2]。同理，一个晶体管的集电极电路可以方便地表达成一个电阻串联于一理想电压发生器，这个源的强度正比于从该晶体管的发射极流向基极的电流。这时等效电路就像图22-29所示的那样。只要用来描写其运行的方程是线性的，便可以对电子管或晶体管引用这些表达方式。然后，当它们被归并入一个复杂网络中时，关于元件的任意一种连接方式的等效表示的一般结论都仍然有效。

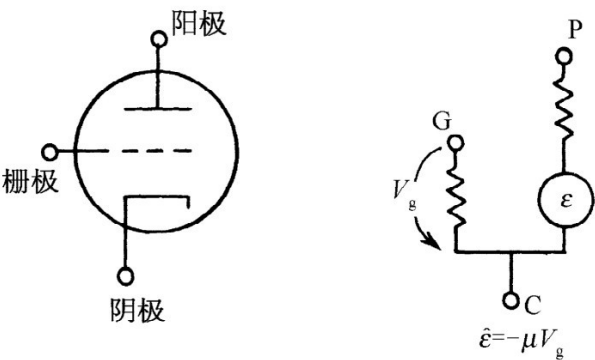


图 22-28 真空管的低频等效电路

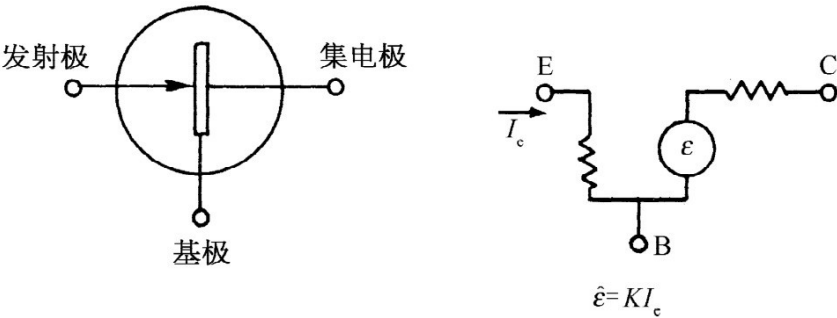


图 22-29 晶体管的低频等效电路

与仅含有阻抗的那种电路不同，关于晶体管和真空管电路有一件令人注目的事情：其有效阻抗 $z_{\text{有效}}$ 的实部可以变成负值。我们已明白

z 的实部代表能量损耗，可是晶体管和真空管的重要特性却是它们对电路供应 能量（当然，它们并非在“创造”能量，不过从动力供应的直流电路中取得能量并将其转变成交变能量）。因此，就可能有一种具备负电阻的电路。这样的电路具有如下性质，即如果你把它接至一个具有正实部的阻抗，也就是具有正的电阻，并将材料布置成使该两实部之和恰恰等于零，则在该联合电路中不会有能量耗散。如果没有能量损耗，则任何一个一经启动了的交变电压便将永远维持下去。这就是能够在任何想要的频率上用作交变电压源的振荡器或信号发生器的运行过程背后的基本概念。

[1] 有些人说，我们应该用“电感器”和“电容器”这种名称来称呼那些东西，而用“电感”和“电容”称呼它们的性质（与“电阻器”和“电阻”相类似）。但我们宁愿采用你将会在实验室里听到的那些名称。大多数人对于一个具体线圈及其自感 L 两者都仍说成是“电感”。至于“电容器”（capacitor）一词似乎已很吃香——尽管仍相当经常地听到另外一个“电容器”名称（condenser）——而大多数人仍比较喜欢用“电容”（capacity），甚于用“电容”（capacitance）。

[2] 图上所示的这个等效电路只有在低频时才正确。对于高频来说，该等效电路变得复杂得多，而且将包括各种所谓“寄生”电容和电感。

第23章 空腔共振器

§23-1 实际电路元件

任何一个由一些理想阻抗和发电机所构成的电路，当从任一对端点看时，不论处在什么频率，它都相当于一部发电机 E 和一个阻抗 z 的串联。之所以会这样，是因为若在那对端点上加一电压 V ，当解所有方程以求得电流 I 时，我们就一定会获得电流与电压之间的一个线性关系。由于所有方程都是线性的，因而对 I 所得的结果也就应该仅仅是线性地依赖于 V 。最普遍的这种线性形式可表示为

$$I = \frac{1}{z}(V - \mathcal{E}). \quad (23.1)$$

一般说来， z 和 E 两者都可能以某种复杂方式依赖于频率 ω 。然而，如果两端点后面仅有一发电机 $E(\omega)$ 与一阻抗 $z(\omega)$ 相串联时，我们就应获得式(23.1)那样的关系。

也有与此相反的问题：若我们真有具备两个端点的任何电磁器件，并已测量了 I 与 V 的关系以确定 $\mathcal{E}$ 和 z 作为频率的函数，那么我们能否找到一个与内阻抗 z 相等效的理想元件的组合呢？答案是，对于任一合理的——也就是说，物理上有意义的——函数 $z(\omega)$ ，这种情况可以用一个含有有限组理想元件的电路来近似，并可达到我们希望的高精确度。我们现在暂不考虑这个普遍问题，但只想对几种特殊情况看看从物理的论证方面会期待得到些什么。

若我们考虑的是一个实际的电阻，则知道电流通过它时会产生磁场。所以任何实际电阻也应有一些电感。并且，当有一电势差跨越电阻时，则在电阻两端必然有一些电荷以产生所必需的电场。当电压改变时，这些电荷也将按比例改变，从而该电阻也会有某些电容。我们期待一个实际电阻也许会有如图23-1所示的等效电路。在一个精心设计的电阻中，这里所谓的“寄生”元件 L 和 C 都很小，以致在那些预定用到的频率时， ωL 会比 R 小得多而 $1/(\omega C)$ 则比 R 大很多，因此就有可能把它们都忽略掉。然而，当频率升高时，它们最终会变得重要起来，因而一个电阻初看就像一个谐振电路。

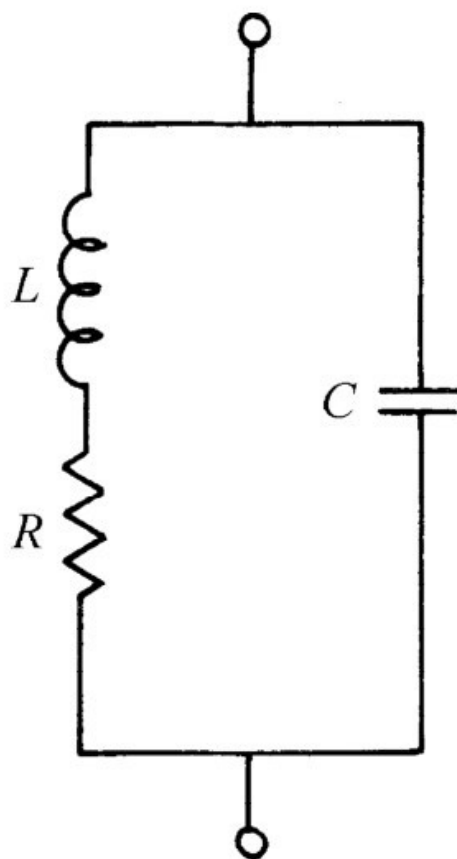


图23-1 一个实际电阻的等效电路

一个实际电感也并非等于阻抗为 $i\omega L$ 的理想电感。一个实际导线线圈将有某些电阻，从而在低频时该线圈实际上就等效于一个电感与某个电阻的串联，如图23-2（a）所示。可是，你或许正在想，电阻和电感共同存在于一个实际线圈中——电阻完全分散于整条导线中，因而已和电感互相混合了。我们也许更应该采用一个像图23-2（b）那样的电路，它有几个小 R 和小 L 互相串联着。但这样一个电路的总阻抗正好是 $\sum R + \sum i\omega L$ ，这就等效于（a）那个较简单的图了。

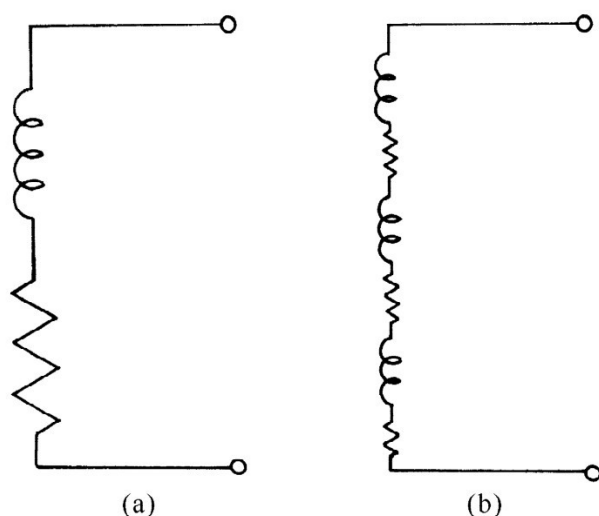
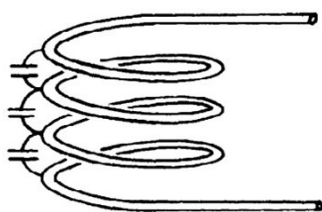
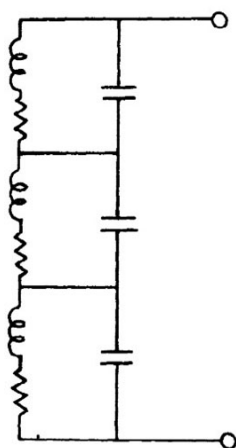


图 23-2 一个实际电感在低频时的等效电路

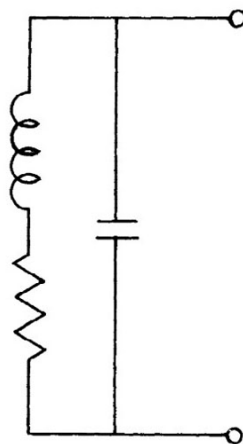
当对一实际线圈提高频率时，把它当成一个电感与一个电阻的串联就不再是很好的近似，在导线上积累起来以产生电压的电荷将会变得重要起来，就像有一些小电容器横跨于该线圈的各匝之间，如图23-3（a）所示。也许我们试图对该实际线圈用图23-3（b）中的电路来做近似。在低频时，这一电路可由图23-3（c）那个较简单的电路很好地加以模拟（这仍然是我们上面对一个电阻的高频模型所找到的相同的共振电路）。然而，对于较高频率，则图23-3（b）的那个较复杂的电路将更好。事实上，你想要对一个真实的物理的电感的实际阻抗表达得越准确，在它的人为模型中你就得用越多的理想元件。



(a)



(b)



(c)

图 23-3 一个实际电感在高频上的等效电路

让我们稍微密切地注视在一个实际线圈中所发生的情况。一个电感的阻抗表现为 ωL ，因而在低频时它变为零——出现一个“短路”：我们见到的只是导线的电阻。当频率增高时， ωL 很快变得比 R 大得多，而该线圈看起来很像一个理想电感。然而，当频率增得更高时，电容变得重要起来，它的阻抗与 $1/(\omega C)$ 成正比，当 ω 小时数值很大。因此对于足够低的频率，电容是一个“断路”，而当它与别的东西并联时，不会抽取任何电流。但在高频时，电流更愿意流入各匝间的电容，而不是流经电感。所以在线圈里的电流从一匝跳跃至另一匝，而不必发愁要去转那些不得不在那里抵抗着电动势的圈子了。因此，尽管我们也许已经预定电流会环绕回路通过，但它却将选取较方便的路径——阻抗最小的路径。

要是这一课题曾经为大众所感兴趣，则这一效应可能已经被赋予“高频障壁”或其他类似名称了。同类事情在所有学科中都会出现。在气体动力学中，若你试图让原来是为低速设计的东西去跑得比声速还快，那就不行。这并不意味着确实存在一巨大的“障壁”，而只是指该东西必须重新加以设计罢了。因此，这一原来我们作为一“电感”而设计出来的线圈在十分高的频率上将不再作为一个良好的电感，而是作为某一种其他东西。对于高频，我们得寻找一个新的设计。

§23-2 在高频时的电容器

现在我们要来详细讨论当频率变得越来越大时一个电容器——几何上的理想电容器——的行为，使我们能够看到其性质的转变（我们宁可采用电容而不采用电感，为的是一对板的几何形状比一个线圈的几何形状要简单得多）。我们考虑图23-4（a）所示的那个电容器，构成它的两块平行圆板用一对导线接至外界发电机上。如果用直流对电容器充电，则在其中一板上将有正电荷，在另一板上有负电荷，而在两板之间则有一匀强电场。

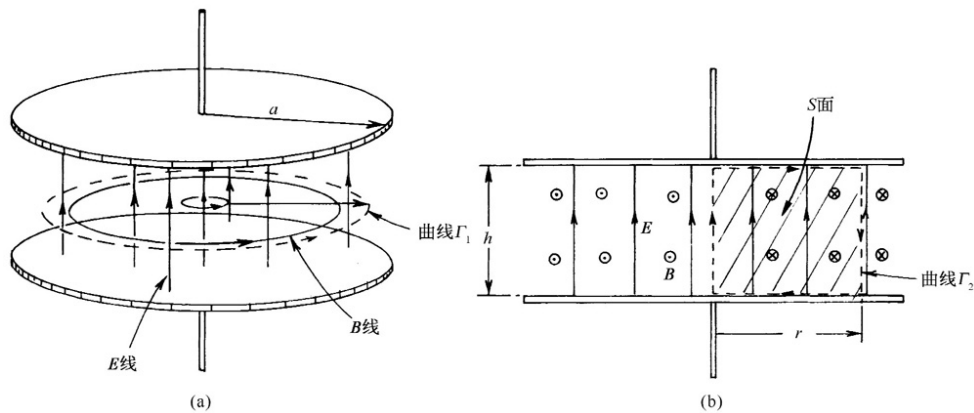


图 23-4 电容器两极板间的电场和磁场

现在假定不用直流，而是加一个低频交流电于两板上（往后我们将会知道什么是“低”频，什么是“高”频）。比方说，把电容器连接至一低频发电机上。当电压正在交变时，上板的正电荷会被取出而换上了负电荷。在这一事情发生时，电场会随之消失，然后又在相反的方向上建立起来。当电荷缓慢地来回涌动时，电场也跟着变化。除了一些我们将要加以忽略的边缘效应外，在每一瞬间电场是均匀的，如图23-4（b）所示。可以把电场的大小写成

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (23.2)$$

式中 E_0 是一常数。

现在，当频率升高时，这是否仍然正确呢？不，因为当电场增高和降低时就会有电通量穿过像图23-4（a）中的任意回路 Γ_1 。而正如你所知的，一个变化的电场会起到产生磁场的作用。麦克斯韦方程组中一个方程讲，当有变化的电场时，犹如这眼前存在的那样，就一定有磁场的线积分。环绕某一闭合环的磁场积分乘以 c^2 之后，就等于穿过该环内面积的电通量的时间变化率（如果没有电流的话）：

$$c^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{在}\Gamma\text{之内}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (23.3)$$

所以，到底磁场有多大呢？计算并不十分困难。假定考虑回路 Γ_1 ，它是一个半径为 r 的圆周。我们能够从对称性看出，磁场会环绕图中所示的那种圆周转。这样 $\mathbf{B}$ 的线积分就是 $2\pi r B$ 。而且由于电场是均匀的，所以电场通量简单地等于 E 乘以该圆周的面积 πr^2 ：

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2. \quad (23.4)$$

对于交变场来说， E 对时间的微商仅是 $i\omega E_0 e^{i\omega t}$ 。因此我们求得，该电容器具有磁场

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.5)$$

换句话说，磁场也在振动，而且具有正比于半径 r 的强度。

这种情况会产生什么影响呢？当有一个正在变化的磁场时，便将产生一些感生电场，而该电容器将开始有点像一个电感的作用了。当频率升高时，这磁场变得较强，它与 E 的变化率成正比，因而也与 ω 成正比。该电容器的阻抗将不再简单地等于 $1/(i\omega C)$ 。

让我们继续提高频率，并更仔细地分析将会发生的情况。我们有一个来回涌动的磁场。但这时的电场就不可能像我们所曾假定的那样是均匀的了！当有一正在变化的磁场时，就必然有一个电场的线积分——根据法拉第定律。所以，如果有一个相当大的磁场，正如在高频时就开始发生的那样，则电场不可能在离开中心的所有距离处都相同。电场必须随 r 改变，才能使电场的线积分等于变化着的磁场通量。

让我们来看看能否算出正确的电场。通过算出我们原来对低频时假定的匀强场的“修正”，便能够完成此事。现在把该匀强场称作 E_1 ，它仍旧是 $E_0 e^{i\omega t}$ ，而把正确的场写成

$$E = E_1 + E_2,$$

其中 E_2 就是由于变化着的磁场所引起的修正。对于任意频率 ω ，我们将把在该电容器中心处的场写成 $E_0 e^{i\omega t}$ （因而定义了 E_0 ），使得在这中心处并不需要修正，即在 $r=0$ 处 $E_2=0$ 。

为求得 E_2 可利用法拉第定律的积分形式：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt}(\mathbf{B} \text{ 的通量}).$$

这些积分很简单，只要取积分回路像图23-4（b）所示的曲线 Γ_2 那样，即沿轴上升，当达到上板时再沿半径向外伸展至距离 r 处、又垂直地落到底板、然后又返回到轴上。 E_1 环绕这个曲线的线积分当然是零，所以就只有 E_2 做出贡献，而它的积分正好是 $-E_2(r) \cdot h$ ，其中 h 是两板间的距离（如果 E 指向上我们称为正）。这等于 B 通量的变化率，我们得通过对图23-4（b）中 Γ_2 之内阴影面积的积分来获得。穿过宽度为 dr 的垂直狭条的通量为 $B(r) h dr$ ，因而总通量就是

$$h \int B(r) dr.$$

令这一通量的 $-\partial/\partial t$ 等于 E_2 的线积分，便有

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B(r) dr. \quad (23.6)$$

注意式中 h 已消去了，场与两板间的间距无关。

利用关于 $B(r)$ 的方程式(23.5)，我们便有

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\omega r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}.$$

对于时间的微商只不过带来另一个因子 $i\omega$ ，这样我们得

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

正如所预期的，这感生电场倾向于把远离中心的电场减弱。于是，改正后的场 $E = E_1 + E_2$ 为

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.8)$$

在电容器中的电场不再是均匀的，它具有如图23-5中虚线所示的那种抛物线形状。你看，我们的简单电容器已变得稍微复杂些了。

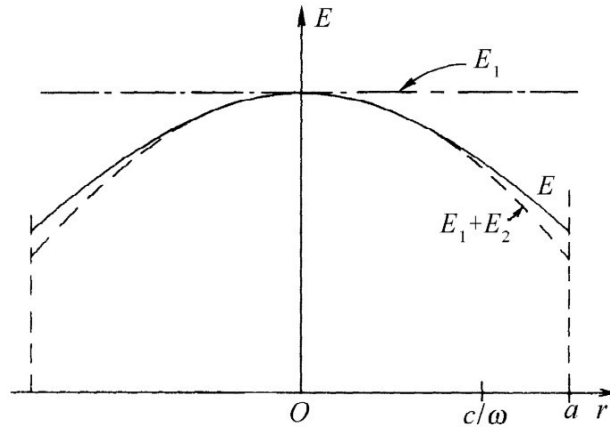


图23-5 在高频时电容器两板间的电场（边缘效应已被忽略）

现在有可能利用所得结果来计算电容器在高频时的阻抗。知道了电场后，理应能够算出板上的电荷并求出通过电容器的电流如何依赖于频率 ω ，但目前我们对这个问题不感兴趣。更感兴趣的是要看看当

继续提高频率时会发生什么情况——看看在更高频率上所发生的事情。我们的工作是否结束了呢？不，因为已修正了电场，这就意味着已算出来的磁场不再是正确的了。式（23.5）中的磁场也是近似正确的，但它仅是一级近似，所以就让我们叫它作 B_1 。这样应将式（23.5）重新写成

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.9)$$

你会记得，这个场是由 E_1 的变化产生的。现在正确的磁场将是由总电场 $E_1 + E_2$ 所产生的。若把磁场写成 $B = B_1 + B_2$ ，则其中第二项就恰好是由 E_2 所产生的附加场。为求出 B_2 ，可以通过我们求 B_1 时用过的相同论证来进行， B_2 环绕曲线 Γ_1 的线积分等于 E_2 穿过 Γ_1 的通量的变化率。我们将仍然有式（23.4），其中用 B_2 代替 B 而用 E_2 代替 E ：

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{d}{dt}(E_2 \text{ 穿过 } \Gamma_1 \text{ 的通量}).$$

由于 E_2 随着半径变化，因而要获得它的通量就得对 Γ_1 内的圆面积进行积分。用 $2\pi r \, dr$ 作为面积元，这个积分就是

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r \, dr.$$

因此对于 $B_2(r)$ 我们得到

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r) r dr. \quad (23.10)$$

利用来自式 (23.7) 的 $E_2(r)$ ，我们需要对 $r^3 dr$ 进行积分，而这当然为 $r^4/4$ 。对于磁场的修正变成

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.11)$$

可是事情还没有完成！如果磁场并不与我们最初所设想的相同，则刚才对 E_2 的计算便不能认为是正确的。我们必须对 E 进一步做出修正，它由额外磁场 B_2 产生。让我们把这个对电场的附加修正叫作 E_3 。它与磁场 B_2 的关系犹如 E_2 与 B_1 的关系一样。我们可以再一次利用式 (23.6)，只不过改变其中的下脚标：

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) dr. \quad (23.12)$$

利用上面关于 B_2 的结果，即式 (23.11)，对电场新的修正为

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.13)$$

把经过了两次修正的电场写成 $E = E_1 + E_2 + E_3$ ，我们得

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (23.14)$$

电场随 r 的变化不再是我们曾在图23-5中画出来的那条简单抛物线，而是在较大的半径处略高于 $(E_1 + E_2)$ 曲线。

事情还未最后完成。新的电场对磁场产生一个新的修正，而这个被重新修正了的磁场又将对电场产生一个进一步的修正，如此等等。然而，我们已经有了所需的全部公式。对于 B_3 可以利用式 (23.10)，把其中 B 和 E 的下脚标从2改成3。

对电场的下一次改正是

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

因此，在达到这一级时，整个电场就由下式给出：

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 + \dots \right], \quad (23.15)$$

其中我们已把各数字系数写成这样一种形式，以便对该级数应如何继续下去看得更清楚。

我们的最后结果是：在该电容器两板间的电场，对于任一频率来说，都等于 $E_0 e^{i\omega t}$ 乘以仅含有变量 $\omega r / c$ 的一个无穷级数。如果我们乐意，就可以定义一个特殊函数，这函数将称为 $J_0(x)$ ，作为出现在式 (23.15) 中方括号内的无穷级数。

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (23.16)$$

这样，就可以将我们的解写成 $E_0 e^{i\omega t}$ 乘以这个函数，其中 $x = \omega r / c$ ：

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right). \quad (23.17)$$

之所以叫这个特殊函数为 J_0 的原因是：自然，这并非计算柱体中振动这一问题才开始用的，其实这一函数以前就已出现过而且经常被称为 J_0 。每当你求解具有柱对称的波动问题时它总是发生。函数 J_0 对于柱面波就好像余弦函数对于沿直线传播的波一样，因此它是一个重要函数，发现已多时了，以后与一个叫贝塞尔（Bessel）的人的名字联系上了。那个下脚标零意味着贝塞尔曾经发现过整个一系列不同的函数，而这只是其中的第一个。

其他的贝塞尔函数 J_1 ， J_2 等等是处理与强度随着绕圆柱轴的角度而变的那些柱面波所必需的。

在我们的圆形电容器两板间，电场经过完全修正已由式（23.17）给出，它已被画成图23-5中那条实曲线。对于不太高的频率，我们的二级近似就已经很好。三级近似甚至会更好——事实上，好到要是我们把它画出来，你不可能会看出它与那条实线间的差别。然而，你将在下一节中见到，对于大的半径或高的频率，为获得一个准确描述，整个级数就是必需的了。

§23-3 共振空腔

现在我们要来看看，当继续把频率增加得越来越高时，对于在电容器两板间的电场给出怎样的解。对于大的 ω ，该参数 $x = \omega r / c$ 也变得大了，因而在 x 的级数 J_0 中的头几项便将增加得很快。这意味着，我们曾在图23-5中画出来的那条抛物线在较高频率处会更加急剧地下降。事实上，看来好像在某个高频处场会完全降低至零，也许当 c / ω

近似等于 a 的一半时。让我们来看看， J_0 是否确实会通过零而变成为负的。尝试由 $x=2$ 开始：

$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0.22.$$

函数仍未等于零。因此，就让我们尝试一个更大的 x 值，比如说 $x=2.5$ 。代入数字之后，可得

$$J_0(2.5) = 1 - 1.56 + 0.61 - 0.11 = -0.06.$$

函数 J_0 在达到 $x=2.5$ 时就已经通过了零点。对 $x=2$ 和 $x=2.5$ 的结果进行比较，看来似乎 J_0 在从2.5至2的五分之一路程处通过零点。我们应该猜测零发生在 x 大约等于2.4的地方。现在看看对于这个 x 值会给出的结果：

$$J_0(2.4) = 1 - 1.44 + 0.52 - 0.08 = 0.00.$$

在精确到小数点后两位时得到零。若再计算得精确些（或者由于 J_0 是一个著名函数，所以只要查一查书本），我们会发现它在 $x=2.405$ 处通过零，我们用手就已经把它算出，这表明你们本来也可以发现这些东西的，而不一定要从书本上查出来。

只要在书中查阅到了 J_0 ，则注意它在 x 值较大时如何表现，是十分有趣的。它看来像图23-6中的那条曲线，当 x 增大时， $J_0(x)$ 在正值与负值之间振动，振幅逐渐减小。

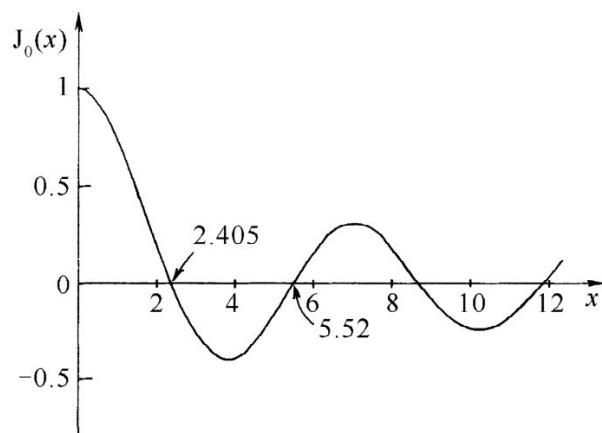


图23-6 贝塞尔函数 $J_0(x)$

我们已经得到下面的有趣结果：若频率足够高，则在电容器中心处电场将指向一个方向，而在靠近边缘处电场又指向相反方向。例如，假设取一个足够高的 ω 使得在该电容器的外缘处 $x = \omega r / c$ 的值为4，那么该电容器的边缘就相当于图23-6中横坐标 $x = 4$ 的地方。这意味着我们的电容器是在 $\omega = 4c / a$ 时工作的。在极板的边缘处，电场将有相当大的值而方向与我们所期待的相反。这就是在高频时电容器所能发生的令人感到惊异的事情。若把频率增得很高，则当从电容器中心向外移动时电场的方向会来回振动多次，而且还存在与这些电场联系着的磁场。因此，对于高频来说，我们的电容器看来并不像一个理想电容，就不足为怪了。甚至有可能开始怀疑：它看来更像一个电容还是更像一个电感呢？应该强调，还有一些发生于该电容器边缘上的更加复杂的效应已经被我们忽略了。例如，会有经过边缘向外的波辐射，因而场甚至比我们已算出来的还要复杂。但眼前我们不会对那些效应操心。

本来我们也可尝试做出一个有关电容器的等效电路，但或许更好的是直接承认，曾为低频而设计的那种电容器当频率太高时就不再令人满意了。若要来处理像这样的对象在高频时的运行情况，我们就必

须放弃在处理电路时曾经做过的那种关于麦克斯韦方程组的近似方法，而返回到能够完全描述空间中场的完整的方程组。不要去同一些理想的电路元件打交道，而是必须处理那些实际存在的真实导体，把在导体之间空间里的一切场都算进去。例如，若想要有一个高频共振电路，则不会试着用线圈与平行板电容器去设计它。

我们已经提到，刚才正在分析的那个平行板电容器具有电容和电感两方面的某些特征。既然有电场，就会在两板的表面上聚积电荷；既然有磁场，就会产生反电动势。是否有可能我们已有了一个共振电路呢？确实得到了。假设挑选这样一个频率，它能使该电场图样在盘的边缘以内的某个半径上降低至零，也就是说，我们选取一个比 2.405 大些的 $\omega a / c$ 。在这个与两板共轴的圆周上，电场处处都将是零。现在假定取一块薄金属片，并把它剪成其宽度恰好足以安装在该电容器的两板之间，然后把它在电场等于零的那个半径上弯成一个圆筒。由于那里没有电场，所以当我们放进这个导体圆柱时，就不会有电流流过它，而且，在电场和磁场方面也将不会有什么变化。在该电容器中间，我们已经能够放置一个直接短路器件而不致引起任何变化。而且，看看现在我们有的东西吧，已经有一个闭合柱形盒，其中存在电场和磁场，但完全不和外界联系。即使丢掉那些伸到盒外的两板边缘部分以及对电容器的接线，盒里的场仍不会变化。我们留下来的一切就是一个其中藏有电场和磁场的封闭盒子，如图23-7（a）所示。电场以频率 ω 来回振动着——不要忘记， ω 确定了盒子的直径。振动 $\mathbf{E}$ 场的振幅随着从盒轴向外伸出的距离而变化，如图23-7（b）的曲线所示。这一曲线不过是零级贝塞尔函数的第一个极大。此外，还有一个磁场环绕着轴转，并以在时间上与电场相差 90° 的相位振动。

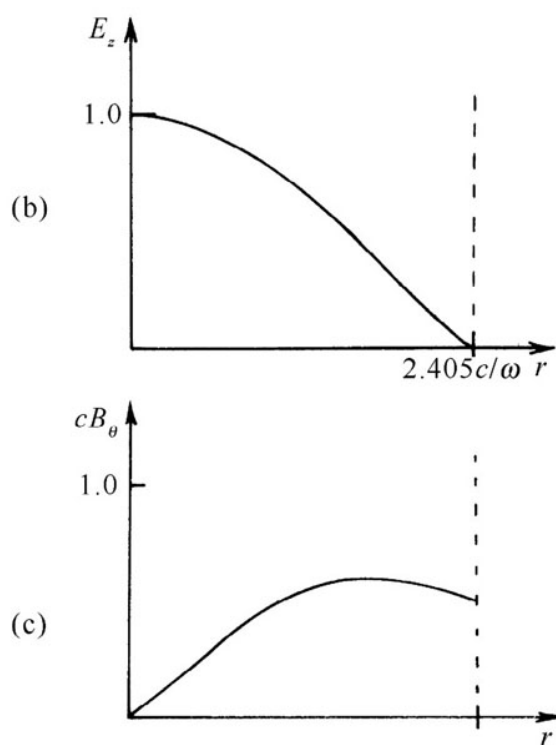
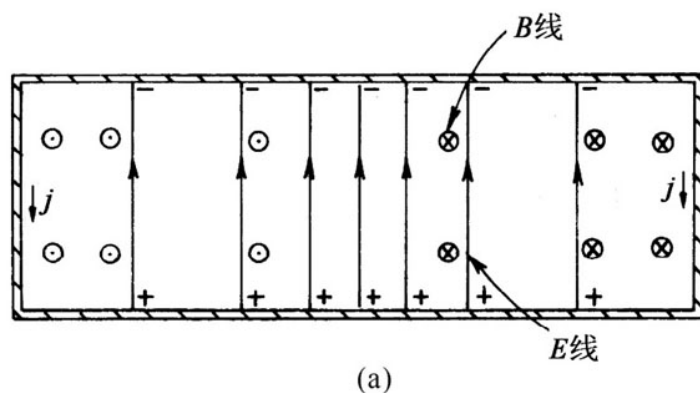


图23-7 在一个封闭的圆筒盒内的电场和磁场

我们也可对磁场写出一个级数，并把它描绘出来，如图23-7 (c) 中的曲线所示。

我们怎样才能把电场和磁场贮藏在一个盒子里而与外界没有任何联系？这是因为，电场和磁场会维持它们本身：正在改变的 $\mathbf{E}$ 产生一个 $\mathbf{B}$ ，而正在改变的 $\mathbf{B}$ 又产生一个 $\mathbf{E}$ ——所有过程都按照麦克斯韦方

程组进行。磁场具有电感的性质，而电场则具有电容的性质，两者合在一起才构成像共振电路那样的某种东西。注意刚才所描述的这些情况仅仅当盒子的半径恰好等于 $2.405c/\omega$ 时才发生。对于半径已经给定的盒子，这些振动着的电场和磁场只有在那些特定频率才会——按照我们所描述的那种方式——维持它们本身。因此，一个半径为 r 的柱形盒子在如下的频率处就会发生共振：

$$\omega_0 = 2.405 \frac{c}{r}. \quad (23.18)$$

我们曾说，在盒子完全封闭之后场仍将继续照样振动。那并非完全正确。假如盒子的壁是理想导体，那就会有可能。然而，对于一个实际盒子，存在于内壁上的振动电流会由于材料中的电阻而损耗能量。因而场的振动将逐渐衰减下去。从图23-7可以看到，与该空腔内部的电场和磁场相伴随必然存在一些强电流。因为垂直方向的电场会突然在盒子的顶板和底板上停顿下来，所以它在那里就有巨大散度，因而也就一定有正、负电荷出现在该盒子的内表面，如图23-7（a）所示。当电场倒转时，电荷也会倒转过来，因而在盒子的顶板和底板之间就一定形成交变电流。这些电荷将在盒子的侧壁内流动，如图所示。通过对磁场所发生的情况的考虑，我们也能够明白，必然会有电流通过该盒子的侧壁。图23-7（c）中的曲线告诉我们，磁场在该盒子的边缘处会突然下降至零。像这样的磁场突变只有当壁中存在电流时才能发生，这一电流就是向该盒子的顶板和底板提供那些交变电荷的。

你可能对于在盒子的垂直方向的侧壁中发现有电流会感到奇怪。关于以前讲到在电场为零的地方引进这些侧壁不会改变任何东西，又是怎么回事呢？然而，要记住，当我们起初放进该盒子的侧壁时，顶

板和底板还伸出于壁之外，因而在盒子外面也就还有磁场。只有当我们丢掉了伸出于盒子边缘之外的那一部分电容器极板之后，净电流才不得不出现在该垂直壁的内表面上。

虽然在完全封闭的盒子内的电场和磁场将会由于能量损失而逐渐减弱，但我们还是能够阻止这一事情发生，只要在盒子旁边挖开一个小洞而输入一点点电能以补充其损失。试取一根小导线，插进盒子旁边的这一小洞中，并把它粘牢在内壁上以便形成一个小回路，如图23-8所示。如果现在把这一段导线接至一高频交变电源，则电流将会把能量耦进空腔里，而使其中的电场和磁场振动能够持续进行。当然，这只有当驱动源的频率与盒子的共振频率相同时才会发生。如果源的频率不对头，则电场和磁场将不会发生共振，因而盒子里的场就会变得非常微弱。

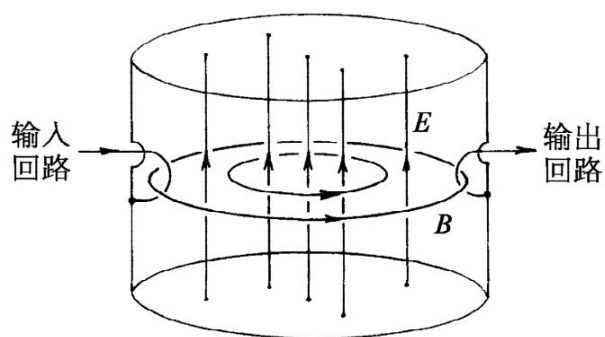


图23-8 对一共振腔的耦进和耦出办法

通过在盒子旁边再开另一个小洞并钩住另一个耦合回路，如在图23-8中描画出来的那样，则这共振行为便容易观察到。穿过这耦合回路的变化磁场将在回路中产生一感生电动势。若这个回路现在被连接至某个外面的测量电路，则电流将正比于空腔中场的强度。假定现在将空腔的输入回路接至一部射频信号发生器，如图23-9所示。这信号发生器含有一个交变电流源，其频率可由旋转发生器面板上的旋钮而

改变。然后又把空腔的输出回路接至一个“检波器”上，它是一部能测量来自输出回路电流的仪器。它会给出正比于电流的指针读数。如果现在测量作为该信号发生器频率函数的输出电流，则可找到一条像图23-10所示的曲线。除十分靠近空腔共振频率 ω_0 的那些频率以外，对于其他所有频率，输出电流都很小。这条共振曲线很像我们曾在第1卷第23章中所描述过的那些曲线。然而，这一共振曲线的宽度比起通常由电感和电容所构成的共振电路中所求得的要狭窄得多；也就是说，空腔的 Q 值很高。要得到一个高达10万或更大的 Q 值并不稀奇，只要空腔的内壁是由某些像银那样十分优良的导电材料所构成的。

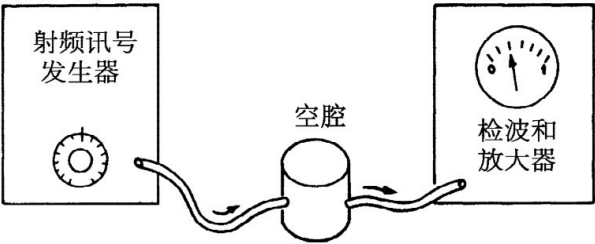


图23-9 为观测空腔共振用的装备

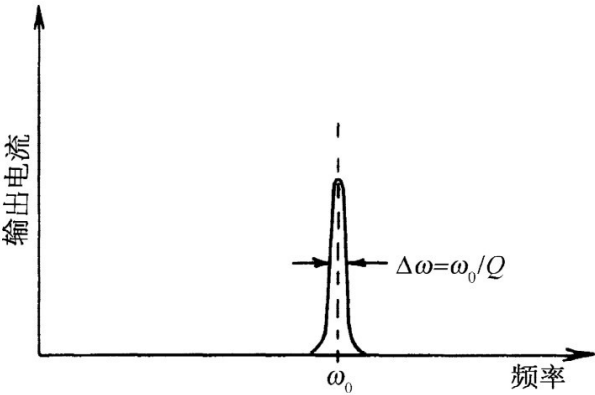


图23-10 共振空腔的频率响应曲线

§23-4 腔模

假设现在我们试图通过对实际盒子做测量来检验上述理论。取一个圆柱形盒子，其直径为3.0 in而高度约2.5 in。这个盒子装配有如图23-8所示的一个输入和输出回路。若按照式(23.18)算出关于这个盒子预期的共振频率，则可得 $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 3\,010\text{ MHz}$ 。当我们把信号发生器的频率设置在3 000 MHz左右并稍微变更这一频率以获得共振时，就会观察到最大的输出电流发生于频率为3 050 MHz处，这数值很接近于那预期的共振频率，但不完全相同。产生这一差异有几种可能原因。或许由于为要放进耦合回路而挖开的那些小洞会使共振频率有了一点变化。然而，稍微想一下就会明白，那些小洞理应使共振频率略有降低，因而这不能成为理由。或许是在校准信号发生器时稍微有一些误差，也许是我们对空腔的直径量得不够准确。但无论如何，还是符合得相当好的。

更为重要的是：当信号发生器的频率在3 000 MHz以上改变一些时所发生的情况。当我们这样做时，便会获得如图23-11所示的那些结果。我们发现，除了在3 000 MHz附近那个预期的共振外，还有一个接近于3 300 MHz和另一个接近于3 820 MHz的共振。这些附加的共振意味着什么呢？我们也许可从图23-6获得一条线索。尽管曾经假定贝塞尔函数的第一个零点出现在盒子的边缘，但也有可能贝塞尔函数的第二个零点与盒子的边缘相对应，因而当我们从盒子中心移动至边缘时电场恰好完成一个完整的振动，如图23-12所示。这是关于振动场的另一种可能模式。我们应当肯定地预期盒子会以这种模式发生共振。可是要注意，贝塞尔函数的第二个零点发生在 $x = 5.52$ 处，那比起第一个零点处的值不止大一倍。因此，这个模式的共振频率就应比6 000 MHz还高。无疑，我们会在那里找到它的，但却不能用它来解释在3 300时所观测到的那个共振。

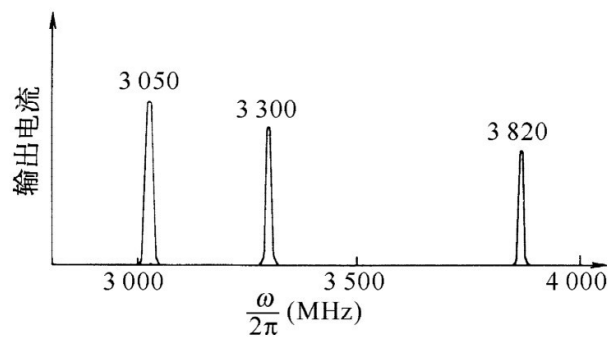
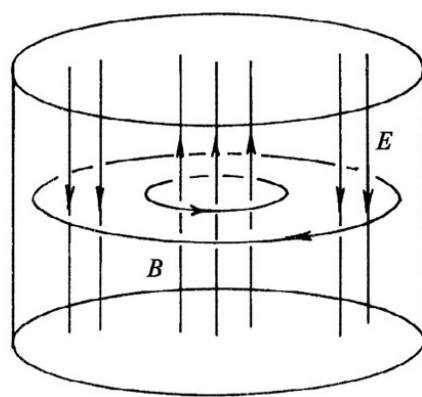
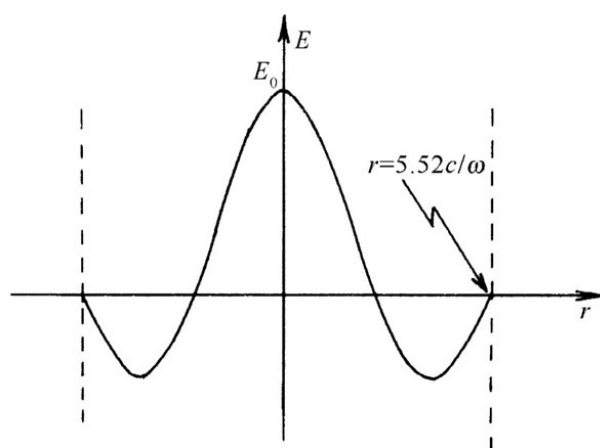


图 23-11 对一柱形空腔所观测到的几个共振频率



(a)



(b)

图 23-12 更高频率的模式

麻烦就在于对有关共振腔行为的分析，我们只考虑了电场和磁场一种可能的几何布局。已经假定电场是垂直的而磁场则位于一些水平圆周上。但别的场也是有可能的。唯一的要求是，在盒子里的电场和磁场都必须满足麦克斯韦方程组而且电场还必须与盒壁正交。我们已考虑其中盒子顶部和底部都是平坦的那一种情况，但要是顶和底都弯曲，事情也不会完全不同。事实上，盒子怎么能够被认为知道哪是它的顶、底以及侧面呢？实际上能够证明，在盒内就存在电场或多或少穿越直径的那一种振动模，如图23-13所示。

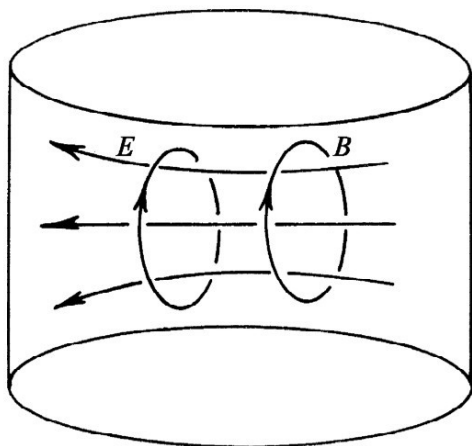


图23-13 柱形空腔的一种横向模

要理解为什么这一模式的固有频率与我们所曾考虑过的第一个模式的固有频率不应有很大差别，并不是太困难的。假设不取该柱形空腔，而是取一个每边3 in的立方形空腔。很清楚，这个空腔该有三种不同模式，但都有相同的频率。其中电场几乎是上下振动的一种模式肯定将与其中电场是左右指向的另一种模式具有相同频率。如果我们现在将该立方形空腔扭曲成一圆筒，就会或多或少改变其频率。但仍应该期望，这些频率不会改变得太多，只要对该空腔的尺寸大约保持一样。因此，图23-13那种模式的频率应不太异于图23-8的模式。本来我们可以对图23-13的那种模式详细算出其固有频率，但现在还不打算那

样做。当这些计算做出来时，便会发现，对于上面所假定的那些尺寸，算出的共振频率的确很接近于在3 300 MHz处所观测到的共振的频率。

通过相似的一些计算还能够证明，应该还有另外的模式，其共振频率为我们已找出的接近3 800 MHz的那个频率。对于这一模式，电场和磁场如图23-14所示。不必担心该电场会自始至终横穿过空腔。它从侧壁跑至两端，如图所示。

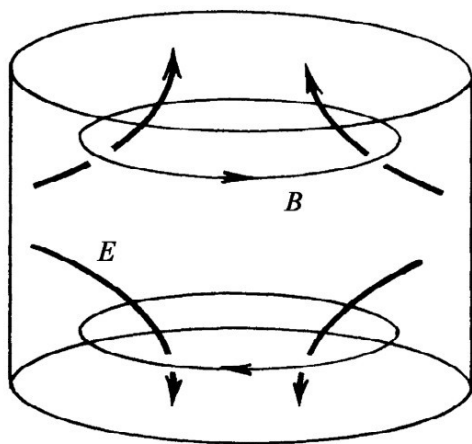


图 23-14 柱形空腔的另一种模

那么你现在大概会相信，若把频率增加得越来越高，则应该指望会找到越来越多的共振。存在许多不同的模式，每一个都具有与电场和磁场的某一特定的复杂布局相对应的不同共振频率。这些场的每一种布局称为共振模。通过求解关于空腔里的电场和磁场的麦克斯韦方程组，每一种模式的共振频率就可以计算出来。

当有了在某个特定频率处的共振时，我们怎样才能知道被激发的是哪一模式呢？一种办法是，通过一个小洞把一根小导线插进空腔里。如果电场沿着导线方向，如图23-15（a）所示，则导线里便有一个相对较大的电流从电场汲去能量，因而共振将被抑制。若电场像图

23-15 (b) 所示的那样，则影响会小得多。通过把导线的末端弯曲，像图23-15 (c) 那样，我们可以找出这种模式中场所指的方向。于是，当把导线转动使其末端与 E 平行时影响便大，而当转动至与 E 成 90° 时影响就小。

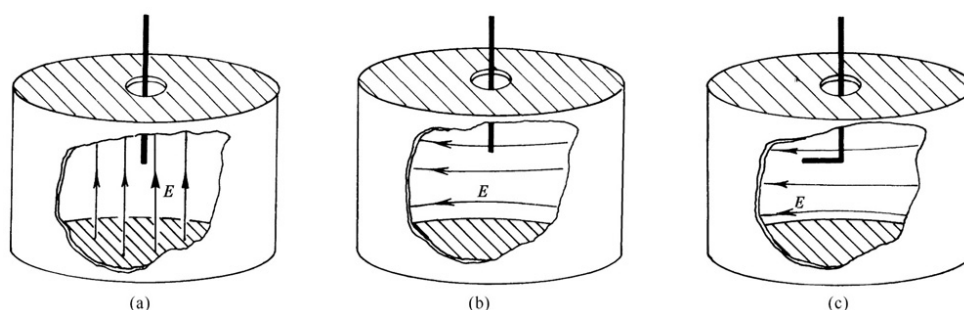


图23-15 一根伸进空腔里的短金属线，当其平行于 E 时，对共振的干扰比起与 E 垂直时要大得多

§23-5 空腔与共振电路

尽管我们已经描述的共振腔似乎与通常含有电感和电容的那种共振电路很不相同，但这两种共振系统还是很紧密地联系着的。它们都是同一家族的成员，恰好就是电磁共振的两个极端情况——有许多中间情况介乎这两个极端之间。假设我们通过考虑一个电容与一个电感并联的共振电路开始，如图23-16 (a) 所示。这一电路将在 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 的频率发生共振。如果我们希望提高这一电路的共振频率，可通过降低电感 L 而做到。一种办法是，减少线圈中的匝数。但是，在这方面我们只能走到这一步，即最后将达到只有一匝，就是连接电容器的顶板和底板间的那一根导线。本来还可以通过降低电容而把共振频率提得更高，然而，我们可以通过把几个电感并联而继续降低这个电感。当两个单匝电感并联时就只有每匝电感的一半。所以

当电感已减至仅有一匝时，我们仍可通过添加其他一些连接电容器的顶板与底板间的单个回路来继续提高共振频率。例如，图23-16（b）表明电容器两板之间是由六个这样的“单匝电感”连接的。如果继续增加许许多多这种导线段，则可能会过渡到一个完全封闭了的共振系统，如图23-16（c）所示，那是一个柱形对称物体的截面。现在我们的电感是一个连接至电容器两板边缘的柱形空罐，电场和磁场显示在该图中。当然，这样的物体就是一个共振腔，被叫作“加感”空腔，但我们仍可以把它看作为一个 LC 电路，即其中电容部分是我们能够在那里找到大多数电场的地方，而电感部分则是能找到大多数磁场的地方。

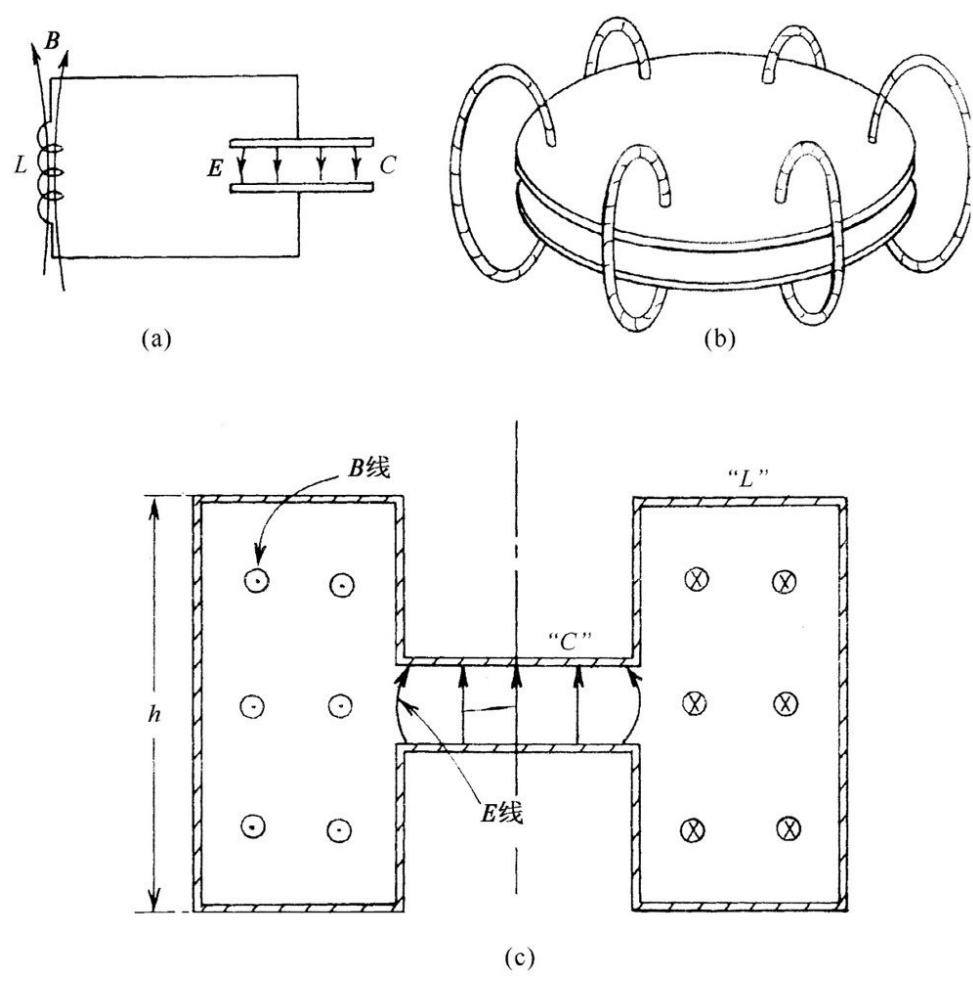


图 23-16 共振频率逐渐提高的各种共振器

如果要进一步提高图23-16 (c) 的共振器频率，还可以通过继续降低电感 L 而做到。为此，就必须减小该电感部分的几何尺寸，比方说缩小图中的高度 h 。当 h 缩小时，共振频率将会提高。当然最后将会达到其中高度 h 刚好等于电容器两板之间的间距。此时，我们就刚好有一个柱形盒，共振电路变成图23-7所示的空腔共振器。

你将会注意到，在图23-16中原来的 LC 共振电路中，电场和磁场分得很开。当逐渐把共振系统修改以便使其频率逐步提高时，磁场就会越来越靠近电场，直到两者在空腔共振器中完全混合。

尽管在这一章中，我们曾谈过的空腔共振器都是柱形盒子，但圆柱这个形状却没有什么神秘之处。任一种形状的房子都会有对应于电场和磁场的各种可能振动模式的共振频率。例如，图23-17所示的那个“空腔”就会有它自己特定的一组共振频率——虽则要把它算出来是相当困难的。

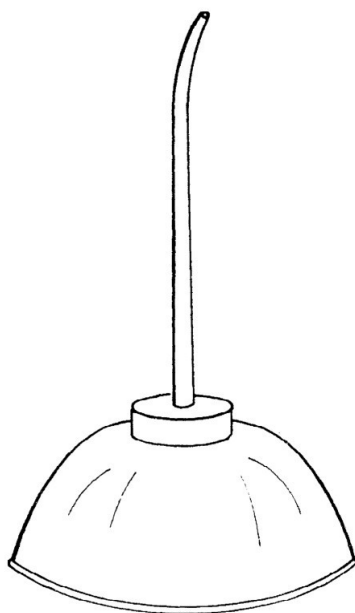


图23-17 另一种共振空腔

第24章 波导

§24-1 传输线

上一章我们学习过电路的集总元件在十分高的频率工作时所发生的情况，从而看出一个共振电路可由场在其中共振的一个空腔替代。另一个有趣的技术问题是，要把两个物体连接起来使得电磁能量能在它们之间传输。在低频电路中，这种连接是由导线完成的，但这一方法在高频时就不怎么奏效，因为这种电路将会把能量辐射到周围的整个空间中去，从而难以控制能量的去向。场将在导线周围散发出去，电流和电压不可能由导线很好地“引导”。在这一章中我们要来看看在高频时物体可能互相连接的办法。至少，这是一种介绍我们课题的方式。

另一种说法是，上面我们讨论了在自由空间里波的行为。现在正是搞清楚当振动场被局限在一维或多维的空间里时所发生的情况的时候。我们将发现一些有趣的新现象。当场受到最好的二维限制而允许在第三维自由通过时，它们将以波的形式传播出去。这些就是“导波”——本章的课题。

我们由研究传输线的普遍理论着手。那些在旷野从一个铁塔到另一个铁塔的输电线会辐射出一些功率，但电源的频率（50~60 Hz）竟是如此之低，以致这种损失并不严重。这种辐射可以用金属套管包围导线而加以防止，但这一办法对于电力传输线来说并不实际，因为所

用的电压和电流势必要求一条十分粗重而又昂贵的套管。因此，常用的还是简易的“明线”。

对于较高一些的频率——比方说几千赫——辐射可能已变得严重。然而，它还是可采用诸如在短程电话接线中所用的那种“双扭线”来降低的。但是，在更高频率时，辐射立刻变得难以忍受，这或是由于功率损失，或是由于能量在不需要它出现的其他电路中出现了。对于从几千赫起至几百兆赫的频率，电磁信号和功率往往采用在筒形“外导体”或“屏蔽物”之内含有一根导线的那种同轴线来传输。虽然我们仍将仅仅对一根同轴线进行推导，但下述处理方法将适用于两个互相平行的任何形状的导体构成的传输线。

试取一条最简单的同轴线，在其中心处有一个薄中空圆筒，此外又有与这一内导体同轴的另外一个导体，也是一个薄筒，如图24-1所示。一开始我们用近似的方法算出该同轴线在相对低频时的工作情况。当早先我们讲到两导体具有确定的单位长度电感或电容时，就已经描述了某些低频行为。事实上，是可以通过给出任何一根传输线的单位长度电感 L_0 和电容 C_0 而描述其低频行为的。于是，我们就可以将该线当作§22-6中曾讨论过的那种 LC 滤波器的极限情况而加以分析。通过采用一些小串联元件 $L_0 \Delta x$ 和一些小并联元件 $C_0 \Delta x$ （其中 Δx 是该线中的一个长度元），可以制造一个模拟传输线的滤波器。利用关于无限长滤波器的结果，可以看到电场的信号会沿着该线传播。然而，我们现在并不想遵循这一途径，而宁愿从微分方程的观点来考察该线。

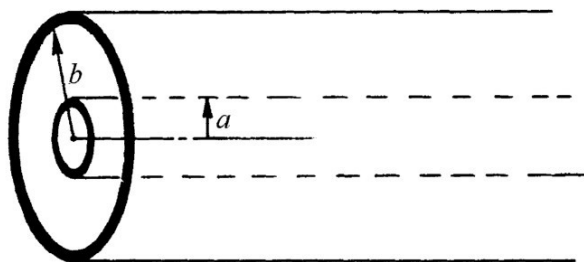


图 24-1 一条同轴传输线

假设我们要看看沿传输线相邻两点，比如说距离线的开头部分为 x 和 $x + \Delta x$ 两点间发生的事情。让我们把这两导体间的电势差称为 $V(x)$ ，而沿那根“热”导体的电流称为 $I(x)$ （见图24-2）。如果导线中的电流正在变化，则电感将向我们提供跨越从 x 至 $x + \Delta x$ 那一小段导线间的电压降计为：

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt}.$$

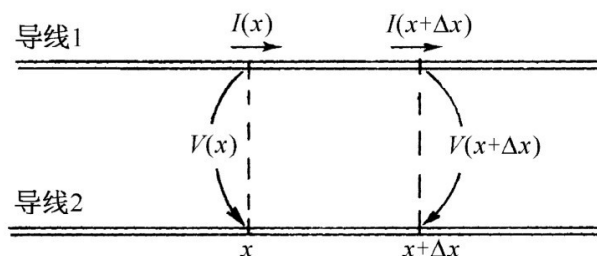


图 24-2 传输线的电流和电压

或者，取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限，则可得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (24.1)$$

这表明变化着的电流产生了电压的梯度。

再参考上图，若在 x 处的电压正在变化，则必定有某些电荷提供给该区域里的电容。如果我们考虑从 x 至 $x + \Delta x$ 那一小线段，则其上的电荷为 $q = C_0 \Delta x V$ 。这一电荷的时间变化率为 $C_0 \Delta x dV/dt$ ，但只有在流入该线元的电流 $I(x)$ 不等于从该线元流出的电流 $I(x + \Delta x)$ 时电荷才出现改变。把这一电流差称为 ΔI ，便有

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{dV}{dt}.$$

若取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限，可得

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (24.2)$$

因此，电荷守恒意味着电流梯度正比于电压的时间变化率。

于是，式(24.1)和(24.2)就是传输线的基本方程。如果我们乐意，可以把它稍微修改一下使之包括导体中的电阻效应或电荷经由导体之间绝缘体的渗漏现象，但对于眼前的讨论来说我们将只停留在这个简单例子上。

关于传输线的这两个方程，通过对其中一个取 t 的微商，而对另一个取 x 的微商，再消去 V 或 I ，从而把它们结合起来。于是，我们就有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (24.3)$$

或者是

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (24.4)$$

由此我们再次认识到它们是在 x 方向上的波动方程。对一条均匀的传输线来说，电压（或电流）作为波而沿该线传播。沿线电压必然会取 $V(x, t) = f(x - vt)$ 或 $V(x, t) = g(x + vt)$ 或两者之和的形式。那么速度 v 是什么呢？我们知道， $\partial^2 / \partial t^2$ 项的系数恰好是 $1/v^2$ ，因而

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (24.5)$$

我们将希望你们去证明：线里每一个波的电压总会正比于那个波的电流，而比例常数刚好等于特性阻抗 z_0 。对于沿正 x 向行进的波分别称其电压和电流为 V_+ 和 I_+ ，则应该得到

$$V_+ = z_0 I_+. \quad (24.6)$$

同理，对于一个负 x 走向的波其关系为

$$V_- = -z_0 I_-.$$

特性阻抗——正如过去曾从滤波器方程中找到的那样——由下式给出：

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad (24.7)$$

所以是一个纯电阻。

为求得一条传输线的传播速率 v 及其特性阻抗 z_0 ，我们必须知道单位长度的电感和电容。对于一条同轴电缆来说，是能轻而易举地把它们算出来的，因而我们会知道情况到底怎么样。对于电感，根据§17-8的那些概念，并设 $\frac{1}{2}LI^2$ 等于磁能，则它可以通过 $\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$ 对整个体积的积分而获得。假定该中心导体载有电流 I ，那么我们知道， $B = I / (2\pi \epsilon_0 c^2 r)$ ，其中 r 为离轴的距离。取一厚度为 dr 而长度为 l 的柱形壳作为体积元，则对于磁能应有

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} \right)^2 l 2\pi r dr,$$

式中 a 和 b 分别代表内外两导体的半径。算出该积分，得

$$U = \frac{I^2 l}{4\pi \epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.8)$$

设这一能量等于 $\frac{1}{2}LI^2$ ，就可以求出

$$L = \frac{l}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.9)$$

正如推测到的那样，它与线的长度 l 成正比，因而单位长度的自感 L_0 就是

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \epsilon_0 c^2}. \quad (24.10)$$

我们曾算出在一柱形电容器上的电荷（见§12-2）。现在，将该电荷除以电势差，便得

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

因而单位长度的电容 C_0 为 C/l 。把这个结果与式(24.10)相结合，便可知道乘积 $L_0 C_0$ 恰好等于 $1/c^2$ ，因而 $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ 即等于 c 。波以光速沿线向下传播。必须指出，这一结果有赖于我们所做的如下假定：(a) 在两导体之间的空间里并没有电介质或磁性材料存在，以及(b) 电流全都是在导体表面上通过的(对理想导体理该如此)。我们以后还将见到，对于优良导体，当频率高时，一切电流将像理想导体那样都分布于其表面上，因此这个假定是适用的。

眼下有趣的是，只要(a)和(b)两假设正确，则对于任一对平行导体——甚至是一根六角形内导体放置在一根椭圆形外导体中的任何地方——积 $L_0 C_0$ 就等于 $1/c^2$ 。只要横截面固定不变以及两导体之间的空间里没有材料，则波以光速传播。

关于特性阻抗就不能做出这样的普遍表述。对于一根同轴线来说，它是

$$z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}. \quad (24.11)$$

式中因子 $1/(\epsilon_0 c)$ 具有电阻的量纲并等于 $120\pi \Omega$ 。几何因子 $\ln(b/a)$ 仅以对数的形式依赖于同轴线的几何尺寸，因而就同轴线——和大多数传输导线——而言，这特性阻抗具有从 50Ω 至几百欧左右的典型值。

§24-2 矩形波导

我们将要谈及的下一个问题，初看起来，似乎是一种令人惊奇的现象：如果从同轴线中抽去中心导体，它仍会运载电磁功率。换句话说，在足够高的频率时，一根空管子将工作得如同导线那样好。这与一种神秘的办法有关，即在高频时电容器和电感器所构成的共振电路必须由一个空盒来代替。

尽管当人们把一条传输线当作一种分布式的电感和电容来思考时，或许是一件引人注目之事，但大家都清楚，电磁波可以沿一条中空的金属管道内部通过。如果该管道是笔直的，则还可以通过它看到东西！因此肯定，电磁波是会通过管子的。但我们也知道，不可能使低频波（电力或电话）从一个单独的金属管内部通过。因此就必然是：若电磁波的波长足够短，才可以从其中通过。我们要来讨论对某一给定大小的管子能够从其中通过的最长波长（或最低频率）的极限情况。由于这时管子是用来载波的，所以它被称为波导。

我们将从一矩形管开始，因为它是待分析的最简单情况。起初打算给出一种数学处理，以后才回过头来用一种更加基本的办法来考察该问题。然而，这较基本的办法只能轻易地运用到一个矩形导管上去。但对任意形状的一般导管，基本现象都相同，故从根本上来说数学论证基本上更为可靠。

这样，我们的问题就是要找出在矩形管中哪一种波才可以存在。现在先来选取某些方便的坐标，我们选取 z 轴沿管长方向，而 x 和 y 轴则平行于管的两个侧面，如图24-3所示。

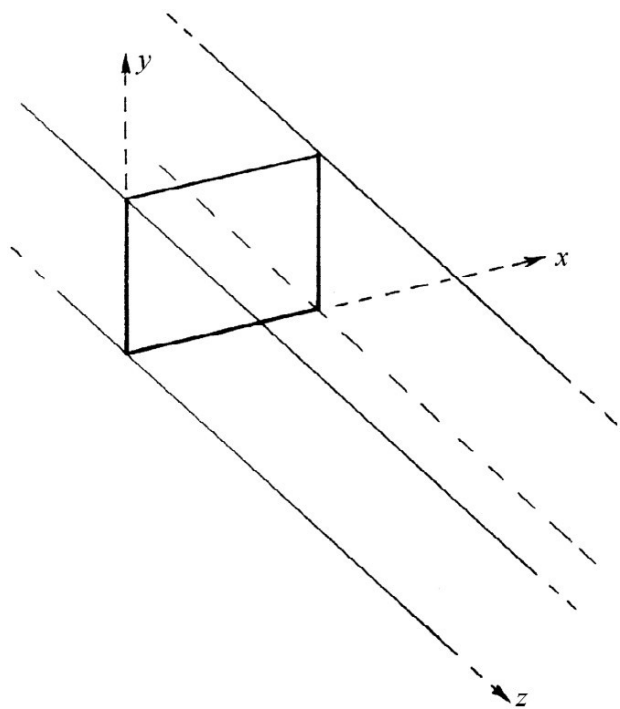


图 24-3 对矩形波导所选取的坐标

我们知道，当光波沿着管道往下传播时，它们有一横向电场，因此，假定先来寻找垂直于 z 的、比如说只有一 y 分量 E_y 的那一种解。这一电场在横跨该导管时会有某种变化，事实上，在平行于 y 轴的两侧壁处它必须为零，因为在一导体中的电流和电荷始终会调整自己使得在导体表面上不会有切向的电场分量。因此， E_y 就将随 x 以某一拱形变化，如图24-4所示。也许它就是我们对空腔所求出的那种贝塞尔函数？不，因为贝塞尔函数必须是与柱形几何有关的。对于一个矩形的几何形状来说，波通常是简谐函数，因而就应该尝试某种像 $\sin k_x x$ 那样的东西。

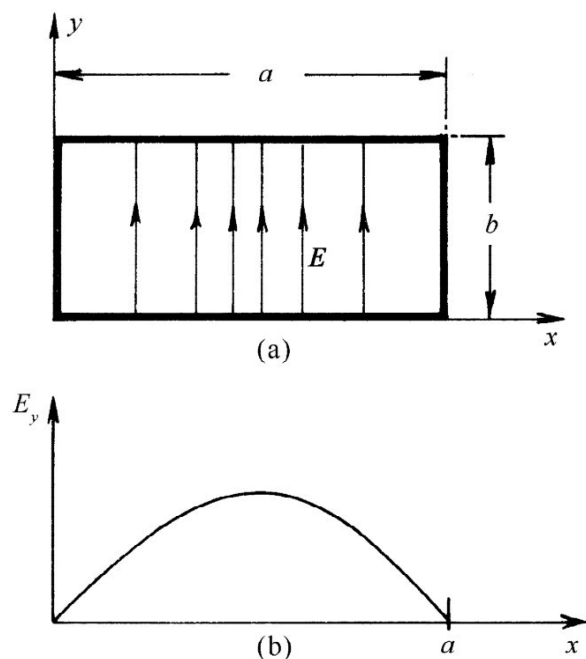


图24-4 在波导中某一个 z 值处的电场

既然我们所想要的是沿波导往下传播的波，那就应该期望，当沿 z 方向行进时场会在正值与负值之间反复变化，如图24-5所示的那样，而这些振动又将以某一速度 v 沿着波导传播。若我们具有以某个确定频率 ω 的振动，则会猜测到，该波随 z 的变化也许会像 $\cos(\omega t - k_z z)$ ，或者采用更为方便的数学形式，则像 $e^{i(\omega t - k_z z)}$ 那样。这一种与 z 的依存关系表示以速率 $v = \omega / k_z$ 传播的波（见第1卷第29章）。

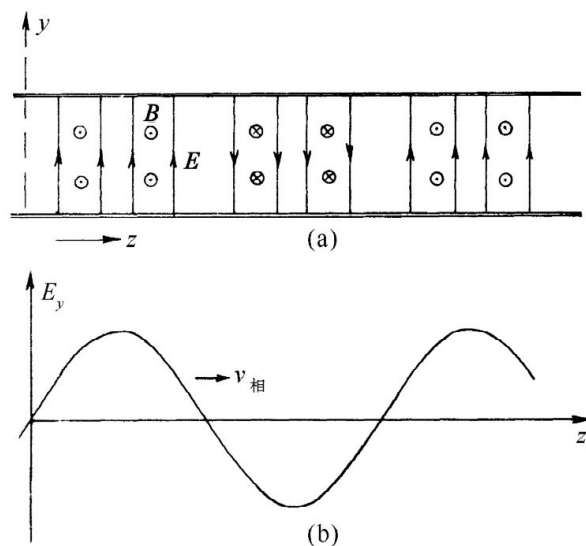


图24-5 在波导中电场与 z 的依赖关系

因此，我们也许会猜测，导管里的波可能有如下数学形式：

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (24.12)$$

让我们来看一看这猜测是否满足正确的场方程。首先，电场在导体处不应该有切向分量，我们的场满足这一要求，它垂直于顶面和底面，并在两侧面上为零。噢，若选取 k_x 使得 $\sin k_x x$ 的半周恰好与导管的宽度相符——也就是只要

$$k_x a = \pi \quad (24.13)$$

就行，使侧面处的电场为零还有其他一些可能性，比如 $k_x a = 2\pi$ ， 3π ，...或一般说来，

$$k_x a = n\pi, \quad (24.14)$$

其中 n 是任一整数。这些就代表场的各种复杂布局，但在目前让我们只考虑最简单的情况，即 $k_x = \pi/a$ ，其中 a 为该导管内部的宽度。

其次，在导管内部的自由空间里 $\mathbf{E}$ 的散度必须为零，因为那里并没有电荷。 $\mathbf{E}$ 只有一个 y 分量，而这一分量并不会随 y 变化，因而是有 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。

最后，电场在导管内部的自由空间里必须与其余的麦克斯韦方程都一致。这与它必须满足下列波方程是同一回事：

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (24.15)$$

我们得看看我们的猜测，即式(24.12)是否很好地起作用。 E_y 对 x 的二次微商正好是 $-k_x^2 E_y$ ，对 y 的二次微商则为零，因为没有东西与 y 有关。对 z 的二次微商为 $-k_z^2 E_y$ ，而对 t 的二次微商则为 $-\omega^2 E_y$ 。于是，方程(24.15)表明

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

除非 E_y 处处为零（那并非十分有意义），否则只有下式

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (24.16)$$

才是正确的。我们已经确定了 k_x ，因而这个方程就告诉我们，只要 k_z 与频率 ω 之间的关系使式(24.16)得到满足——换句话说，只要

$$k_z = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}, \quad (24.17)$$

就可能有上面所假设的那种类型的波。我们刚才所描述的波以这个 k_z 值在 z 方向传播。

对于给定的频率 ω ，由式(24.17)获得的波数 k_z 告诉我们波节沿波导往下传播的速率。这个相速度是

$$v = \frac{\omega}{k_z}. \quad (24.18)$$

你会记得，一个行波的波长是由 $\lambda = 2\pi v / \omega$ 给出的，因而 k_z 也就等于 $2\pi / \lambda_g$ ，其中 λ_g 是沿 z 方向的振动波长——即“导管波长”。当然，导管波长与同频率的电磁波在自由空间里的波长是不同的。若把等于 $2\pi c / \omega$ 的自由空间波长称为 λ_0 ，则可将式(24.17)写成

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / 2a)^2}}. \quad (24.19)$$

除了电场之外，还有磁场也随波传播，但眼前我们将不操心去算出有关磁场方面的那个表示式。由于 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$ ，所以 $\mathbf{B}$ 线将围绕那些 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 值最大的区域旋转，也就是说，将围绕 $\mathbf{E}$ 的极大点与极小点中间的区域旋转。 $\mathbf{B}$ 的回路将平行于 xz 平面并位于 $\mathbf{E}$ 的峰与谷之间，如图24-6所示。

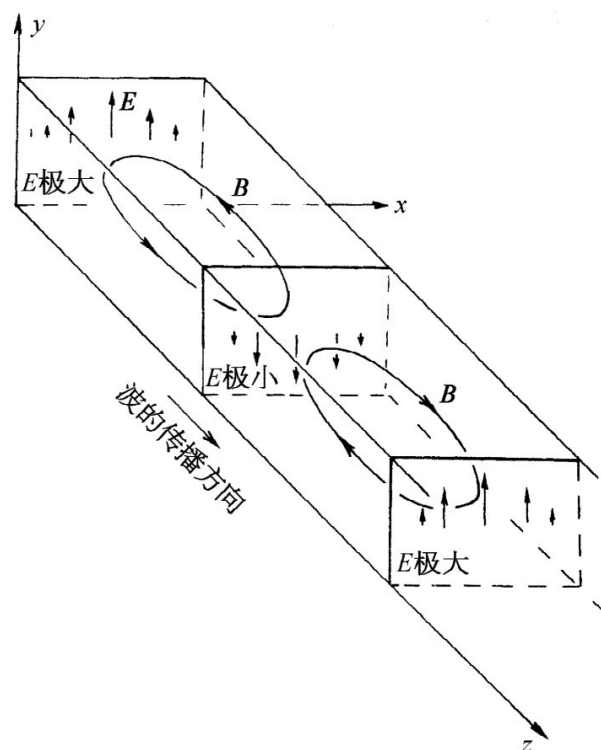


图24-6 波导中的磁场

§24-3 截止频率

在解方程式 (24.16) 以求得 k_z 时，实际应有两个根，一个是正，一个是负。我们应该写成

$$k_z = \pm \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}. \quad (24.20)$$

这两个符号只是意味着可能有以负相速（朝向 $-z$ ）传播的波，同样在导管中也有沿正向传播的波。自然，波沿任一方向传播都应该是可能的。由于这两种类型的波可以同时存在，所以就会有驻波解的可能性。

有关 k_z 的方程也告诉我们，较高的频率给出较大的 k_z 值，因而也就是较短的波长，一直到 ω 取大的极限时， k 变得等于 ω/c ，它就是我们对于自由空间里的波所预期的值。我们通过管子所“看到”的光仍然以速率 c 行进。但此刻注意，若频率下降，则某些怪事会跟着发生。开始波长会变得越来越大，但若 ω 降得太小，则式(24.20)中的平方根内的量突然变负。一旦 ω 变为小于 $\pi c/a$ ——或当 λ_0 变得大于 $2a$ ，上述情况就会发生。换句话说，当频率变成低于某一临界频率 $\omega_c = \pi c/a$ 时，波数 k_g （从而 λ_g ）会变成虚数，从而不再得到任何解了。难道真的得不到解了吗？谁说 k_z 必须是实数呢？如果确实出现虚数，那又该怎么办呢？场方程组仍旧被满足，或许一个虚数 k_z 也代表一个波。

假设 ω 小于 ω_c ，便可以写成

$$k_z = \pm i k', \quad (24.21)$$

其中 k' 是正的实数，即

$$k' = \sqrt{\pi^2/a^2 - \omega^2/c^2}. \quad (24.22)$$

如果现在回到 E_y 的表达式(24.12)，则有

$$E_y = E_0 e^{i(\omega t \mp i k' z)} \sin k_x x, \quad (24.23)$$

这也可以写成

$$E_y = E_0 e^{\pm k' z} e^{i \omega t} \sin k_x x. \quad (24.24)$$

上述表达式给出了一个按 $e^{i\omega t}$ 随时间振动但却按照 $e^{\pm k'z}$ 随 z 变化的 $\mathbf{E}$ 场。它作为一个指数函数随 z 平滑地减少或增加。在我们的推导中并未对发出波的源有所操心，不过一定有一个源存在于导管中某处。伴随 k' 的符号必定是使场随着离开波源的距离增大而减小的那个。

因此，对于比 $\omega_c = \pi c / a$ 低的频率，波并不会沿导管往下传播，该振动场只能透入导管内仅达到 $1/k'$ 数量级的距离。为此，频率 ω_0 被称作导管的“截止频率”。考察式（24.22）可知，在频率仅稍低于 ω_c 时， k' 是一个小数值，因而场可透入导管内很大的距离。但若 ω 比 ω_c 小很多，则指数系数 k' 等于 π/a ，而场便非常迅速地减弱，如图24-7所示。在距离等于 a/π 或在约三分之一宽度的距离内，场减弱至 $1/e$ 。场从源出来后仅透入很短距离。

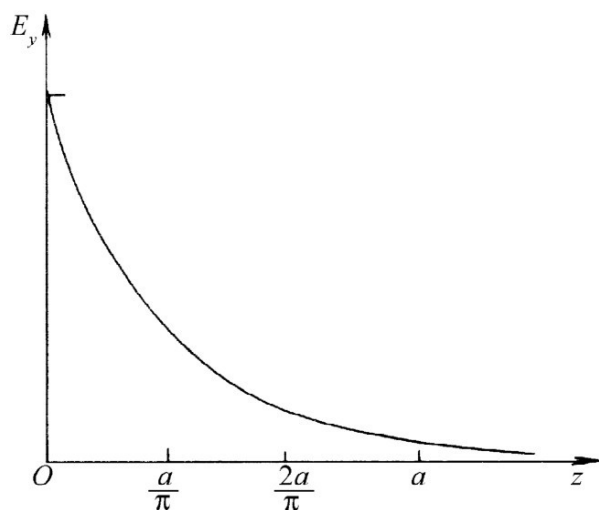


图24-7 对于 $\omega \ll \omega_c$ ， E_y 随 z 的变化情况

我们想要强调对导波进行分析的一个有趣特点——即虚波数 k_z 的出现。按正常情况，如果在物理学中求解一个方程并获得一个虚数，

它不具有任何物理意义。然而，对于波来说，一个虚数确实意味着某种东西。波动方程仍被满足，它只是意味着解答会给出一个指数式地减弱的场，而不是一个传播着的波罢了。因此，在任一个波动问题中，若对于某一频率 k 会变成虚数，这意味着波的形式变了——正弦波变成了指数式衰减的场。

§24-4 导波的速率

上面所用的波速是相速，即波节[1]的速率，它是频率的函数。若把式（24.17）和（24.18）结合起来，则可写出

$$v_{\text{相}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}}. \quad (24.25)$$

对于比截止频率为高的频率——其中存在行波—— ω_c/ω 小于1，而 $v_{\text{相}}$ 为实数，且会大于 光速。我们曾在第1卷第48章中见到，相速大于光速是可能的，因为那不过是波节在运动而不是能量或信息在运动。为知道信号 传播得多快，我们得算出由一个频率的波与另一个或更多个频率稍微不同的波互相干涉而形成的脉冲或调制波的速率（见第1卷第48章）。我们已把这样一群波的包络速率称为群速度，它不是 ω/k ，而是 $d\omega/dk$ ：

$$v_{\text{群}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.26)$$

取式（24.17）对 ω 的微商并颠倒过来以获得 $d\omega/dk$ ，就求得

$$v_{\text{群}} = c\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}, \quad (24.27)$$

它比光速要小。

$v_{\text{相}}$ 与 $v_{\text{群}}$ 的几何平均恰好就是 c ，也即光速：

$$v_{\text{相}} v_{\text{群}} = c^2. \quad (24.28)$$

这很奇怪，因为我们已在量子力学中见过相似的关系式了。对于一个具有任何速度——即便是相对论性的——的粒子，其动量 p 与能量 U 都是这样联系着的：

$$U^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (24.29)$$

但在量子力学中能量为 $\hbar \omega$ ，而动量为 $\hbar / \lambda$ ，即等于 $\hbar k$ ，因而式 (24.29) 便可以写成

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (24.30)$$

或

$$k = \sqrt{\omega^2 / c^2 - m^2 c^2 / \hbar^2}, \quad (24.31)$$

这看来十分像式 (24.17)，真有趣！

波的群速度也就是能量沿导管传输的速率。如果想要求出沿波导传送的能流，则可以从能量密度乘以群速度而得到。设电场的方均根值为 E_0 ，则电场能量的平均密度为 $\epsilon_0 E_0^2 / 2$ 。也有一些能量与磁场有联系，我们将不在这里来证明它，但在任一个空腔或导管中磁能与电能始终相等，因而总的电磁能量密度为 $\epsilon_0 E_0^2$ 。于是，由导管传输的功率 dU/dt 为

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 ab v_{\text{群}} \quad (24.32)$$

（我们将在以后看到获得能流的更普遍的方法）。

§24-5 导波的观测

能量可借助某种“天线”耦合到波导中。例如，用一根小小的垂直导线或“短线”就可以。导波的存在可以用一小接收“天线”——仍可以是一根小短线或一个小回路——来拾取某些电磁能而加以观测。在图24-8中，展示了切开一部分侧壁的波导管，表明其中装有一根驱动短线和一个拾波“探头”。该驱动短线可以通过共轴缆连接至信号发生器，而拾波探头则可由一根相似的电缆连接至一检波器。把拾波探头通过一条细长狭槽插入导管之内往往较方便，如图24-8所示。这样，探头就可以沿着导管来回移动以便在不同位置对场取样。

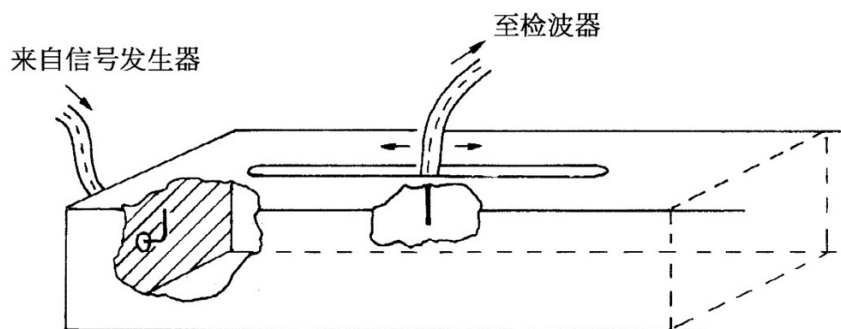


图24-8 装配有驱动短线和拾波探头的波导管

如果信号发生器被调节在大于截止频率 ω_c 的某个频率 ω 时，那么就会有波从该驱动短线出发沿导管往下传播。如果该导管无限长，则这些波将是唯一存在的波，用一个经过仔细设计的吸收器使导管不致从远端发生反射，从而使有终端的导管有效地设置成具有上述性质的

导管。于是，由于检波器所测量的是在探头附近场的时间平均值，所以它将检测到一个与沿导管位置无关的信号，它的输出将与被传递的功率成正比。

如果现在导管的远端以某种方式被封闭因而产生一个反射波——作为一个极端例子，假定用一块金属板来封闭它——则除了原来的前进波之外还将有一个反射波。这两个波将互相干涉，在导管里产生一个驻波，它与我们以前曾在第1卷第49章中讨论过的那种弦线上的驻波相似，于是，当拾波探头沿线移动时，检波器的读数就将周期性地升降，表明在驻波的每一个波腹处场为极大而在每一个波节处场为极小，在相邻两波节点（或波腹点）间的距离恰为 $\lambda_g/2$ 。这提供了测量导管内波长的一个方便的方法。现在若频率移至接近于 ω_c 处，则两节点间的距离增长，这表明该导管波长是按照式（24.19）所预言的而增大了。

假设现在信号发生器被调节至稍微低于 ω_c 的一个频率。那么，当该拾波探头沿导管往下移动时，检波器的输出便将逐渐减弱。如果频率再度降低，场强将按照图24-7的曲线迅速下降，并表明波不再传播出去了。

§24-6 波导管

波导的一种重要实际应用就是对于高频功率的传输，比如把一个高频振荡器或一部雷达装置中的输出放大器耦合至一根天线。事实上，天线本身往往包括一个抛物线形反射镜，由一个在其末端张开成“喇叭口”形状的波导把沿导管而来的波辐射出去，并馈至镜的焦点

上。尽管高频电磁波可以经由同轴电缆传输，但对于传输大量功率，波导较为优越。首先，可以沿一条缆线传输的最大功率受到导体间的绝缘材料（固体或气体）击穿的限制。对于给定的功率量，在一导管内的场强往往比同轴电缆内的弱，因而在击穿发生之前就可其中传递较大的功率。其次，同轴电缆中的功率损耗往往比在波导管内的大。在同轴电缆内必须有用以支持该中心导体的绝缘材料，而在这一材料中便有能量损耗——特别是在高频上。并且，在同轴电缆的中心导体上电流密度很高，而由于损耗是随电流密度的平方增大的，因而出现在导管壁上的较低电流就会导致较小的能量损耗。为确保损耗最小，导管内壁往往是用一种诸如银的高电导率材料电镀的。

凡在有波导存在的“电路”中，连接的问题与在低频时相应的电路问题大不一样，这种连接常称为微波“衔接”法。为此目的许多特殊器件已经发展起来。例如，两节波导往往是经由凸缘接头互相连接的，这可由图24-9中看出。然而，像这样的连接会导致严重的能量损耗，因为那些表面电流必然流经接口，而那里可能有相对高的电阻。避免这种损耗的一种办法是制造截面如图24-10所示的那种凸缘接头。在导管的相邻两节间留下一点空隙，而在其中一个凸缘接头上则刻有一条槽沟以便造成一个如图23-16（c）所示的那种小空腔。适当地选取这个空腔的大小尺寸使它能在所采用的频率发生共振。这一共振腔对于电流会呈现一个高“阻抗”，因而流经该金属接口（图24-10中的 a 处）的电流就相对的小。导管里的大电流只是对该空隙（图中的 b 处）的“电容”充电及放电而已，因而那里仅有少量的能量损耗。

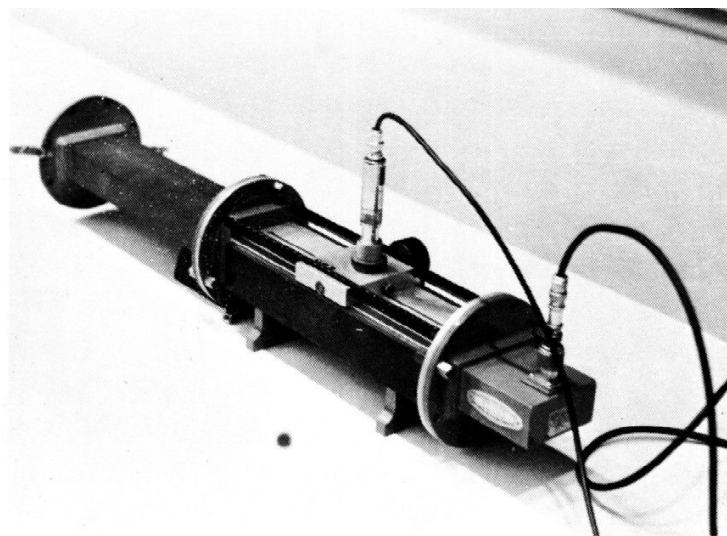


图24-9 几段波导由凸缘接头互相连接

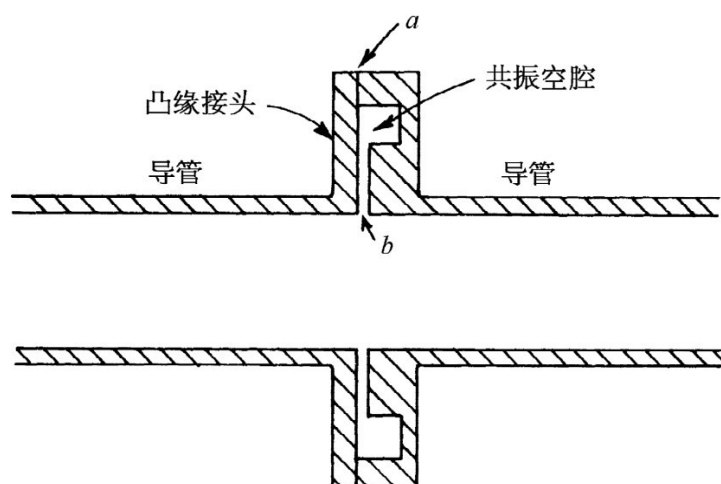


图24-10 两节波导间的低损耗连接

假设你想要在某一处截断一波导管使得不会形成反射波，那么，你就必须在其末端安置一种模拟一根无限长导管的东西。你需要有一个对于导管的作用就像特性阻抗对于传输线的作用那样的“终端”——对到达之波仅有吸收而不产生反射的一种东西。此时该导管将起着仿佛永远接续下去的作用。像这样的终端是通过在该导管中放进某种经

过精心设计的电阻材料的劈形物制成的。它被用来吸收波的能量使得几乎不产生任何反射波。

如果你想要把三件东西——例如一个源与两个不同的天线——互相连接起来，那么你就可用一个像图24-11所示的那种“T”形波导来完成。在这个“T”形管中心截面输入功率会被分开经由两条侧臂流出（可能还有一些反射波）。从图24-12的简略图示中你可以定性地看出，当场到达该输入截口的末端时就会扩散开来并形成电场，该电场会使波在该两臂中开始传播出去。在接合处的这些场会约略如图24-12（a）或（b）所示，具体要视导管里的电场是与该“T”形管的“顶”平行还是垂直而定。

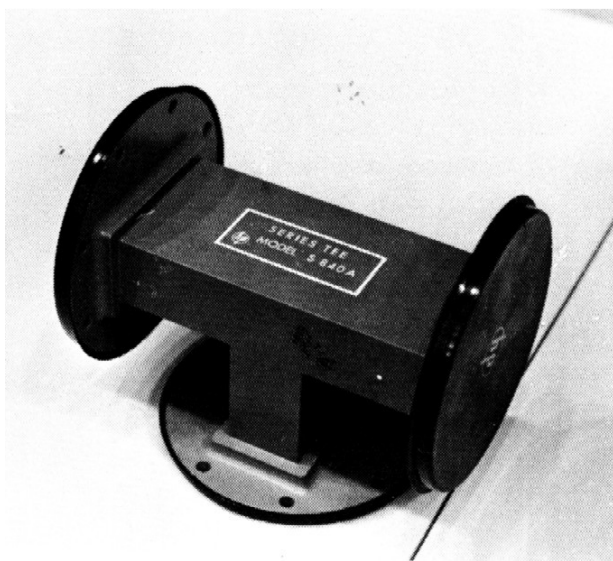


图24-11 “T”形波导管（在凸缘接头处配备有塑料端帽，以保持当这个“T”形导管不用时内部清洁）

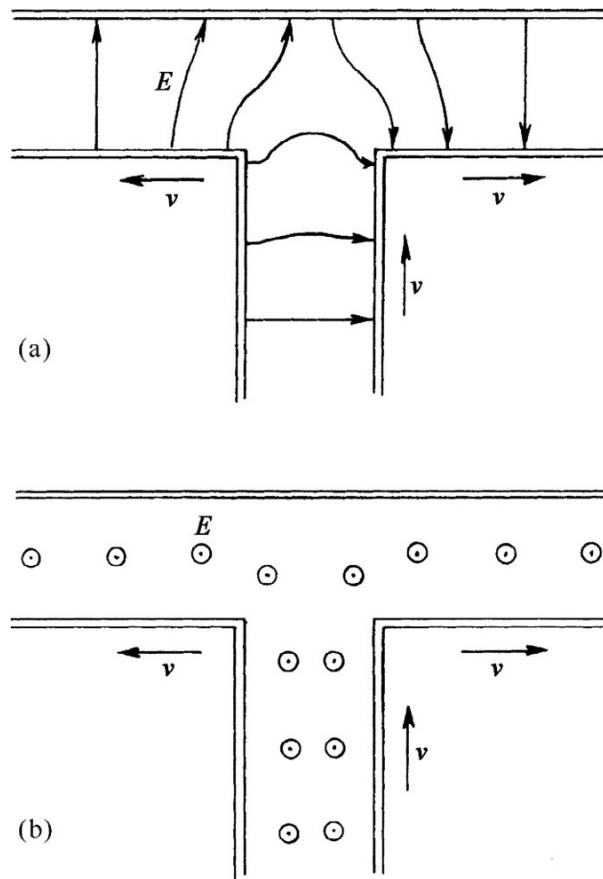


图24-12 在一“T”形波导中关于两种可能取向的电场

最后，我们想要描述一种称为“单向耦合器”的器件，这对于在你已经连接好一个复杂的波导布局之后要讲出到底发生了什么是非常有用的。假设你想知道在波导的某一特定截口处波朝哪一方向行走——例如，你或许会怀疑是否存在一强反射波。若导管里的波是沿某一方向行走，这单向耦合器就会从其中吸取一小部分功率，但若波是朝另一方向行走，则不能取出任何功率。通过把这个耦合器的输出连接到一个检波器上，你就能够测得导管中的“单向”功率。

图24-13是单向耦合器的简图，沿着一段波导 AB 的一个面上焊接上另一段波导 CD 。波导 CD 被弯开以便有可以安置凸缘接口的地方。在把这两个波导焊接在一起之前，要在每一波导上钻通两个（或者更

多个)洞(借以互相耦合),以便使主波导 AB 中的一些场可被耦合至副波导 CD 中去。每个洞起着小天线的作用,以致在副波导中产生出波来。要是只有一个洞,波会在两个方向上被送出,而且不管波在原导管中走哪个方向都应该相同。但当存在间隔等于导管波长的四分之一的两个洞时,它们就会形成相位差 90° 的两个源。你是否还记得,在第1卷第29章中讨论过空间相距 $\lambda/4$ 、而在时间上激发相位超过 90° 的两根天线发出的波引起的干涉?我们曾发现,这两波在一个方向上相减而在相反方向上相加。相同的事情也将在这里发生。导管 CD 中所产生的波与在 AB 中的波会有相同的传播方向。

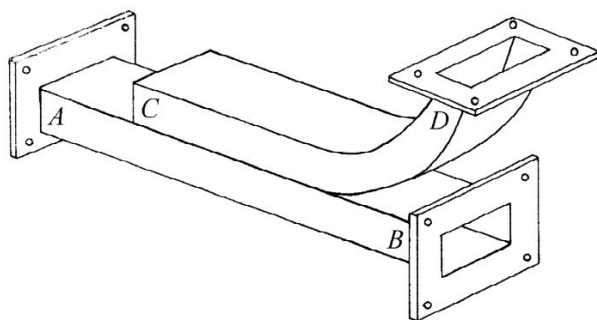


图24-13 单向耦合器

如果在主导管中波正从 A 向 B 传播,则在副导管的输出口 D 处将会有一个波。若在主导管中的波是从 B 传向 A ,则将有一个波朝副导管的 C 端传播。但这一端却已装配成一终端,因而波将被吸收,于是在该耦合器的输出口处就不存在波了。

§24-7 波导模式

由我们选择出来而正在加以分析的波乃是场方程组的一个特解。此外还有许多其他的解,每个解称为一种波导“模”。例如,上面讨论

的场与 x 的依赖关系不过是正弦波的半周。还存在同样好的具有全周的解，这时 E_y 随 x 的变化将如图24-14所示。这种模式的 k_x 是前一种的二倍，因而截止频率就高得多了。并且，在我们所已学习过的波中 $\mathbf{E}$ 只有一个 y 分量，但此外还有包含更复杂电场的其他模。若电场只有 x 和 y 分量——因而总场始终与 z 方向正交——则这种模称为“横电”（或 TE ）模。这种模的磁场总会有一个 z 分量。事实证明，若 $\mathbf{E}$ 有一个 z 分量（沿传播方向），则磁场始终只有横向分量，因此这种场就称为横磁（ TM ）模。对于一个矩形导管来说，所有其他模比起上述那种简单的 TE 模来具有较高截止频率。因此，就有可能——而且也经常是——采用一个其中频率只比这一最低波模的截止频率为高而比其他一切截止频率都较低的导管，以便仅有这么一种模能够传播。不然的话，波的行为就会变得复杂而且更难于控制了。

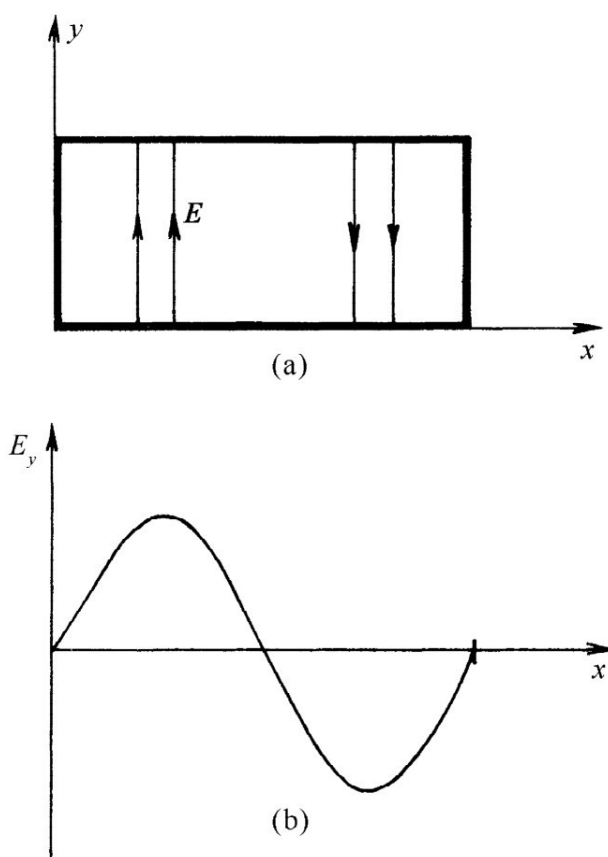


图24-14 另一种可能的 E_y 随 x 变化的情况

§24-8 另一种看待导波的方法

现在要让你看看另一种理解波导行为的方法，即为什么波导对比其截止频率 ω_c 低的那些频率会使场迅速衰减。这样对于波导在高、低频之间行为之所以会突然变化，你将有一个更为“形象化”的概念。对于一个矩形波导来说，通过利用在导管壁上的反射或镜像法对场的分析，我们能够做到这点。然而，这种办法只对矩形波导有效，这就是为什么我们要从较多数学上的分析开始，因为它在原则上对任何形状的波导都适用。

对于上面已描述过的模，垂直方向的尺寸大小（即 y 值）不会引起任何效应，因而可略去该导管的顶和底，并想象导管乃是在垂直方向上延伸至无限远的。于是，可设想导管仅由两块相距为 a 的垂直板组成。

假定场源是一根放在导管中间的垂直方向的导线，这根线中载有以频率 ω 振动着的电流。在不存在导管壁的情况下，像这样的导线会辐射出柱面波。

现在，考虑导管壁都是理想导体。这样，如同在静电学中一样，若我们对于该导线的场再加上一个或更多个适当的镜像导线的场，则在壁面处的那些条件将是正确的。关于镜像的概念，在电动力学中，正如同在静电学中一样，也都适用，当然要把推迟效应也包括进去。我们都明白那是真的，因为经常见到镜子会产生光源的像。而对于光频波段的电磁波来说，一面镜子正好是一块“理想”导体。

现在让我们取一个水平截面，如图24-15所示，其中 W_1 和 W_2 是导管的两个壁，而 S_0 则是那根源导线。我们称这根导线里的电流方向为正。现在假如仅有一面壁，比方说 W_1 ，我们可以把它除去，只要在那标明为 S_1 的地方放置一个（具有相反极性的）像源。但由于存在两面壁，所以在壁 W_2 中也将有 S_0 的像，将其标明为像 S_2 。这个像源也将在 W_1 中造成一个像，叫它做 S_3 。现在 S_1 和 S_3 两者都将在 W_2 中在标明为 S_4 和 S_6 的位置上各有其像，如此等等。对于中间有一个源的两个平面导体来说，其场与由排列成一条直线、彼此相隔各为 a 的无限多个源所产生的场相同（这事实上就恰如你在观察置于两平行平面镜中间的一根线时所会看到的那样）。为了使在两壁处的场为零，在像上的那些电流极性必须从一个像至另一个像交替地改变着。换句话说，它们的振动存在 180° 的相位差。于是，该波导场就恰好是这种无限多个线源产生的场的叠加。

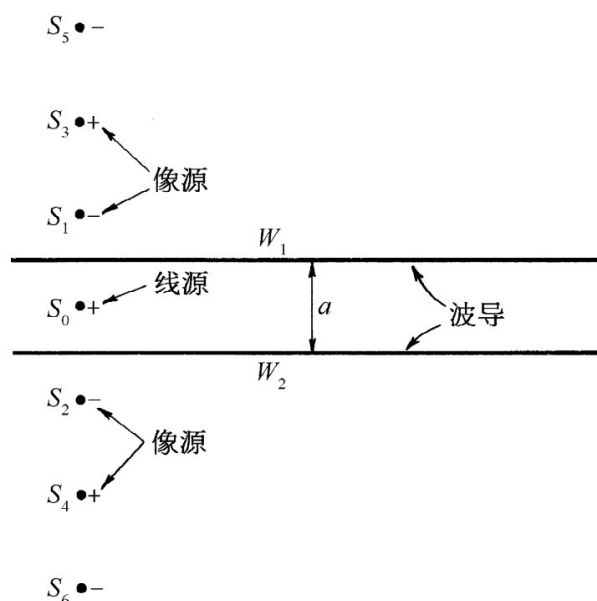


图24-15 放在两面导体壁 W_1 和 W_2 之间的线源 S_0 。这两面壁可以由一个无穷序列的像源代替

如果靠近那些源，场就很像是个静场。在§7-5中曾经考虑过由一排栅形线源所产生的静场，并求得除随着与栅的距离指数式地减弱的那些项外，这个场好像一块带电平板产生的场。这里平均源强为零，因为从一个源至下一个源的符号交替地改变。任何存在的场会随距离做指数式的减弱。在靠近源时，所见到的场主要是来自最接近的源，在较远处，许多源都会做出贡献，因而它们的平均效果便是零了。因此，现在我们明白为什么在低于其截止频率时波导会给出一个按指数衰弱的场。特别是在低频上，这静态近似表现得很好，因而它预言场会随距离的增大而迅速减弱。

现在，我们却面临一个相反问题：为什么波真的会传播呢？那是个神秘部分！原因是，在高频时场的推迟会在相位上引进一个附加改变，使得来自那些异相的源的场相长而不是相消。事实上，正是为了这一问题，我们在第1卷第29章中已学习过由一个天线阵或一个光栅所产生的场，当几根无线电天线被适当排列时，它们就能提供一种干涉花样，使得在某一方向有强信号而在另一方向则没有信号。

假设回到图24-15并观察从那一列像源到达远处的场。只有在某些由频率决定的方向——只有在来自所有一切源的场因同相相加的那些方向——场才会最强。在与源有适当距离处，场在这些特殊方向才作为平面波传播。我们在图24-16中对这一种波画出了示意图，其中实线代表波峰而虚线表示波谷。波的传播方向将是这样的方向，在这个方向两相邻源到达波峰的推迟时差等于半个振动周期。换句话说，图中的 r_2 与 r_0 之差是自由空间波长的一半：

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

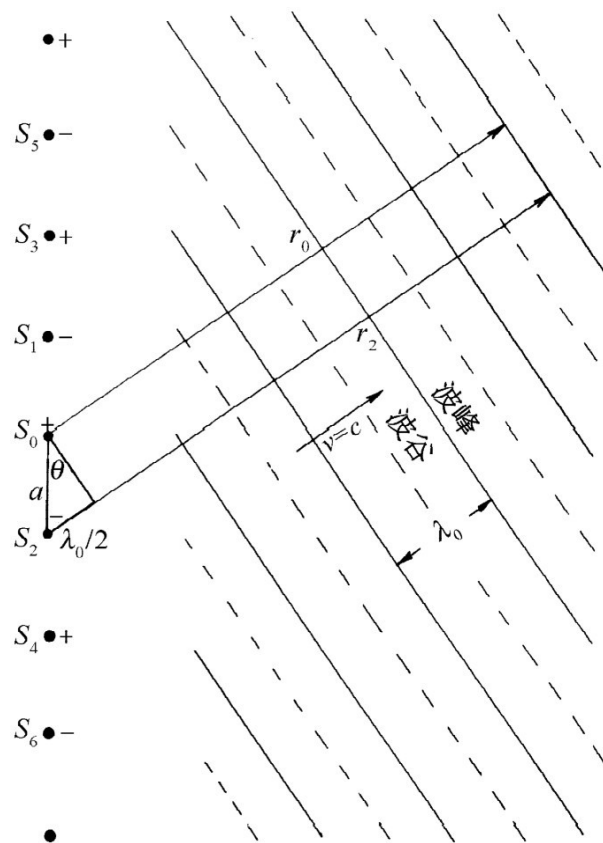


图24-16 来自一系列线源的一组相干波

于是角度 θ 就由下式给出：

$$\sin \theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \quad (24.33)$$

当然，还有另一组波以相对于该列线源对称的角度向下传播。整个波导场（不要太靠近源）就是这两组波的叠加，如图24-17所示。当

然，只有在该波导的两壁之间那实际的场才会真的是这样。

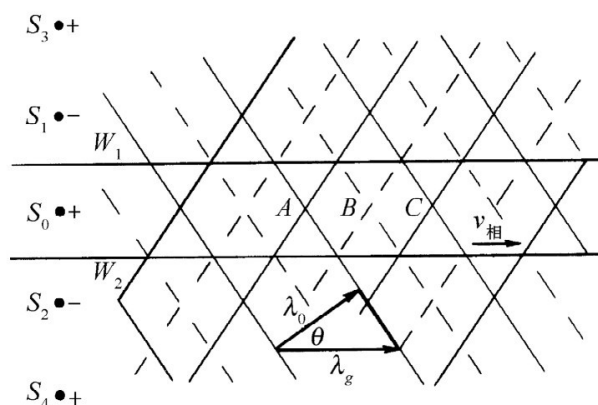


图24-17 波导场可以视作两列平面波的叠加

比如在 A 和 C 那些点，两种波形的峰相重合，因而场就有一个极大值；比如在 B 那种点，两波都有负峰值，因而场会有一个极小值（最大负值）。当时间向前推移时，导管里的场会表现出以波长 λ_g ——等于从 A 至 C 的距离——沿导管传播。这一距离与 θ 角的关系为

$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \quad (24.34)$$

利用关于 θ 的式（24.33），便可得到

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (24.35)$$

这恰好就是上面我们在式（24.19）中所求得的。

现在明白了为什么只有在超过截频 ω_0 时才会有波传播。如果自由空间波长大于 $2a$ ，则波不能在如图24-16所示的那种角度出现。当 λ_0 降至 $2a$ 以下或当 ω 升至 $\omega_0 = \pi c / a$ 以上时，所需的相长干涉才会突然出现。

若频率足够高，则波将出现的方向就可能有二个或更多个。如果 $\lambda_0 < \frac{2}{3}a$ ，则上述情况就会发生。然而，一般说来，这也可能发生在 $\lambda_0 < a$ 时。这些附加波相当于我们提到过的那些较高的波导模。

通过上述分析我们也已弄清楚为什么导波的相速度会大于 c ，以及为什么这一速度会依赖于 ω 。当 ω 改变时，图24-16中的自由波角度会跟着发生变化，从而沿导管的速度也就变了。

虽然已经把导波描写成无限多个线源的阵列之场的叠加，但是只要设想有两组自由空间的波在两面理想平面镜之间不断地被往复反射——记住反射意味着周相的反转——我们便会得到这相同的结果。这些反射波组，除非刚好按照式（24.33）所给出的那个角度 θ 在传播，否则彼此完全互相抵消。因此考虑同一事物存在着许多方法。

[1] 这里“波节”指的是行波中的波谷（或波峰），而不是驻波中的那种波节。——译者注

第25章 用相对论符号表示的电动力学

在本章中： $c=1$

§25-1 四维矢量

现在来讨论狭义相对论在电动力学中的应用。由于已在第1卷的15至17章中学习过狭义相对论，因而我们在此只要很快地温习一下基本概念。

在实验上已经发现：如果我们以匀速运动，则物理规律不会改变。你不可能区别你是否处于一艘以匀速沿直线航行的宇宙飞船中，除非你从飞船中向外观望，或至少得做一种与外界有关的观测。我们写出的任何正确的物理定律都必须安排得使自然界的这一事实成为其中的固有部分。

设存在两个坐标系，其中一个 S' 系在 x 方向上以速率 v 相对于另一个 S 系而做匀速运动，这两个坐标系的空间与时间之间的关系由洛伦兹变换式给出：

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad z' = z.\end{aligned}\tag{25.1}$$

物理定律必须是这样的：在经过了洛伦兹变换之后，该定律的新形式看来刚好像其旧形式。这恰恰同物理定律与坐标系的取向 无关的原理相似。在第1卷第11章中，我们已看到，要从数学上描写物理过程对于转动的不变性，其办法是利用矢量 来写出方程式。

例如，若有两矢量

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \text{ 和 } \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

我们曾发现其组合式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

如果对转动的坐标系进行变换，是不变的。因此我们知道，若在一个方程式的两边都有像 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 这一类的标识，则这方程在所有转动坐标系中都会有完全相同的形式。我们也曾发现过这么一个算符（见第2章）：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

当作用于标量函数时，它会给出像一个矢量那样变换的三个量。利用这一算符我们曾定义过梯度，而与其他矢量相组合时也曾定义过散度与拉普拉斯算符。最后还发现，取两矢量的各对分量之积并求和，可能得到三个新的量，其行为像一个新的矢量。我们曾称它为两矢量的叉积。然后，又利用算符 ∇ 做叉积，定义了矢量的旋度。

由于我们会经常回过去参考矢量分析中所曾做过的事情，因此就把过去用过的三维空间中所有重要的矢量运算的摘要罗列在表25-1

上。这里的要点在于，必须将物理学方程写得能使其两边在坐标系转动时以相同的方式变换。如果一边是矢量，则另一边也必须是矢量，以便在坐标系转动后方程两边将以完全相同的方式一起改变。同理，若一边是标量，则另一边也应该是标量，因而当转动坐标系时两边都不应当有任何改变，等等。

表25-1 三维矢量分析中重要的量和重要运算

矢量定义	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
标积	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
微分矢量算符	∇
梯度	$\nabla \phi$
散度	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
拉普拉斯算符	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
叉积	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
旋度	$\nabla \times \mathbf{A}$

现在，在狭义相对论的情况下，时间和空间不可分割地混在一起，因而就必须对四维做出类似的事情。我们希望所得的方程不仅对于转动会保持不变，而且对于任何惯性参照系也是如此。这意味着，方程式在经历了式（25.1）的洛伦兹变换后应该不变。本章的目的就是要向你们说明如何才能做到这一点。然而，在开始之前，还要做一件将使我们的工作轻松得多（也会减少某些混乱）的事情。这就是选取长度和时间单位使得光速*c* 等于1。你可以把这看作为把时间单位选

取为光行走1m所需的时间（约为 $3 \times 10^{-9} \text{ s}$ ）。我们甚至可以叫这个时间单位为“一米”。采用这种单位，一切方程会更明显地呈现出空时对称性。并且，所有的 c 将不再出现在我们的相对论方程式中（如果你对此觉得麻烦的话，你始终可用 ct 代替每一个 t ，或一般说来，通过在那些需要使方程的量纲表现得正确的地方添加一个 c ，即把 c 再放回到任一个方程中去）。有了这个约定，我们就准备开始工作。我们的计划是要在四维空时中做出曾用矢量在三维中所做过的所有事情。这诚然是一场十分简单的游戏，我们只是根据类比来做工作罢了。唯一真正的复杂性是符号的表示方法（在三维时已用尽了矢量符号）以及符号的一个轻微扭曲。

首先，通过与三维中的矢量的类比，定义一个四维矢量为 a_t, a_x, a_y, a_z 一组四个量，当我们变换运动坐标系时，这些量会像 t, x, y, z 那样变换。对于四维矢量人们使用几种不同的符号表示方法。人们会写成 a_μ ，这指的是四个数 (a_t, a_x, a_y, a_z) 的一组——换句话说，该下脚标 μ 可以取 t, x, y, z 各“值”。有时由一个三维矢量来指明它的三个空间分量，即像 $(a_t, \mathbf{a})$ 那样，也会很方便。

我们已碰到过一个四维矢量，它由粒子的能量和动量组成（第1卷第17章），在新符号表示法中我们把它写成

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}), \quad (25.2)$$

这意味着该四维矢量 p_μ 是由粒子的能量及其三维矢量 $\mathbf{p}$ 的三个分量所构成的。

看来似乎这场游戏的确十分简单——对于物理学中每一个三维矢量，我们必须做的全部事情就在于找出其余的一个分量该是什么，从而就有一个四维矢量了。为了弄清楚事实并不是那么回事，试考虑速度矢量，它的分量是

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$

试问：那时间分量是什么？凭本能就应能够提供正确的答案。由于四维矢量都像 t, x, y, z 那样，我们就会猜测到其时间分量为

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1.$$

这是错的。原因是，当我们做洛伦兹变换时在每个分母中的 t 并非不变量。虽然为构成一个四维矢量，那些分子都具有正确的行为，但在各个分母中的 dt 却把事情搞坏了，它并不是对称的，而且在两个不同系统中是不相同的。

事实证明，只要各除以 $\sqrt{1-v^2}$ ，上面所写下的四个“速度”分量将成为四维矢量的分量。我们能够看出那是正确的，因为如果从动量四维矢量出发：

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (25.3)$$

并用四维中不变的标量、静止质量 m_0 来除它，便有

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (25.4)$$

这必然仍是一个四维矢量（用一个不变标量来除，并不会改变变换性质）。因此，就可由下式定义一个“速度四维矢量” u_μ ：

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

这个四维速度是一个有用的量，例如，可以写出

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \quad (25.6)$$

这是相对论中正确的方程都必须具有的那一种典型形式，式的每一边都是一个四维矢量（右边是一个不变量乘以一个四维矢量，那仍然是一个四维矢量）。

§25-2 标积

还可以讲，在坐标系转动下从原点至某一点的距离不变乃是生活中的一项巧遇。这意味着在数学上 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 是一个不变量。换句话说，在经过了转动之后， $r'^2 = r^2$ 或

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

现在的问题是：在洛伦兹变换下是否也有一个相似的不变量？有的。从式（25.1）可以看出

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

除了它有赖于 x 方向的特殊选择之外，那是很好的不变量。若再减去 y^2 和 z^2 便能把这个

问题解决了。于是，任何洛伦兹变换加转动都会使这个量保持不变。因此，与三维中的 r^2 相类似的量，在四维中为

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

这是在所谓“完整洛伦兹群”——意指恒速平动和转动二者都进行的那种变换——下的一个不变量。

现在，由于这个不变性是仅仅依赖于式（25.1）的变换法则——再加上转动——的一个代数问题，它对于任一个四维矢量都是正确的（根据定义，它们都做同样的变换）。因此，对于一个四维矢量 a_μ 来说，便有

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

我们叫这个量为四维矢量 a_μ 的“长度”的平方（有时人们将所有各项的符号都改变而叫 $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ 为长度的平方，因而你要小心对待）。

现在如果有两个矢量 a_μ 和 b_μ ，它们的相应分量按相同的方式变换，则这个组合

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

也是一个不变（标）量（事实上，在第1卷第17章中对此已有过证明）。很明显，这一表示式与矢量的点积很相似。实际上，我们将称之为两个四维矢量的点积或标积。把它写成 $a_\mu \cdot b_\mu$ 使得看来像个点积，似乎该合乎逻辑。可是，不凑巧，习惯上不是那样做，而是往往被写成没有中间那一点。因此，我们将按照这一惯例而把该点积简写成 $a_\mu b_\mu$ 。这样，根据定义，

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (25.7)$$

每当你看到两个全同下脚标在一起（有时得用 ν 或某一其他字母来代替 μ ）时，那就意味着你必须取这四个积并相加起来，记住对于那些空间分量之积都取负号。按照这一惯例，在洛伦兹变换之下，标积的不变性可以写成

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

由于式（25.7）中的最后三项恰好是三维中标量的点积，把它写成如下形式往往更为方便：

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

在上面描述过的那种四维长度的平方可以写成 $a_\mu a_\mu$ ，那也是明显的：

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (25.8)$$

有时把它写成 a_μ^2 也很方便：

$$a_{\mu}^2 \equiv a_{\mu} a_{\mu}.$$

现在要向你们提供有关四维矢量点积的用途的一个例证。在巨大的加速器中，通过下列反应可以产生反质子 ($\bar{P}$)：

$$P + P \rightarrow P + P + P + \bar{P}.$$

这就是说，一个高能质子与一个静止质子（例如，放置在质子束中的氢靶里的质子）相碰撞，而倘若入射质子拥有足够的能量，则除了原来的两个质子之外还可能会产生质子-反质子^[1]对。试问：应给予入射质子多少能量才能使这一反应在能量上成为可能。

获得答案的最容易的方法是考虑在质心（CM）系中该反应看来像个什么样子（见图25-1）。我们将叫入射质子为 a 而其四维动量为 p_{μ}^a 。同理，将叫靶质子为 b 而其四维动量为 p_{μ}^b 。若入射质子仅仅勉强具有使反应进行的能量，那么末态——经过碰撞后的状态——在质心系中将由包含三个质子和一个反质子的一个静止球构成。要是入射能量稍高一些，那些末态粒子就会具有一些动能而四散跑开；要是入射能量稍低一些，则不会有足够能量产生四个粒子。

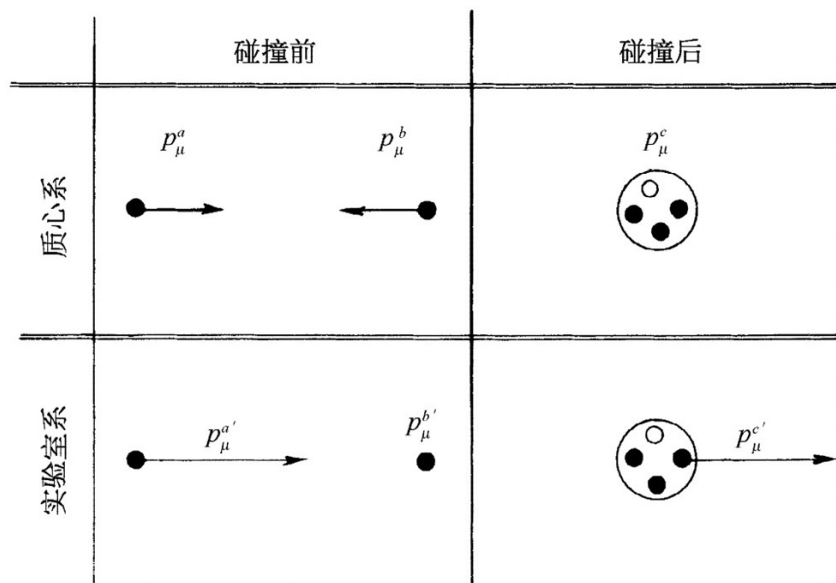


图25-1 从实验室和质心系中来观察反应 $P + P \rightarrow 3P + \bar{P}$ 。假定入射质子仅仅勉强具有使反应进行的能量，质子由实心圆点表示，而反质子则由圆圈表示

若把末态中整个小球的四维总动量称为 p_μ^c ，则动量与能量守恒律告诉我们：

$$p^a + p^b = p^c$$

和

$$E^a + E^b = E^c.$$

合并这两式，可以写成

$$p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^c. \quad (25.9)$$

现在重要的事情在于，这是一个其中包含四维矢量的方程，因而在任何惯性系中都是正确的。我们可以利用这一事实来简化计算，由

取式（25.9）中每边的“长度”开始，当然，它们也是彼此相等的，于是得

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)(p_\mu^a + p_\mu^b) = p_\mu^c p_\mu^c. \quad (25.10)$$

既然 $p_\mu^c p_\mu^c$ 是不变的，所以可在任何坐标系中进行计算。在质心系中， p_μ^c 的时间分量为四个质子的静止能量，即 $4M$ ，而空间部分 $\mathbf{p}$ 则等于零，因此 $p_\mu^c = (4M, 0)$ 。我们已利用了反质子的静质量等于质子的静质量那一项事实，并已称这一共同质量为 M 。

这样，式（25.10）就变成

$$p_\mu^a p_\mu^a + 2p_\mu^a p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2. \quad (25.11)$$

现在， $p_\mu^a p_\mu^a$ 和 $p_\mu^b p_\mu^b$ 都十分容易求得，因为任何粒子的动量四维矢量的“长度”都不过是粒子质量的平方：

$$p_\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = M^2.$$

这可由直接的计算给予证明，而更巧妙的办法则是通过注意一个静粒子的 $p_\mu = (M, 0)$ ，从而 $p_\mu p_\mu = M^2$ 。但由于它是一个不变量，故在任何参照系中都等于 M^2 。把这些结果用到式（25.11）中，便有

$$2p_\mu^a p_\mu^b = 14M^2,$$

也即

$$p_\mu^a p_\mu^b = 7M^2. \quad (25.12)$$

现在，也就可以在实验室系统中算出 $p_\mu^a p_\mu^b = p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ 。四维矢量 $p_\mu^{a'}$ 可以写成 $(E^{a'}, \mathbf{p}^{a'})$ ，而 $p_\mu^{b'} = (M, 0)$ ，因为后者描述一个静止质子。这样， $p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ 也必定等于 $ME^{a'}$ 。又因为知道标积是个不变量，所以它在数值上必须等于式 (25.12) 中求得到的值。因而有

$$E^{a'} = 7M,$$

这就是我们所要求的结果。初始质子的总能量必须至少为 $7M$ （约合 6.6 GeV，因为 $M = 938 \text{ MeV}$ ），或者在减去了静质量 M 之后，其动能至少必须为 $6M$ （约合 5.6 GeV）。在伯克利（Berkeley）的高能质子同步稳相加速器是为了能够制造反质子而设计的，它提供给受加速质子约 6.2 GeV 的动能。

由于标积都是不变量，所以它们对计算来说总是有趣的。那么，关于四维速度的“长度” $u_\mu u_\mu$ 又该如何呢？由于

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1,$$

因而 u_μ 是单位四维矢量。

§25-3 四维梯度

我们必须讨论的下一个问题就是梯度的四维类似物。回想起（第1卷第14章）三个微分算符 $\partial/\partial x$ ， $\partial/\partial y$ ， $\partial/\partial z$ 的变换就像三维矢量，

所以就叫梯度。同样的方案也应该适用于四维情况。这就是说，我们也许会猜测到四维梯度应当是 $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 。然而，这是错误的。

为了搞清这个错误，可考虑一个仅与 x 和 t 有关的标量函数 ϕ 。如果在 t 方面做一个小变化 Δt 而保持 x 不变，则在 ϕ 方面的变化为

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t. \quad (25.13)$$

另一方面，对一个正在运动的观察者来说，

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\Delta t'.$$

应用式 (25.1)，我们可用 Δt 来表示 $\Delta x'$ 和 $\Delta t'$ 。记住我们正保持 x 不变，因而 $\Delta x = 0$ ，并可写出

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这样，

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

把这一结果与式 (25.13) 比较，就可知道

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right). \quad (25.14)$$

类似的计算给出

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x'} - v \frac{\partial \phi}{\partial t'} \right). \quad (25.15)$$

现在我们可以看到，该梯度相当奇怪。用 x' 和 t' 来表示 x 和 t 的公式〔由解方程组（25.1）而得到的〕为：

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这就是一个四维矢量进行变换的必需方式。但式（25.14）和（25.15）中却有两个符号搞错了！

答案是，不要那个不对的 $(\partial/\partial t, \nabla)$ ，而必须通过下式来定义一个四维梯度算符，称之为 ∇_μ ：

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (25.16)$$

采用这一定义，上面所遇到的符号困难就消除了，从而 ∇_μ 表现得如同一个四维矢量所应有的性质那样（带着那些负号相当难看，但那是世人都用的方法）。当然，所谓 ∇_μ “表现得如同一个四维矢量”指的只不过是，一个标量的四维梯度为一个四维矢量。如果 ϕ 是一个真实的标量不变场（洛伦兹不变量），则 $\nabla_\mu \phi$ 就是一个四维矢量场。

好，现在已有了矢量、梯度和点积，下一件事情则是要找出一种与三维的矢量分析中的散度相类似的不变量。很清楚，这种类似物要求形成 $\nabla_\mu b_\mu$ 这样一种表示式，其中 b_μ 为一个四维矢量场，其分量

都是空间和时间的函数。要把一个四维矢量 $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$ 的散度定义为 ∇_μ 与 b_μ 的点积:

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) b_z = \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (25.17)$$

式中 $\nabla \cdot \mathbf{b}$ 是三维矢量 $\mathbf{b}$ 的普通三维散度。注意,人们必须细心对待这些符号,其中有些负号来自标积的定义,即式(25.7),其他则是由于诸如式(25.16)中关于 ∇_μ 的空间分量为 $-\partial/\partial x$ 等所要求的。由式(25.17)定义出来的散度是一个不变量,因而它在相差一个洛伦兹变换的所有坐标系中给出相同的答案。

让我们来看一个其中会出现四维散度的物理例子,可以用它来求解运动导线周围场的问题。我们已经知道 (§13-7) 电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{j}$ 会形成一个四维矢量 $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$ 。如果一根不带电荷的导线载有电流 j_x ,那么在一个以速度 v (沿 x 轴)从它旁边经过的参照系中来看,该导线将拥有如下的电荷和电流密度[由洛伦兹变换式(25.1)得到]:

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这些恰好就是我们曾在第13章中求得的。于是,我们就能把这些源应用到运动坐标系的麦克斯韦方程中去求解场。

§13-2的电荷守恒律,在这四维矢量符号表示中,也会具有简单形式。考虑到 j_μ 的四维散度为:

$$\nabla_{\mu} j_{\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (25.18)$$

电荷守恒律表明，单位体积中电流的流出量应等于电荷密度的负增长率。换句话说，

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

将此代入式（25.18）中，电荷守恒律就会取简单形式

$$\nabla_{\mu} j_{\mu} = 0. \quad (25.19)$$

由于 $\nabla_{\mu} j_{\mu}$ 是一个不变标量，所以如果它在一个参照系中为零，则在所有参照系中都为零。于是我们就有这样的结果，即如果电荷在一个坐标系中守恒，则它在所有匀速运动的坐标系中也守恒。

作为最后一个例子，我们要考虑该梯度算符 ∇_{μ} 与它自身的标积。在三维中，这样的标积给出拉普拉斯符号：

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在四维中，将得到个什么呢？这很容易。按照有关点积和梯度的法则，就可以得到

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

这一算符，就是三维拉普拉斯算符的类似物，称为达朗贝尔算符，并有一种独特的表示符号：

$$\square^2 = \nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (25.20)$$

根据定义，它是一个不变的标量算符。如果它作用于一个四维矢量场上，将产生一个新的四维矢量场〔有些人用与式（25.20）相反的符号给达朗贝尔算符下定义，因而当你阅读文献时务必当心〕。

现在，对上面表25-1中所列举的那些三维量，大部分已找到了其四维的相应量（不过还没有叉积和旋度运算方面的相应物，在下一章以前我们将不会对它有所论述）。如果把所有重要定义和结果都集中在一处，对你记住它们如何演变可能有所帮助，因此我们就在表25-2中做了这么一个提要。

表25-2 在三维和四维矢量分析中的一些重要量

	三 维	四 维
矢 量	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
标 积	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
矢 算 符	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$	$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$
梯 度	$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$	$\nabla_\mu\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi \right)$
散 度	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}$
拉氏算符或达氏算符	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2$

§25-4 用四维符号表示的电动力学

我们曾在§18-6中碰到过达朗贝尔算符，但没有给它这一名字。在那里对于那些势所求得的微分方程可以用新的符号表示法写成：

$$\square^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (25.21)$$

这两个方程中的右边四个量为 ρ , j_x , j_y 及 j_z , 再各除以 ϵ_0 。如果在所有参照系中都采用相同的电荷单位, 则这个 ϵ'_0 是在各坐标系中都相同的一个普适常数。因此, 那四个量 ρ/ϵ_0 , j_x/ϵ_0 , j_y/ϵ_0 及 j_z/ϵ_0 也就会如同一个四维矢量那样变换。我们可将其写成 j_μ/ϵ_0 。当坐标系改变时达朗贝尔算符不会改变, 因而 ϕ , A_x , A_y , A_z 四个量也必须像四维矢量那样变换——这意味着它们就是一个四维矢量的分量。简单地说,

$$A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

是一个四维矢量。我们所称的标势和矢势, 它们实际上就是同一个物理客体的不同方面。它们合成为整体。而倘若把它们合起来看, 则这个世界的相对论不变性就很明显了。我们称 A_μ 为四维势。

在四维矢量符号表示中, 式(25.21)中的两方程简单地变成

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}. \quad (25.22)$$

这一方程的物理内容恰好同麦克斯韦方程组相同。但可以把它改写成这么一个优美形式实在令人感到有些喜悦。这个漂亮形式也有其本身意义, 它直接证明了在洛伦兹变换之下电动力学的不变性。

要记住, 式(25.21)之所以能够由麦克斯韦方程组推导而得, 只是由于我们加上了规范条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (25.23)$$

这不过是讲 $\nabla_\mu A_\mu = 0$ ，这规范条件说明四维矢量 A_μ 的散度为零。这一条件称为洛伦兹条件。因为它是一个不变性条件，所以是很方便的，从而使麦克斯韦方程组对所有参照系都能保持式（25.22）那种形式。

§25-5 运动电荷的四维势

虽然变换规律已隐含在上述内容中，但现在还是把它写下来，它用一个静止参考系中的 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 给出运动参考系中的 ϕ' 和 $\mathbf{A}'$ 。由于 $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ 是一个四维矢量，所以这些变换式看来几乎像式（25.1）一样，只是 t 应以 ϕ 代，而 $\mathbf{x}$ 则用 $\mathbf{A}$ 代。于是，

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A'_y = A_y, \\ A'_x &= \frac{A_x - v\phi}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A'_z = A_z. \end{aligned} \quad (25.24)$$

这里假定带撇的坐标系是以速率 v 沿正 x 方向运动，而这速率则是在不带撇的坐标系中测得的。

我们要来讨论四维势概念用途的一个例子。以速率 v 沿 x 轴运动的电荷 q ，其矢势和标势是什么呢？这一问题在随电荷运动的坐标系中很简单，因为在这个系统中电荷是静止的。让我们假设，这电荷位于 S' 参照系的原点，如图25-2所示。于是在这个系统中的标势为

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (25.25)$$

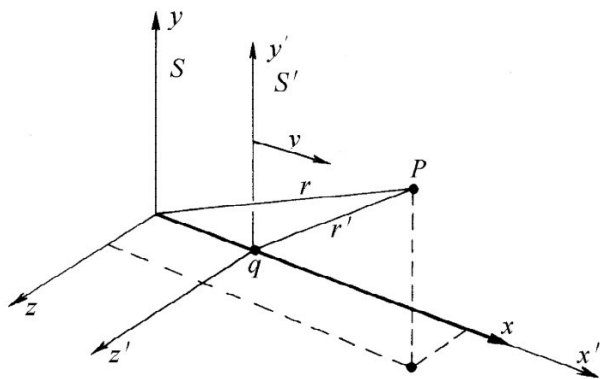


图25-2 参照系 S' 以速度 v (沿 x 方向) 相对于 S 系运动。在 S' 系中原点的一个静止电荷在 S 系中处于 $x = vt$ 的地方。 P 点的势可以在两个参照系的任一个中算出来

式中 r' 是从 q 至场点的距离, 即在运动系统中所测到的。当然, 矢势 $\mathbf{A}'$ 为零。

现在去求在静止坐标系中的测得的势 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 是直截了当的。式 (25.24) 的逆变换关系为

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_y = A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + v\phi'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_z = A'_z. \end{aligned} \quad (25.26)$$

利用由式 (25.25) 所给出的 ϕ' 以及 $\vec{\mathbf{A}}' = 0$, 可得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' \sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

这向我们提供了在 S 系中可能观察到的标势 ϕ ，但可惜是，这是用 S' 的坐标表示的。还可以利用式(25.1)，将 t' ， x' ， y' 和 z' 的各式代入得到用 t ， x ， y ， z 表示出来的式子。我们得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \quad (25.27)$$

对于 $\mathbf{A}$ 的各个分量，按照相同的手续，你可以证明

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \phi. \quad (25.28)$$

这些都是在第21章中用别的方法推导出来的相同公式。

§25-6 电动力学方程组的不变性

我们已发现势 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 合起来看便形成一个称为 A_μ 的四维矢量，而波动方程——即用那些 j_μ 来确定 A_μ 的完整方程组——可写成如式(25.22)那样的方程。这个方程，与电荷守恒律、即式(25.19)一起，就给出了电磁场的基本定律：

$$\square^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.29)$$

只在页面的一个微小区间内就有了全部麦克斯韦方程组——优美而又简单。除了它们既优美而又简单外，将方程组这样写出来从中学习到什么东西呢？首先，这与我们过去将各种不同分量全都写出来时所得到的那些结果有何区别？能否从这一方程推导出某些过去由电荷和电流表示势的波动方程不能够推导出来的东西？答案是明确否定的。我

们所做的唯一事情就是改变各事情的名称——应用新的符号表示法。我们已写下了一个方框符号来代表微商，但它仍然意味着不多不少的对时间的二次微商、减去对 x 的二次微商、减去对 y 的二次微商、减去对 z 的二次微商。而 μ 则意味着有四个方程，对于 $\mu=t, x, y$ 或 z 会各有一个。那么，可以将那些方程写成这么简洁形式的事实有什么意义呢？按直接从其导出什么东西的观点来看，它确实没有什么意义。然而，也许这些方程的简单性就意味着自然界也具有某种简单性。

让我们来向你证明某种新近才发现的有趣事情：所有物理规律都可以包括在一个方程之中。这方程就是

$$U=0. \quad (25.30)$$

多么简单的一个方程！当然，还需要知道该符号指的是什么。 U 是一个称为情况的“超脱性”的物理量，而对于它我们有一个公式。这里关系到你怎样去计算该超脱性。你可以取所有已知的物理定律，并把它们都写成一种独特形式。例如，假设你所取的是力学定律 $\mathbf{F}=m \mathbf{a}$ ，并把它重新写成 $\mathbf{F}-m \mathbf{a}=0$ 。然后你可以将 $(\mathbf{F}-m \mathbf{a})$ ——那当然应该等于零的——叫作力学上的“失调”。其次，你再取这失调的平方并叫它作 U_1 ，这可以称为“力学效应的超脱性”。换句话说，你会取

$$U_1 = (\mathbf{F}-m \mathbf{a})^2. \quad (25.31)$$

现在你又写下另一个物理定律，比如说， $\nabla \cdot \mathbf{E}=\rho / \epsilon_0$ ，并定义

$$U_2 = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)^2,$$

这或许被你称为“电的高斯超脱性”。你继续再写出 U_3 ， U_4 ，等等——对每一物理定律都有一个。

最后，你把来自一切有关的分现象的诸多不同超脱性 U_i 都相加起来，而把它叫作宇宙的总超脱性 U ，也就是， $U=\sum U_i$ 。这样自然界的伟大定律为

$$\boxed{U=0.} \quad (25.32)$$

这一“定律”当然意味着所有各个失调的平方之总和为零，而能使一大堆平方之和为零的唯一办法就是其中每一项都等于零。

因此，式（25.32）的“优美简单”定律相当于你原来所写下的一整套方程式。因而绝对明显的是，一种不过把复杂性隐藏在符号的定义之内的简单表示方法并不是真正的简单性。它不过是一种花招。式（25.32）中所出现的优美——仅从几个方程被隐藏在其中这一事实看来——也不外是花招而已。当你把整个东西都打开时，你就会回到你原来所在的地方。

然而，把电动力学写成式（25.29）那种形式，除了简单之外还有其他一些东西。它的含义会多一些，就像矢量分析理论含有更多的意义一样。电动力学方程组之所以能够用为洛伦兹变换的四维几何所设计的那种十分特殊符号写出来——换句话说，作为在四维空间中的一个矢量方程——这一事实，就意味着它在洛伦兹变换下是不变的。只是由于麦克斯韦方程组在那些变换下不变，才使得它们能够被写成优美形式。

能够将电动力学方程组写成式(25.29)那样美妙卓越的形式并非偶然。正是由于在实验上已发现由麦克斯韦方程组所预言的各种现象在一切惯性系中都相同，相对论才发展起来的。而又是通过研究麦克斯韦方程组的变换性质，才使得洛伦兹发现了他的变换作为保留方程不变的一种变换来说是精确的。

然而，还有另一个要把方程组这样写出来的理由。已经发现——在爱因斯坦猜测方程也许是这样之后——所有物理定律在洛伦兹变换下都是不变的。这就是相对性原理。因此，如果我们发明一种符号，当写下一个定律时它能够立刻指出该定律是否不变，那么，便能够在试图创立新的理论时保证只写出与相对论原理相一致的方程式。

以这种特殊的符号表示麦克斯韦方程组变得很简单这一事实，并不是什么奇迹，因为这种符号就是在考虑到那些方程之后才发明的。但有意义的物理事情却是：每一个物理规律——介子波的传播或在 β 衰变中中微子的行为，等等——在相同的变换下都必须具有这种相同的不变性。那么当你待在一艘匀速航行的太空飞船中时，所有自然规律以相同的方法一起作变换，以致没有任何新的现象会发生。正是由于相对论性原理是自然界中的一个事实，所以按照四维矢量的符号世界的各种方程式都会表现得很简单。

[1] 你可能会问：为什么不去考虑

$$P + P \rightarrow P + P + \bar{P},$$

或甚至

$$P + P \rightarrow P + \bar{P}$$

那些显然要求较少能量的反应？答案是，一个称为重子数守恒的原理告诉我们：“质子数减去反质子数”不能改变，在我们的反应中左边这个量为2，因此，若希望有一反质子出现在右边，则同时应有三个质子（或其他重子）伴随它。

第26章 场的洛伦兹变换

在本章中： $c=1$

§26-1 运动电荷的四维势

在上一章中见到势 $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ 是一个四维矢量。时间分量为标势 ϕ ，而三个空间分量则构成矢势 $\mathbf{A}$ 。通过应用洛伦兹变换我们也算出了做匀速直线运动粒子的势（在第21章中就已经用另一种方法求出了这些势）。对于一个在时刻 t 位置为 $(vt, 0, 0)$ 的点电荷，其在点 (x, y, z) 的势为

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2} \left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2}}, \\ A_x &= \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2} \left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2}}, \\ A_y &= A_z = 0.\end{aligned}\tag{26.1}$$

对于一个“现”位置（指的是在 t 时刻 的位置）为 $x=vt$ 的电荷，式（26.1）给出了时刻 t 在 x, y 和 z 处的势。注意这些式子是用 $(x-vt)$ ， y 和 z 来表示的，它们是根据该运动电荷的现行位置 P 测得的坐标（见图26-1）。我们知道的实际影响确是以速率 c 传播的，因而真正有效的影响乃是在推迟位置 P' 后面的电荷行为^[1]。 P' 点位于 $x=vt'$ 上（其中 $t'=t-r'/c$ 是推迟时刻）。但是，电荷是做匀速直线运动的，因

而在 P' 点与在 P 点上的行为自然有直接的联系。事实上，如果做一个附加假设，即假定那些势仅取决于在推迟时刻的位置和速度，那么式（26.1）便是以任意方式运动的电荷的完整公式了。方法是这样：假定你有以某种任意方式运动、比方其轨道如图26-2所示的电荷，而你试图找出在点 (x, y, z) 处的势。首先，你找出推迟位置 P' 以及在该位置时电荷的速度 v' 。然后你设想电荷会在这推迟时间 $(t - t')$ 里继续保持这一速度，以致此时它会出现在一个想象的位置 $P_{\text{投影}}$ 处，这可称之为“投影位置”，并应该以速度 v' 到达那里（当然，电荷并不是那样运动，它在 t 时刻的确实位置是 P ）。于是在 (x, y, z) 点的势就恰好是一个想象电荷在该投影位置时由式（26.1）所给出的。我们现在要说的是，由于势仅取决于电荷在该推迟时刻的行为，所以不管电荷是否继续恒速度运动或者是否在 t' 时刻之后——即在 t 时刻在点 (x, y, z) 将出现的势早已确定了之后——改变它的速度，势都将相同。

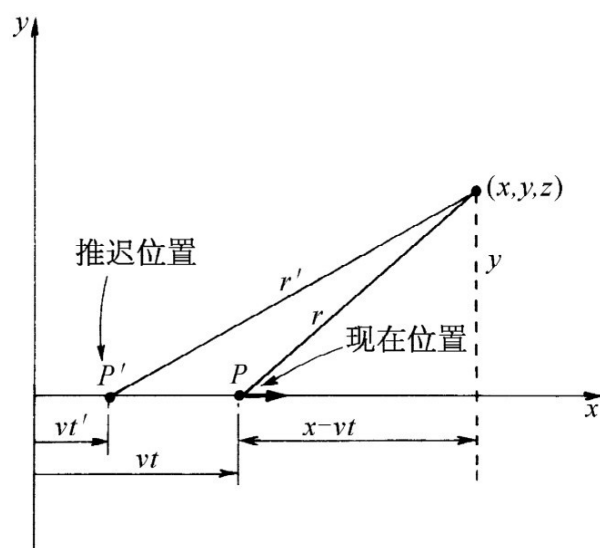


图26-1 求一个沿 x 轴匀速 v 运动的电荷 q 在 P 点的场。“此刻”在点 (x, y, z) 的场既可用“现”位置 P ，也可用（在 $t' = t - r'/c$ 时刻的）“推迟”位置 P' 来表示

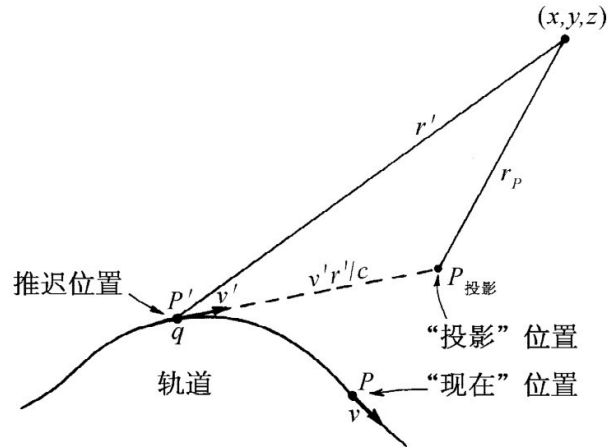


图26-2 电荷在任意轨道上运动。时刻 t 在点 (x, y, z) 的势由推迟时刻 $t - r'/c$ 的位置 P' 和速度 v' 所确定，这些势可用该“投影”位置 $P_{\text{投影}}$ 的坐标来表示（在时刻 t 的实际位置为 P ）

你当然知道，一旦有了来自一个以任意方式运动着的电荷的势的公式，便拥有了全部电动力学，能够通过叠加以获得任何电荷分布的势。因此，通过写出麦克斯韦方程组，或者通过遵照如下的一系列陈述，可以把电动力学的所有现象都总结出来（如果你有机会登上一个荒岛，你就可以回忆起这些陈述。一切东西都可由此重新建造。当然，你要懂得洛伦兹变换，无论是在一个荒岛上或在其他任何地方你总别忘记它）。

首先， A_μ 是一个四维矢量；其次，关于一个静止电荷的库仑势为 $q / (4\pi\epsilon_0 r)$ ；第三，一个以任何方式运动着的电荷所产生的势仅取决于在推迟时刻的速度和位置。只要有这三个事实我们就有了一切。根据 A_μ 是个四维矢量这个事实，便可变换已知的库仑势，以获得匀速运动的势。然后，通过势仅取决于过去的在该推迟时刻电荷的速度这种最后一项陈述，我们便可以运用该投影位置手法而找到各势。

这虽然不是一个处理问题特别有用的方法，但它表明了物理规律能够用许多不同方式加以表达，仍然是挺有趣的。

有时一些漫不经心的人们会说，全部电动力学都可以从洛伦兹变换和库仑定律完全推导出来。当然，那是完全错误的。首先，必须假定存在一个标势和一个矢势，它们一起构成一个四维矢量。这里，就告诉我们如何对势做变换了。然后，为什么只有那推迟时刻的影响才算有效的呢？若是这样提问就更好：为什么势仅取决于位置和速度，而与诸如加速度就毫无关系？而场 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 则确实与加速度有关。如果你试图对于这些场也使用相同的论证，则你就会讲，它们也仅取决于推迟时刻的位置和速度。可是这么一来，来自加速电荷的场就与来自投影位置上的电荷的场相同——那是错误的。场 不仅取决于电荷沿路径的位置和速度，而且也取决于其加速度。所以在一切都可从洛伦兹变换推导出来的伟大说法中还有几个附加的默认假设（每当你看到从很少几个假设就能够产生出惊人数量成果的这种总结性的说法时，你总会发现它是错误的。如果你足够小心地加以思考的话，就会觉得其中往往有许多远非明显的隐含着的假设）。

§26-2 匀速点电荷的场

现在已有了由匀速运动的点电荷产生的势，我们——为了实用原因——该求其场。有许多情况其中带电粒子是以匀速运动的——例如，穿过云室的宇宙线，或甚至在一根导线里缓慢运动的电子。因此，至少让我们知道，对于任何速率——甚至对于接近光速的速率，只要假定其中没有加速度——场实际上看来像什么样子，这是一个有意义的问题。

通过常用法则便可由势得到场：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

首先，对于 E_z ，

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

但 A_z 等于零，所以我们就对式（26.1）中的 ϕ 取微商，得

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (26.2)$$

同理，对于 E_y 得

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (26.3)$$

要求得 x 分量需多做一些工作。 ϕ 的微商此时较为复杂而且 A_x 又不等于零。首先，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (26.4)$$

然后，对 A_x 取 t 的微商，可得到

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.5)$$

而且最后再取其和，则有

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.6)$$

过一会儿我们将要来看看 $\mathbf{E}$ 的物理意义，此刻让我们先来求出 $\mathbf{B}$ 。对于其 z 分量，

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

由于 A_y 为零，就只需得到一个微商。然而，要注意 A_x 正好是 $v\phi$ ，而 $v\phi$ 的 $\partial/\partial y$ 则恰恰是 $-vE_y$ 。因此

$$B_z = vE_y. \quad (26.7)$$

同理，

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = +v \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

也即

$$B_y = -vE_z. \quad (26.8)$$

最后， B_x 为零，因为 A_y 和 A_z 两者都是零。因而可以将磁场简单地写成

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (26.9)$$

现在来看看场像个什么样子。我们试图把电荷在其现在位置周围各不同位置上的场描绘出来。电场的影响，在某种意义上确实来自推迟位置，但由于运动是严格规定的，所以推迟位置便可以由现在位置唯一地给出。对于匀速运动来说，更妙的是把场同现行位置联系起来，因为在点 (x, y, z) 处各场分量都仅取决于 $(x - vt)$ ， y 和 z ——从现在位置到达点 (x, y, z) 的位移 $\mathbf{r}_P$ 的各分量（见图26-3）。

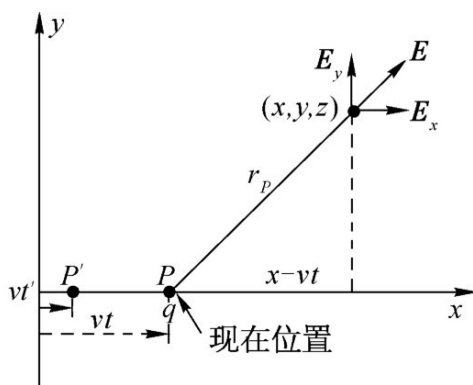


图26-3 一个以匀速运动着的电荷，其电场从电荷的“现”位置径向地指出

首先考虑 $z=0$ 的点。那么 $\mathbf{E}$ 就只有 x 和 y 分量。根据式(26.3)和(26.6)，这两分量的比恰好等于位移的 x 分量和 y 分量的比，这意味着， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{r}_P$ 指向相同方向，如图26-3所示。由于 E_z 也正比于 z ，所以这个结果在三维中适用就是明显的了。总之，电场是从电荷沿径向发出的，正如一个静止电荷的场那样。当然，这个场并非完全与静止电荷的场相同，那全是由于附加因子 $(1 - v^2)$ 所致。但是我们还可以证明一件相当有趣的事情。要是你用一个特殊的坐标系——其中 x 轴

被压缩了一个因子 $\sqrt{1-v^2}$ ——来画出库仑场，则你正好会得到这个差别。如果你这样做，则场线就将在该电荷前后散开，而在侧向周围将被压缩在一起，如图26-4所示。

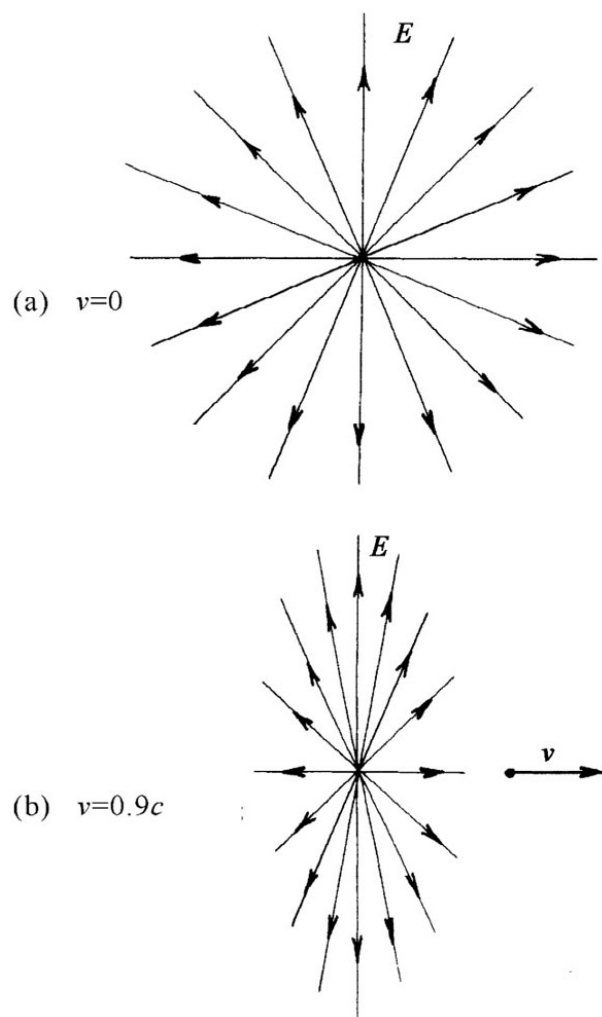


图26-4 一个以匀速 $v=0.9c$ 运动的电荷的电场 [图 (b)]，与一静止电荷的电场 [图 (a)] 比较

如果将 E 的强度同场线密度按照惯常的办法互相联系起来，则可以看到，在侧向的场较强，而前后的场较弱，恰如那些方程所指出的。首先，若在垂直于运动路线的方向上观察场强，也就是说，在 (x

$-vt$) = 0 的地方，从电荷至场点的距离为 $\sqrt{y^2 + z^2}$ ，则这里总场强就是 $\sqrt{E_y^2 + E_z^2}$ ，即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - v^2}} \frac{1}{y^2 + z^2}. \quad (26.10)$$

场与距离的平方成反比——很像库仑场，所不同的是被一个恒大于1的恒定附加因子 $1/\sqrt{1 - v^2}$ 所增强。因此，在运动电荷的侧向，电场比从库仑定律所得到的要强。实际上，侧向场比库仑场增大的倍数刚好等于该粒子的能量与其静质量的比。

在电荷的前面（与后面）， y 和 z 都是零，因而

$$E = E_x = \frac{q(1 - v^2)}{4\pi\epsilon_0 (x - vt)^2}. \quad (26.11)$$

场又与离开电荷距离的平方成反比，但现在却被减弱了一个因子 $(1 - v^2)$ ，这与场线的图景相符。如果 v/c 是一个小量，则 v^2/c^2 更小，因而 $(1 - v^2)$ 这一因子的影响就很小，我们便回到库仑定律上来。但如果粒子的运动速度十分接近于光速，则在前后方向上的场将会大大削弱，而在侧向的场将大大增强。

关于运动电荷电场的上述结果可以这样来表示：假定你把一个静止电荷的场线描绘在一张纸上，然后使这幅图画以速率 v 行进。当然，此时整幅图画会受到洛伦兹收缩，也就是说，在纸面上的那些碳粒会出现在不同地方。令人惊异的是，当该页纸在你旁边飞过时，你所看到的图画仍然代表该点电荷的场线。这一收缩会把那些场线在侧

向上互相挤紧，而在前后方向则彼此散开，刚好按照适当方式给出正确的线密度。我们曾强调过，场线是不真实的，只不过是一种表示场的方式。然而，这里场线却几乎像是真实的了。在这种特殊情况下，如果你错误地认为场线是由于某种原因真实地存在于空间里的，并对之作了变换，你就获得了正确的场。然而，这也丝毫不会使场线更加真实。你必须提醒你自己场线并不是真实的，你所应该做的事情就是去考虑由电荷和磁铁一起产生的电场。当磁铁运动时，新的电场被产生，从而破坏了美丽图景。因此，这一收缩图像的巧妙构思并非普遍有效。然而，对于记住来自一个快速运动电荷的场像什么样子，它是一种方便手段。

磁场就是 $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ [根据式 (26.9)]。如果你把速度矢量叉乘一个径向的 $\mathbf{E}$ 场，你便会得到一个环绕着运动路线的 $\mathbf{B}$ ，如图26-5所示。如果把那些 c 都放回去，则你将看到，它与过去处理低速电荷时所得的结果相同。为了看清应该在哪里放进 c ，一个好办法是回过去参考力的定律：

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

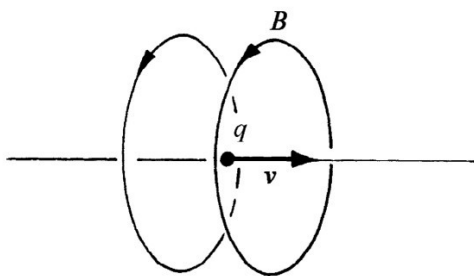


图26-5 在一运动电荷附近的磁场为 $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ (试与图26-4比较)

你看到速度乘上磁场才具有与电场相同的量纲。因此，式 (26.9) 的右边就应该有一个因子 $1/c^2$ ：

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (26.12)$$

对于一个低速运动电荷 ($v \ll c$) 来说, 我们可取库仑场作为 $\mathbf{E}$, 这时

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (26.13)$$

上式完全相当于曾在§14-7中得到的关于电流的磁场方程式。

我们愿意顺便指出某一种你会感兴趣而加以思考的东西 (以后还将回来再次进行讨论)。试想象两质子具有互成直角的速度, 使得其中一个将横穿过另一个的路径, 但却在其前面, 从而彼此不会发生碰撞。在某一时刻, 它们的相对位置将如图26-6 (a) 所示。现在试考察由 q_2 作用于 q_1 上的力以及相反情况。作用于 q_2 上的只有来自 q_1 的电力, 因为 q_1 在沿其运动路线上不会造成磁场。然而, 作用于 q_1 上的除了那个电力外, 却还有磁力, 因为 q_1 正在 q_2 所造成的 $\mathbf{B}$ 场中运动。这些力如图26-6 (b) 所示。作用于 q_1 与 q_2 上的电力彼此大小相等方向相反。然而, 却有一侧向 (磁) 力作用于 q_1 上, 而没有侧向力作用于 q_2 上。是否作用不等于反作用呢? 我们想把这一问题留给你们去思索。

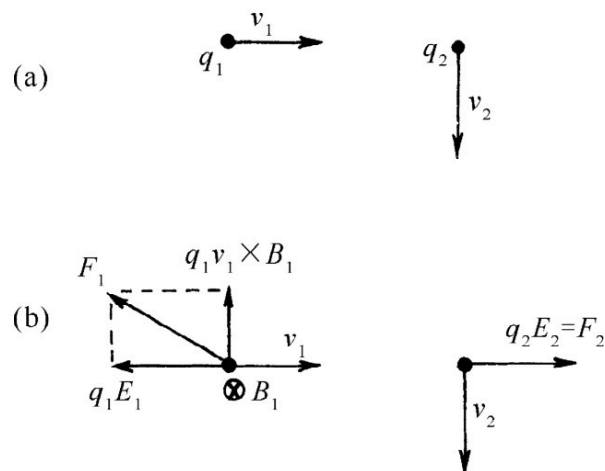


图26-6 两个运动电荷之间的作用力并不总是相等而相反。看来“作用”不等于“反作用”

§26-3 场的相对论变换

在上一节中我们从经过变换后的势算出了电场和磁场。当然，场很重要，不管以前的论证曾经给出势具有物理意义及其真实性。场毕竟也是真实的。对于许多目的来说，如果你已经知道了在某个“静止”系统中的场，而又有办法去算出在运动系统中的场，那是很方便的。我们已有了关于 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 的变换规律，因为 A_μ 是一个四维矢量。现在希望弄清楚 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的变换律。已知在一个参照系中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，在另一个从旁边跑过的参照系中它们看来会像些什么呢？那该是一个便于得到的变换式。本来我们始终可以通过势而再算出场的，但如果能直接将场变换，有时仍挺有用。现在会看到那是怎样进行的。

如何能找到场的变换规律呢？我们已知道 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 的变换规律，并已懂得了场是如何由 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 给出的——要找出 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 的变换式就应该是容易的了（你也许会想到，对于每个矢量就可能有某种会使之成为

四维矢量的东西，因而对于 $\mathbf{E}$ 来说，就一定有另一种可用来作为其第四分量的东西，而对于 $\mathbf{B}$ 也是如此。但事实却并非这样，与你所指望的很不相同）。作为开始，让我们仅仅考虑磁场 $\mathbf{B}$ ，那当然就是 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。现在知道，具有 x, y, z 各分量的矢势只是某种东西的一部分，此外还有一个 t 分量。而且也知道，对于像 ∇ 的微商，除了 x, y, z 各部分外，也还有对于 t 的微商。因此，让我们试算出若把“ y ”代以“ t ”，或把“ z ”代以“ t ”，或如此这般，则会发生什么。

首先，注意当把 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的各分量写出时，其中各项的形式是

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (26.14)$$

x 分量等于仅含有 y 与 z 分量的对偶项。假设把这个微商与分量的结合体称为“ zy 事件”，并给它一个速写名字 F_{zy} 。我们的意思只是

$$F_{zy} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (26.15)$$

同样， B_y 等于这同类“事件”，但这回它却是“ xz 事件”了。而 B_z 当然就是相应的“ yx 事件”。于是便有

$$B_x = F_{zy}, B_y = F_{xz}, B_z = F_{yx}. \quad (26.16)$$

现在，若我们也试图编造出一些像 F_{xt} 和 F_{tz} 那样的“ t ”型事件（由于自然界在 x, y, z 和 t 方面应该是美好而对称的），则会有什么情况发生呢？例如， F_{tz} 是什么？当然，它就是

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

但要记住 $A_t = \phi$ ，因而它也等于

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

对此你以前就已见过。它是 $\mathbf{E}$ 的 z 分量。噢，几乎成了——还有符号错误。但我们忘记了在四维梯度中对 t 微商与对 x, y, z 的微商带有相反符号。因此，实际上我们应该取下式作为 F_{tz} 更加一致的推广：

$$F_{tz} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (26.17)$$

这样，它严格等于 $-E_x$ 。也可尝试算出 F_{tx} 和 F_{ty} ，我们发现这三种可能事件给出

$$F_{tx} = -E_x, \quad F_{ty} = -E_y, \quad F_{tz} = -E_z. \quad (26.18)$$

如果两个下脚标都是 t ，又将出现什么情况呢？或者，对于此事来说，若两者都是 x 呢？我们会得到像如下的事件：

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t},$$

和

$$F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x},$$

即这些都不外给出零值。

于是，就有六个这种 F 事件。还有六个你可以通过倒转下标而得的，但它们实际上不会给出任何新的事件，因为

$$F_{xy} = -F_{yx},$$

等等。所以，从四个下标取对的十六种可能组合中，仅得到六个不同的物理客体，而它们就是 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 的分量。

为了表示出 F 的一般项，我们将采用普遍的下脚标 μ 和 ν ，其中每一个各代表0、1、2或3——在通常的四维矢量符号表示法中指 t ， x ， y 和 z 。而且，一切都符合四维矢量符号表示法，只要对 $F_{\mu\nu}$ 作出如下的定义：

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (26.19)$$

请记住 $\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$ 和 $A_\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$ 。

我们已得到的是：在自然界中有六个合成整体的量——它们是同一事件的不同方面。电场和磁场，在低速运动世界里（那里不需担心光速）被认为是彼此分开的矢量，而在四维空间里却并不是矢量。它们是一种新“事件”的各部分。物理“场”实际上是那具有六个分量的

客体 $F_{\mu\nu}$ 。这就是我们必须把它作为相对论来考虑的方法。现在把有关 $F_{\mu\nu}$ 的结果概括在表26-1中。

表26-1 $F_{\mu\nu}$ 的各分量

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	
$F_{\mu\mu} = 0$	
$F_{xy} = -B_z,$	$F_{xt} = E_x$
$F_{yz} = -B_x,$	$F_{yt} = E_y$
$F_{zx} = -B_y,$	$F_{zt} = E_z$

你看到我们这里所做的就是推广叉积。要从旋度的运算及旋度的变换性质与两 矢量——通常的三维矢量 $\mathbf{A}$ 和已知道其行为也像一矢量的梯度算符——的变换性质相同这一事实出发。考察一下在三维中的一个普通叉积，比如一个粒子的角动量。当一物体在一平面内运动时， $(xv_y - yv_x)$ 这个量是重要的。对于在三维中的运动，则有三个这样的重要量，称之为角动量：

$$L_{xy} = m(xv_y - yv_x), \quad L_{yz} = m(yv_z - zv_y), \quad L_{zx} = m(zv_x - xv_z).$$

然后（尽管你现在可能已经忘记了），我们曾在第1卷第20章中发现这样的奇迹，即这三个量可以与矢量的分量等同起来。为达到此目的，我们曾不得不用右手惯例来建立一个人为法则。那只不过是幸运。它之所以是幸运，因为 L_{ij} （ i 和 j 各可等于 x, y 或 z ）是一个反对称的事件：

$$L_{ij} = -L_{ji}, \quad L_{ii} = 0.$$

在九个可能的量中，只有三个独立的值。而碰巧当你改变坐标系时，这三个事件按与一矢量的分量完全相同的方式变换。

相同的事件允许我们把一个面积元表示成矢量。一个面积元有两部分——比如说 dx 和 dy ——这我们可用一个垂直于该面积的矢量 $d\mathbf{a}$ 来表达。但我们不能在四维中这样做。垂直于 $dx\ dy$ 的是个什么呢？它到底沿 z 方向还是沿 t 方向？

总之，对于三维而言碰巧在取了像 L_{ij} 那样的两矢量的组合之后，你又可把它用另一个矢量来表达，因为刚好有三项碰巧会像一个矢量的分量那样变换。但在四维中，那显然是不可能的，因为存在六个独立的项，而你不可能用四个事件来代表六个事件。

即使在三维中，很可能存在不能用矢量来表示的两个矢量的组合。假设任意取两矢量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ，并构成各种可能的分量组合，像 $a_x b_x, a_x b_y$ 等等。则应该有九个可能的量：

$$a_x b_x, a_x b_y, a_x b_z,$$

$$a_y b_x, a_y b_y, a_y b_z,$$

$$a_z b_x, a_z b_y, a_z b_z.$$

我们也许可以叫这些量为 T_{ij} 。

如果现在来到一个转动（比如说绕 z 轴转动）的坐标系中， $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的各分量就会改变。在这一新参照系中，比如 a_x 由下式代替：

$$a'_x = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta,$$

而 b_y 则由下式代替：

$$b'_y = b_y \cos \theta - b_x \sin \theta.$$

对于其他各分量也与此相仿。当然，由我们所发明的乘积 T_{ij} 的九个分量也全都改变了。例如， $T_{xy}=a_x b_y$ 就变成

$$T'_{xy} = a_x b_y (\cos^2 \theta) - a_x b_x (\cos \theta \sin \theta) + a_y b_y (\sin \theta \cos \theta) - a_y b_x (\sin^2 \theta)$$

或

$$T'_{xy} = T_{xy} \cos^2 \theta - T_{xx} \cos \theta \sin \theta + T_{yy} \sin \theta \cos \theta - T_{yx} \sin^2 \theta.$$

T'_{ij} 的每一分量就是 T_{ij} 的诸分量的一个线性组合。

因此发现，不仅可能有像 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的那种“矢积”，它具有像矢量那样变换的三个分量，而且也能够人为地造成两矢量的另一种“乘积” T_{ij} ，它有九个分量，在转动之下，它们按我们能够计算出来的一组复杂法则而变换。这种要有两个下标、而不是单一下标才能加以描述的事件，叫作张量。这是一个“二阶”张量，因为你也可以用三个矢量来做这一游戏，从而获得一个三阶张量——或用四个矢量而获得一个四阶张量，如此等等。一阶张量就是矢量。

所有这一切的要点在于，电磁量 $F_{\mu\nu}$ 也是一个二阶张量，因为它带有两个下标。然而，它是一个四维中的张量。它按一种即将算出来的独特方式变换——恰恰是矢量积的变换方式。对于 $F_{\mu\nu}$ ，如果你改

变两下标的前后次序，则 $F_{\mu\nu}$ 碰巧会改变符号，那是一种特殊情况——它是一个反对称张量。所以我们说，电场和磁场是四维中一个二阶反对称张量的两部分。

你们已经走过很长的路程，是否还记起好久以前我们对速度下定义的时候？现在正在谈论“四维中一个二阶反对称张量”。

眼前，我们得求出关于 $F_{\mu\nu}$ 的变换规律。这完全不难做到，只是有点麻烦罢了。无须动脑筋，但要做不少工作。我们需要的是关于 $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ 的洛伦兹变换。由于 μ 不过是矢量的特殊情况，所以我们将处理普遍的反称矢量组合式，可称为 $G_{\mu\nu}$ ：

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu \quad (26.20)$$

（对于我们的目的来说， a_μ 最终将由 ∇_μ 代替而 b_μ 由 A_μ 代替）。 a_μ 和 b_μ 的各分量分别按照洛伦兹公式变换，它们是

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad b'_t = \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_x &= \frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}}, \quad b'_x = \frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_y &= a_y, \quad b'_y = b_y, \\ a'_z &= a_z, \quad b'_z = b_z. \end{aligned} \quad (26.21)$$

现在来变换 $G_{\mu\nu}$ 的分量。要从 G_{tx} 开始：

$$G'_{tx} = a'_t b'_x - a'_x b'_t = \left(\frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \left(\frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) = a_t b_x - a_x b_t.$$

但这恰好就是 G_{tx} ，因而有这么一个简单结果：

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

我们将再多做一个。

$$G'_{ty} = \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}}b_y - a_y \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_tb_y - a_yb_t) - v(a_xb_y - a_yb_x)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

因而得到

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - vG_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

当然按相同的方法可得

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - vG_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

剩下的将怎样做就很清楚了。让我们对所有这六项都制成一表，不过此刻也可用 $F_{\mu\nu}$ 来写出罢了：

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - vF_{ty}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - vF_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - vF_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - vF_{zt}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{26.22}$$

当然，仍旧有 $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ 和 $F'_{\mu\mu} = 0$ 。

所以我们得到了电场和磁场的变换式。我们所必须做的一切就是去查表26-1以找出在用 $F_{\mu\nu}$ 的漂亮的符号表示法中改用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 时意味着什么。那不过是如何代入的问题。为了使你能清楚在通常的符号中看上去如何，我们将在表26-2中重新写出关于场分量的变换式。

表26-2 电场和磁场的洛伦兹变换 ($c=1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$

表26-2中的那些式子告诉我们：如果从一个惯性系到另一个惯性系， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 将怎样变化。若已知道在一个系中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ ，则可求得在其旁边以速率 v 运动的另一个参照系中它们会变成什么。

如果注意到，由于 v 是在 x 方向上，因而所有含有 v 的项就都是叉积 $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的分量，那么便能把这些式子写成一种更易于记忆的形式。因此，可以重新将那些变换式写成如表26-3所示的形式。这样就较易于记住哪个分量在哪里。事实上，这种变换式甚至还可以写得更加简单。只要把沿 x 轴的场分量定义为“平行”分量 $E_{\parallel}$ 和 $B_{\parallel}$ （因为它们都平行于 S 与 S' 间的相对速度），而把总横分量—— y 和 z 两分量的矢量和——定义为“正交”分量 $E_{\perp}$ 和 $B_{\perp}$ ，就得到表26-4中的那些式子（我们已把 c 放回去了，使得以后要回过来参考时更为方便）。

表26-3 场变换的另一种形式 ($c=1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\sqrt{1 - v^2}}$	$B'_y = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{\sqrt{1 - v^2}}$
$E'_z = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\sqrt{1 - v^2}}$	$B'_z = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_z}{\sqrt{1 - v^2}}$

表26-4 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的洛伦兹变换的又一种形式

$E'_{\parallel} = E_{\parallel}$	$B'_{\parallel} = B_{\parallel}$
$E'_{\perp} = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$B'_{\perp} = \frac{(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2})_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

这些场变换式为我们提供求解某些曾经解过的问题——比如求运动点电荷的场——的另一种方法。我们以前就曾通过对势取微商而算出了场，但现在有可能通过变换库仑场而做到这一点了。若有一个在 S 参照系中静止的点电荷，则那里只有简单的径向场。在 S' 参照系中，将会看到一个以速度 u 运动着的点电荷，如果 S' 参照系是以速率 $v = -u$ 经过 S 参照系的话。我们将让你们证明，表26-3和26-4中的变换会给出与我们在§26-2中曾经得到的电场和磁场相同。

如果我们运动并经过任何固定的电荷系统，则对于我们所能看到的事件表26-2中的变换式会提供一个有趣而又简单的答案。例如，假定要知道在我们的 S' 参照系中的场，倘若我们正在如图26-7所示的那个电容器两板之间运动着（当然，如果说一个充电电容器运动着经过我们，情况也一样），我们看到了什么呢？在这种情况下变换是轻而易举的，因为在原来的系统中， $\mathbf{B}$ 场为零。首先，假定我们的运动是垂直于 $\mathbf{E}$ 的，则将看到一个仍然是完全横向的 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。此外，我们还将看到磁场 $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}' / c^2$ （在关于 $\mathbf{B}'$ 的表式中

$\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 不会出现，因为我们是用 $\mathbf{E}'$ 而非用 $\mathbf{E}$ 来写出的，但那是同一回事）。因此，当我们垂直于一静电场而运动时，就会看到一个附加的横向 $\mathbf{B}$ 。如果我们的运动并不垂直于 $\mathbf{E}$ ，则可将 $\mathbf{E}$ 分成 $\mathbf{E}_{\parallel}$ 和 $\mathbf{E}_{\perp}$ 两部分。该平行部分不会改变，即 $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ ，而其垂直部分则恰如刚才所述的那样变化。

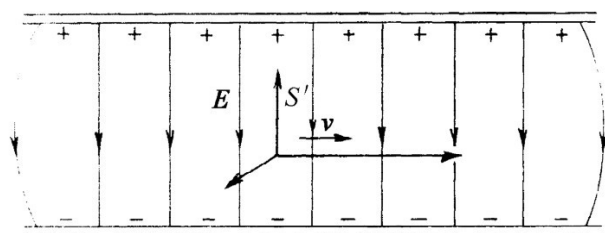


图26-7 坐标系 S' 正在穿过一个静电场而运动

现在要来考虑相反的情况，并设想我们正在穿过一个纯静磁场而运动。这次会看到电场 $\mathbf{E}'$ ，它等于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ ，以及改变了一个因子 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 的磁场（假定它是横向的）。只要 v 比 c 小很多，就可以忽略磁场中的变化，而主要效应则是出现一个电场。作为这一效应的一个例子，试考虑测定飞机航速这个著名问题。目前这已经不再是著名的了，因为可以利用雷达从地面的反射波来测定空气的速率，但多年来在恶劣气候中找出飞机的速率一直是困难的。你不能见到地面，且又不知道哪个方向向上，等等，但要去弄清楚相对于地面你正在动得多快，仍然是十分重要的。见不到地面如何能做到这一点呢？许多懂得那些变换式的人们曾经琢磨过这种想法，即利用飞机在地球磁场中运动这一事实。假定飞机飞过的地方磁场大体上已经知道。让我们仅仅考虑磁场取垂直方向的简单情况。要是我们正在以一水平速度 v 飞过它，则按照公式，就会看到等于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的电场，也就是说，这电场垂直于飞行方向。假如安装一根被绝缘的导线横穿过机身，则这个电场便会在导线两端感生电荷。这并不是任何新的东西。从地面上

某些人的观点来看，我们正在移动一根导线横穿磁场，因而 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的力就会引起电荷流向导线两端。那些变换式不过是用另一种方式道出了同一件事情（我们能够以不只一种方法谈论同一件事情这个事实，并不意味某种方法比其他方法好。现在已有那么多的不同方法和工具，以致我们经常能够用65种不同方法获得相同的结果）。

所以为了测得 v ，我们必须做的一切就是去测量该导线两端间的电压。我们不能用一个伏特计来做这件事，因为同样的场也将作用于伏特计的导线上，但总会有测量这种场的一些方法。当我们在第9章中讨论大气电时就曾谈及某些方法。所以应该有可能测出飞机的航速。

然而，这一重要问题却从未用这种方式解决过。原因是，这样产生的电场约为每米几毫伏的数量级。这样的场本来是可以测出的，可是困难却在于，可惜这些场不能与其他电场做任何区别。由穿过磁场中运动所产生的场与从另一种原因，比如与在空气中或云雾上的静电荷所已经存在于空气中的某些电场，不能区分开来。我们曾在第9章中描述过在地球表面上空存在着强度约为 100 Vm^{-1} 的典型电场。但它们很不规则。因而当飞机在空中飞过时，它会看到比起那由 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 项所产生的微小场还要强大得多的大气电场的起伏，而结果是由于实际原因不能凭飞机穿过地球磁场中的运动来测定它的航速。

§26-4 用相对论符号表示的运动方程^[2]

由麦克斯韦方程组求电场和磁场没有很大好处，除非我们知道如果有场那它们将干些什么。你可能记得，场对于求得作用于电荷上的

力是需要的，而这些力则确定了该电荷的运动。因此，电动力学理论的一部分当然就是关于电荷运动与力的关系。

对于处在 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 场中的单独电荷，它所受的力为

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (26.23)$$

对于低速情况来说，这个力等于质量乘以加速度，但对于任何速度的情况正确的规律则是力等于 $d\mathbf{p}/dt$ 。写出 $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 后，就求得了在相对论上正确的运动方程：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.24)$$

现在，希望从相对论的观点来讨论这个方程。既然已经把麦克斯韦方程组表达成相对论形式了，去看看在相对论形式下运动方程会像什么样子该是多么有趣。就让我们来看看，能否将这个方程重新用四维矢量符号写出来。

我们知道，动量是四维矢量 p_μ 中的一部分，而其时间分量则为能量 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。因此我们也许会想到，要用 dp_μ/dt 来代替式 (26.24) 的左边。于是，只需找出属于 F 的第四个分量。这第四个分量应该等于能量的变化率，或者是做功的功率，亦即 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 。于是我们希望将式 (26.24) 的右边写成一个像 $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, F_x, F_y, F_z)$ 那样的四维矢量。可是这并不会构成四维矢量。

一个四维矢量的时间微商不再是一个四维矢量，因为 d/dt 要求选定某个用来测量 t 的特殊参照系。我们以前在试图使 $\mathbf{v}$ 成为一个四维矢

量时，就曾碰到过这样的麻烦。当时我们的第一个猜测是，其时间分量一定是 $c \, dt/dt = c$ 。但这些量

$$\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (c, \mathbf{v}) \quad (26.25)$$

却不是一个四维矢量的分量。我们曾经发现，通过对每个分量乘以 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ，则它们可以被改造成一个四维矢量。“四维速度” u_μ 就是这么一个四维矢量：

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (26.26)$$

所以似乎是这样：若我们希望那些微商会造成四维矢量，则秘诀在于对 d/dt 乘以 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。

于是，我们的第二个猜测是：

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} (p_\mu) \quad (26.27)$$

应该是一个四维矢量。但 $\mathbf{v}$ 究竟是什么？它是粒子的速度，而并非坐标系的速度！那么，由下式定义的量 f_μ

$$f_\mu = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (26.28)$$

就是力在四维中的推广，我们可叫它为“四维力”。它的确是一个四维矢量，其空间分量并非 $\mathbf{F}$ 的分量，而是 $\mathbf{F}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的分量。

问题在于为什么 f_μ 是一个四维矢量呢？对因子 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 稍微有点理解对这个问题应该是不错的。由于现在它已被提到过两次，所以现在是弄清楚为什么 $\frac{d}{dt}$ 总可以用相同的因子来确定的时候了。答案如下：当我们就某个函数 x 对时间取微商时，是在自变量 t 的一个小间隔 Δt 中计算 x 的增量 Δx 。但在另一个参照系上，这间隔 Δt 或许会相当于在 t' 和 x' 两个方面的变化，因而如果我们仅改变 t' ，则在 x 中的变化便将不同了。对于微商来说，我们必须求出作为时空“间隔”量度的变量，这样才会一切坐标系中都相同。当我们将那样的间隔取为 Δs 时，则它对所有的坐标系都会是相同的。当一粒子在四维空间中“运动”时，会有 Δt ， Δx ， Δy 及 Δz 的变化。我们能否用它们来构成一个不变的间隔呢？噢，它们就是四维矢量 $x_\mu = (ct, x, y, z)$ 各分量的变化，因而如果由下式定义一个量 Δs ：

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2} \Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2), \quad (26.29)$$

由于它是一个四维点积，则我们有一个用来量度四维间隔的很好的四维标量了。从 Δs 或其极限 ds ，我们能够定义一个参数 $s = \int ds$ 。而对于 s 的微商，即 d/ds ，就是一种漂亮的四维运算，因为它对于洛伦兹变换来说是不变的。

对一个运动粒子，若要将 ds 和 dt 联系起来倒很容易。对于一个正在运动的点状粒子，

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt, \quad (26.30)$$

而

$$ds = \sqrt{(dt^2/c^2)(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (26.31)$$

所以这算符

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}$$

就是一个不变算符。若用它来对任一四维矢量进行运算，则可以得到另一个四维矢量。例如，若把它作用于 (ct, x, y, z) 上，可获得该四维速度 u_μ ：

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu.$$

现在我们明白，为什么这个因子 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 总会把事情解决好。

这个对洛伦兹变换不变的变量 s 是一个有用的物理量。它称为沿粒子路径的“原时”，因为 ds 总是在一个跟随粒子一起运动的参照系中在任何特定的时刻的一个时间间隔（这时， $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ ，因而 $\Delta s = \Delta t$ ）。如果你能够想象出某个“钟”，它的运行快慢与加速度无关，那么这样一个伴随着粒子的钟就会显示出时间 s 。

现在我们可以回过头去把（经过了爱因斯坦修正的）牛顿定律写成简洁形式：

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu, \quad (26.32)$$

其中 f_μ 就是式(26.28)中所给出的。并且, 动量 p_μ 也可以写成

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds}, \quad (26.33)$$

式中坐标 $x_\mu = (ct, x, y, z)$, 现在描述粒子的轨道。最后, 该四维符号表示法为我们提供了形式十分简单的运动方程:

$$f_\mu = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}, \quad (26.34)$$

这使人想起 $F=ma$ 。重要的是要注意式(26.34)与 $F=ma$ 的不同, 因为这个四维矢量公式(26.34)已包含在相对论力学中了, 在高速运动中它不同于牛顿定律, 也不像麦克斯韦方程组的那种情况, 那里我们能够把各个方程都重新写成相对论形式而完全没有改变其意义——只不过是符号表示法的改变而已。

现在让我们回到式(26.24)并看看怎样才能将其右边用四维矢量符号写出来。那三个分量——当各除以 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 时——就是 f_μ 的分量, 因而

$$f_x = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q \left[\frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v_y B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_z B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]. \quad (26.35)$$

现在, 我们必须把所有的量都用它们的相对论符号来表示。首先, $c/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $v_y/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 以及 $v_z/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 分别是四维速度 u_μ 的

t ， y 和 z 分量。 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的分量则是场的二阶张量 $F_{\mu\nu}$ 的分量。当回到表26-1中查看与 E_x ， B_z 和 B_y 相对应的 $F_{\mu\nu}$ 的分量时，则可以得到 [3]

$$f_x = q (u_t F_{xt} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}) ,$$

这个式子开始看上去似乎很有趣。每项都有一个下脚标 x ，那是合理的，因为我们正在寻求 x 分量嘛。然后，所有其他下脚标则是成对地出现： tt ， yy ， zz ，除了 xx 那一项不见以外。所以我们正好把它插进去，并写成

$$f_x = q (u_t F_{xt} - u_x F_{xx} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}) . \quad (26.36)$$

这并未改变什么，因为 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的，从而 F_{xx} 等于零。之所以要把 xx 项放进去就是为了使我们将式 (26.36) 写成一个简写形式

$$f_\mu = q u_\nu F_{\mu\nu} . \quad (26.37)$$

这个式子与式 (26.36) 是一样的，如果给出这样一个规则，即每当任一个下脚标出现两次时（比如这里的 ν ），你就得自动地用像标积那样的方法把这些项都相加起来，这也是应用相同的符号惯例。

你可以相信，式 (26.37) 对于 $\mu=y$ 或 $\mu=z$ 也同样适用，但对于 $\mu=t$ 又是怎么回事呢？开一个玩笑，让我们来看看它讲些什么：

$$f_t = q (u_t F_{tt} - u_x F_{tx} - u_y F_{ty} - u_z F_{tz}) .$$

现在要变回成 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的表示式，我们得

$$f_t = q \left(0 + \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_x + \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_y + \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_z \right) \quad (26.38)$$

或

$$f_t = \frac{q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

但根据式 (26.28), f_t 被认为是

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

由于 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ 为零, 所以就与式 (26.38) 相同。因此, 一切都很顺利。

概括起来, 运动方程可以写成一个优美形式:

$$m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.39)$$

虽然方程式可以这样写出看起来很巧妙, 但这种形式却并非特别有用。对于求解粒子运动的问题, 应用原来的方程式 (26.24) 往往更加方便, 而那是我们将经常做的事情。

[1] 这里用来指明推迟位置或推迟时刻的那些撇号都不应与上一章中用来指明一个已作了洛伦兹变换的参照系的撇号混淆。

[2] 在这一节中我们将放回所有的 c 。

[3] 我们把 c 放回到表26-1时, 则与 $\vec{E}$ 相对应的 $F_{\mu\nu}$ 分量都乘以 $1/c$ 。

第27章 场的能量和场的动量

§27-1 局域守恒

很明显，实物的能量并不守恒。当一物体辐射光时它就失去能量。然而，这部分损失的能量可以用其他形式来描述，比如说用光的形式。因此，要是没有考虑到与光、或普遍地说，与电磁场联系着的能量，那么能量守恒的理论是不完整的。我们现在着手处理场的能量守恒和动量守恒。肯定不可能只论述其中一个而不涉及另一个，因为在相对论中它们是同一个四维矢量的不同方面。

早在第1卷中，就曾讨论过能量守恒，那时只是说世界上的总能量恒定不变。现在要将能量守恒律的概念在一个重要方面加以推广——在某些细节方面说明能量是怎样守恒的。这一新的定律将说明：如果能量离开一个区域，那是由于它通过该区域的边界流出去的。这是比不加这样一种限制的能量守恒要强一点的规律。

为看清这一说法的含义，让我们先来考察一下电荷守恒律是怎样产生的。过去我们对电荷守恒是这样描述的：有一电流密度 $\mathbf{j}$ 和一电荷密度 ρ ，当某处的电荷减少时就必然会有电荷从该处流出，我们把它称为电荷守恒。这个守恒律的数学形式是

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (27.1)$$

上述定律得出如下结论，即在世界上的总电荷总保持恒定不变——永远不会有任何净电荷的获得或丧失。然而，总电荷很可能按另一种方式保持不变。假定在某点（1）附近有某个电荷 Q_1 ，在隔某段距离的点（2）附近则没有什么电荷（图27-1）。现在假定：随着时间的推移，电荷 Q_1 会逐渐消失，而与此同时随着 Q_1 的减少却有某些电荷 Q_2 在点（2）处出现，并且以这样一种方式进行，即使得在每个时刻 Q_1 与 Q_2 之和是一常数。换句话说，在任一中间态上 Q_1 所丧失的量应该加到 Q_2 上，那么世界上电荷的总量才会守恒。这是一种“世界范围”的守恒，而不是我们将称之为“局域”性的守恒，因为要使电荷从点（1）转移至点（2）并不要求在两点之间的空间里任何一处出现。就局部来说，该电荷是真正“丧失”了。

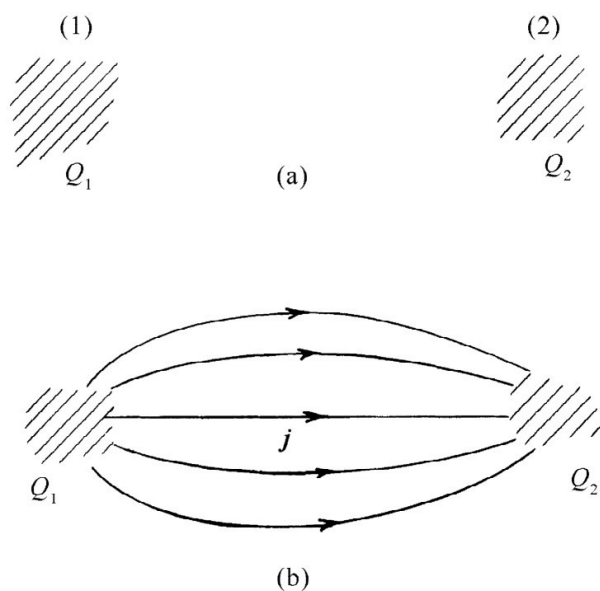


图27-1 两种使电荷守恒的方式：（a） $Q_1 + Q_2$ 为一恒量；（b） $dQ_1/dt = -\int j$

$$\cdot n da = -dQ_2/dt$$

这一种“世界范围”的守恒律在相对论中会碰到困难。在相隔一定距离的各个点，“同时”这个概念对于不同参照系是彼此不相等的。两事件在某个参照系中是同时的，但对于从旁运动而过的另一个参照系来说则不是同时的了。在上述那种“世界范围”的守恒律中，要求从 Q_1 上丧失的电荷应该同时出现在 Q_2 上。否则就会出现电荷并不守恒的某些时刻。因此如不将其造成一个“局域”的守恒定律，似乎就没有办法使电荷守恒律在相对论上成为不变式。事实上，洛伦兹的相对论不变性这一要求，似乎以令人惊异的方式限制了可能有的自然规律。比方，在现代量子场论中，人们往往希望通过承认我们称为“非局域”性的相互作用——这里的某事件会直接影响到那里的某事件——来改变理论，但却陷入了相对论性原理上的困难。

“局域”守恒还含有另一种概念。它表明电荷之所以能够从一处移至另一处，在它们之间的空间里必须有某个事件发生。要描述该定律，我们不仅需要电荷密度 ρ ，而且也需要另一类量，即 $\mathbf{j}$ ，它是给出通过一个截面的电荷流动速率的一个矢量。于是这个流量就同电荷密度的变化率通过式（27.1）而互相联系起来，这是守恒律中更为极端的一种。它表明电荷按某一特殊形式守恒——“局域”地守恒。

事实证明，能量守恒是一种局域过程。在某个给定空间区域里不但存在能量密度，而且也存在代表穿越表面的能量流动速率的矢量。例如，当有一个光源向外辐射时，我们能够求出从该源发射出来的光能。如果设想某个包围着该光源的数学曲面，那么从这个曲面内部所损失的能量就等于穿越该曲面流出去的能量。

§27-2 能量守恒与电磁学

现在我们要定量地写出关于电磁学的能量守恒。为此，就必须描述在空间任何体积元中能量及其能流速率各有若干。假定我们首先只考虑电磁场的能量，因而将令 u 代表场的能量密度（也就是在空间内单位体积的能量），并令矢量 $\mathbf{S}$ 代表场的能通量密度（即单位时间通过垂直于流动方向的单位截面的能流）。于是，同电荷守恒、即式（27.1）完全相似，我们可以把场能量的“局域”守恒律写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (27.2)$$

当然，这一定律并非普遍正确，说场能量守恒是不对的。假设你在一个黑暗房间里打开电灯开关，忽然之间整个房间里都充满了灯光，所以就有了场方面的能量，尽管在此之前一点光也没有。式（27.2）并非一个完全的守恒律，因为场能量单独来说是不会守恒的，只有世界上的总能量——也包括实物方面的能量——才会守恒。如果实物对场做了一些功或场对实物做了一些功，则场的能量将会发生改变。

可是，若在有关体积里存在实物，则我们知道它具有多少能量：每个粒子具有能量 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。实物的总能量正好是所有粒子能量之和，而通过一个面的这种能流就正好是通过这个面的每个粒子所携带的能量之和。现在我们只想谈论有关电磁场方面的能量，因此就必须写出这样一个方程，它会说出在某个给定体积里的总场能的减少，或者是由于场能从该体积里流出，或者是由于场把能量给了实物而有了损失（或从实物处获得能量，那不过是能量的负损失）。体积 V 内的场能为

$$\int_V u \, dV,$$

而其减少速率则是这个积分对时间微商的负值。从体积 V 出来的场的能流等于 $\mathbf{S}$ 的法向分量对包围着 V 的整个曲面 Σ 的积分，即

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

因此，

$$-\frac{d}{dt} \int_V u \, dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, da + (\text{对 } V \text{ 内实物所做的功}). \quad (27.3)$$

我们以前已经知道，场对单位体积实物做功的功率为 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ [作用于一粒子上的力为 $\mathbf{F}=q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，因而做功的功率就是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ 。若单位体积里共有 N 个粒子，则单位体积的作功功率为 $Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ ，但 $Nq\mathbf{v} = \mathbf{j}$]，所以量 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 必然等于单位时间内单位体积中场损失的能量。于是式(27.3)便变成

$$-\frac{d}{dt} \int_V u \, dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \, dV. \quad (27.4)$$

这是场内能量的守恒律。如果能够把第二项变成体积积分，就可以将它转变成一个像式(27.2)那样的微分方程，这是容易用高斯定理做到的。 $\mathbf{S}$ 的法向分量的面积分等于它的散度对整个内部体积的积分。因此，式(27.3)就相当于

$$-\int_V \frac{\partial u}{\partial t} \, dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} \, dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \, dV,$$

其中我们已把第一项中的时间微商置于该积分之内。由于这一方程对于任何体积都适用，因而可以除去那些积分而得到关于电磁场的能量方程式：

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (27.5)$$

现在，这一方程对我们毫无用处，除非知道 u 和 $\mathbf{S}$ 各是什么。也许仅能告诉你们用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 来表达它们的式子，因为我们真正希望得到的只是结果。然而，这里却宁愿向你们展示曾于1884年由坡印亭用来获得 $\mathbf{S}$ 和 u 的公式的那种论证，以便使你们能够知道这些式子是从何而来的（然而，对于今后的工作来说，你们并不需要去牢记这一推导）。

§27-3 电磁场中的能量密度和能流

假定存在仅仅取决于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的场能量密度 u 和能通量密度 $\mathbf{S}$ ，这是一种理念（例如，至少在静电学中就已知道，能量密度可以写成 $\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ ）。当然，这里的 u 和 $\mathbf{S}$ 也许会依赖于势或其他的东西，但让我们看看能够算出什么结果来。可以尝试把 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 这个量重新写成为两项之和：其中一项是一个量的时间微商，而另一项则是第二个量的散度。这时，那第一个量该含 u 而第二个量则含 $\mathbf{S}$ （带有适当符号），这两个量都必须只用场来表示的。这就是说，我们希望把上述方程写成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (27.6)$$

左边应该首先仅仅用场来表示。我们如何能做到这一点呢？当然，要通过应用麦克斯韦方程组。根据关于 $\mathbf{B}$ 的旋度的那个麦克斯韦方程，用 $\mathbf{E}$ 对之点乘，便得

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (27.7)$$

这样就已部分地完成了任务。最末一项是时间微商——即 $(\partial/\partial t) \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right)$ 。因此， $\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 至少就是 u 的一部分了。这与我们曾经在静电学中求得的是相同的东西。现在，一切必须做的就是要使另一项纳入某种东西的散度之中。

注意式 (27.7) 右边的第一项与

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} \quad (27.8)$$

相同。而正如你从矢量代数方面所知道的， $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 一样，因而上面这一项也就等同于

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}), \quad (27.9)$$

这就有了“某种东西”的散度，这恰恰就是我们所需要的。结果这件事却是错的！以前曾向你们警告过， ∇ 虽然“像”矢量，但与矢量不“完全”相同。之所以不是矢量，是因为有一个来自微积分学方面的附加惯例：当一微分算符置于一乘积的前面时，它要对右边每个东西都进行运算。在式 (27.7) 中， ∇ 只对 $\mathbf{B}$ 运算，而对 $\mathbf{E}$ 不运算。但在式 (27.9) 的那种形式中，按照正常惯例， ∇ 应当对 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 两者都进行

运算。所以并不是同一回事。实际上，若我们算出 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的各部分，就能看出它等于 $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ 再加上某些其他的项。这很像当我们取代数中一个积的微商时所发生的那种情况。例如，

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx}.$$

并不打算将 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的所有各部分都算出，仅愿意向你们指明一个对付这种问题十分有用的技巧，那就是允许你将矢量代数的法则全部运用到含有算符 ∇ 的表示式上去而又不会引起任何麻烦的一种技巧。这技巧就是要丢开——至少暂时是如此——关于微商算符对什么进行运算的微积分符号表示法则。你会看到，通常，各项的次序用于两个单独的目的。一个目的是在运算方面，为使 $f(d/dx)g$ 不同于 $g(d/dx)f$ ；另一个目的则是在矢量方面，为使 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 不同于 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 。如果我们乐意，可以决定暂时放弃这个运算法则，不去说明微商要对右边每件东西都进行运算，而是来制订一种与所写下来的各项次序无关的新的规则。于是我们就能巧妙地处理前后各项而用不着操心。

这里就是新的规则：用下脚标来表示微分算符对什么进行运算，这样前后次序就没有什么意义了。假设令算符 D 代表 $\partial/\partial x$ ，那么 D_f 就意味着仅对变量 f 取微商，于是

$$D_f f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

但如果我们有 $D_f fg$ ，则它指的是

$$D_f f g = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) g.$$

不过要注意，此刻按照我们的新规则， $f D_f g$ 也意味着相同事情。我们可将相同的事情任意写成以下各种形式：

$$D_f f g = g D_f f = f D_f g = f g D_f.$$

你看， D_f 甚至可以处在每件事情之后（像这样一种方便的符号表示法竟从未在数学或物理学书中得到传授，真令人感到意外）。

你可能会怀疑：若我要写出 fg 的微商，那该怎么办呢？我所要的是对两项的微商。那很容易，你只要这样说就行了，你写下 $D_f (fg) + D_g (fg)$ ，而这恰好就是 $g (\partial f / \partial x) + f (\partial g / \partial x)$ ，也即在旧符号表示法中你用 $\partial (fg) / \partial x$ 表示的意思。

你将会看到，现在算出关于 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的新表示式就变得很容易了。我们从改成新的符号表示法开始，也即写出

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \nabla_E \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}). \quad (27.10)$$

当我们这样做时，就无须再保持次序上的正确了。我们始终懂得， ∇_E 只对 $\mathbf{E}$ 进行运算，而 ∇_B 只对 $\mathbf{B}$ 运算。在这种场合下，就能够把 ∇ 当作通常的矢量那样来运用（当然，当运算结束时，就要回到每人常用的那种“标准”符号表示法上去）。因此，现在就可以做出像交换点积和叉积以及对各项进行其他类型的重新安排等各种事情。例如，式

(27.10) 中的中间项可以重新写成 $\mathbf{E} \cdot \nabla_B \times \mathbf{B}$ (你会记得, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$), 而那最末一项则与 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \times \nabla_E$ 相同。这看来像是异想天开, 但却没有什么问题。现在, 如果我们试图回到通常的惯例上来, 那必须安排得使 ∇ 仅对其“本身”的变量进行运算。第一项已经那样做了, 因此可以仅仅去掉下标。第二项就需要某种调整才能使 ∇ 移至 $\mathbf{E}$ 之前, 这我们可通过交换叉积的次序并改变符号而做到:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_E) = -\mathbf{B} \cdot (\nabla_E \times \mathbf{E}).$$

现在, 式子已经按照惯常次序写出, 因而就可回到通常的符号表示法上来。式 (27.10) 相当于

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (27.11)$$

(在这一特殊情况下, 较快的方法应该是一直利用各分量, 但花点时间向你们指出这种数学技巧还是值得的。你或许将不会在其他地方见到它, 但对于把矢量代数从关于含有微商的项的次序规则中解放出来是极为好用的)。

现在我们就回到能量守恒的讨论上来, 并引用我们的新结果, 即式 (27.11), 去变换式 (27.7) 中的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 项。这样, 能量方程变成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (27.12)$$

现在你看到, 我们几乎完成任务了。这里有两项, 一项用作 u 对于 t 的漂亮微商, 另一项代表 $\mathbf{S}$ 的美妙散度。可惜, 那中间项仍旧保留下来, 它既不是散度, 又不是对于 t 的微商, 所以我们已经接近胜利, 但还不完全。在经历了一番思考之后, 回去查看麦克斯韦的微分方程

组，幸运地发现 $\nabla \times \mathbf{E}$ 等于 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，这就意味着我们可以把这独特项转变成单纯的时间微商：

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right).$$

现在完全具有了我们所需要的一切。我们的能量方程可写成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (27.13)$$

那就完全像式（27.6），只要下这样两个定义：

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (27.14)$$

和

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (27.15)$$

（交换叉积的次序使符号显得正确）。

我们的计划是成功的。已经有一个关于能量密度的表示式，它是“电”和“磁”两种能量密度之和，它们的形式很像以前我们在静场情况下求得的形式，那时我们计算出了用场表示的能量公式。并且，我们也已找到了关于电磁场的能流矢量的公式。这一新的矢量， $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，按照它的发现者的名字，称为“坡印亭矢量”，它告诉我们有关场能在空间各处流动的速率，每秒流经一小面积 $d\mathbf{a}$ 的能量为 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{a}$ ，其中 $\mathbf{n}$ 为垂直于 $d\mathbf{a}$ 的单位矢量（现在你有了 u 和 $\mathbf{S}$ 的公式，若乐意的话，便可忘掉那些推导过程）。

§27-4 场能的不确定性

在考虑坡印亭公式〔式(27.14)和(27.15)〕的某些应用前，我们希望说明，我们并未真正“证明”过这些公式。上面只不过是找到了一个可能的“ u ”和一个可能的“ S ”。我们怎能知道，通过巧妙处理各项的前后次序，不能再找到关于“ u ”和关于“ S ”的另外的公式呢？这个新的 S 和新的 u 可能是不同的，但它们仍应该满足式(27.6)。它是可能的，也是能够做到的。不过所找到的公式其形式始终含有场的各种微商（总会有像二次微商或一次微商的平方那样的二次项）。事实上，有无数个关于 u 和 S 的不同可能性，而迄今还没有人曾经想到用实验方法来判明哪一个是对的！人们曾猜测最简单的一个可能是对的，但必须讲明，我们肯定不知道在电磁场能量的空间中真实的位置是什么。因此，我们也就用容易的办法选取并说明场的能量是由式(27.14)给出的。于是，能流矢量 S 也必然由式(27.15)给出。

十分有趣，似乎没有唯一的方法能解决场能位置的不确定性问题。有时人们会宣称，这一问题可以通过利用引力理论按照下述论证来加以解决。在引力理论中，所有各种能量都是引力之源。因此，如果我们知道了引力作用的方向，则电的能量密度也就必然被适当定位了。然而，迄今为止还未有人曾做过这样精确的实验使得电磁场的引力效应的精密位置可以确定下来，因而电磁场单独可以作为引力之源这一概念在外表上是难于处理的。事实上，确曾观测到光当它靠近太阳通过时会受到偏转——我们可以说太阳把光向它本身吸引下来。你难道不要考虑光同等地吸引太阳吗？反正，每人都乐于接受我们所已找到的那些关于电磁能的位置及其流动的简单表示式。尽管有时运用那些式子获得的结果似乎有点奇怪，但却从未有人找出那些结果的毛

病——这就是说，没有与实验不一致。因此，我们仍将跟随世界上其他人——此外，我们相信它可能是完全对的。

应该做一个关于能量公式的进一步述评。首先，场中单位体积的能量很简单：它是静电能量加上磁场能量，如果 静电能量用 E^2 而磁场能量用 B^2 写出的话。我们过去计算静态问题时，就曾得出两个这样的表示式作为能量的可能表示式。我们也曾求得关于静电场中能量的若干个其他公式，诸如 $\rho\phi$ ，在静电情况下它等于 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 的积分。然而，在动态电场中等效性失效，而至于哪个式子正确则还未曾有过明显的选择。现在我们才知道哪一个是对的。同样，我们已找到了一个普遍正确的磁能量公式，对动态场的能量密度仍然正确的公式就是式 (27.14)。

§27-5 能流实例

关于能流矢量 $\mathbf{S}$ 的公式，是某种相当新鲜的事情。我们现在就要来看看，在某些特殊情况下它是如何工作的，并看看它是否与以前已知的任何事情互相验证。我们将举的第一个例子是光。在一个光波中， $\mathbf{E}$ 矢量和 $\mathbf{B}$ 矢量互相正交而且也垂直于波的传播方向（见图27-2）。在电磁波中， $\mathbf{B}$ 的大小等于 $1/c$ 乘上 $\mathbf{E}$ 的大小，而且由于它们互相垂直，所以还可写成

$$| \mathbf{E} \times \mathbf{B} | = \frac{E^2}{c}.$$

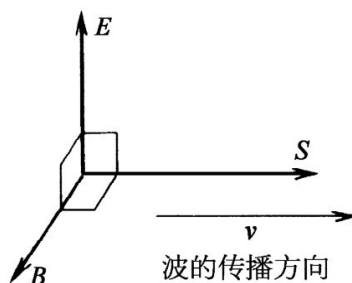


图27-2 关于光波中的 E , B 和 S 矢量

因此, 对于光来说, 每秒通过单位面积的能量为

$$S = \epsilon_0 c E^2. \quad (27.16)$$

在 $E = E_0 \cos \omega (t - x/c)$ 的那种光波中, 每单位面积能流的平均速率, 即 $\langle S \rangle_{\text{平均}}$ ——也称为光的强度——为电场平方的平均值乘以 $\epsilon_0 c$:

$$\text{强度} = \langle S \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}. \quad (27.17)$$

信不信由你, 我们曾在第1卷§31-5中学习光学时就已经导出过这一结果。应该可以相信这结果是正确的, 因为它也被另外某些事情所核实。当我们有一光束时, 在空间中就存在由式(27.14)所给出的能量密度。对于光波利用 $cB = E$, 得出

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \epsilon_0 E^2.$$

但 E 在空间中是变化着的, 因而平均能量密度为

$$\langle u \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}. \quad (27.18)$$

现在，波以速率 c 传播，所以应该想到每秒穿过一平方米的能量等于 c 乘以每立方米中的能量。因此我们会说

$$\langle S \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}.$$

上式是对的，因为它与式(27.17)相同。

现在举出另一例子。这是相当奇妙的一个例子。我们来考察正在缓慢充电的电容器中的能流（并不要求那么高的频率，以致电容器初看起来像一个共振空腔，但也不要是直流电）。假定是用一个普通类型的圆形平行板电容器，如图27-3所示，在其内部有一个几乎均匀而随时间变化的电场。在任何时刻，这内部的总电磁能等于 u 乘以体积。若两板的半径均为 a 而其间隔为 h ，则在两板间的总能量为

$$U = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) (\pi a^2 h). \quad (27.19)$$

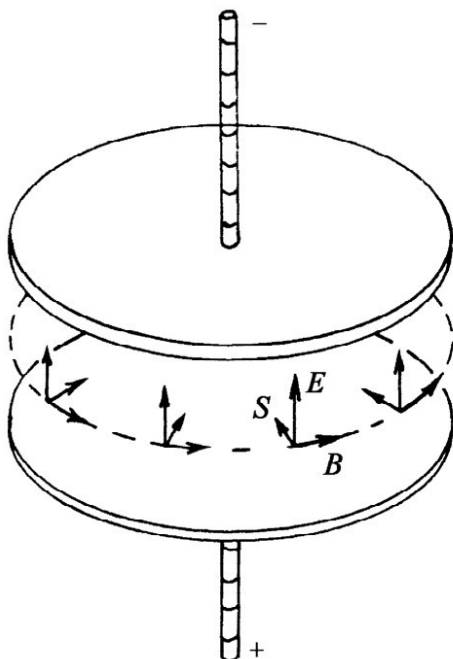


图27-3 接近一个正在充电的电容器，坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 会朝轴心指向内

当 E 改变时，这个能量也在改变。当电容器充电时，位于两板间的体积正在以速率

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 \pi a^2 h E \dot{E} \quad (27.20)$$

接受能量。因此，一定会有从某处进入该体积中的能流。当然，你知道，它必定从那些用作充电的导线进来——但完全不是这样！它不可能经由该方向流入两板内的空间，因为 $\mathbf{E}$ 是与板垂直的，所以 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 就一定与两板平行。

当然，你会记得，当电容器正在充电时，就有一个环绕轴的圆形磁场。我们在第23章中对此曾有所讨论。利用麦克斯韦方程组中最后一个方程，已求得在电容器边缘上磁场由下式给出：

$$2\pi a c^2 B = \dot{E} \cdot \pi a^2$$

或

$$B = \frac{a}{2c^2} \dot{E},$$

它的方向如图27-3所示。因此，就有一个正比于 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的能流从边缘四周进入，如图中所示。能量实际上并不是从导线下来的，而是从围绕着该电容器的空间那里来的。

让我们来核对一下通过两板边缘间的整个面的总能流是否与其内部能量的变化率相符——看来这样较好。为了核实，虽然我们仔细研究了证明式（27.15）的工作的全过程，但还是让我们来弄清楚。该面面积为 $2\pi ah$ ，而 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的量值为

$$\epsilon_0 c^2 E \left(\frac{a}{2c^2} \dot{E} \right),$$

因此总能流为

$$\pi a^2 h \epsilon_0 E \dot{E}.$$

这的确与式（27.20）相符。但它告诉我们一件奇怪的事情：当对电容器充电时，能量并不是沿导线下来的，而是穿过边缘的间隙进来的。那分明就是这一理论所说的！

怎么能够是这样的呢？这虽不是一个容易解决的问题，但这里有一个考虑该问题的方法。假设在该电容器的上面和下面很远处都有一些电荷，当电荷离得很远时，就会有一个微弱的但却是极其散开的场包围着该电容器（见图27-4）。于是，当这些电荷靠拢时，离电容器较近处的场就变得较强。因此，远处的场能量是会朝该电容器移动过来并最后停驻于两板之间。

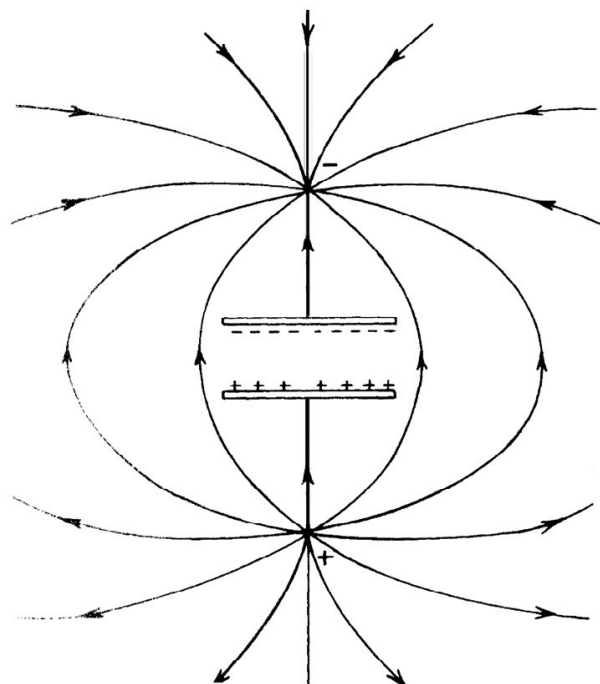


图27-4 当将两电荷从远处移来对一电容器充电时，在电容器外面的场

作为另一个例子，试问在一根有电阻的导线中当它载有电流时会发生什么情况。既然这根导线中有电阻，则沿导线方向便有驱动电流的电场。由于沿导线有电势降，因而刚好在导线外面存在与其表面平行的电场（见图27-5）。此外，还有一个由电流所产生的环绕着导线的磁场。 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 成直角，因此就有一个沿半径而指向内的坡印亭矢量，如图中所示，即有一个从周围各处流进导线的能流。当然，这等于导线中以热的形式损耗掉的能量。因此，我们的“狂妄”理论讲：由于能量从外面的场流进了导线，电子才获得它们用以产生热的那些能量。直觉似乎告诉我们，电子是由于沿着导线被推动才获得能量的，因而这能量应该是沿导线流下（或流上）。但这一理论却说：电子实际上是被来自远处的某些电荷的电场所推动的，而它们从这些场获得了产生热的能量。能量总会莫名其妙地从遥远处的电荷流进空间的广阔区域，然后又流进导线中去。

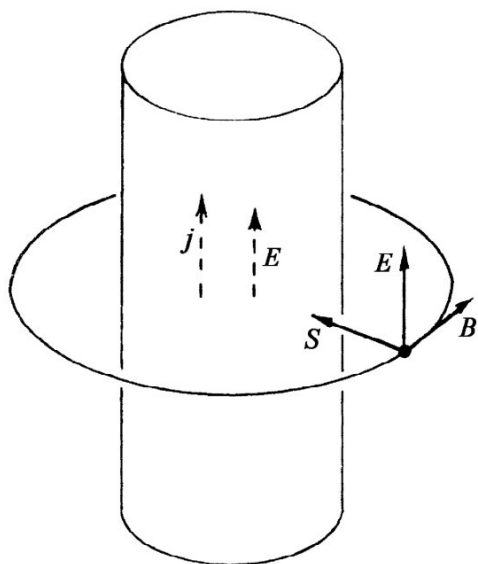


图27-5 在一根载流导线附近的坡印亭矢量 $\mathbf{S}$

最后，为了使你确实相信这一理论明显是一个难题，我们将再举一个例子——其中有一电荷和一块磁铁彼此都静止地互相靠近着的例子——即两者都固定不动。假设取一个其中的点电荷被置于棒状磁铁中点附近，如图27-6所示。每一件东西都是静止的，从而能量并不会随时间变化。而且， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 也都是完全静止的。可是坡印亭矢量却说存在一个能流，因为 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 并不等于零。如果你考察这能流，就会发现它不过是在一圈圈地循环旋转。任何一处都没有能量方面的任何变化——凡是流进某一体积里的东西都会从那里再流出来。这很像不可压缩的水在环流。因此，在这种所谓静态的情况下还存在能量的环流。这是多么荒谬！

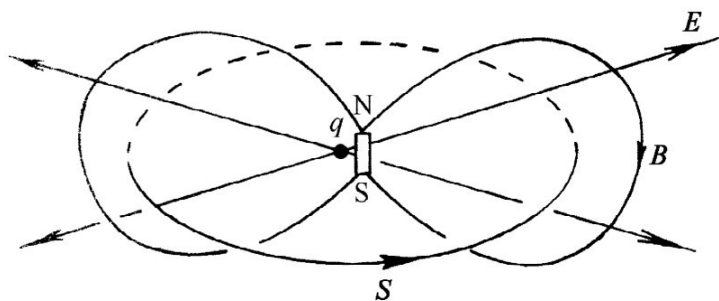


图27-6 电荷和磁铁会产生一个绕闭合回路循环的坡印亭矢量

然而，当你记起我们所谓的“静”磁实际上是一种环行的永久电流时，这也许就不会使你那么可怕地感到莫明其妙。在一块永磁体中，其内部电子都在永恒地旋转。这样也许能量在外面环流这一点就不那么奇怪了。

你无疑开始得到这么一个印象，即坡印亭理论至少部分地违背了你对于在电磁场中能量被设置于何处的那种直觉。你也许会相信，必须对你的一切直觉都进行修改，因此在这里有许多东西得学习。但实际上似乎并不需要。如果有时忘记了导线里能量是从外面流进来而不是沿导线传来的，但你无须感觉到，你就会陷入巨大的困难。在应用能量守恒的概念时，过细地注意能量所取的路径，看来好像价值不大。能量围绕着一块磁铁和一个电荷在兜圈子，这在大多数场合似乎是很不重要的。它并非一个极为重要的细节，但很清楚，我们通常的直觉却是很错误的。

§27-6 场的动量

接下来，我们希望谈论关于电磁场中的动量。正如场具有能量一样，它的每个单位体积也将具有一定的动量。让我们称之为动量密度 $\mathbf{g}$ 。当然，动量具有各种可能的方向，因而 $\mathbf{g}$ 必定是个矢量。让我们每次谈一个分量，首先，考虑 x 分量。由于动量的每一分量都守恒，所以可能写下一个看来有点像这样的定律：

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\text{实物的动量})_x = \frac{\partial g_x}{\partial t} + (\text{流出的动量})_x.$$

左边是容易理解的，实物动量的变化率正好就是作用于其上的力。对于一个粒子来说，这力就是 $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ ，对于一个电荷分布来说，则作用于单位体积上的力为 $(\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B})$ 。然而，“流出的动量”这项却有点奇怪。它不可能是一个矢量的散度，因为它并非一个标量，其实是某一矢量的 x 分量。无论如何，它看来大概有点像

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

因为 x 动量还可能在三个方向中的任意一个方向上流动。总之，不管 a ， b 和 c 是什么，这个组合被认为等于 x 动量的流出量。

现在这场游戏应该是仅仅用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 来写出 $\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ ，利用麦克斯韦方程组而把 ρ 和 $\mathbf{j}$ 消掉，然后才对那些项调整并做一些代换以使它看来像如下的形式：

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

之后，通过对那些项做出标记，就会得到关于 g_x ， a ， b 和 c 的表示式。它的工作量很大，我们并不打算那样做，而只准备找出关于动量密度 $\mathbf{g}$ 的表示式——而且是通过另一种方法来求的。

在力学中有一个重要定理，这就是：在任何场合下，每当真正存在能量（场能或任何其他类型的能量）流动时，则单位时间流经单位面积的能量，乘以 $1/c^2$ ，就等于空间内单位体积的动量。在电动力学的特殊情况下，这一定理给出了 $\mathbf{g}$ 等于 $1/c^2$ 乘以坡印亭矢量的结果：

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (27.21)$$

因此，坡印亭矢量不但会给出能流，而且只要除以 c^2 ，也就给出了动量密度。这同样的结果可从我们提出过的另一种分析方法获得，但更有意义的还是去注意这个更加普遍的结果。现在将提供若干有趣例子及论证以便使你们相信这个普遍定理是正确的。

第一个例子：假设在一个箱子里存在大量粒子——比方说每立方米中含有 N 个粒子——而它们以某个速度 $\mathbf{v}$ 运动着。现在就来考虑一个垂直于 $\mathbf{v}$ 的想象平面。每秒通过这个面单位面积的能流，等于每秒流过的粒子数 Nv 乘以每一粒子所带的能量。因每个粒子的能量为 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ，所以每秒的能流就是

$$Nv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

但每个粒子具有的动量为 $m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ，因而动量密度为

$$N \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

这恰好就是 $1/c^2$ 乘以能流——和该定理所说的相同。因此，对于一群粒子来说这定理是正确的。

这定理对于光来说也正确。我们过去在第1卷学习光学时就曾看到，当从一束光吸收能量时，会有一定动量递交给该吸收体。事实

上，在第1卷第34章中我们曾经证明，动量等于 $1/c$ 乘以所吸收的能量 [第1卷的式 (34.24)]。若令 U_0 代表每秒到达单位面积的能量，则每秒到达单位面积上的动量就是 U_0/c 。但动量以速率 c 传播，因而在该吸收体前面的动量密度 就必然是 U_0/c^2 。因此，再次表明该定理是对的。

最后，我们将提供一个论据，这论据来源于爱因斯坦对同样事情的又一次证明。假设有一火车车厢在轨道上自由滑动（假定没有摩擦阻力），这车厢具有某巨大质量 M 。车厢里的一端配有能发射出一些粒子或光（或任何其他东西，到底是哪一种东西都没有什么区别）的某种装备，然后这射出来的东西就给车厢对面一端所截住了。原来有某些能量放在车厢的一端——比如说是图27-7（a）中所标明的能量 U ——而后来它却转移到了对面的一端，如图27-7（c）所示。这能量 U 已经移动了一个等于该车厢长度的距离 L 。既然能量 U 具有质量 U/c^2 ，因而要是车厢保持不动的话，该车厢的重心就必然会移动。爱因斯坦不喜欢一物体的重心可以只凭在其内部瞎胡闹一番就能使其移动的那种想法，因而他假定通过在物体内部做任何事情来移动其重心是不可能的。但如果事实确是那样，则当我们把能量 U 从一端移至另一端时，整个车厢就应反冲一段距离 x ，如图（c）中所示的。实际上，你可以看到，车厢的总质量乘以 x 就必定等于所移动能量的质量 U/c^2 乘以 L （假定 U/c^2 比 M 要小得多）：

$$Mx = \frac{U}{c^2}L. \quad (27.22)$$

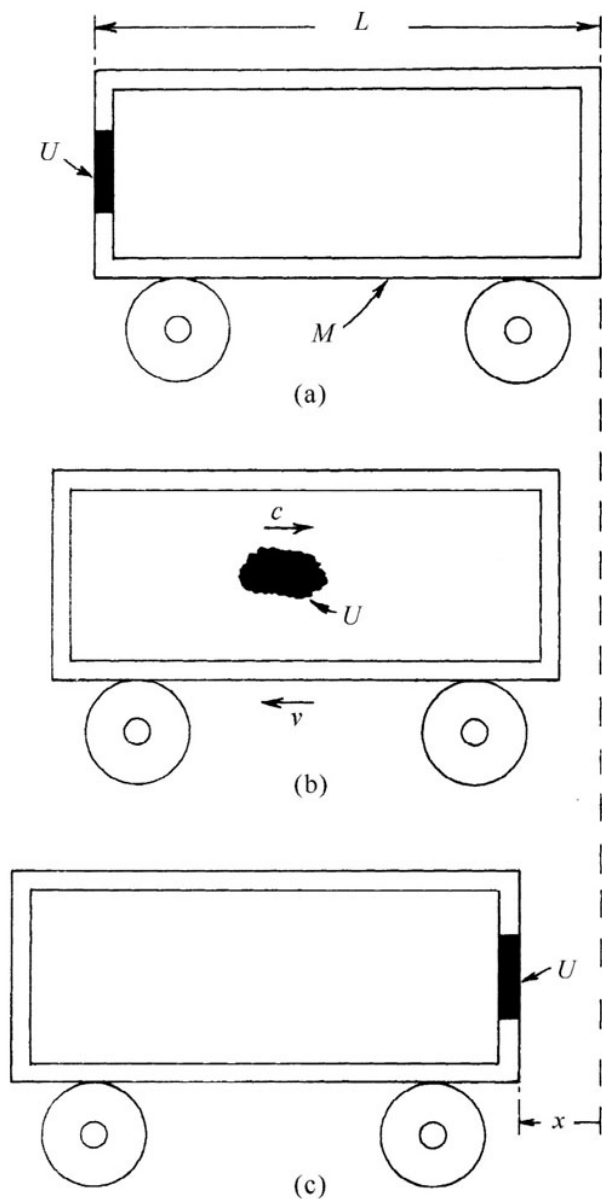


图27-7 以速率 c 运动着的能量 U 会带有动量 U/c

现在让我们来考察一下能量由一次闪光所携带的那种特殊情况（该设备也同样适用于粒子，但我们将跟随爱因斯坦，他对于光的问题感兴趣）。究竟是什么东西会引起车厢移动的呢？爱因斯坦这样议论说：当光被发射出来时一定存在反冲，即带有动量 p 的某个未知的反冲。正是这一个反冲才使车厢向后滚动的。车厢的反冲速度 v 等于这一动量除以车厢质量：

$$v = \frac{p}{M}.$$

车厢以这一速度运动，直至光的能量到达对面一端为止。于是，当它碰到时，它交还了它的动量而使车厢停住了。如果 x 很小，则车厢运动的时间约等于 L/c ，所以就有

$$x = vt = v \frac{L}{c} = \frac{p}{M} \frac{L}{c}.$$

把这个 x 值代入式(27.22)中，便得

$$p = \frac{U}{c}.$$

我们又一次得到了光的能量与动量的关系。用 c 相除则获得动量密度 $g = p/c$ ，因而又得到

$$g = \frac{U}{c^2}. \quad (27.23)$$

你可能会觉得奇怪：为什么重心定理会那么重要？也许它是错的。或许是吧，但那时我们也可能丧失角动量守恒律。假定我们的车厢沿着轨道以某一速率 v 前进，而同时我们把某些光能从车顶射向车底——比方说，从图27-8中的 A 点射至 B 点。现在来考察这系统相对 P 点的角动量。能量 U 在离开 A 点之前，它具有质量 U/c^2 和速度 v ，从

而具有角动量 mvr_A 。当它到达 B 点时，仍具有相同的质量，而倘若整个车厢的线动量不会发生变化，则它必定仍具有速度 v 。这时它相对 P 点的角动量就是 mvr_B 。这角动量将会改变，除非当光被射出时正确的反冲动量曾给予车厢——也就是说，除非光携带动量 U/c 。结果变成，角动量守恒与重心定理在相对论中是紧密相联的。因此，要是我们的重心定理不正确，则角动量守恒就被破坏了。无论如何，已经弄清楚它是一个正确的普遍定律，而在电动力学的情况下我们还能利用它来获得场的动量。

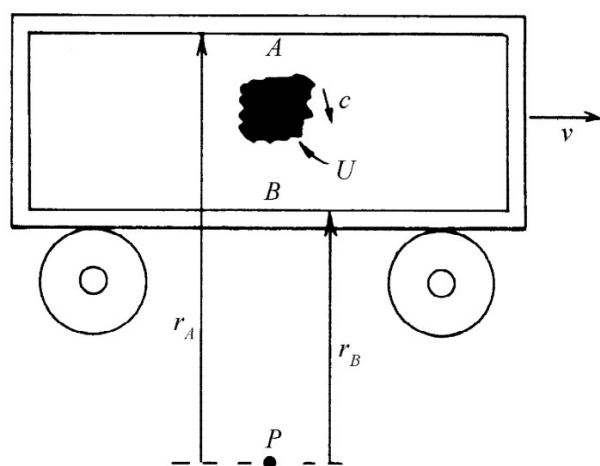


图27-8 如果环绕 P 点的角动量是守恒的，则能量 U 应带有动量 U/c

我们将进一步提及在电磁场中关于动量的两个例子。曾在§26-2中指出，当两个带电粒子在互成直角的轨道上运动时作用与反作用定律失败了。作用于两粒子上的力并不平衡，因而作用并不等于反作用，这样实物的净动量就必然正在改变，它是不守恒的。但在这样一种情况下场的动量也正在改变。如果你算出由坡印亭矢量所给出的动量，则它不是一个常数。然而，粒子动量的改变刚好被这个场的动量所抵偿，所以粒子加上场的总动量守恒。

最后，另一个例子则是如图27-6所示的具有磁铁与电荷的那种情况。我们曾由于发现有能量处处绕圆周流动而感到不快，但此刻，由于我们知道能流与动量是互成比例的，所以我们也知道在空间有环行着的动量。可是一个环行动量就意味着存在角动量，因此在场中有角动量。你是否记得，在§17-4中我们描述过的关于放在圆盘上的一个螺线管和若干个电荷的那个佯谬？似乎当电流中断时，整个盘会开始旋转。令人迷惑的是：角动量到底是从哪里来的？答案：如果你有一磁场和某些电荷，则在场中就会有某一角动量。当场建立时，它必定已经安置在那里了。而当场去掉时，这一角动量被还了回来。因此在该佯谬中的盘子就应该开始转动。这一神秘的能量环流，最初似乎觉得是那么荒谬可笑，但却是绝对必需的。确实有一个动量流，为了在整个世界中保持角动量守恒，它是必需的。

第28章 电磁质量

§28-1 点电荷场的能量

在把相对论和麦克斯韦方程结合在一起的过程中，我们完成了关于电磁理论的主要工作。当然，有某些细节我们曾经漏掉，还有一个以后将会涉及的广阔领域——电磁场与实物的相互作用。但现在却要稍微停留一下以便向你们指明，这座崇高大厦尽管在解释那么多现象方面是多么美妙和成功，但最终不得不脸朝下倒了下去。当你追随任一项物理学太远时，总会发现它将碰到某种困难。现在就要来讨论一个严重的困难——经典电磁理论的失败。你可能意识到，由于量子力学效应，使得全部经典物理学都失败了。经典力学是一种在数学上协调一致的理论，它只是与经验不符而已。然而，很有趣，电磁学的经典理论就其本身而言已经是一种不能令人满意的理论。有一些困难与麦克斯韦理论的概念联系在一起，但这困难却不是量子力学所能解决或与之直接有关的。你可能会说：“为这些困难操心也许没有什么用处，既然量子力学正在对电动力学定律进行修改，应该等修正之后再看看还有什么困难。”然而，当电动力学被结合到量子力学时，那些困难却依然存在。因此，现在来考察这些困难到底是什么并不是浪费时间。何况，这些困难还有巨大的历史价值。此外，从能够跟踪理论足够远去了解每件事——包括它的一切困难——你可能会得到某种成就感。

当把电磁理论应用于电子或其他带电粒子时，我们所谈论的困难与电磁动量和能量的概念有关。结构单一的带电粒子和电磁场的概念在有些方面是互相矛盾的。为了描述这些困难，我们从做一些能量和动量概念方面的练习开始。

首先，将计算一个带电粒子的能量。假设采取一个简单的电子模型，其中全部电荷 q 都均匀分布在一个半径为 a 的球面上，对于点电荷的特殊情况， a 可取为零。现在让我们计算电磁场中的能量。如果该电荷静止不动，就不会有磁场，则每单位体积的能量正比于电场的平方。电场的大小为 $q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ ，其能量密度即是

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

要获得总能量，就得将这个密度对全部空间积分。利用体积元 $4\pi r^2 dr$ ，我们把 $U_{\text{电}}$ 称为总能量，它为

$$U_{\text{电}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr,$$

这很容易积出。由于下限为 a 而上限为 ∞ ，因而

$$U_{\text{电}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}. \quad (28.1)$$

如果用电子电荷 q_e 来代替 q 而用符号 e^2 来代替 $q_e^2 / (4\pi\epsilon_0)$ ，则

$$U_{\text{电}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}. \quad (28.2)$$

这全都很好，直到对于一个点电荷我们令 a 趋于零——才存在巨大困难。由于场的能量密度与离中心距离的四次幂成反比，所以它的体积分为无限大。在一个点电荷的周围的场中竟有无限大的能量。

一个无限大能量有什么不妥之处呢？如果能量不能跑出去，而必定永远保持在那里，则一个无限大能量是否会带来任何真正的困难？当然，出现无限大的量可能会使人烦躁不安，但真正要紧的却是究竟有无任何可观测得到的物理效应。为回答这一问题，我们应当转到能量以外的其他事情上去。假定我们问起当移动电荷时能量怎样变化。那时，如果变化为无限大，则我们便将陷入困难之中了。

§28-2 运动电荷场的动量

设想一个电子以匀速通过空间，暂时假定这速度比光速要慢。与这个运动电子相联系的是有一动量——即使电子在带电之前没有质量——由电磁场中的动量引起。我们能够证明，这个场动量是在电荷速度 $\mathbf{v}$ 的方向上，而且对于小的速度来说它与 $\mathbf{v}$ 成正比。在与电荷中心的距离为 r 、与运动路线成角度 θ 的 P 点处（参见图28-1）电场是径向的，而且正如我们业已知道的那样，磁场为 $\mathbf{v} \times \mathbf{E} / c^2$ 。根据式（27.21）和（27.15），动量密度为

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

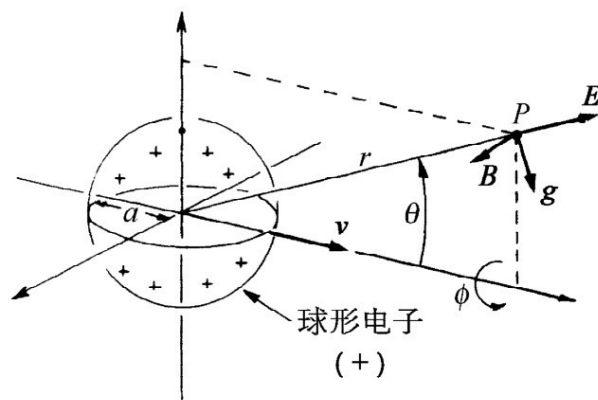


图28-1 一个正电子的场 E , B 及其动量密度 g 。对于负电子, E 和 B 都倒转方向, 但 g 的方向仍不变

它斜对着运动路线, 如图中所示, 并具有大小

$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin \theta.$$

这些场对于运动路线是对称的, 因而当我们对整个空间积分时, 那些横向分量加起来就会等于零, 结果给出一个平行于 $\mathbf{v}$ 的合动量。在这个方向上 $\mathbf{g}$ 的分量为 $g \sin \theta$, 我们必须对它在全部空间进行积分。取一个其平面垂直于 $\mathbf{v}$ 的圆环作为体积元, 如图28-2所示。它的体积为 $2\pi r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$, 于是总动量为

$$p = \int \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr.$$

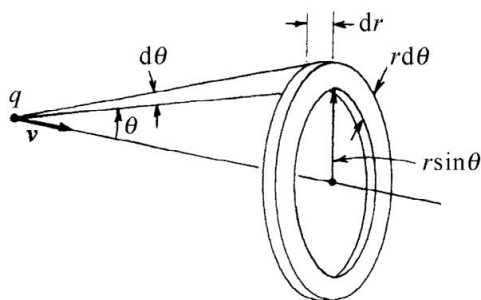


图28-2 用来计算场动量的体积元 $2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr$

由于 E 与 θ 无关（对于 $v \ll c$ ），所以我们可立即对 θ 积分，这个积分为

$$\int \sin^3\theta d\theta = -\int (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}.$$

由于 θ 积分的上下限分别为0和 π ，因而这个 θ 积分只给出一个因子 $4/3$ ，结果

$$p = \frac{8\pi}{3} \frac{\epsilon_0 v}{c^2} \int E^2 r^2 dr,$$

这个积分（对于 $v \ll c$ ）就是刚才在求能量时算出过的，它为 $q^2/(16\pi^2\epsilon_0^2 a)$ ，因而

$$p = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{ac^2}$$

或

$$p = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} v. \quad (28.3)$$

场中的动量——电磁动量——与 $\mathbf{v}$ 成正比。这正是我们应有的粒子动量，粒子的质量就等于 $\mathbf{v}$ 前面的系数。因此，我们可把这一系数叫作 电磁质量 $m_{\text{电磁}}$ ，并把它写成

$$m_{\text{电磁}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.4)$$

§28-3 电磁质量

质量是从哪里来的呢？在我们的力学定律中就已经假定每一物体都带有一种我们称之为质量的东西——这也意味着带有一个正比于其速度的动量。现在发现，一个带电粒子携带正比于它速度的动量，这是可以理解的。事实上，也许质量不过是这种电动力学效应。质量的起源迄今还未得到解释。最后在电动力学理论中就有极好的机会来理解这一种我们以前从未理解过的东西。意外地——更确切地说，是从麦克斯韦和坡印亭那里——得出结果，即任一带电粒子正是由于电磁影响才具有正比于其速度的动量。

让我们放保守一些而暂且说，存在两种质量——物体的总动量可以是机械动量与电磁动量两者之和。机械动量等于“机械”质量 $m_{\text{机械}}$ 乘以 $\mathbf{v}$ 。在一些实验中，通过观察一个粒子有多少动量或观察它在轨道各处如何旋转来测量其质量，我们正在测量的是其总质量。普遍地说，动量等于总质量（ $m_{\text{机械}} + m_{\text{电磁}}$ ）乘速度。因此，凡观测到的质量都可能含有两部分（或可能有更多部分，若我们还包括其他类型的场的话）：机械部分加上电磁部分。我们明确知道有一个电磁部分，

而且对于它已经有一个公式了。但却有一个令人激动的可能性，即机械部分根本就不存在——质量全都是电磁性质的。

让我们来看看，要是电子不具有机械质量的话必须有多大。可以通过令式（28.4）中的电磁质量等于所观测到的电子质量 m_e 而找到。

我们求得

$$a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (28.5)$$

而量

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (28.6)$$

称为“经典电子半径”，它的数值为 2.82×10^{-13} cm，约等于一个原子直径的十万分之一。

为什么要把 r_0 称为电子半径，而不是 a 呢？因为我们也可用另外想象的电荷分布——电荷也许会均匀分布在一个球体中，或者也许会像一个模糊的球体那样渗涂出去——来做同样的计算。对于任一特殊假定，因子 $2/3$ 会改变成某个其他的分数。例如，对于均匀分布在一个球体内的电荷，这 $2/3$ 就得由 $4/5$ 代替。与其去争辩哪一种分布是对的，倒不如决定把 r_0 定义为一种“标称”半径。然后，不同的理论就可以提供其所喜爱的系数。

让我们追踪一下关于质量的电磁理论。上面的计算是针对 $v \ll c$ 的，如果进入高速度，又将发生什么情况呢？早期的尝试曾导致某些混乱，但洛伦兹却认识到在高速情况带电球体会收缩成一个椭球，而

场则会按照我们在第26章中对于相对论性情况所导出的式（26.6）和（26.7）改变。如果你对那种情况下的 $\mathbf{p}$ 进行积分，则会发现，对于任意速度 $\mathbf{v}$ ，动量被改变一个因子 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ：

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (28.7)$$

换句话说，电磁质量与 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 成反比地随速度增加——是一项在相对论问世之前就已做出的发现。

为了确定粒子质量中有多少质量是机械性质的以及有多少是电性质的，早期曾提出了一些实验以测量一个粒子的观测质量如何会随速度而改变。当时人们相信，那电的部分才会随速度变化，而机械部分则不会。可是，当那些实验正在进行之际，理论家们也仍在继续工作。不久之后相对论发展起来，它提出不管质量来源于什么，全都应当随 $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 变化。式（28.7）就是质量与速度有关理论的起源。

让我们回到曾导致式（28.2）的有关场能的计算。根据相对论，能量 U 将具有质量 U/c^2 ，于是式（28.2）说，电子的场应该具有质量

$$m'_{\text{电}} = \frac{U_{\text{电}}}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.8)$$

这不同于式（28.4）中的电磁质量 $m_{\text{电磁}}$ 。事实上，若我们只要结合（28.2）和（28.4）两式，便可写出

$$U_{\text{电}} = \frac{3}{4} m_{\text{电磁}} c^2.$$

这个公式在相对论之前就被发现，而当爱因斯坦及其他人开始认识到 $U=mc^2$ 必定始终成立时，就已经存在巨大混乱。

§28-4 电子作用于其自身上的力

关于电磁质量的两个公式间的差异是特别令人为难的，因为我们已经小心地证明过电动力学理论与相对性原理是互相一致的。但相对论却毫无疑问地含有动量必定等于能量乘以 v/c^2 的意思。因此，我们就陷于某种困难之中，必然是犯了错误。虽然我们在计算中从未犯过代数方面的失误，但是可能遗漏了某种东西。

在推导有关能量和动量的方程时，我们假定过一些守恒律。也设想过把所有的力都考虑进去，把任何由“非电”机制所做的功与所带的动量也都包括进去。现在如果有一个带电球体，且电力全都是斥力，则电子会趋于飞散状态。由于这个系统具有不稳定的力，所以我们可能在与能量和动量有关的规律中犯了各种类型的错误。为了得到一个协调一致的图像，就必须想象有某种东西把电子结合在一起。那些电荷必须由某种橡胶带——某种不使电荷飞散的东西——束缚在一个球体之内。最早曾由庞加莱指出，这些橡胶带或任何能把电子结合在一起的东西必须包括在能量和动量的计算之内。为此缘故，这一附加的非电性力才被赐以一个更优雅的名字：“庞加莱应力”。如果这些附加力也包括在计算之内，则用两种办法计算出来的质量也将有所改变（在某种意义上改变程度取决于一些详细假定），而结果就会与相对论一致。也就是说，从动量计算得来的质量与从能量计算得来的质量相同。然而，它们两者都各含有两种贡献：电磁质量和来自庞加莱应

力方面的贡献。只有当这两方面相加起来时才能获得协调一致的理论。

因此，不可能按照我们所希望的方式得出所有质量都是电磁性质量的结论。如果除了电动力学之外别无其他的话，那它就不是一个正规的理论。必须补充其他某种东西。不管你称作什么——“橡胶带”或是“庞加莱应力”还是其他什么——要构成这种协调一致的理论，在自然界中就必须存在其他的力。

很明显，当我们不得不把一些力放进电子内部时，整个概念的美妙之处就开始消失。事情变得十分复杂。你可能会问：那些应力有多强呢？电子怎样摇动呢？它到底会不会振动？它的内部特性如何？如此等等。也许有可能电子的确具有某些复杂的内部特性。假如按照这些方向创立一个电子理论，就可能预言一些像振动模式那样的奇特性质，而这些性质却从未明显地被观测到。我们所以说“明显地”，是因为已在自然界中观测到大量仍未能形成观念的东西。可能有朝一日会发现，今天我们所未能理解的东西之一（比如 μ 介子）实际上能够被解释为庞加莱应力的振动。这似乎不合理，但没有任何人能说得准。有许多关于基本粒子的事情我们还不了解。不管怎样，这一理论所包含的复杂结构是不受欢迎的，但企图用电磁学理论来解释全部质量的尝试——至少按我们所描述的那种办法——则已走进了死胡同。

我们愿意稍微多想一想，为什么当场里的动量与速度成正比时我们就说已有了质量。这很容易！质量就是在动量与速度之间的那个系数嘛。但我们也可按另一种方式来看待质量：如果为了加速一个粒子你得施力，那么它就具有质量。因此，如果我们稍微仔细地考察力是从哪里来的，则可能对我们的理解有所帮助。你怎么会知道必须有一个力呢？因为我们已证明了场的动量守恒定律。如果你有一个带电粒

子并推动它经历一小段时间，那么在电磁场中将有一些动量。动量必定已被以某种方式注入场中。因此就必然会有某一个力推动电子而使其运动——一个除了需要克服机械惯性之外的附加力，即一个由于电磁相互作用引起的力。同时必然有一个反作用于“推动者”之上的相应的力。但究竟这个力是从哪里来的呢？

图景大抵就像是这样。我们可以把电子想象成一个带电球体，当它静止时，每一部分电荷都将与其他每一部分互相排斥，但力全部都成对地抵消掉，因而没有任何净力存在〔见图28-3（a）〕。不过，当电子正在加速时，由于事实上电磁影响从一点传播至另一点需要时间，所以那些力就不再平衡了。例如，在图28-3（b）中由 β 那一部分作用于 α 那一部分的力取决于在某一较早时刻的位置，如图中所示。力的大小和方向都取决于电荷的运动。如果电荷正在加速，则作用于电子各不同部分的力也许会如图28-3（c）所示的那样。当把所有这些力都加起来时，它们并不互相抵消。对于均匀速度来说它们就会抵消，尽管初看起来似乎甚至对于匀速运动这推迟作用也会给出一个非平衡力。但结果是，除非电子正在加速，否则就不存在净力。在加速的同时，如果我们考察电子的各部分之间的力，则作用与反作用不会严格相等，从而电子施于本身一个力，该力试图阻碍其加速。它被自身所阻碍。

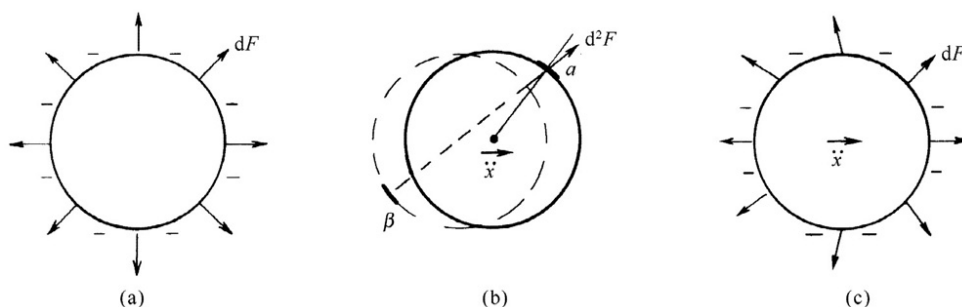


图28-3 由于推迟作用，所以作用于一个加速电子上的自力不会等于零（ dF 指作用于面元 da 上的力； $d^2 F$ 则指由在面元 da_β 上的电荷作用于面元 da_α 上的力）

要算出这个自作用力是可能的，但不那么容易，可是在这里我们还不打算从事这种复杂的计算。我们将告诉你们关于一个相对不那么复杂的一维——比方说沿 x 方向——运动的那种特殊情况的结果。这时，自作用力就可以写成一个级数。级数的首项依赖于加速度 $\ddot{x}$ ，第二项依赖于 $\ddot{\ddot{x}}$ ，等等^[1]。结果得出

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\ddot{x}} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{\ddot{\ddot{x}}} + \dots, \quad (28.9)$$

式中 α 和 γ 都是数量级为1的数字系数。 $\ddot{x}$ 项的系数 α 取决于所假定的电荷分布，如果电荷均匀分布于一个球面上，则 $\alpha=2/3$ 。因此就有一项正比于加速度，它与电子的半径 a 成反比，而与我们在式(28.4)中所获得的关于 $m_{\text{电磁}}$ 的数值完全相同。如果所选的电荷分布不同，因而 α 改变，则式(28.4)中的分数 $2/3$ 也会按相同的方式改变。含 $\ddot{\ddot{x}}$ 项与所假定的半径 a 无关，因而也与所假定的电荷分布无关，它的系数始终等于 $2/3$ 。再下一项与半径 a 成正比，而其系数 γ 则取决于电荷的分布情况。你会注意到，如果我们让电子半径 a 趋于零，则末项（以及一切更高次项）将趋于零；第二项保持不变；但那首项——电磁质量——趋于无限大。而且，我们能够看到，这无限大是由于电子的一部分作用于另一部分上的力引起的——由于我们承认了“点”电子可能会作用于其自身这件也许是蠢事所引起的。

§28-5 改进麦克斯韦理论的尝试

现在我们愿意来讨论也许可以将麦克斯韦的电动力学理论做某种改进，以便使得电子作为一个简单点电荷的那种概念能够维持得住。为此曾做过许多种尝试，而其中有些理论甚至能将事情安排得使电子质量全都是电磁性质的。但所有这些理论如今却都已销声匿迹了。要来讨论曾被提出来的某些可能性——借以看看人类智力中的一些奋斗历程——仍是有意義的。

我们是通过谈论一个电荷与另一个电荷之间的相互作用而着手进行我们的电学理论的。然后又对这些相互作用的电荷建立一种理论并最后得出场论。我们对此竟如此相信，以致承认它所告诉的有关电子中的一部分对另一部分的作用力。也许整个困难就在于电子根本不会对其本身进行作用，也许从分开电子的相互作用过渡到一个电子与其本身的作用，这概念外推得太远了。因此在有些提出的理论中，电子作用于自身的可能性给排除掉了。于是，就不再存在由于自作用而引起的那种无限大。并且，也不再有任何与粒子联系着的电磁质量。所有质量都回到机械性质上面，但在这种理论中仍有一些新的困难。

我们必须立即说明，这样的理论要求对电磁场概念加以修改。你会记得，我们开始时就讲，作用于任何位置的粒子上的力仅由两个量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 来确定。如果我们放弃了“自作用力”，则这一说法可能不再正确，因为假定某处有一电子，它所受的力并非由总 $\mathbf{E}$ 和总 $\mathbf{B}$ 给出，而只是由别的 电荷所产生的那些部分 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 给出。因此当计算一个电荷受力作用的情况时，我们总得记住， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 中有多少来自那个电荷，而又有多少来自其他电荷。这使得理论烦琐得多，但却消除了那个无限大的困难。

因此，如果我们乐意，便可以说不存在诸如电子作用于其本身这种事情，因而抛弃了式 (28.9) 中全部的力。然而这么一来，我们却

把小孩连同洗澡盆里的水一起倒掉了！因为式（28.9）中的第二项，即含 $\ddot{x}$ 的项，仍然是需要的。这个力处理某种事情十分确切。如果你把它丢掉，你又将陷入困难之中。当我们加速电荷时，它会辐射出电磁波，从而损耗了能量。因此，加速电荷，比加速相等质量的中性物体，必然需要更大的力，否则能量不会守恒。我们对加速粒子所做的功率必须等于每秒内由于辐射而损耗的能量。以前就曾谈论过这种效应——它被称为辐射阻尼。不过我们仍需回答这样一个问题：必须用做功来抵抗的那个附加力究竟来自何方？当一巨大天线正在辐射时，力来自天线中的一部分电流对另一部分电流的影响。对于正在向真空空间辐射的单个的加速电子来说，力似乎只能从一个地方来——即从电子的一部分对另一部分的作用而来。

我们回到第1卷第32章中后发现一个振动电荷辐射能量的功率为：

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\ddot{x})^2}{c^3}. \quad (28.10)$$

让我们看看为抵抗式（28.9）的自身力而对电子所做的功率来说，能够得到些什么。功率等于力乘速度，或 $F \dot{x}$ ：

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} \dot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} \dot{x} + \dots \quad (28.11)$$

第一项与 $d\dot{x}^2/dt$ 成正比，因而恰好对应于与电磁质量联系在一起的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的变化率。第二项可能对应于式（28.10）中的辐射功率，可是它仍有所不同。差异来源于这样的事实，即式（28.11）中的那一项是普遍正确的，而式（28.10）却只对振动电荷才正确。我们能够证明：如果电荷运动是周期性的，则这两者等同。为此，将式（28.11）中的第二项重新写成

$$-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt}(\dot{x} \ddot{x}) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2,$$

那不过是一种代数变换。如果电子运动是周期性的，则 $\ddot{x}$ 这个量会周期性地回到相同的值，因此若对它的时间微商取平均便会得到零。然而，第二项却总是正的（它是一个平方），因而它的平均值也是正的。这一项给出了所做的净功，并恰好等于式（28.10）。

为了使在辐射系统中的能量守恒，那个由 $\ddot{x}$ 所表示的自身的力项是必需的，因而不能把它丢掉。事实上，洛伦兹所取得的成功之一就是在证明存在这种力并且它来自电子对其本身的作用。我们必须相信电子对其本身作用的概念，并需要含 $\ddot{x}$ 的项。问题在于如何才能获得该项，而又不至于同时得到式（28.9）中的第一项，那是一切困难之源。我们不懂得应该怎么办才好。你看，经典电子理论已经把它自身推进了困境。

为了解决事情已有了修改定律的若干种其他尝试。由玻恩和因费尔德建议的一种办法，是用一种复杂的方式来改变麦克斯韦方程组，使其不再是线性的。这样，电磁能量和动量就可以表现出有限大，但他们所倡议的这些规律还预言了一些从未被观测到的现象。他们的理论也遭遇到另一种我们将在下面谈到的、为避免上述毛病所做的一切尝试所产生的共同的困难。

下述独特的可能性是由狄拉克提出的。他说：让我们认为电子通过式（28.9）中的第二项而不是第一项对本身作用。然后他又有一种能消除其中一项而不消除另一项的精巧计划。他说，看！当只取麦克斯韦方程组的推迟波解时我们做过一种特殊的假设，要是代之以取那些超前波，就会得到一些别的东西。关于自作用力的公式应是

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{x} + \dots \quad (28.12)$$

除了级数中的第二项和某些更高次项的符号外，这个式子几乎与式（28.9）一样〔从推迟波变成超前波不过改变了推迟的符号，而不难看出，这相当于处处都改变 t 的符号。对于式（28.9）的唯一效果就是改变所有奇数次的时间微商的符号〕。所以，狄拉克说，让我们建立一个新的法则，即电子是通过它所产生的推迟与超前两种场的差值之一半而作用于其本身的。这样，式（28.9）与（28.11）之差除以2，便是

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \text{更高次项}.$$

在所有更高次的项中，半径 a 仿佛是分子中的某个正次幂。因此，当我们趋向点电荷的极限时，就只会得到那么一项——恰恰是所需要的。就这样，狄拉克得到了辐射阻力而不是惯性力。电磁质量不见了，而经典理论也得救了——可是却付出了关于自作用力的任意假定的那种代价。

狄拉克的附加假设的任意性至少部分地被惠勒和费曼所排除，他们提出了一个更加奇怪的理论。他们建议点电荷仅与其他的电荷相互作用，但这种相互作用一半是通过超前波而另一半是通过推迟波产生的。最令人惊奇的是，在大多数场合下你将不会看到超前波的任何效应，但它们却的确具有刚好产生辐射作用力的效应。该辐射阻尼并不是由于电子对本身的作用，而是由于下述的特殊效应。当一电子在时刻 t 被加速时，它将在较后时刻 $t' = t + r/c$ （其中 r 为至其他电荷的距离）摇动世界上所有其他电荷，这是由于推迟波的作用。但此时别的电荷又通过它们的超前波从后面作用于原来那个电子上，这些波将在

等于 t' 减去 r/c 的 t'' 时刻、当然也就恰恰在 t 时刻上到达（它们也用其推迟波从后面作用，但那不过是对应于正常的“反射”波罢了）。超前波与推迟波的组合意味着，当一个振动电荷正在被加速时它会感觉到来自所有“将要吸收”其辐射波的那些电荷的力。你看在试图获得关于电子的理论时人们已陷入多么严重的困难之中！

现在要来描述另一种理论，以表明当人们碰到麻烦时会想些什么。这是由博普提出的对电动力学定律的另一种修改。你会认识到，一旦你决定要来修改电动力学方程组时，你可以在任一个想要下手的地方开始。可以改变关于电子的力的定律，或者改变麦克斯韦方程组（正如我们在已描述过的例子中所见到的），或者也可在其他某个地方做出改变。一种可能性是去改变那些用电荷和电流给出的势的公式。我们的这些公式之一已经表明在某一点的势是由较早时刻在任何其他点上的电流（或电荷）密度所给出的。应用有关势的四维矢量符号表示法，可写成

$$A_{\mu}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_{\mu}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (28.13)$$

博普的美妙而又简单的想法是：也许困难出在这个积分里的因子 $1/r$ 上。假设我们从此开始，即只是通过假定在某点上的势取决于在任何其他点上的电荷密度作为该两点间距离的某个函数，比如说 $f(r_{12})$ 吧。于是，在点（1）处的总势就将由 j_{μ} 乘以这一函数而对全部空间的积分所给出：

$$A_{\mu}(1, t) = \int j_{\mu}(2, t - r_{12}/c) f(r_{12}) dV_2.$$

这就是一切。既没有微分方程，也没有其他的東西。噢，还有一件事情。我们也要求这结果应该是相对论性不变的。因此所谓“距离”，我们应取在时空中两点间的不变“距离”。这一距离的平方（在一个无关紧要的符号变化范围之内）为

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (28.14)$$

因此，对于一个相对论性不变的理论来说，我们就应当采取 s_{12} 的大小的某一函数，或与此相同的，即采取 s_{12}^2 的某一函数。因此博普理论就是

$$A_\mu(1, t_1) = \int j_\mu(2, t_2) F(s_{12}^2) dV_2 dt_2 \quad (28.15)$$

（当然，这积分就应该是对整个四维体积 $dt_2 dx_2 dy_2 dz_2$ 进行）。

剩下的一切就是要选取一个适当函数作为 F 。对于 F 来说，我们仅仅假定这么一点——即除了自变数接近于零处都十分微小——使得 F 的曲线像图28-4所示的那样。它是一个狭窄钉形，具有一个集中于 $s^2=0$ 处的有限面积，我们可以说它的宽度约等于 a^2 。不妨粗略地这样说，当我们计算点（1）的势时，只有当 $s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2$ 是在零点的 $\pm a^2$ 之内时那些点（2）才能产生一些可观的效应。我们可以指出，这点只有对于

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 \approx \pm a^2 \quad (28.16)$$

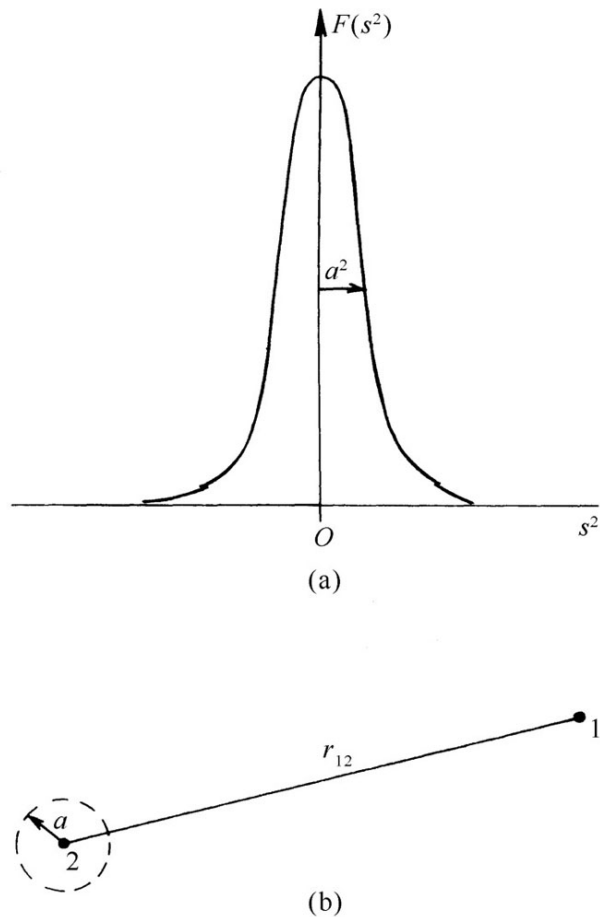


图28-4 用于博普的非局域理论中的函数 $F(s^2)$

这种情况 F 才是重要的。你如果乐意，还可以使它更为数学化些，但那是我们的想法。

现在假定 a 比起像电动机、发电机等普通器物的大小来要小得多，以致在正常问题中总是 $r_{12} \gg a$ 。这样式(28.16)表明，只有在 $t_1 - t_2$ 处于下列的小范围内那些电荷才会对式(28.15)的积分有所贡献：

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} \approx r_{12} \sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}.$$

由于 $a^2/r_{12}^2 \ll 1$ ，所以平方根可近似为 $1 \pm a^2/(2r_{12}^2)$ ，因而

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c} \left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2} \right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$

这有什么含义呢？这一结果表明，在 A_μ 的积分中只有与我们要计算的势所处的时刻 t_1 相差为推迟时间 r_{12}/c ——带有一个只要符合 $r_{12} \gg a$ 便可以忽略的改正项——的那些时刻 t_2 才是重要的。换句话说，博普的这个理论在它给出推迟波的效应这一意义上来说是接近麦克斯韦理论的——只要我们远离任何特定的电荷就行。

事实上，我们能够约略地看出式 (28.15) 的积分将给出什么结果。如果首先对于 t_2 从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 进行积分——保持 r_{12} 固定不变——那么 s_{12}^2 也将从 $-\infty$ 进至 $+\infty$ 。该积分将全部来自以 $t_1 - r_{12}/c$ 为中心、而在狭小宽度 $\Delta t_2 = 2a^2/(2r_{12}c)$ 内的那些 t_2 的贡献。设函数 $F(s^2)$ 在 $s^2=0$ 处具有值 K ，则对于 t_2 的积分近似为 $Kj_\mu \Delta t_2$ ，或

$$\frac{Ka^2}{c} \frac{j_\mu}{r_{12}}.$$

当然，还应该取 $t_2 = t_1 - r_{12}/c$ 时的 j_μ 值，因而式 (28.15) 就变成

$$A_\mu(1, t_1) = \frac{Ka^2}{c} \int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2.$$

如果我们挑选 $K=1/4\pi\epsilon_0 ca^2$ ，则正确地回到了麦克斯韦方程组的推迟势解——自动地包含了 $1/r$ 的依存关系！而这全都来自一个简单的主张，即在时空中某一点的势取决于在时空中所有其他各点的电流密度，不过带有两点间四维距离的某个狭窄函数的权重因子。这一理论再次预言电子的电磁质量为有限大，而能量与质量之间也具有正确的相对论关系。它们必然如此，因为这理论从一开始就是相对论不变的，而一切似乎都是正确的。

然而这一理论，以及我们所曾描述过的所有其他各种理论，都存在一个基本缺点。我们知道的一切粒子都遵循量子力学规律，因而对电动力学的量子力学修正是必须做的。光的行为像光子。它并非百分之百地像麦克斯韦理论所描述的那样。因此，电动力学理论就必须改变。我们已经提出过，为了修正经典理论而如此艰苦地工作也许是白费时间，因为结果可能是：在量子电动力学中那些困难将消失或可以按照其他某种方式得到解决。可是，这些困难在量子电动力学中却也未被消除。人们之所以花那么多精力试图解决这些经典困难，原因之一就是希望假如他们能够先解决这些经典困难，然后才去做量子力学方面的修正，则一切都可能被搞清楚。但在做了量子力学的修正之后麦克斯韦方程组仍然存在困难。

量子效应确会造成某种变化——有关质量的公式被修改了，而普朗克常量出现了——但答案仍然出现无限大，除非你设法截止积分——正如我们过去在 $r=a$ 处不得不终止经典积分那样。而答案就取决于你怎样去截断那些积分。可惜我们在这里不能向你们证明这些困难实际上是基本相同的，因为我们对于量子力学理论迄今掌握得那么少，而对于量子电动力学甚至更少。所以你就必须仅仅相信我们的

话，即麦克斯韦电动力学的量子化理论对于一个点电子来说会给出无限大的质量。

然而，事实证明，迄今从未有人在从任何一个已经修改过的理论造成一种自洽的量子理论方面取得过成功。玻恩和因费尔德的想法从没有满意地转变成量子理论。狄拉克的或惠勒和费曼的关于超前和推迟波的那些理论也从未被转变成满意的量子理论。博普的理论同样也未曾被转变成令人满意的量子理论。所以今天，对这一问题还没有已知的解答。我们还不懂得如何去形成对电子或对任一个点电荷不会产生出无限大自能的一种协调一致的理论——包括量子力学。而在同时，也没有描述一个非点电荷的令人满意的理论。这是一个还未得到解决的问题。

当你决定仓促地去做出一个理论、其中电子对其本身的作用完全被消除以致电磁质量不再具有任何意义、然后建造量子理论时，那你就应该被警告说，你一定会陷于困难之中。有明确的实验证据表明，电磁惯性是存在的——有证据表明，带电粒子的某些质量的确起源于电磁性质。

在较古老的书本中往往会说，由于大自然显然不会向我们提供两个粒子——一个是中性的而另一个是带电的，其他方面则全都相同——我们就将永远不能够说出有多少质量是属于电磁的而有多少质量是属于机械的。但结果弄清楚，大自然已经足够仁慈来供给我们恰恰就是这样的物体，以致通过比较带电粒子的观测质量与中性粒子的观测质量，就能够道出是否有电磁质量。例如，在自然界中存在中子和质子，它们之间具有巨大的相互作用力——核力——其来源还不清楚。然而，正如我们已经描述过的，核力具有一种引人注目的性质。就核力方面来说，中子与质子完全相同。就我们所能说的，中子与中

子、中子与质子、质子与质子间的核力全都相同，只有那小小的电磁力才是不同的。从电方面说，质子与中子间的差别有如白天和黑夜，这恰好就是我们所需要的。我们拥有两种粒子，从强相互作用的观点看是全同的，但从电方面看则是不同的。而它们在质量上存在一个小差别。质子与中子间的质量差别——用兆电子伏的单位来表示静能 mc^2 之差——约为1.3 MeV，约等于电子质量的2.6倍。于是经典理论会预言它们具有一个约等于经典电子半径的1/3至1/2、或约为 10^{-13} cm的半径。当然，人们实际上应该应用量子理论，但依靠某种奇怪的偶然性，所有的常数—— 2π 和 $\hbar$ 等等——一起使得量子理论给出与经典理论近似相同的半径。唯一的毛病是符号 错了！中子比质子还要重。

大自然还提供几种别的粒子对——或三重态——除了它们的电荷之外其他各方面的表现都完全相同。它们通过所谓核力的“强”相互作用与质子和中子发生相互作用。在这种相互作用中，给定种类的粒子——比如说 π 介子——除了它们的电荷之外在每一方面的行为都像一个物体。表28-1上给出这些粒子的一张清单，包括对它们测定的质量。那些带电的 π 介子——无论正的或负的——都具有139.6 MeV的质量，但中性 π 介子较轻为4.6 MeV。我们相信，这一质量差是电磁性质的，它可能相当于一个半径为3至 4×10^{-14} cm的粒子。你将从表上看到其他粒子的质量差往往一般大小相同。

表28-1 粒子质量

粒 子	电荷(电子电荷单位)	质量(MeV)	Δm^* (MeV)
n (中子)	0	939.5	
p (质子)	+1	938.2	-1.3
π (π 介子)	0	135.0	
	± 1	139.6	+4.6
K (K 介子)	0	497.8	
	± 1	493.9	-3.9
Σ (Σ 超子)	0	1191.5	
	+1	1189.4	-2.1
	-1	1196.0	+4.5

* $\Delta m = (\text{带电粒子的质量}) - (\text{中性粒子的质量})$ 。

现在这些粒子的大小是可以由其他方法、诸如由在高能碰撞中所表现出来的直径来测定的。因此，这电磁质量似乎一般都与电磁理论相符，只要在场能的计算中在用其他方法得到的相同半径处截止积分。这就是我们为什么要相信这些差值确实代表了电磁质量的原因。

你无疑会对表中那些质量差的不同符号感到担心。弄清楚为什么带电粒子比中性粒子较重挺容易，但像质子和中子那样的粒子，测量出来的质量差倒表现出相反的符号，那又是怎么回事呢？噢，结果是，这些粒子较为复杂，因而对于它们电磁质量的计算就一定要更精细些。例如，尽管中子没有净电荷，但在其内部确有一种电荷分布——只是其净电荷等于零。事实上，我们相信中子至少有时看来像一个被负 π 介子“云”所包围着的质子，如图28-5所示。尽管由于总电荷等于零，中子表现出“中性”，但它仍然具有电磁能量（例如，它具有磁矩），因此，若没有其内部结构的详尽理论，就不容易讲出电磁质量差值的符号来。

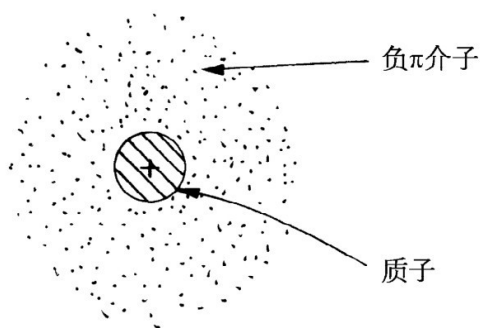


图28-5 有时，中子可能作为一个由一负 π 介子包围着的质子而存在

我们在这里只希望强调下述几点：（1）电磁理论预言有一种电磁质量存在，但它这样做时也会落到嘴啃泥，因为它不会产生一个协调一致的理论——而对于量子修正也是如此；（2）关于电磁质量的存在

是有实验依据的；而（3）所有这些质量都大体上与电子的质量相同。因此，我们又回到了洛伦兹的原来想法——也许全部电子质量纯粹是电磁性质的，也许整个0.511 MeV都起源于电动力学。究竟是，还是否呢？由于我们还未得到一套理论，所以就不可能说出什么来了。

必须提起最令人烦恼的另一信息。在世界上还有一种叫作 μ 介子的粒子，迄今我们所能说的除了质量外，它和电子没有一点区别。它每一方面的表现都很像电子：它能同中微子、电磁场发生相互作用，但就是没有核力。它的行为丝毫不异于电子——至少，没有什么事情不能被理解为仅由于它的较高质量（206.77倍电子质量）的后果。因此，每当有人最后获得关于电子质量的解释时，他将对 μ 介子从何处得到它的质量感到困惑。为什么呢？因为无论电子干什么， μ 介子总是同样地干什么——所以质量理应表现相同。有人坚定地相信这么一个观念，即 μ 介子与电子是同一种粒子，而在有关质量的最后理论中，对质量的公式将是一个具有两个根的二次方程——每种粒子一个根。也有一些人建议，该公式将是一个具有无限多个根的超越方程，而他们正在猜测：在这个系列中其他粒子的质量应该是什么，以及为什么这些粒子还未曾被发现。

§28-6 核力场

我们愿意对那一部分非电磁性质的核（粒）子质量进一步做某些评述。这另一大部分质量究竟从哪里来的呢？除了电动力以外还有别的力——像核力——它们也有本身的场的理论，尽管没有人知道现行的理论是否正确。这些理论也预言对核粒子提供与电磁质量相似的质量项的场能，我们可以把它称为“ π 介子场质量”。它大概会十分巨大，

因为那些力非常强，而这可能就是重粒子的质量起源。但有关介子场的理论目前还处于最初步的状态。即使利用发展得最完善的电磁理论，我们仍然发现在解释电子质量时难以获得成功。至于对介子理论，我们就像击球手在棒球场上三击不中而退下场的情况。

由于同电动力学存在着有趣联系，我们将花一点时间来略述介子理论。在电动力学中，场可以用满足下列方程的一个四维矢量来描述：

$$\square^2 A_\mu = \text{源}.$$

现在我们已经知道，一部分场可以被辐射出去，因而可以离开源而存在。这部分场就是光的光子，而它们是由一个无源的微分方程描述的：

$$\square^2 A_\mu = 0.$$

人们曾经议论说，核力场也应有它自己的“光子”——它们大概会是 π 介子——而且它们应该由一个相似的微分方程来描述（由于人类脑子的弱点，我们不能想出某些真正新的东西，因而才通过与已知的东西的类比来进行论证）。因此，介子方程式也许就是

$$\square^2 \phi = 0,$$

其中 ϕ 可能是一个不同的四维矢量或也许是一个标量。结果证明 π 介子没有偏振，所以 ϕ 应为标量。如果采用这一简单方程 $\square^2 \phi = 0$ ，则介子场应该随着与源间的距离按 $1/r^2$ 变化，正如电场那样。可是我们知道，核力具有短得多的作用距离，因而该简单方程式就不适用。有一

种办法能够使事情改变而又不会破坏相对论不变性：我们可以对达朗贝尔算符加上或减去一个常数乘以 ϕ 。因此汤川秀树就曾建议，核力场的自由量子或许遵循方程：

$$\square^2 \phi - \mu^2 \phi = 0, \quad (28.17)$$

式中 μ^2 是一常数——也就是一个不变的标量（由于 $\square^2$ 是四维空时的一个标量微分算符，所以如果我们对之加上另一个标量，它的不变性仍然成立）。

让我们来看看，当情况不随时间变化时式（28.17）会给出一个怎么样的核力。我们希望有满足下列方程的围绕着处于原点的点源的球对称解。

$$\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi = 0.$$

如果 ϕ 仅取决于 r ，则我们知道

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi).$$

因此有方程：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) - \mu^2 \phi = 0$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \mu^2(r\phi).$$

若把 $(r\phi)$ 想象成因变数量，则这便是我们曾经多次见过的一个方程。它的解是

$$\phi = K e^{\pm \mu r} / r. \quad (28.18)$$

这一函数称为汤川势。对于吸引力来说， K 为负数，其大小必须调整到与实验上所观测到的力的强度相符。

核力的汤川势按指数因子衰减得比 $1/r$ 更快。对于超过 $1/\mu$ 的那些距离，这个势——从而这个力——降落到零要比 $1/r$ 快得多，如图28-6所示。核力“范围”要比静电力“范围”小得多。从实验上发现，核力并不会超出约 10^{-13} cm，因而 $\mu \approx 10^{15} \text{ m}^{-1}$ 。

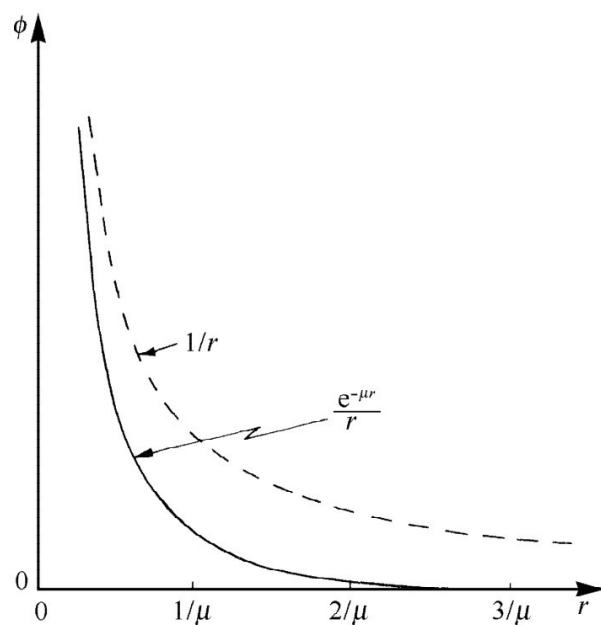


图28-6 汤川势 $e^{-\mu r}/r$ ，与库仑势 $1/r$ 相比较

最后，让我们看看方程式（28.17）的自由波解。如果将

$$\phi = \phi_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

代入式（28.17）中，便得

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0.$$

将频率与能量、波数与动量联系起来，像在第1卷第34章末尾我们曾经做过的那样，便可得到

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \mu^2 \hbar^2,$$

上式表明，汤川“光子”具有等于 $\mu\hbar/c$ 的质量。如果我们对 μ 采用核力的观测范围的估计值 10^{15} m^{-1} ，结果质量为 $3 \times 10^{-25} \text{ g}$ 或 170 MeV ，这近似等于所观测到的 π 介子质量。因此，根据与电动力学所做的类比，我们会说 π 介子就是核力场中的“光子”。但现在我们已把电动力学的那些概念推广到它们可能实际上并不适用的领域中去了——我们已超过了电动力学范围而涉及到了核力的问题。

[1] 我们是在采用这么一种记法： $\dot{x} = dx/dt$ ， $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ， $\dddot{x} = d^3x/dt^3$ ，等等。

第29章 电荷在电场和磁场中的运动

§29-1 在匀强电场或匀强磁场中的运动

我们现在要来描述——主要采取定性方式——在各种不同情况下电荷的运动。电荷在场中运动的有趣现象，大多数都发生于有许许多多电荷互相作用着的十分复杂的情况下。例如，当电磁波行经一块材料或一团等离子体时，会有亿万个电荷与该波相互作用并彼此相互作用。往后我们将进入这样的问题，但现在只希望讨论在给定场中单个电荷的运动这种简单得多的问题。这样就可以忽略所有其他电荷——当然除了存在于某处的、借以产生我们将采用的场的那些电荷和电流以外。

我们大概应当首先询问粒子在匀强电场中的运动情况。在低速时，这一种运动并非特别有趣，它不过是在电场方向做匀加速运动。然而，如果粒子获得了足够多的能量以致成为相对论性的粒子，那么运动就会变得更加复杂。但我们将把这一情况下的问题留给你们自己去解决。

其次，考虑在没有电场的匀强磁场中的运动。我们已解决了这个问题——其中一个解是粒子做圆周运动。磁力 $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 始终与运动方向

成直角，因而 $d\mathbf{p}/dt$ 垂直于 $\mathbf{p}$ 并具有量值 vp/R ，其中 R 为圆的半径，即

$$F = qvB = \frac{vp}{R}.$$

于是该圆周的轨道半径为

$$R = \frac{p}{qB}. \quad (29.1)$$

那只是一种可能性。如果粒子还有沿场方向的运动分量，则这个运动是恒定的，因为在场的方向不可能有磁力的分量。粒子在一匀强磁场中的普遍运动将是一个平行于 $\mathbf{B}$ 的匀速运动加上一个垂直于 $\mathbf{B}$ 的圆周运动——轨道乃是一条柱形螺旋线（图29-1）。这螺旋线的半径由式（29.1）给出，只要我们用垂直于场的动量分量 $p_{\perp}$ 来代替其中的 p 。

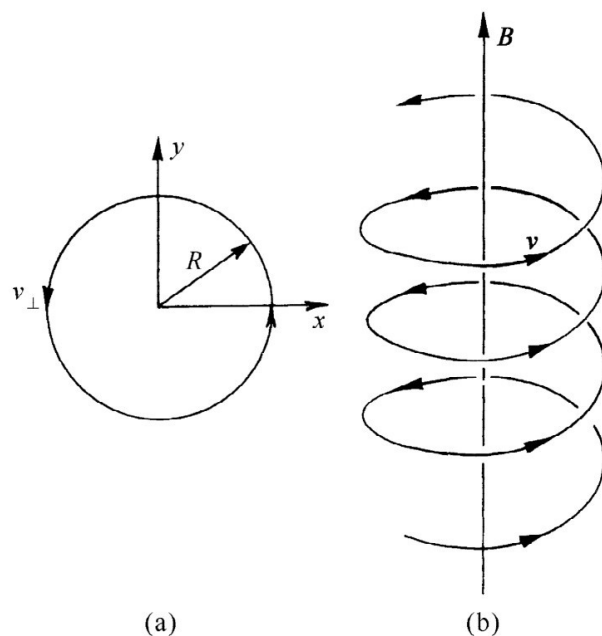


图 29-1 粒子在一匀强磁场中的运动

§29-2 动量分析

一个匀强磁场往往被用来制造一台高能带电粒子的“动量分析器”或“动量谱仪”。假定带电粒子在图29-2 (a) 中的 A 点被射入一匀强磁场，这磁场与该图面垂直。每个粒子将在半径正比于该粒子动量的一个圆周上运动。如果所有粒子都与场边缘正交地进入场中，那么它们将在一个离 A 点距离为 x 的地方离开场，这 x 值正比于它们的动量 p 。位于诸如某点 C 的计数器将只能探测到动量 $p = qBx/2$ 附近间隔 Δp 内的那些粒子。

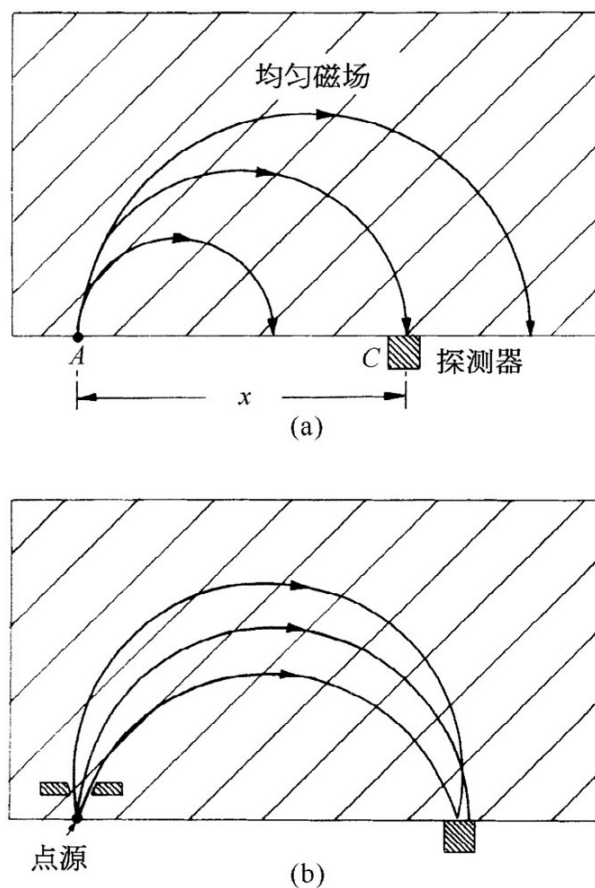


图29-2 匀强磁场， 180° 聚焦的动量谱仪：（a）动量不同；（b）角度不同（磁场方向与图面垂直）

当然，并不要求粒子在它们被探测到之前都要走过 180° ，但这种名为“ 180° 谱仪”却具有一种独特性质，并不一定要求所有粒子全都与场的边缘成直角进入场中。图29-2（b）显示三个粒子的轨道，它们都拥有相同的动量，但以不同角度进入场中。你看到它们各取不同轨道，可是全都在很靠近于C点处离开了场。我们说存在一个“焦点”。这种聚焦特性有其优越之处，即在A点有较大角度的粒子也可以被接收到——虽然往往得强加上某些限制，如图中所示。对一个较大角度范围的接收经常意味着较多的粒子在给定时间内被计算了进去，这就减少了对给定的测量所需的时间。

通过变更磁场，或沿 x 轴移动计数器，或由运用许多个计数器覆盖 x 的一个范围，入射束的动量“谱”就可以被测得了〔所谓“动量谱” $f(p)$ ，我们指的是动量在 p 与 $(p+dp)$ 之间的粒子数为 $f(p)dp$ 〕。比方，这样的方法曾用来测定各种原子核在 β 衰变中的能量分布。

有许多其他形式的动量谱仪，但我们将只描述具有特别大接收立体角的那一种。它是以如图29-1所示的那种在均匀强场中的螺旋轨道为基础的。让我们设想一个柱面坐标系 ρ, θ, z ，使得 z 轴沿着场的方向。如果粒子相对于 z 轴以某一角度 α 从原点射出，则它将沿方程为

$$\rho = a \sin kz, \quad \theta = bz$$

的螺旋线运动，其中 a, b 和 k 都是你可以容易用 p, α 和磁场 B 来表示的参数。如果对于给定的动量，但对于几个不同起始角，把与轴的距离 ρ 作为 z 的函数画成曲线，则我们将得到像图29-3所示的那些实曲线（记住这不过是对一条螺旋形轨道的投影）。当入射方向与轴成较大角度时， ρ 的峰值变大，但其纵向速度则变小，从而使不同角度的轨道趋向于在图的 A 点附近形成一个“焦点”。如果我们放置一个窄孔于 A 处，那么在一个起始角范围内的粒子仍然能够全部到达并穿过窄孔到达 z 轴，在那里粒子可由一个长条形探测器 D 进行算数。

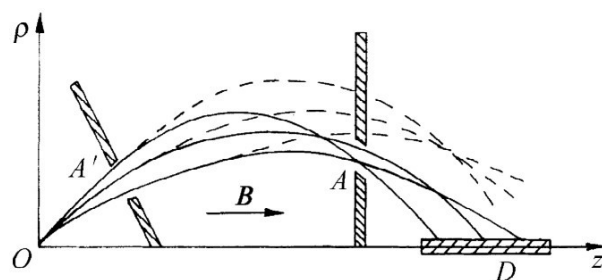


图29-3 一个轴向场式谱仪

以较大的动量但以相同的角度从原点处的源射出的粒子，将遵循图中所示虚线轨道运动而不能穿过 A 处的窄孔。因此，这台仪器将选出一个小区间的动量。与上述第一种谱仪相比它的优点是：孔 A 以及孔 A' 都可以做成环形孔，以便使在一个相当大的立体角范围内离开了源的粒子都能够被接收到。来自源的大部分粒子都给应用上了——对于弱源或对于十分精密的测量这都是一个重要优点。

然而，人们为这个优点付出了代价，因为这样做需要一个大体积的匀强磁场，而这往往仅对低能粒子才是切实可行的。你会记得，制造匀强磁场的一种办法是在球面上绕一个线圈，使得其面电流密度正比于角度的正弦。你也能够证明，这同样的事情对于一个旋转椭球来说也属正确。因此这种谱仪往往通过在一个木（或铝）架上绕一个椭球形线圈来制造，所要求的一切就是在每个轴线距离间隔 Δx 内的电流都相同，如图29-4所示。

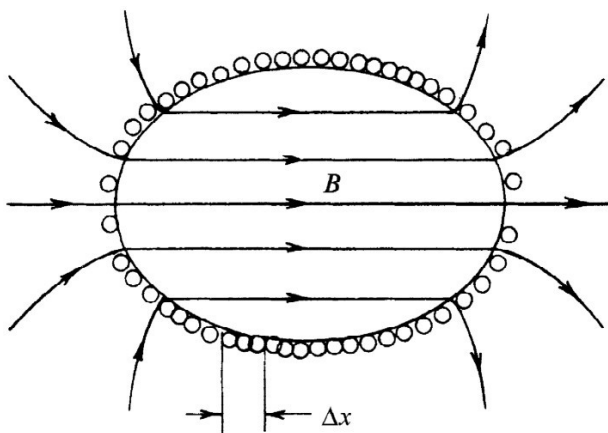


图29-4 每个轴线间隔 Δx 中有相等电流的椭球形线圈在其内部产生匀强磁场

§29-3 静电透镜

粒子聚焦有许多应用。例如，在电视显像管中那些离开了阴极的电子被聚焦在显示屏上——为了形成一个细斑。在这种情况下，人们希望把所有具有同一能量但以不同起始角射出来的粒子都聚集在一小点上。这一问题就像用透镜使光聚焦一样，因而对粒子也会做这种相应事情的器件就也叫作透镜。

电子透镜的一个例子被简略地画成图29-5。它是一个静电透镜，它的作用取决于两相邻电极间的电场。其运用情况可通过考虑从左边进来的平行电子束会发生什么来加以理解。当各电子到达区域 a 时，它们会感受到一个具有侧向分量的力而获得使其弯向轴心的某个冲力。你也许会想到，它们会在区域 b 获得一个相等而相反的冲力，但事实却不是这样。当电子到达区域 b 时它们已得到了能量，从而在 b 区停留的时间就较短。力还是一样，但时间短些，冲力也就小些了。在从 a 区进至 b 区时，就有一净的轴向冲力，因而电子会弯向一个共同点。在离开了高电压区之后，这些粒子又得到指向轴心的另一次冲击。在 c 区的力是向外的而在 d 区的力则是向内的，但粒子在后一区域里停留的时间较长，因而又再受到一个净冲力。对于离轴心不太远的点，通过透镜时的总冲力与离轴线的距离成正比（你能否看出个什么原因来），而这正是透镜式聚焦所必要的条件。

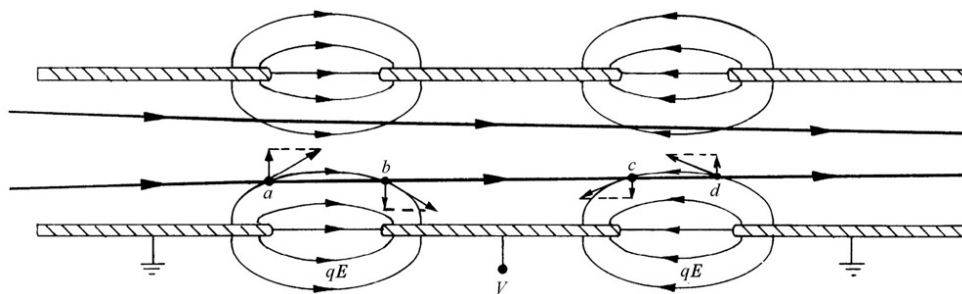


图29-5 静电透镜。这里所示的场线是“力线”，也即 qE 线

你能够用同样的论据来证明，无论中间电极的电势相对于其他两极是正还是负，都会有聚焦作用。这一种类型的静电透镜通常用于阴极射线管或某些电子显微镜中。

§29-4 磁透镜

另一种透镜——常出现在电子显微镜中——就是简略如图29-6所示的磁透镜。一个柱形对称的电磁铁具有十分尖锐的圆形尖极，因而能在一小区域里产生一个非均匀的强磁场。一些沿垂直方向运动的电子在通过这一区域时给聚焦了。你能够通过考察如图29-7所示的极尖区域的放大图像而理解其机制，考虑相对于轴线以某一角度离开了源 S 的 a 和 b 两个电子。当电子 a 到达场的开始部分时，它被场的水平分量所偏转以致离开了你。但这时电子将有一横向速度，使得当它经过强的垂直方向场时会得到一个指向轴心的冲力。它的横向运动当离开场时便被该磁力所消除，因而净效应就是一个朝向轴心的脉动加上一个环绕轴线的“旋转”。作用于粒子 b 上的所有力都与此相反，因而它也被朝向轴心偏转。在这图中，那些发散出去的电子都被引入平行路径。这作用就像置一物体于透镜的焦点上一样。安置在上部的另一个相似透镜则可用来把这些电子再聚焦回到一个单独的点上去，造成源 S 的像。

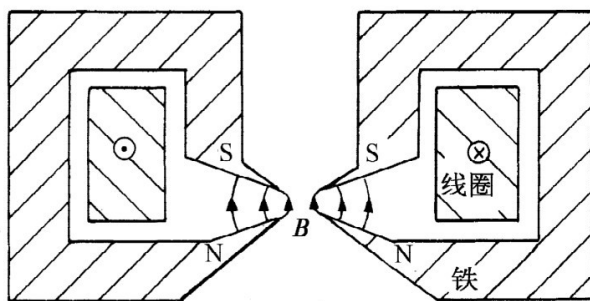


图29-6 磁透镜

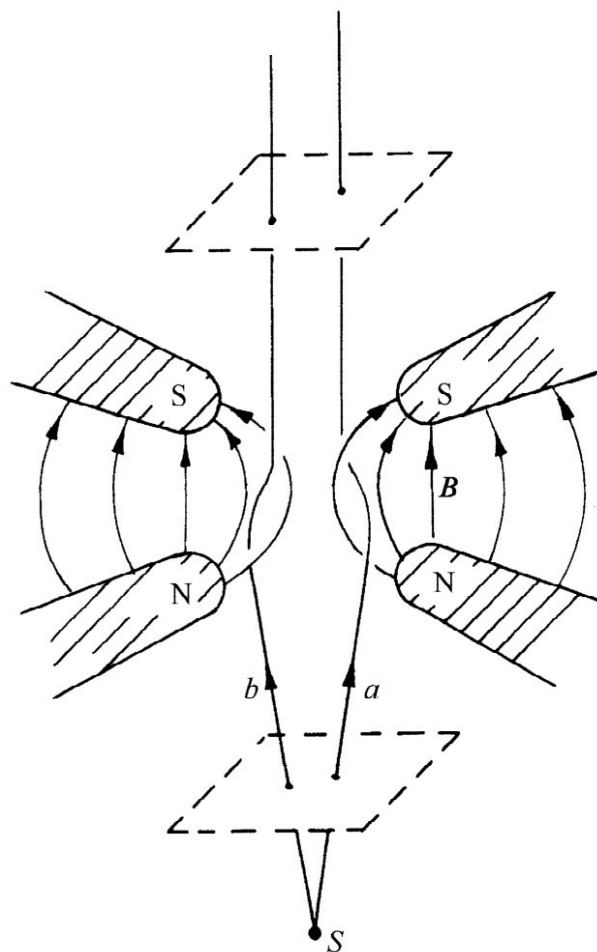


图29-7 在磁透镜中电子的运动

§29-5 电子显微镜

你们知道，电子显微镜能够“看见”光学显微镜所无法看到的非常微小的物体。我们曾在第1卷第30章中讨论过由于透镜孔径的衍射给任何光学系统带来的基本限制。如果透镜孔径对源点所张角度为 2θ （见图29-8），若在源处的两相邻的圆点的间距比

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

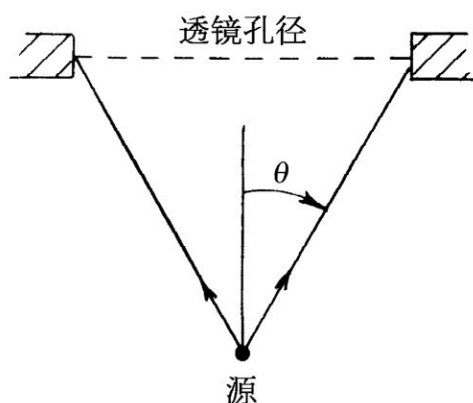


图29-8 显微镜的分辨本领受从源点对向的角所限制

要小，则不能把它们看成分开的点，式中 λ 为光的波长。用最优良的光学显微镜，设 θ 趋近 90° 的理论极限，因而 δ 约等于 λ ，即约为 $5\,000\text{ \AA}$ 。

对于电子显微镜来说这同一限制也应该适用，不过这里的波长——对于 50 kV 的电子——约为 $0.05\text{ \AA}$ 。假如人们能够采用一个接近 30° 的孔径，就应该能看到相距只有 $0.2\text{ \AA}$ 的两物体。由于分子中原子的典型间距为 1 或 $2\text{ \AA}$ ，所以我们就能拍得分子的照片。生物学会变得较为容易，我们将拥有关于脱氧核糖核酸结构的照片，那将是多么重大的一件事情呵！当前分子生物学领域中大多数研究工作就是企图弄清楚复杂有机分子的形状。但愿我们能够看到这些分子！

可惜，迄今在电子显微镜中能够获得的最高分辨本领还只是接近 $20\text{ \AA}$ 。原因是，还没有人能够设计出一种具有大孔径的透镜。所有一切透镜都带有“球面像差”，那意味着与轴成大角度的射线与近轴射线

有不同的聚焦点，如图29-9所示。通过特殊技术，光学显微镜的透镜可以造得忽略掉球面像差，但迄今还没有人能制成避免球面像差的电子透镜。

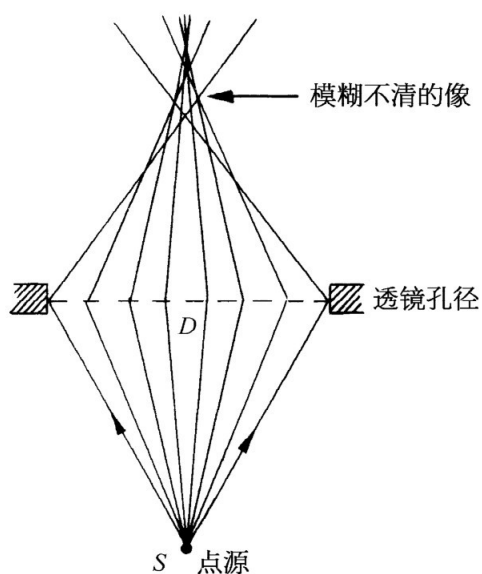


图29-9 透镜的球面像差

事实上，人们能够证明，我们曾经描述过的任何静电透镜或磁透镜一定会有不可能消除的球面像差。这一像差——和衍射在一起——把电子显微镜的分辨本领限制在目前的大小。

我们所提及的那种限制不适用于非轴对称的或在时间上不是恒定的那些电场和磁场。也许有朝一日有人会想出一种新型的电子透镜，它能够克服简单电子透镜所固有的像差，那时我们将能直接为原子们拍照了。也许有一天，化学中的化合物将能够通过考察原子位置而不是通过观察某些沉淀物的颜色来加以分析！

§29-6 加速器中的导向场

在 高能粒子加速器中磁场也被用来产生特殊的粒子轨道。像回旋加速器和同步加速器那一类机器，会使粒子反复经过强电场而把它加速至高能。粒子被磁场保持在它们的循环轨道中。

我们已经见到，在匀强磁场中的粒子将在圆周轨道上运动。然而，这仅对于完全均匀的场才正确。试设想一个在很大范围几乎均匀、但在某一区域里会稍微强于其他区域里的 B 场。若把一个动量为 p 的粒子放置在这个场中，它便将在一个几乎圆形的轨道内运动，其半径为 $R = p / (qB)$ 。然而，在场较强的区域里这轨道的曲率半径稍微小点。轨道不是一个闭合圆周，它但将在场中“漫步”，如图29-10所示。如果我们乐意的话，可以认为场里的这个小“误差”产生了一个附加的角度冲击，它把粒子送上一个新的轨道。如果粒子要在加速器中绕行几兆圈的话，则某一种能倾向于保持各轨道靠近某个设计轨道的“径向聚焦”是必需的。

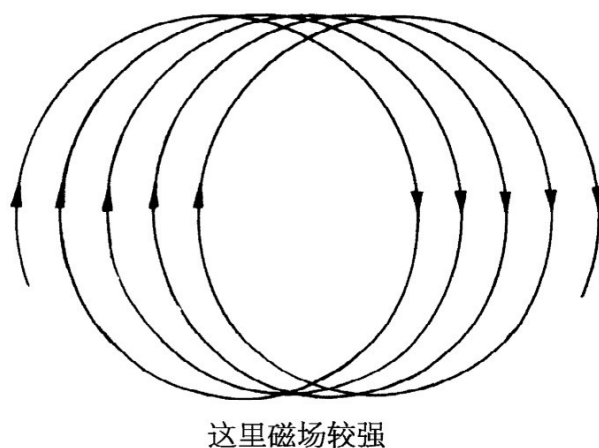


图29-10 在一个稍微非均匀的磁场中粒子的运动

对于一个匀强场来说，另一种困难是粒子不会保持在一个平面内。如果它们以一微小角度开始——或通过场中的任一微小误差给予了一个小角度——它们便将跑一个螺旋路线而最终会闯进磁极或到达

真空室里的天花板或地板上。必须做出某种安排来避免这种垂直方向的漂移，场必须同时提供“垂直方向聚焦”和径向聚焦。

最初，人们会猜测到，可以通过制造一个磁场来提供这种径向聚焦，而该磁场随着与设计路线中心的距离的增大而增强。于是，若有一粒子跑到较大的半径上去，它便将处于较强的磁场之中而被弯回到其正确的半径上来。如果它跑到了一个太小的半径，则弯曲程度将变小，因而又会朝设计的半径返回。一个粒子，一旦相对该理想圆周以某个角度开始运动，便将在该理想圆周轨道上左右摇摆，如图29-11所示。这种径向聚焦作用会把粒子保持在该圆周路径附近。

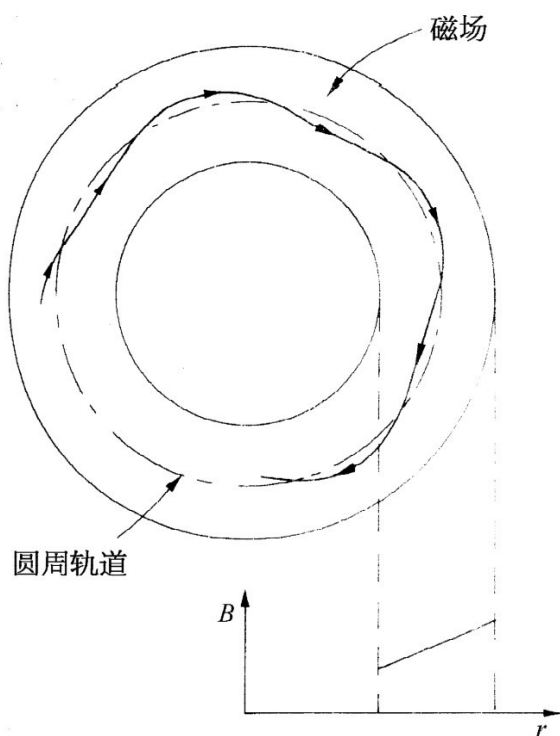


图29-11 在一个具有大的正斜率的磁场中粒子的径向运动

实际上，即使使用相反的磁场斜率，也仍会有某种径向聚焦作用。只要轨道曲率半径的增大不会快过粒子与场中心的距离的增大，

这种聚焦作用就可能发生。粒子的轨道将会如图29-12所示。然而，若场的梯度太大，则轨道将不会回到设计半径上来，而向内旋入或向外旋出，如图29-13所示。

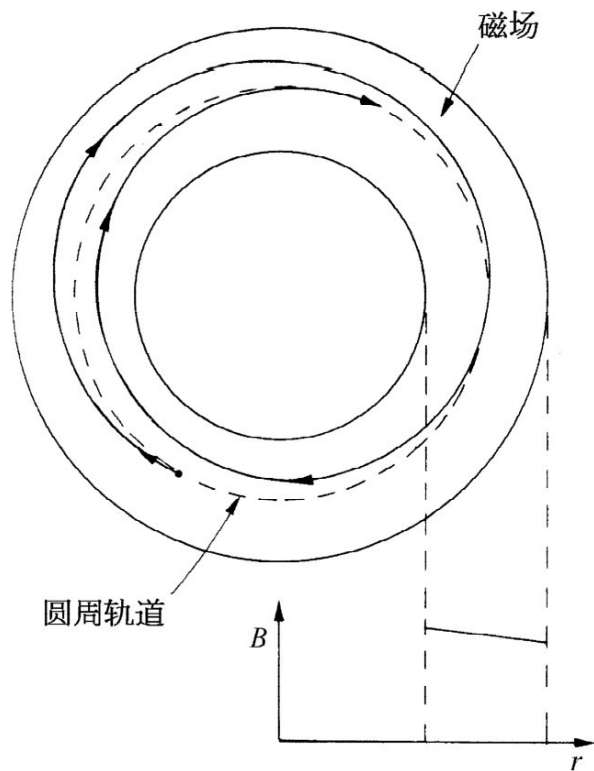


图29-12 在一个具有小的负斜率的磁场中粒子的径向运动

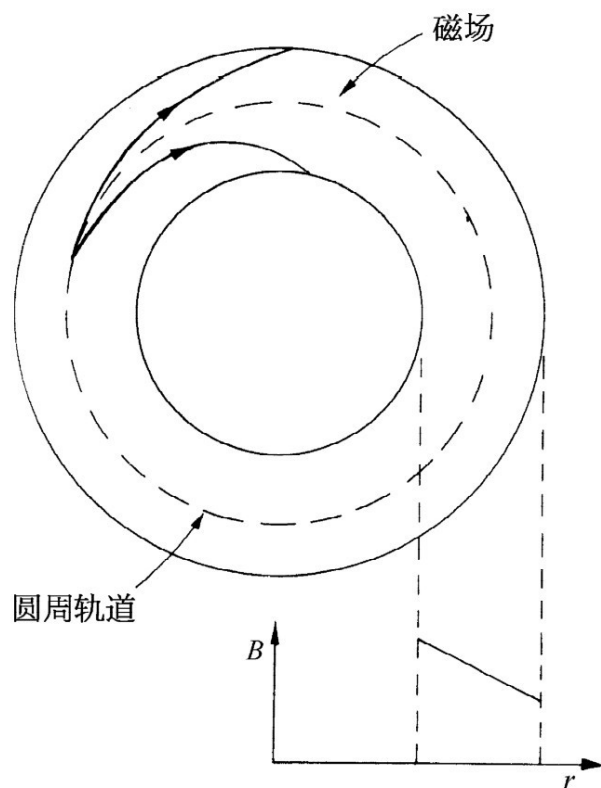


图29-13 在一个具有大的负斜率的磁场中粒子的径向运动

我们通常用“相对梯度”或场指数 n 来描述场的斜率：

$$n = \frac{dB/B}{dr/r}. \quad (29.2)$$

如果这个相对梯度大于-1，则导向场就能提供径向聚焦。

一个径向的场梯度也将对粒子产生垂直方向的力。假设有一个靠近轨道中心处较强而在外面较弱的场，那么垂直于轨道的、磁体的垂直方向截面也许会如图29-14所示（对于质子来说，它们的轨道应该是从页面出来）。如果左边的场比右边的较强，则磁场线必然如图所示的那样弯曲。通过应用自由空间里 $\mathbf{B}$ 的环流等于零的规律，我们可以明白情况必然会是这样。若我们选取如图所示的那些坐标，则

$$(\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

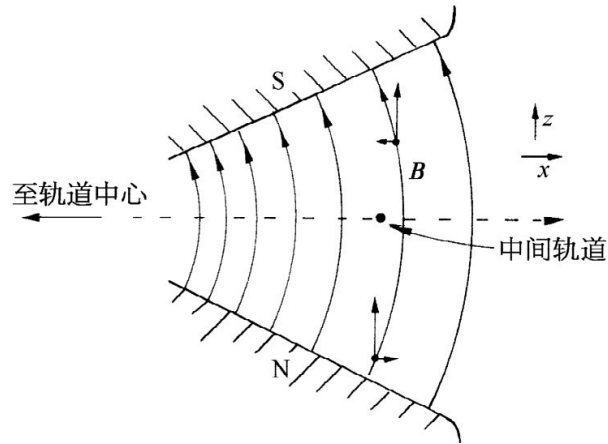


图29-14 从一个垂直于轨道的截面上来看一个垂直方向的导向场

或

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (29.3)$$

由于已假定 $\partial B_z / \partial x$ 是负的，所以就必然存在一个相等的 $\partial B_x / \partial z$ 。如果轨道的“标称”平面是一个 $B_x=0$ 处的对称平面，则径向分量 B_x 在这一个平面之上为负而在其下为正，场线就必须弯曲成如图所示的那个样子。

像这样的场将具有垂直方向的聚焦特性。试想象一个质子正在与中间轨道近乎平行但却是其上面运动， $\mathbf{B}$ 的水平分量将对它施一向下的力。如果质子是在该中间轨道之下运动，则力会颠倒过来。因此，就有一个朝向该中间轨道的“恢复力”。根据我们的论证，将有一个垂直方向的聚焦作用，只要该垂直方向场随半径的增大而减小。但如果这个场的梯度为正，则将有一“垂直方向的去焦”作用。因此，对

于垂直方向聚焦来说，该场指数 n 必须小于零。上面我们已求得对于径向聚焦 n 必须大于-1，这两个条件结合在一起就给出总条件

$$-1 < n < 0,$$

若要把粒子维持在稳定的轨道上，则要满足上述条件。在回旋加速器中，常采用非常接近于零的 n 值，而在电子回旋加速器和同步加速器中，则一般采用 $n = -0.6$ 的数值。

§29-7 交变梯度聚焦法

像这么小的 n 值只会给出相当“弱”的聚焦作用。很清楚，一个有效得多的径向聚焦作用应该由一个大的正梯度（ $n \gg 1$ ）来提供，但这时垂直方向力就将产生一个强大的去焦作用。同理，大的负斜率（ $n \ll -1$ ）会给出一个较强的垂直方向力，但却会引起径向的去焦作用。然而，约十年前就已经认识到，在强聚焦与强去焦之间的交变力仍然能够产生一个净的聚焦力。

为解释交变梯度聚焦法是如何起作用的，我们将首先描述一个四极透镜的工作情况，它以上述相同的原理为基础。试设想一个匀负磁场加于图29-14中的场上，使其强度调整至在轨道处的场为零。合成的场——对于与中立点间的小位移来说——会像图29-15所示的场。这样一种四极磁体称为“四极透镜”。一个在中点之左或右（从读者一边看）进入场内的正粒子会被推回中心。如果这个粒子是在上面或下面进入的，则将被从中点推开。这是一个平行方向的聚焦透镜。如果水平梯度被反向——正如可通过变换所有磁极的极性而做到的那样——则所有力的符号都将反号，因而我们就有一个垂直方向的聚焦透镜，

如图29-16所示。对于这样一种透镜，场强——因而焦聚力——会随着离轴的透镜距离线性地增大。

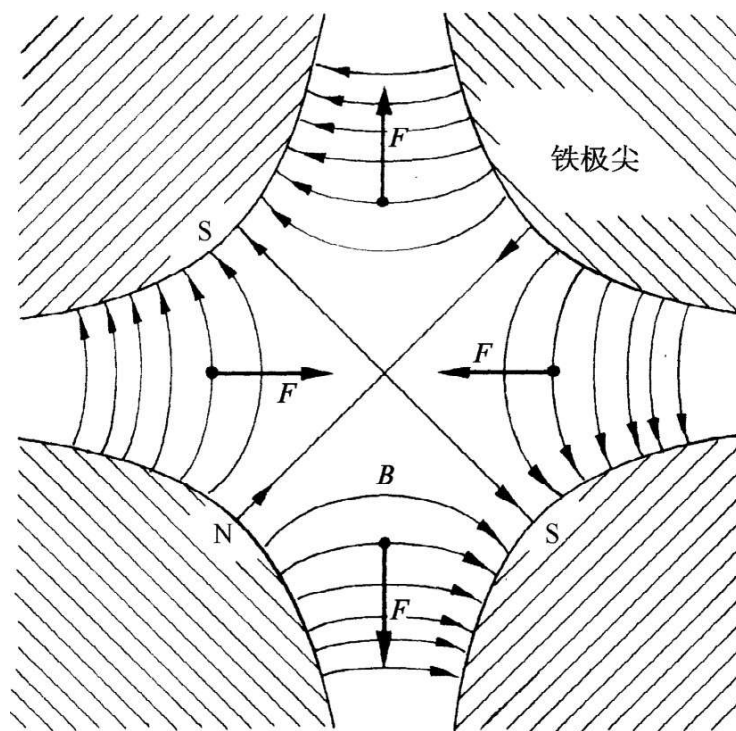


图29-15 水平方向聚焦的四极透镜

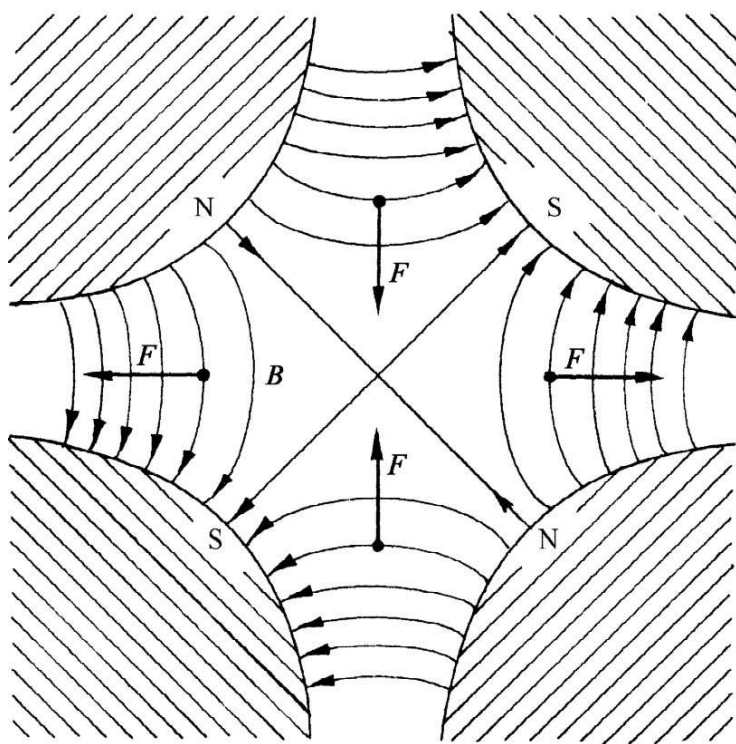


图29-16 垂直方向聚焦的四极透镜

现在设想有两个这样的透镜串联安放。若一粒子从与轴心有某个水平位移的地方进入场中，如图29-17（a）所示，则它在第一个透镜中将被朝轴的方向偏转。当抵达第二个透镜时，它距离轴已较近，因而向外的力较小，向外的偏转也就较小。所以有一个朝轴向的净弯曲，平均效应是水平方向的聚焦作用。另一方面，若我们考察一个在进场时在垂直方向上就离开轴的粒子，则其路径将如图29-17（b）所示。该粒子初时被偏转以致离开轴，但之后在较大位移时到达那第二个透镜，在那里它会感觉到一个较强大的力，因而被弯向轴。净效应再次为聚焦作用。这样一对四极透镜独立地对于水平方向和垂直方向的运动起作用——十分像一个光学透镜。四极透镜被用来形成并控制粒子束，与光学透镜用于控制光束的方法十分相似。

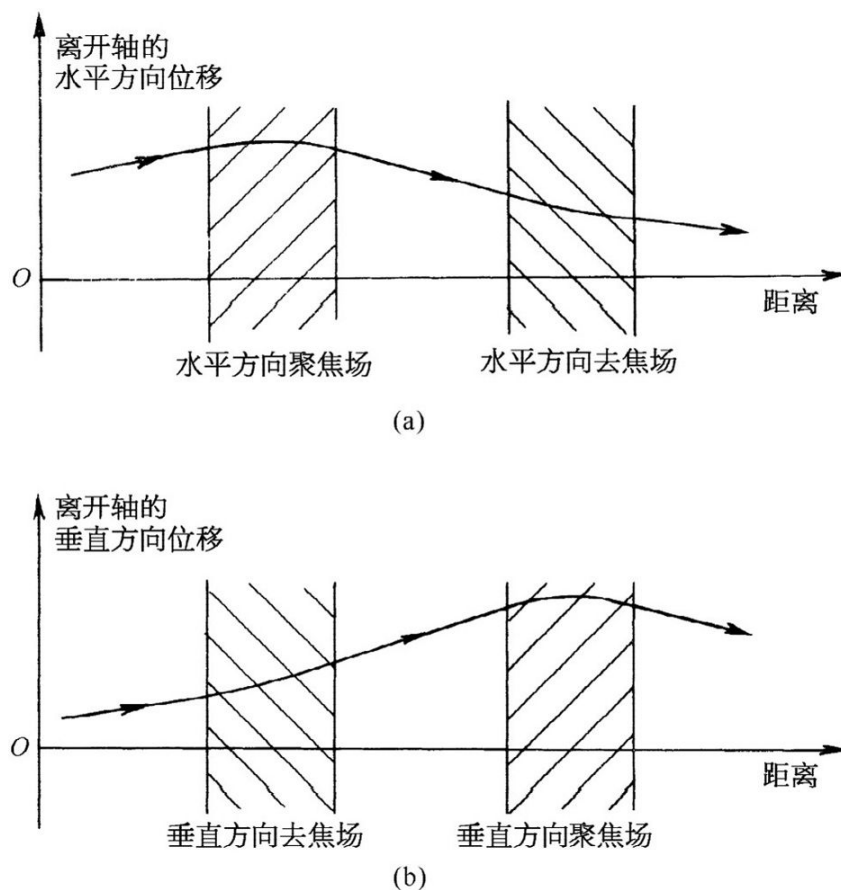


图29-17 利用一对四极透镜而得到的水平方向聚焦和垂直方向聚焦

还应该指出，一个交变梯度系统并不总会产生聚焦作用。如果梯度太大（相对于粒子动量或两透镜的间隔来说），则净效应可能是一个去焦作用。你若设想图29-17那两个透镜的距离增大了三或四倍，就会看清楚这种作用可能是怎样发生的了。

现在就让我们回到同步加速器的导向磁体上来。可以认为，它由叠加了均匀场的“正”、“负”透镜交替序列构成的。平均来说匀强磁场用来把粒子弯曲成一个水平圆周（对于垂直方向运动不起作用），而该交变透镜组对任何也许已走错了路的粒子会起作用——始终把它们（在平均上）推向中间轨道上去。

有一套漂亮的机械模拟器，可以用来演示在“聚焦”力与“去焦”力之间交替变换着的力能够产生一个净的“聚焦”效应。试想象一副机械摆，它含有一根末端装有重物的坚固棒，该棒悬挂在一个被安排好的轴上，轴由一部电动机驱动着的曲柄带动而使其迅速做上下振动。像这样的摆会有两个平衡位置，除了正常的下垂悬挂位置外，该摆还有一个“向上悬挂”着的平衡位置——摆锤高居于轴上！这样的摆如图29-18所示。

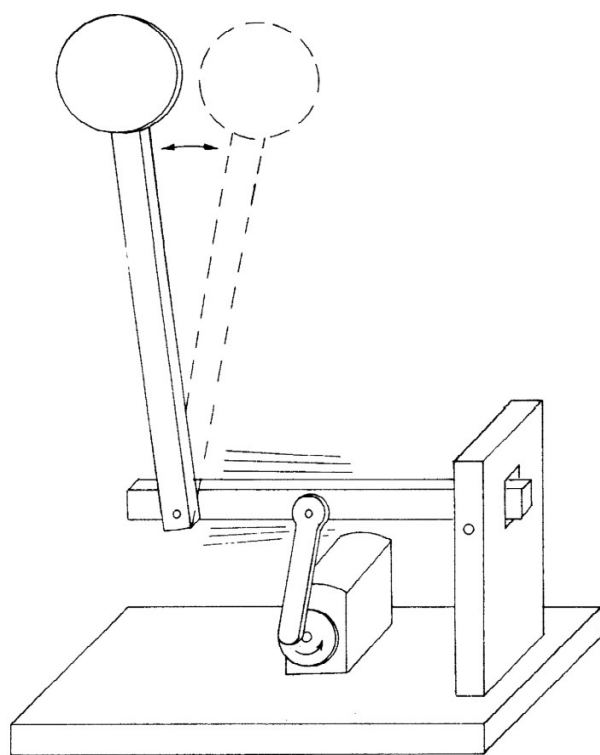


图29-18 一副配有振动轴的摆，可以使位于轴上的摆锤有一个稳定位置

通过下述论证我们能够看出轴的垂直方向运动相当于一个交变聚焦力。当轴向下加速时，摆锤倾向于向内运动，如图29-19所示。当摆锤向上加速时，这效应就被反转。促使摆锤恢复朝向轴线的力虽然在交替变换着，但其平均效应仍然是一个朝向轴线的力。所以这个摆将会围绕正常平衡位置正对面的中立位置来回摆动。

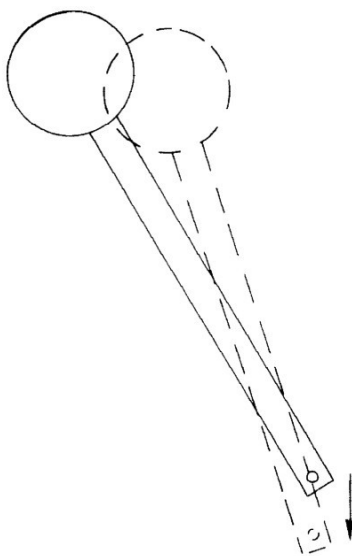


图29-19 轴的向下加速会引起摆朝着垂直方向运动

当然，可用一种容易得多的办法来保持一副摆倒悬着，那就是把它平衡于你的手指之上！不过你还可试一试，在同一只手指上平衡两根互为独立的棒！或者把你的眼睛掩闭着而试着平衡一根棒！平衡含有对即将出现的错误进行改正的意思，而一般说来，倘若同时有几件事情都发生错误的话，平衡是不可能的。在一部同步加速器中有数以亿计的粒子同时在环行，其中每一个都可能从不同的“误差”出发。我们刚才描述的那种聚焦作用对它们就都有效。

§29-8 在交叉的电场和磁场中的运动

迄今为止我们谈论了只在电场或只在磁场中的粒子。当这两种场同时存在时就会有某些有趣的效应。假设有一个匀强磁场 $\mathbf{B}$ 和一个电场 $\mathbf{E}$ 正交。凡垂直于 $\mathbf{B}$ 出发的粒子都将沿如图29-20所示的曲线运动

（这是一条平面曲线，而不是一条螺旋线）。我们能够定性地理解这一运动。当（假定带正电的）粒子在 $\mathbf{E}$ 的方向运动时，它会增加速率，因而被磁场弯曲得较小。当其逆着电场运动时，它减少速率，因而被磁场连续弯曲得多些。净效应就是它有一个沿 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 方向的平均“漂移”。

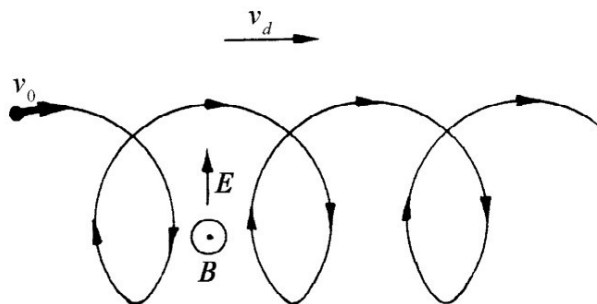


图29-20 在交叉的电场和磁场中一个粒子的路径

事实上，我们能够证明，上述运动是由一个匀速圆周运动叠加于一个以速率 $v_d = E/B$ 进行着的横向匀速运动之上的合运动——图29-20中的那条轨道就是一条旋轮线。试想象一个以恒定速率向右运动的观察者，在他的参照系上，我们的磁场会变换成一个新的磁场再加上一个方向朝下的电场。如果他恰巧具有正确的速率，则他的总电场将为零，因而他将看到电子在做圆周运动。因此，我们所看到的乃是一个圆周运动加上一个以漂移速率 $v_d = E/B$ 进行的平动。电子在交叉的电场和磁场中的运动就是磁控管——即用来产生微波能量的振荡器——的基础。

关于在电场和磁场中粒子的运动还有许多其他的有趣例子，诸如被捕获在范艾仑（Van Allen）带中的电子和质子的轨道，可惜我们这里没有时间来一一讨论。

第30章 晶体的内禀几何

§30-1 晶体的内禀几何

我们已经结束了关于电磁基本定律的学习，现在要来学习实物的电磁性质了。我们将从描述固体——即晶体——开始。当物质中的原子运动得并不太厉害时，它们逐渐粘在一起并把它们自己安排在一个尽可能低的能量位形中。如果某处的原子已找到了一个似乎具有低能量的图样，那么在别处的原子大概也会做出同样的安排。为了这些缘故，在固体材料中我们就有重复的原子图样。

换句话说，晶体中的情况是这样的：晶体里某一特定原子的周围环境具有某种安排，而倘若你在更向前的另一处又看到一个相同种类的原子，那么你将会发现它的环境与前面的完全相同。如果你再向前同样的距离选取一个原子，你将会发现情况又是完全相同。这图样将一次又一次地重复——这当然是在三维之中。

试想象设计一张墙纸或花布，或平面上的某种几何图案——你假定将有一个一次又一次地重复着的设计单元，以致你可以制成一个任意大的面积，这就是将要在三维中求解的晶体问题的一个二维类比。例如，图30-1（a）显示一张常见的墙纸的设计图样。在图样中有一个能够永远重复的单元。若仅仅考虑其重复性质而不理会花朵本身的几何图形或其艺术价值，则这种墙纸图样的几何特性可用图30-1（b）来表述。你若从任一点出发，便可通过沿箭头1的方向移动距离 a 而找到

一个对应点。如果沿另一个箭头方向移动距离 b ，那么你也可获得一对对应点。当然，还有许多其他方向。例如，你可以从 α 点至 β 点而达到一个对应点，但这样的一步可认为是这样两步的组合，即沿方向1的一步，接着又沿方向2的一步。这个图样的一种基本性质就是可以由达到邻近同样位置的两个最短步长来描述。所谓“同样”位置我们指的是若你站在其中任一个位置上而眺望你的周围，你将看到的事情与你站在另一个位置上所看到的完全相同，这就是晶体的基本性质。唯一不同在于，晶体是一种三维排列，而不是二维排列；而其格点的每个基元自然就不是那些花朵，而是某些原子——也许是六个氢原子和二一个碳原子——在某个图样中的某种排列。晶体中原子的图样在实验上可以通过X射线衍射而找到。由于以前我们曾简短地提到过这种方法，并且对于大多数简单晶体和某些相当复杂的晶体来说，它们的原子在空间中的精确排列都已经被计算出来，现在就不再赘述了。

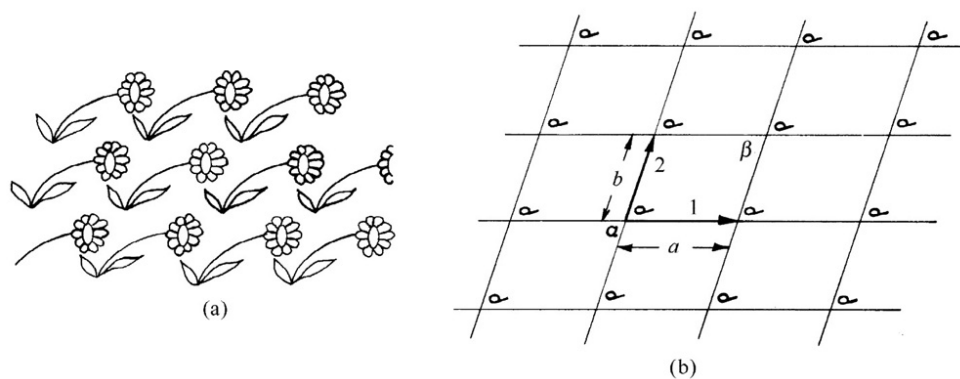


图 30-1 在二维中的一个重复图样

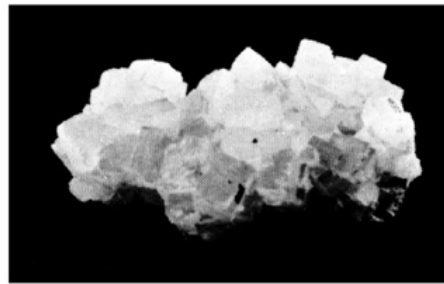
晶体的内在图样会在不同方面显示出来。首先，原子在某些方向的结合强度往往比其他方向的要强，这意味着通过晶体的某些平面会比另一些平面更易于裂开，它们被称为解理面。如果你用一小刀刃劈裂一块晶体，它往往会沿这样的面破裂开来。其次，根据晶体的形成方式，其内部结构还往往表现在其表面上。试想象晶体正从溶液中淀

积出来。有一些原子会在溶液里各处漂浮，而最后当它们找到一个能量最低的地方时就淀积下来（这好像墙纸逐渐制成的情形，花朵到处漂浮，直到其中一朵偶尔漂到一个地方而给逐渐粘住，之后一个又一个花朵都给粘住，使得该图样逐渐生长起来）。你将体会到，其中一些方向的生长速率与其他方向的不同，因而长成某种几何形状。由于这种效应，许多晶体的外表就会呈现原子内部排列的某些特征。

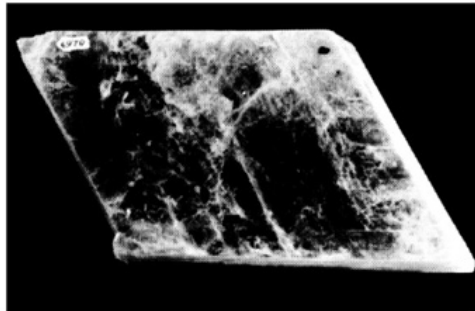
例如，图30-2（a）显示一块典型石英晶体的形状，它的内部图样为六角形。如果你仔细地考察这样一块晶体，你将会注意到，它的外表并不会形成很好的六边形，因为那些边并非完全等长——事实上，它们往往很不一致。但在一个方面石英晶体却是十分完美的六边形，两面间所形成之角恰好是 120° 。很清楚，任一个特定面的大小是生长中的一个偶发事件，但角度却是其内禀几何的一种表示。所以每一块石英晶体各有其不同形状，即使各对应面之间的角度总是相同的。



(a)



(b)



(c)

图30-2 天然晶体：(a) 石英；(b) 氯化钠；(c) 云母

一块氯化钠晶体的内禀几何，从其外表形状来看，也是很显然的。图30-2 (b) 表示一块典型食盐的形状。这种晶体不再是理想立方体，但其表面间却严格互相垂直。

一种更为复杂的晶体是云母，它的形状示如图30-2（c）所示。它是一种高度各向异性的晶体，并从这么一个事实就容易看得出来，即如果你试图在一个方向（图中的水平方向）上拉断它，它表现出十分坚韧，但在另一个方向（垂直方向）上就很容易把它拉裂开来。它常被用来获得十分坚韧的薄片。云母和石英是两种含有硅的天然矿物样品。第三种含硅矿物样品则是石棉，它具有这么一种有趣性质，即在两个方向上它很容易被拉开，但在第三个方向上就不是这样，它表现为由十分坚韧的线状纤维所构成。

§30-2 晶体中的化学键

晶体的机械性质显然取决于原子间化学成键的类型。云母沿不同方向明显不同的强度取决于在不同方向原子间成键的类型。无疑，你已经在化学中学到了不同种类的化学键。首先，有离子键，正如我们对于氯化钠所做过的讨论。一般说来，钠原子失去了一个电子而变成正离子，氯原子则获得了一个电子而变成负离子。这些正离子和负离子给安排在一个三维的棋盘内并由电力把它们维系在一起。

共价键——其中电子为两个原子所共有——更为常见而且一般非常强。例如，在金刚石中，碳原子在到其最近邻的所有四个方向上都有共价键，因而这种晶体确实十分坚硬。在石英晶体中，硅与氧间也有共价成键，但那里的键实际上只是部分共价。由于不存在电子的完全共有性，所以那些原子部分带电，因而该晶体有点是离子性的了。大自然并不像我们试图要它变成那么简单就那么简单，实际上，在共价键与离子键之间还有一切可能的（成键）层次。

糖晶体还有另一种成键类型，其中存在大型分子，大型分子中的原子通过共价键强有力地结合在一起，因而每个分子就是一个坚固的结构。但由于那些强键都已完全被满足，所以就只存在分开的、各个分子之间的相对微弱的吸引力了。在这种分子晶体中，分子们会保持它们单独的身份，而其内部排列也许像图30-3所示。由于分子间并不彼此强有力地互相维系着，这种晶体就很容易破裂。它们与金刚石很不相同，后者实际上是一个巨大分子，如果不破坏其强有力的共价键，就不可能在任何一处使其破裂。石蜡是分子晶体的另一个例子。

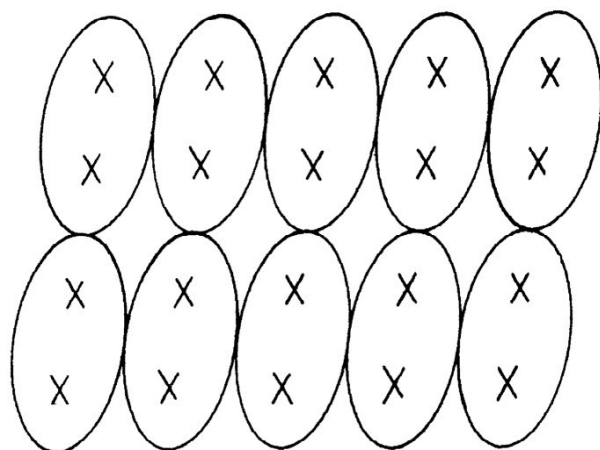


图 30-3 分子晶体的点阵

分子晶体的一个极端例子存在于一种像固态氦的物质中。这种物质的原子之间只有十分微弱的吸引力——每个原子就是一个完全饱和的单原子分子。但在非常低的温度下，热运动十分微弱，因而原子间微小的力就能导致原子淀积成像一堆紧密堆积起来的球体那样整齐排列。

金属构成一类完全不同的物质，其成键属于完全不同的类型。在金属中，成键并非在相邻原子间进行，而是整个晶体的一个属性。那些价电子并不是附属一个或一对原子而是为整个晶体所共有。每一

原子对公共的电子海贡献出一个电子，而那些原子型的正离子则驻留在这个负电子海里。这个电子海像某种胶质一样把离子结合在一起。

在金属中，由于不存在任何特殊方向上的特别的键，所以在成键中就不会有强有力的方向性。然而，它们仍然是晶体，因为当那些原子型离子被安排成某个确定的阵列时其总能量最低——尽管这个优选排列的能量往往不会比其他可能的排列的能量低得太多。对于一级近似来说，许多金属的原子就好像是尽可能紧密地堆积起来的一堆小球。

§30-3 晶体生长

试想象地球中晶体的自然形成情况。在地球表面存在着各种各样原子组成的巨大混合物，它们不断受到火山活动、风和水搅拌——不断地被激起运动及互相混合。可是，通过某种方法，硅原子逐渐开始找到它的伙伴，并找到了氧原子，而形成石英。每次当一原子加进其他原子之中而建立晶体时——混合体就变成不混合了。而在附近某处，钠原子和氯原子又会互相彼此找到而建立起食盐的晶体来。

当晶体一旦开始形成，就只允许一种特殊类型的原子继续参加进去，这是怎么回事呢？之所以会这样，乃由于整个系统正在寻找最低的可能能量。一块正在生长的晶体将接受一个新原子，只要它使得能量尽可能低。但这块生长中的晶体怎么会知道 当一个硅原子——或一个氧原子——处在某一特定位置时就会导致最低的可能能量呢？这是通过尝试法而做到的。在液体中，所有原子都处在永恒的运动之中。每一原子对其邻居每秒约要碰撞 10^{13} 次。如果它撞在生长晶体的正确位置上，倘若能量低下，那它再跳出来的机会就比较小。在数百万年

以上的时间中通过每秒 10^{13} 次连续不断的尝试，原子们便会在那些它们发现能量最低的地方逐渐堆积起来。最后，它们生长成一大块晶体。

§30-4 晶格

晶体中原子的排列——晶格——可以取许多种几何形态。我们愿意先来描述那些最简单的晶格，它们是大多数金属以及由惰性气体所形成的固体的特征。它们是能够以两种形式存在的立方晶格：如图30-4（a）所示的体心立方，与如图30-4（b）所示的面心立方。当然，图上所示的只是晶格中的一个立方，你得想象这种图样在三维中被无限地重复着。并且，为了使画面比较清楚，只表示了原子的中心。但在实际晶体中，原子更像是互相接触着的球体。图中的实心球和空心球，一般说来，可以代表异类原子，也可代表同类原子。例如，铁在低温时具有体心立方晶格，但在高温时则形成面心立方晶格。在这两种结晶形态中其物理性质很不相同。

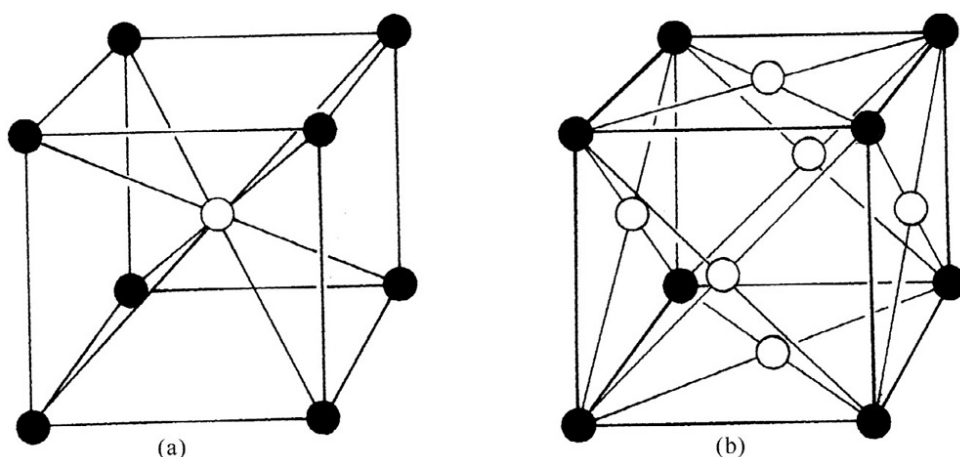


图30-4 立方晶体的晶胞：（a）体心立方；（b）面心立方

这样的形态是怎样得来的呢？试设想你有一个要把球形原子堆积成尽可能紧密的问题。一种办法可能是开始通过造成一个“六角密堆积排列”中的一层，如图30-5（a）所示。然后你就会建立与第一层相似的第三层，但在水平方向上作位移，如图30-5（b）所示。此后，你还可放上第三层。但要注意！安放第三层有两种显然不同的方式。若你通过放一个原子于图30-5（b）的A处而开始第三层，则这个第三层中的每一原子就正好位于底层的一个原子之上。另一方面，如果你通过放一个原子于位置B而开始第三层，则这个第三层的原子将恰恰被置在由底层的三个原子所形成的三角形的中心点上方。任何其他的初始位置都相当于A或B，从而就只有这两种安放第三层的方式。

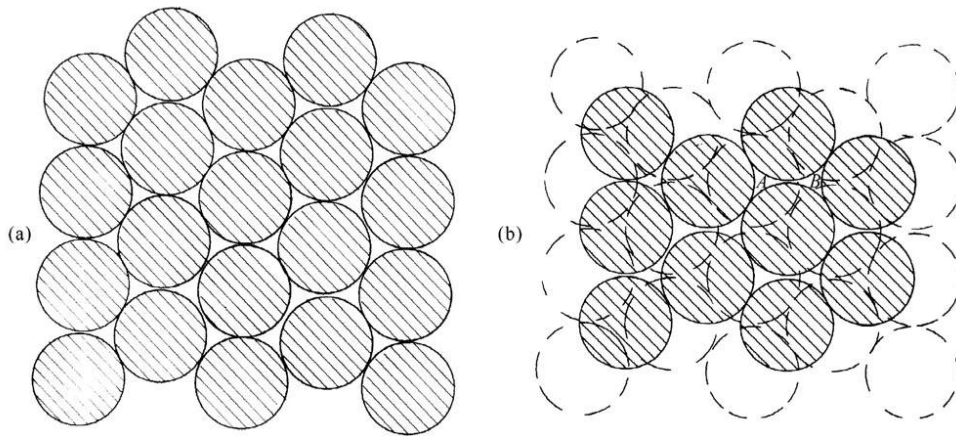


图30-5 建立一个六角密排点阵

如果第三层有一个原子位于B点，则这种晶格就是面心立方——不过是从一个角度去看。似乎很有趣，本来你是从一个六角形开始的，但到头来却得到一个立方体。可是要注意，若从角隅去看，一个立方体就会有六角形的轮廓。比方，图30-6就可以代表一个平面上的六角形或一个透视中的立方体！

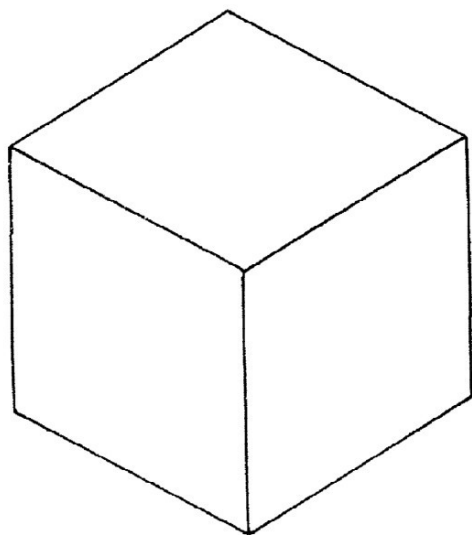


图30-6 从一个角上去看，这是个六角形还是个立方体？

如果第三层是通过把一个原子放在 A 点上而叠加于图30-5 (b)上，则不会有立方结构，这个晶格此时只有六角对称。很清楚，我们刚才所述的这两种可能性都是属于密堆积。

某些金属——诸如铜和银——选择第一种可能性，即面心立方。其他——例如铍和镁——则选取另一种可能性，它们形成六角晶体。很明显，将出现哪一种晶格，不能仅仅取决于小球的堆积，也必须部分地由其他因素确定。特别是，这有赖于原子间作用力的少量剩余的角依存关系（或对于金属而言，则有赖于该电子海的能量）。你无疑会在化学课中学到所有这些东西。

§30-5 二维对称性

我们现在愿意从内禀对称性的观点来讨论晶体的某些性质。晶体的一个主要特点是：若你从某一原子出发而移过一个晶格单位到达一个对应原子，则你将再处在同样一种环境中，这是基本命题。但假如

你是一个原子，也许还有另一种变化能够把你再带到同样一种环境——这就是说，存在另一种可能的“对称性”。图30-7（a）显示另一种可能的“墙纸型”设计（虽则你可能从未见过）。假设我们要来比较 A 和 B 两点的环境。起初，你也许认为它们彼此相同——但又不完全相同。 C 和 D 两点与 A 是等效的，但 B 点的环境只有在经过了倒转，诸如在镜面中的反射，才会像 A 的环境。

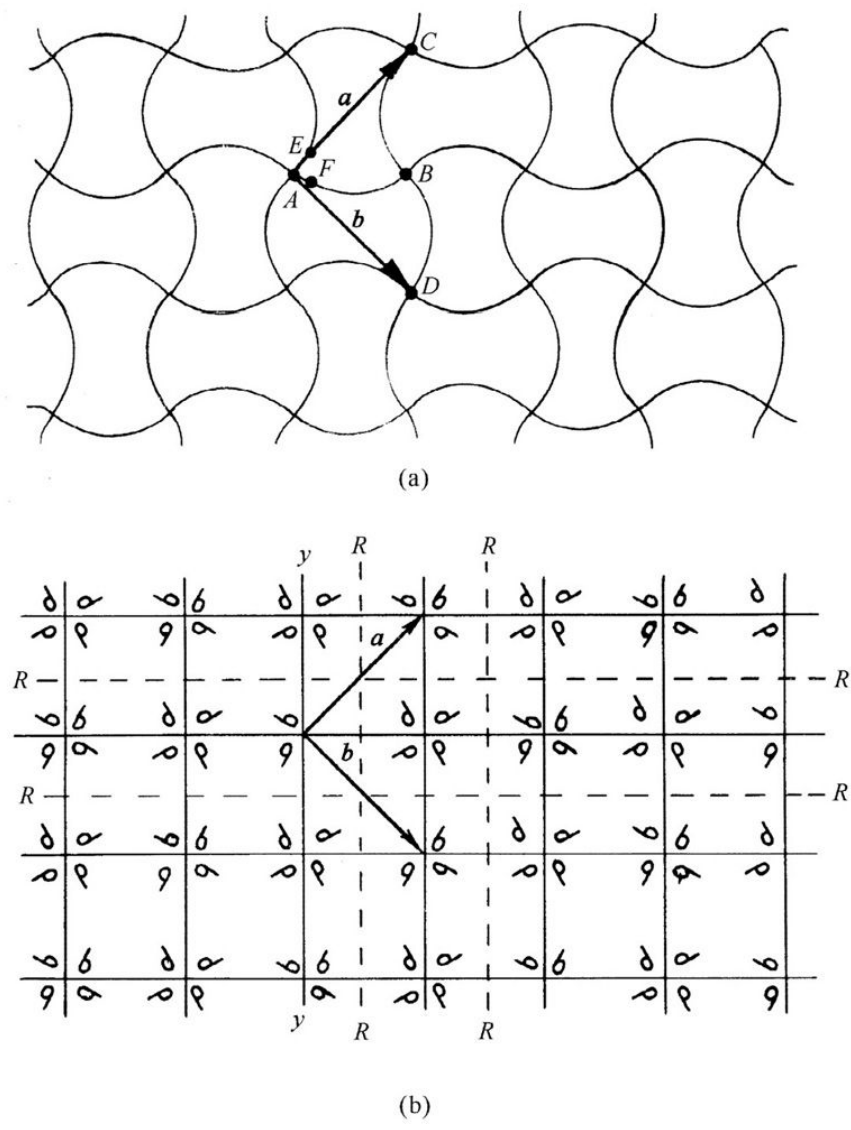


图30-7 一个高对称性的图样

在这一图样中还有其他类型的“等效”点。比如，点 E 和 F ，除了一点相对另一点转过 90° 之外，它们具有“相同”环境。这一图样很特别。环绕顶点诸如 A 旋转 90° 或 90° 的任一整数倍，会再给出一个完全相同的图样。一块具有这种结构的晶体在其外表看来该有正方形的棱角，但其内部比简单立方稍微复杂。

现在已描述了某些特殊例子，让我们尝试算出晶体具有的一切可能的对称性。首先，我们考虑在一个平面上发生的情况。一个平面晶格可以通过两个所谓基矢来定义，这两个矢量是从晶格中的一点指向两个最邻近的等效点的。图30-1中那两个矢量1和2就是该晶格的基矢。图30-7(a)中的 a 和 b 两矢量则是那种图样的基矢。当然，我们尽可以用 $-a$ 来代替 a ，或用 $-b$ 来代替 b 的。由于 a 和 b 的大小相等并互相垂直，所以 90° 角的转动会将 a 变成 b ，并将 b 变成 $-a$ ，这又给出相同的晶格。

我们看到存在一些具有“四次”对称性的晶格，而前面则已描述了一种密堆积排列，它是以具有六次对称性的六角形为基础的。对于图30-5(a)中排列的圆圈，环绕任何一个圆心做一个 60° 角的转动将会把该图样转回到原来样子。

还有哪些其他类型的转动对称性呢？比方，能否有五次或八次转动对称性呢？很容易看出那是不可能的。多于四次的唯一一种对称性就是六次对称。首先，让我们来证明多于六次的对称是不可能的。假设我们试图想象一种晶格，其中的两个等长初基矢做成小于 60° 的内角，如图30-8(a)所示。我们必须假定： B 和 C 两点各等效于 A ，而 a 和 b 便是从 A 点至其等效邻点的两个最短矢量。但这显然是错误的，因为在 B 与 C 两点间的距离比从其中任一点至 A 点的距离还要短。因此就必定有一个与 A 点等效的、而较 B 点或 C 点近的邻点 D 。我

们本来就应当选取 b' 作为我们的初基矢之一，所以两个基矢所夹之角必然是 60° 或更大。八次对称根本不可能。

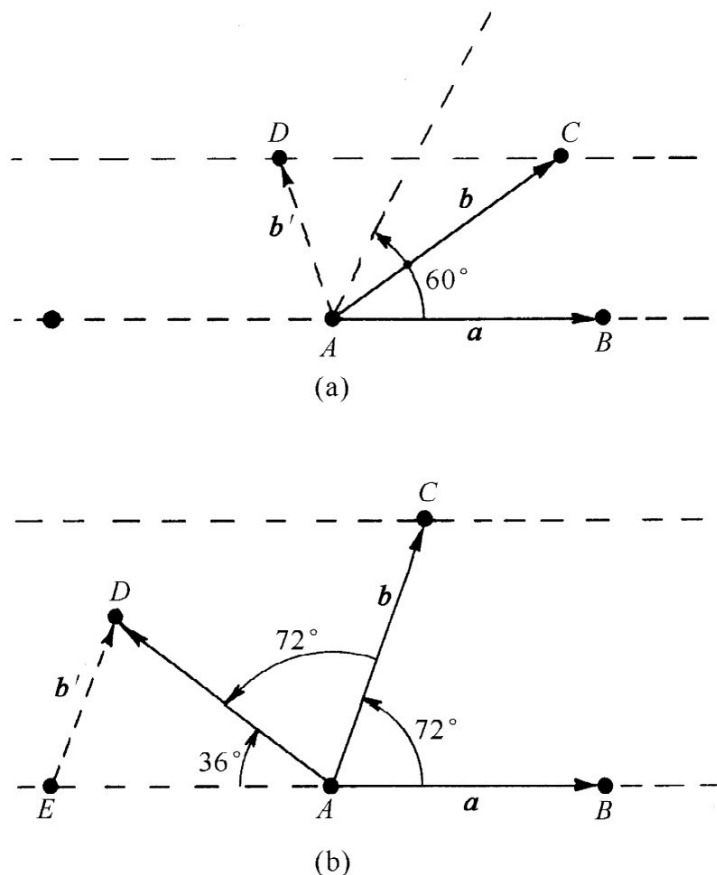


图30-8 (a) 多于六次的转动对称是不可能的；(b) 五次转动对称性也没有可能

关于五次对称又怎么样呢？若我们假定该初基矢 a 和 b 具有相等长度，并且做成一个等于 $2\pi/5=72^\circ$ 的角度，如图30-8 (b) 所示，那么在 D 处也就应有一个等效格点与 C 作成 72° 角。但此时从 E 至 D 的矢量 b' 比 b 短，因而 b 就不是一个初基矢了，这样五次对称就不可能存在。不至于使我们陷入这类困难中去的可能性只有 $\theta=60^\circ$ ， 90° 或 120° 。 0° 或 180° 显然也都可能。对上述结果的一种提法是：通过转动一个整圈（即完全不变动）、半圈、三分之一、四分之一或六分之一圈，图样能够保持不变。而这些就是在一个平面上所有可能的转动对

称性——总共有五种。如果 $\theta=2\pi/n$ ，我们就说这是一个“ n 次（度）”对称性。我们说，一个 n 等于4或6的图样比一个 n 等于1或2的图样具有“较高的对称性”。

回到图30-7（a），我们看到这个图样具有四次转动对称性。在图30-7（b）中曾画出一个与图（a）具有相同对称性的另一个图样。那些像逗点模样的小图形是用来在每个方块中定义该图样对称性的一个不对称的东西。注意在相邻方块中的逗点都是彼此反转的，因而单胞比每一方块要大。假如没有那些逗点，该图样仍然会有四次对称，但单胞就会小些。图30-7的图样也还有别的对称性。例如，对任何虚线 $R-R$ 的反映会再产生相同的图样来。

图30-7的图样还有另一类对称性。若该图样对 $Y-Y$ 线反映并向右（或向左）移过一个方块，则我们将得到原来的图样。这 $Y-Y$ 线称为“滑移”线。

这些就是在二维中所有的可能对称性。还有一种空间对称操作，它与在二维中的 180° 转动等效，但在三维中却是一个很特殊的操作，这就是反演。所谓反演我们意指从某一原点〔比方，图30-9（b）中的 A 点〕做出的位移矢量 $\mathbf{R}$ 所指的任一点被移至 $-\mathbf{R}$ 的另一端。

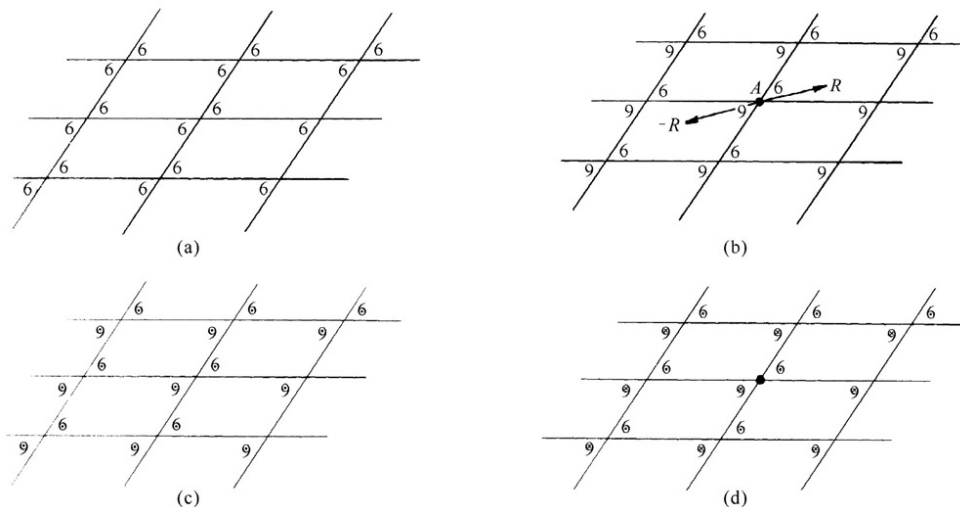


图30-9 反演对称性。若把 R 变成 $-R$ ，图样 (b) 将保持不变，但图样 (a) 却将改变。在三维中，图样 (d) 具有反演对称性而图样 (c) 则没有

图30-9的图样 (a) 通过反演产生出一个新的图样，但图样 (b) 的反演又再产生出相同的图样。对于一个二维图样来说（正如你可以从图上看出来的），通过 A 点对图样 (b) 的反演与环绕同一点做 180° 的转动等效。然而，假设通过想象将每一小逗点都各加上一个从页面上指出来的“箭头”以便使图30-9 (b) 的图样变成个三维的图样。在经历了三维中的反演之后，所有的箭头都将倒向，因而该图样就不会再现。若我们分别用点和叉来代表箭头和箭尾，则能造成一个如图30-9 (c) 所示的那种三维 图样，在反演下它是不 对称的，或者造成一个像图 (d) 所示的图样，那就具有 反演对称性了。注意，用转动的任何组合来模拟三维中的反演是不 可能。

如果我们用刚才所描述的那些类型的对称操作来标志一个图样——或晶格——的“对称性”，那么结果弄清楚，对于二维可能有17种不同的图样。我们曾在图30-1中画出一个对称性可能最低的图样，而在图30-7中又画出一个对称性高的图样。把17种可能图样都画出来，作为游戏留给你们。

在这17种可能的图样中，只有寥寥几种才被用来制作墙纸和织物，那是有点奇怪的。人们始终只看到那三四种基本图样。这是因为设计者缺乏想象力，还是因为许多可能的图样都不悦目呢？

§30-6 三维对称性

迄今我们所谈到的都只是有关二维的图样。然而，我们实际感兴趣的却是三维中的原子图样。首先，很明显的就是一块三维晶体将具备三个基矢。于是，如果我们问起在三维中的可能的对称操作，则将发现共有230种不同的可能对称性！为了某些目的，这230种类型还可归纳成七类，它们绘在图30-10中。那对称最少的一种晶格称为三斜类，它的单胞是平行六面体。基矢的长度各不相同，而它们间的夹角也不会有任何两个相等，所以没有任何转动或反映对称的可能。然而，仍然有两种可能的对称性——即通过对顶点的反演能使单胞改变或不改变〔在三维中所谓反演我们的意思仍然是空间位移 $\mathbf{R}$ 由 $-\mathbf{R}$ 代替——换句话说，就是从 (x, y, z) 变成 $(-x, -y, -z)$ 〕。因此，三斜晶格就只有两种可能的对称性，除非在那些基矢之间存在某种特殊关系。例如，若所有的基矢长度都相等并以相同角度分隔开，则人们便有图中所示的三角晶格。这个图形可以有一个附加的对称性，通过对体内的长对角线的转动它可以保持不变。

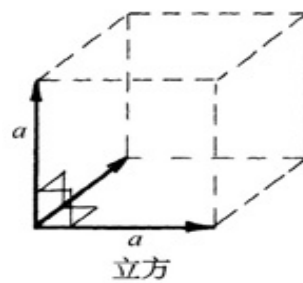
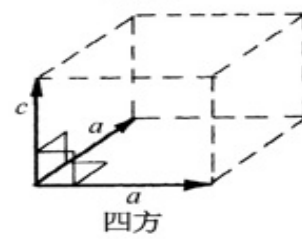
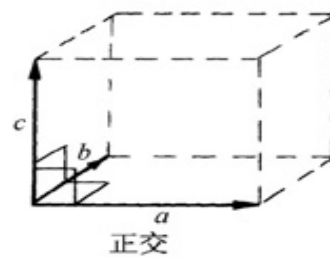
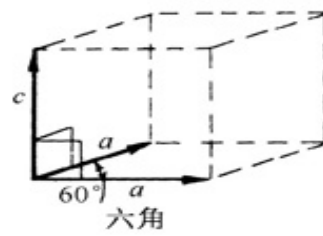
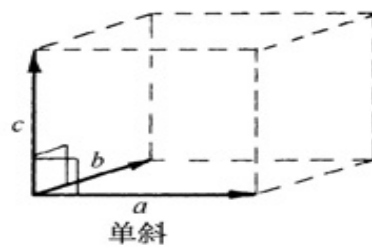
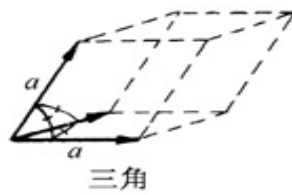
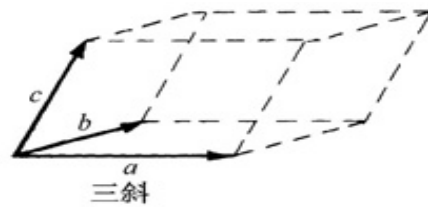


图 30-10 七大类晶格

如果其中一个基矢，比如说 c ，垂直于其他两个，则我们得到一个单斜的单胞。一个新的对称性成为可能——就是围绕着 c 转过 180° 。六角单胞是一种其中 a 和 b 两矢量长度相等而其夹角则为 60° 的特殊情况，因而围绕着 c 所作的 60° ， 120° 或 180° 转动就重复相同的晶格（对于某些内禀对称性而言）。

如果所有三个基矢都互成直角，但长度不同，则将得到一个正交单胞。这一图形在环绕那三根轴中任一根轴转过 180° 时都是对称的。对于其中三个基矢都互相正交而其中又有两个彼此等长的四方单胞，则可能有较高级的对称性。最后，还有立方单胞，那就是所有晶体之中对称性最多的了。

全部关于对称性的这种讨论其要点在于晶体的内禀对称性，有时会以巧妙的方式表现在晶体的宏观物理性质中。例如，晶体一般都有一个张量性电极化率，如果我们用极化椭球来描写该张量，则应当预期某些晶体对称性也可能会表现在该椭球中。例如，立方晶体相对于围绕三个正交方向之一的 90° 转动都是对称的。很明显，具有这种性质的唯一椭球就是圆球。因而立方晶体就必然是各向同性的电介质。

另一方面，四方晶体具有四次转动对称性，所以它的椭球就必定具有两个等长的主轴，而其第三根轴必与晶轴平行。同理，由于正交晶体对三根正交轴都有二次转动对称性，所以它的这些轴就必然与极化椭球的轴相合。与此相似，单斜晶体中的一根轴必然平行于这一椭球的三根主轴之一，尽管我们对其他两轴不能说些什么。由于三斜晶体不具有转动对称性，所以其椭球就可以具有完全任意的取向了。

正如你所能见到的，对算出各种可能对称性并将其与各种可能的物理张量联系起来，我们可以进行一场大的游戏。刚才仅仅考虑了极化张量，但对于其他张量——比如弹性张量——事情就会变得更加复杂。有一门称为“群论”的数学分支就是与这些课题打交道的，但通常用常识也能解决你所需要的问题。

§30-7 金属强度

我们已经说过，金属通常具有一种简立方的晶体结构，现在要来讨论它们的力学性质——那是与这一结构有关的。一般而言金属十分“柔软”，因为很容易使金属晶体中的一层在另一层上滑动，你可能会认为：“那是滑稽可笑的，金属很强硬嘛。”这可不然，因为金属单晶是很容易变形的。

假设我们考察晶体中受切向力作用的两层，如30-11的简图所示。起初你也许会想到，整层原子会阻碍运动直到所施之力大到足以推动整层“越过隆起”，从而向左移过一个峡谷。尽管滑移的确会沿一个平面发生，但实际却不是那样的（假如是那样的话，你会算出金属比实际的强度要强得多）。实际发生的情况更像是每次只有一个原子在移动，首先左边那个原子跳了过去，然后又轮到第二个、第三个等等，如图30-11（b）所示。事实上，是两个原子间的空穴迅速跑到右边，而净结果则是整个第二层都已移过了一个原子间隔。滑移就是这样进行的，因为每次要把一个原子抬高越过一个隆起所需的能量远低于把整排原子都抬起来所需的能量。一旦力足以启动这一过程，其余的就进行得非常快了。

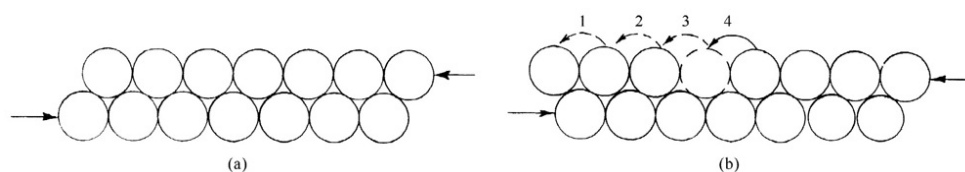


图 30-11 晶面滑移

结果证明：在一实际晶体中，滑移将在一个平面上重复发生，然后就在那里停顿下来，却又在某另一个面上开始。滑动为什么会开始和停止，其细节十分神秘。事实上，滑移相继发生的区域，往往被相当均匀地分隔开，这就很奇怪了。图30-12显示一块细长的铜晶体在受到拉伸后的照片，你能够看到滑移发生的那些不同平面。



图30-12 一小块铜晶体受拉伸之后的照片

如果你把一根其中存在一些大晶体的细锡线拿到耳边，并拉伸它时，则个别晶面的突然滑移会很明显。当那些滑移面一个接着一个咯一声移至一个新的位置上去时，你会听到一大堆嘀嗒声。

在一排原子中出现一个“空位”的问题也许比按照图30-11所示的情形较难实现。当有更多的层时，情况就必然有点像图30-13所示的那样。晶体中这样的一种不完整性叫作位错。推测这种位错或是在晶体形成时就存在，或是在其表面的某些切口或裂缝处产生，一旦它们产生了，就能够相当自由地在晶体里移动。由于大量这样的位错的运动就形成了宏观的畸变。

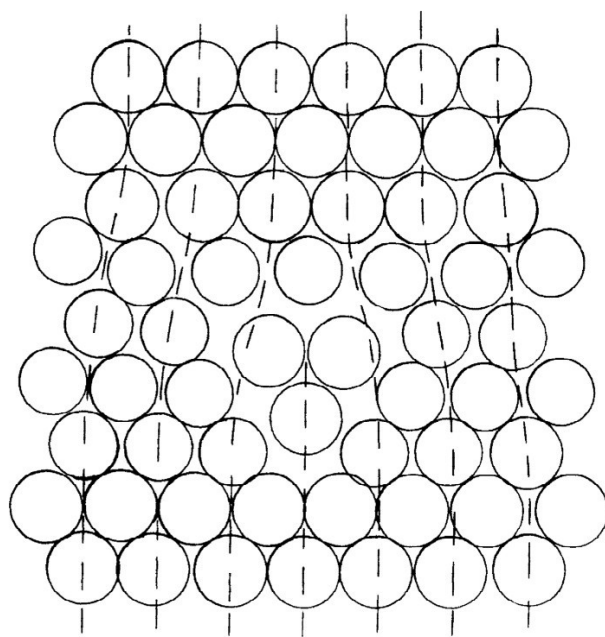


图30-13 晶体中的一个位错

位错能够自由运动——这就是说，它们要求极少量的额外能量——只要晶体的其余部分都具有理想晶格。但如果位错碰到晶体中别种缺陷的话可能会给“粘住”。若要位错通过这种缺陷则需要很大能

量，否则运动就会停歇。这恰好就是赋予不完整金属晶体以强度的机制。纯铁本来很软，但微小浓度的杂质原子就可以引起足够多的缺陷来有效地束缚住位错。正如你所知道的，钢基本上就是铁，却十分坚硬。要炼成钢，就把小量碳溶解在铁水中了，如果这熔体迅速冷却，碳便会淀积成小晶粒，在晶体里引起了许多微观畸变。位错不能再到处移动，因此金属就变硬。

纯铜十分柔软，但可以进行“加工硬化”。这是通过锤打或来回弯曲而做到的。在这种情况下，许多新的各类位错形成了，从而彼此互相干扰，减低了它们的可动性。也许你曾看过这样一种特技，取一条“极软”的铜带轻轻地将其弯曲成围绕在某人腕上的手镯。在这一过程中，铜镯受到加工硬化，便不能轻易地再被伸直！像铜这样受过加工硬化的金属，可以通过高温退火而再变软。原子的热运动把那些位错都“熨平”了，并再形成一些大块单晶。我们迄今仅仅描述了那种所谓滑移位错。还有许多其他种类，其中之一就是如图30-14所示的那种螺旋位错。这种位错经常在晶体生长中起着重要作用。

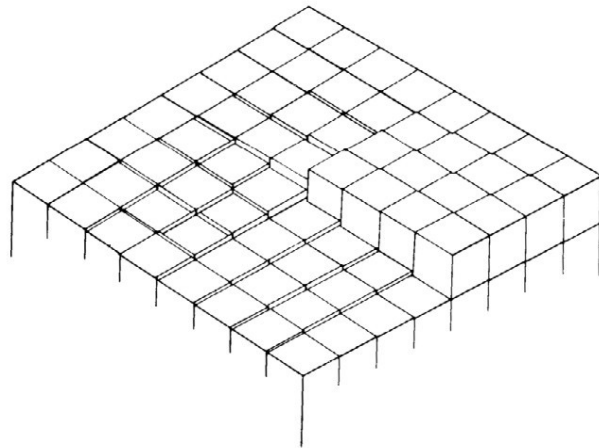


图 30-14 螺旋位错

§30-8 位错与晶体生长

长期以来一个重大难题就是晶体如何才能合理生长。我们已描述过每一原子也许是在经过了反复试验之后才决定是否最好加入晶体中去。但这就意味着每个原子必须找到一个能量低的地方。然而，被置在一个新的表面上的原子只受到来自其下面的一个或两个化学键结合，而不会具有与被放在一个角落里受到三面原子包围时所具有的相同能量。假设我们把一块正在生长的晶体想象为如图30-15所示的一堆木块。若试图把新的一块放置在比如 A 的位置上，它将仅有最终可能得到的六个邻居中的一个。既然缺少那么多的键，因此它的能量便不会很低。但若放在位置 B 上那就会好得多，那里已具备全部化学键的一半份额。晶体的确是通过把新的原子吸附在像 B 那样的位置上而生长起来的。

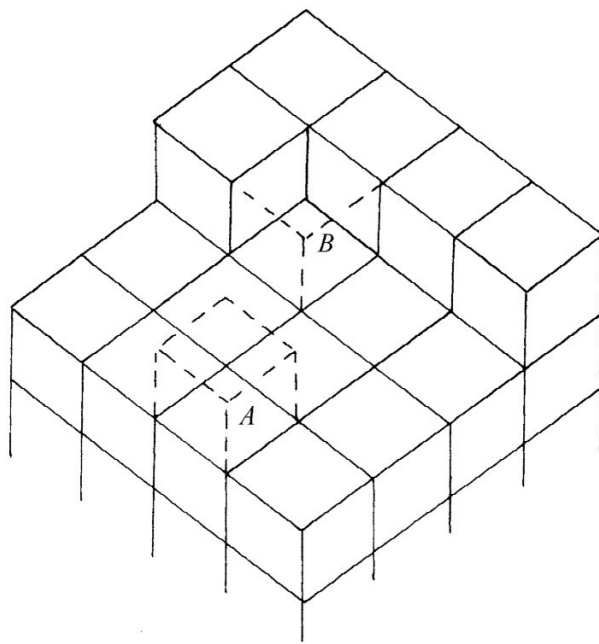


图30-15 晶体生长

然而，当这一行完成后又将如何呢？为开始新的一行，结果一个原子必须仅由两个附着的侧面来承担，而这又不太可能了。即使真的是这样，当全层结束了又该如何呢？怎能开始一个新的层呢？一个答案是：晶体喜爱在位错处生长，比如围绕一个如图30-14所示的那种螺型位错生长。当一些块块加到晶体之上时，总会有这样的地方，那里存在三个可资用的化学键。因此，晶体喜欢同内部的位错生长在一起。这种生长的螺旋形图样如图30-16所示，那是一块石蜡单晶的照片。

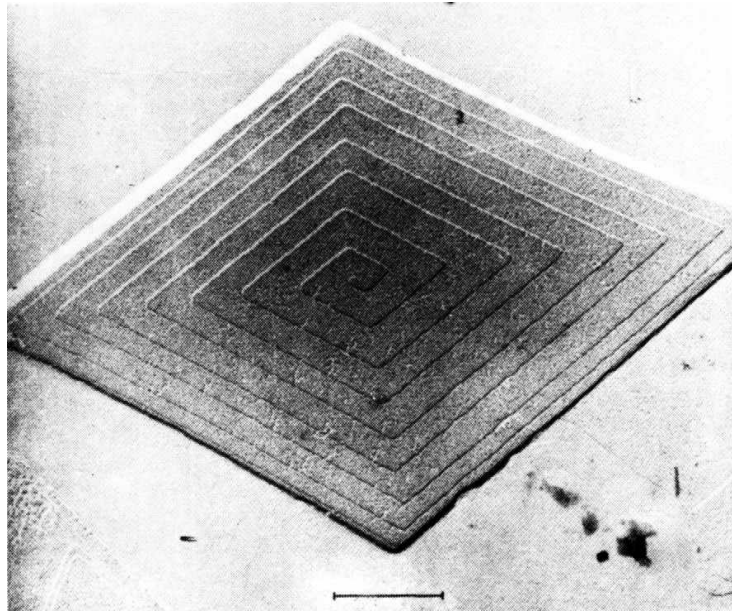


图30-16 一块曾围绕着一个螺型位错而生长起来的石蜡晶体

§30-9 布拉格-奈晶体模型

我们当然不能看到各个原子在晶体中所经历的过程。并且，正如你现在所认识的，有许多复杂现象是不容易作定量处理的。布拉格爵士和奈曾想出一种方案来制作金属晶体的模型^[1]，这种模型能以令人惊奇的方式表现出许多据信是在实际金属中发生的现象。

[1] 原书复制了这种模型的原始文献（*Proceedings of the Royal Society of London* , Vol.190, September 1947, pp.474~481）。由于此附件过于繁复，没有译出。——译者注

第31章 张量

§31-1 极化张量

物理学家总有这么一种习惯，即取任何现象的最简单例子并称之为“物理学”，而把那些更复杂的例子留给其他学科——诸如应用数学、电工学、化学、晶体学等——去处理。甚至固体物理几乎只算得半个物理学，因为它对一些特殊物质操心得太多。所以在这些讲演中我们将常常漏掉许多有趣的东西。例如，晶体——或大多数物质——的重要性质之一就是它的电极化率在不同方向上并不相同。如果你在任一方向加上电场，则原子的电荷将会移动一点点而产生出一个电偶极矩，可是这偶极矩的大小在很大程度上却取决于场的方向。当然，这是相当复杂的。但在物理学中我们一般通过谈论极化率在一切方向都相同的特殊情况开始，目的在于使生活过得容易些。其他情况则都留给别的部门。因此，在这一章中将要论及的东西，对于我们今后的工作来说是完全不需要的。

张量数学对于描述随方向而变的那些物质性质特别有用——尽管这只是其用途的一个方面。由于你们中大多数人不准备成为物理学家，但将会进入各种事态都与方向密切相关的现实世界中，所以你们迟早需要用到张量。为了不遗漏任何东西，我们即将描述张量，即使不是十分详尽也罢。你们要有物理学处理问题是完整的那种感觉。例如，我们的电动力学是完整的——正如同任何电磁学课程甚至研究院课程那么完整。我们的力学不够完整，因为当过去学习力学时，你们

还不具备高水平的数学技巧，因而不能讨论像最小作用原理、拉格朗日函数、哈密顿函数等那类课题，这些都是描述力学的更精致的方法。然而，除了广义相对论之外，我们的确已有了一整套力学定律。我们的电磁学是完整的，而一大堆其他东西也很完整。自然，量子力学还谈不上——我们得留一些东西在后头。可是，你至少应该知道张量是什么。

我们曾在第30章中强调过，结晶物质的特性在不同方向上是不同的——我们说它们是各向异性的。感生偶极矩随所加电场的方向而改变的情况，只是我们将作为张量应用的一个例子。我们讲，对于某个给定方向的电场，单位体积内的感生偶极矩 $\mathbf{P}$ 与这外加电场 $\mathbf{E}$ 的强度成正比（如果 $\mathbf{E}$ 不太大，这对于许多物质来说都是个很好的近似）。我们将称这个比例常数为 α [1]。现在要来考虑 α 与外加场方向有关的那类物质，诸如像方解石那样的晶体，当你通过它看物体时会看到双像。

假定在某一特定晶体中，我们已发现在 x 方向的电场 $\mathbf{E}_1$ 在 x 方向产生一个极化强度 $\mathbf{P}_1$ 。然后又发现在 y 方向有一个与 $\mathbf{E}_1$ 同等强度 的电场 $\mathbf{E}_2$ ，却在 y 方向产生一个不同的极化强度 $\mathbf{P}_2$ 。如果我们把电场置于 45° 角上又将如何呢？噢，那是沿 x 与沿 y 两种场的叠加，因而极化强度 $\mathbf{P}$ 便将是 $\mathbf{P}_1$ 与 $\mathbf{P}_2$ 的矢量和，如图31-1（a）所示。极化强度不再与电场同方向了。你可以看出这结果如何才会出现。可能有些电荷很容易上下移动，但对于侧向运动则相当困难。当力作用于 45° 角时，电荷就会向上动得比向侧面远一些。位移并不沿外力方向，因为存在非对称的内部弹性力。

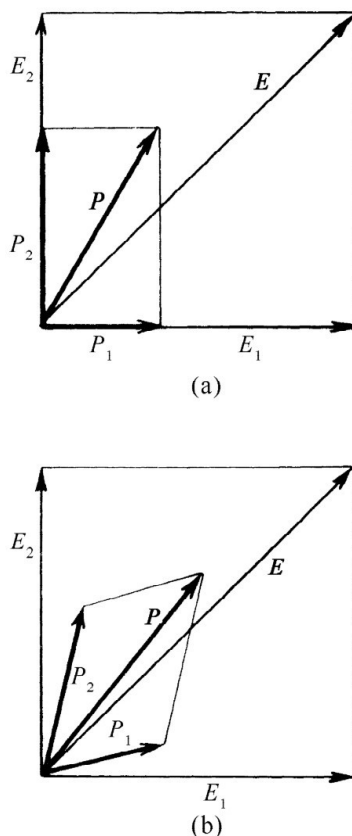


图 31-1 在一块各向异性的晶体中，极化强度的矢量加法

当然，对于 45° 并没有什么独特意义。晶体的感生极化强度不在电场的方向上是普遍正确的。在上述例子中，我们碰巧对于 x 和 y 轴做了一个侥幸选择，即对该两轴来说 $\mathbf{P}$ 都沿着 $\mathbf{E}$ 。要是晶体相对于坐标轴有了转动，则在 y 方向上的 $\mathbf{E}_2$ 就可能产生一个含有 x 分量也含有 y 分量的极化强度 $\mathbf{P}$ 。同理，起因于 x 方向电场的极化强度也会有 x 和 y 两个分量。那么极化强度就该如图31-1 (b) 所示，而不再像 (a) 那种模样了。事情变得较为复杂——但对于任何场 $\mathbf{E}$ 来说， $\mathbf{P}$ 的大小仍然正比于 $\mathbf{E}$ 的大小。

我们现在要处理晶体相对于坐标系有任意取向的那种普遍情况。沿 x 方向的电场将产生一个具有 x ， y 和 z 各分量的极化强度 $\mathbf{P}$ ，我们可以写为

$$P_x = \alpha_{xx} E_x, \quad P_y = \alpha_{yx} E_x, \quad P_z = \alpha_{zx} E_x. \quad (31.1)$$

这里我们正在讲述的一切就是：若电场处在 x 方向，则极化强度不一定在同一方向，而是含有 x ， y 和 z 各分量——每个分量都正比于 E_x 。我们分别称这些比例常数为 α_{xx} ， α_{yx} 和 α_{zx} （第一个字母告诉我们 $\mathbf{P}$ 包含的分量，末一个字母则表明电场的方向）。

同理，对于一个沿 y 方向的场，我们可以写成

$$P_x = \alpha_{xy} E_y, \quad P_y = \alpha_{yy} E_y, \quad P_z = \alpha_{zy} E_y; \quad (31.2)$$

而对于一个沿 z 方向的场，则有

$$P_x = \alpha_{xz} E_z, \quad P_y = \alpha_{yz} E_z, \quad P_z = \alpha_{zz} E_z. \quad (31.3)$$

原来我们已经说过，极化强度线性地依赖于场，因而若有一个兼有 x 和 y 分量的电场 $\mathbf{E}$ ，则最后得到的 $\mathbf{P}$ 的 x 分量将等于式（31.1）和（31.2）的两个 P_x 之和。如果 $\mathbf{E}$ 具有沿 x ， y 和 z 的各分量，则最后得到的 $\mathbf{P}$ 的分量将等于式（31.1）、（31.2）和（31.3）的三个贡献之和。换句话说， $\mathbf{P}$ 将由下列诸式给出：

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z, \\ P_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z, \\ P_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (31.4)$$

于是晶体的介电行为就由这九个量 ($\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{xz}, \alpha_{yz}, \dots$) 完整地描述, 我们可用 α_{ij} 这个符号来作代表 (每个下脚标 i 和 j 各代表三个可能字母 x, y 和 z 中的任一个)。一个任意电场 $\mathbf{E}$ 可以分解为分量 E_x, E_y 和 E_z , 从这些我们就能够用 α_{ij} 来求出 P_x, P_y 和 P_z , 它们一起给出总极化强度 $\mathbf{P}$ 。由这九个系数 α_{ij} 构成的一组数称为 张量——在本例中, 即指 极化张量。正如我们所说三个数 (E_x, E_y, E_z) 会“构成矢量 $\mathbf{E}$ ”那样, 我们也可讲这九个数 ($\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \dots$) “构成张量 α_{ij} ”。

§31-2 张量分量的变换

你知道, 当我们变换到另一个坐标系 x', y', z' 时, $\mathbf{E}$ 矢量的分量 $E_{x'}, E_{y'}$ 和 $E_{z'}$ 将完全不同—— $\mathbf{P}$ 的分量也是如此。所以对于不同坐标系, 系数 α_{ij} 将不相同。事实上, 你可以通过用适当办法改变 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$ 的分量而看出那些 α 应该怎样被改变, 因为如果我们在该新坐标系里描述原来的物理 电场, 就仍应得到原来的极化强度。对于任一个新的坐标系, $P_{x'}$ 是 P_x, P_y 和 P_z 的一个线性组合:

$$P_{x'} = aP_x + bP_y + cP_z,$$

而对于其他各分量也是如此。如果你利用式 (31.4) 由那些 E 来代替 P_x, P_y 和 P_z , 则可获得

$$P_{x'} = a(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) + b(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \dots) + c(\alpha_{zx}E_x + \dots + \dots).$$

然后再用 $E_{x'}$, $E_{y'}$ 和 $E_{z'}$ 来写出 E_x , E_y 和 E_z , 例如

$$E_x = a'E_{x'} + b'E_{y'} + c'E_{z'},$$

式中 a' , b' , c' 与 a , b , c 有关, 但彼此不相等。因此你就有了以分量 $E_{x'}$, $E_{y'}$ 和 $E_{z'}$ 表示的 $P_{x'}$ 的式子, 也就是说, 你已有一套新的 α_{ij} 。这一步骤相当繁复, 但却十分直截了当。

当谈论改变坐标轴时, 我们正假定晶体在空间保持不动。若晶体跟着坐标轴转动, 则那些 α 就不会改变。反之, 假如晶体的取向相对于坐标轴变了, 则我们就理应有一套新的 α 。但如果这些 α 对于晶体的任何取向为已知, 则对于任何其他取向就都可以通过刚才所述的那种变换求得。换句话说, 晶体的介电性质可以通过给出相对于任意选定的坐标系的极化率张量 α_{ij} 而做出完整的描述。正如我们可以把一矢量速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 与一个粒子联系起来那样, 只要改变坐标轴就知道这三个分量将按照某一特定方式改变, 所以对于晶体来说, 我们也将它与它的极化张量 α_{ij} 联系起来, 如果坐标系改变, 则这九个分量将按照某一规定方式变换。

式 (31.4) 中所写出的 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 间的关系可以用更简洁的符号表示:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j, \quad (31.5)$$

这里应理解 i 代表 x , y 或 z , 而在求和符号中的 j 则取 $j = x, y$ 和 z 。为了与张量打交道, 已经发明了许多种独特的符号表示法, 但每一种方法只对于有限几类问题较方便。一个共同的惯例是省略掉式 (31.5)

中的求和符号（ Σ ），而留下一个默认：每当同一个下脚标（这里是 j ）出现两次时，就要对它求和。由于我们对张量用得那么少，所以就无须去关心采用任何这种独特的符号表示法或规则了。

§31-3 能量椭球

现在想要取得有关张量的某些经验。假定我们提出一个有趣问题：要使晶体极化需要多少能量（除了我们已知的电场中单位体积能量 $\epsilon_0 E^2/2$ 以外）？暂时考虑那些正在发生位移的原子电荷。使电荷移动距离 dx 所做的功为 $qE_x dx$ ，而倘若单位体积中有 N 个电荷，则所做总功为 $qE_x N dx$ 。但 $qN dx$ 又是单位体积中的偶极矩变化 dP_x ，因而单位体积所需的能量就是

$$E_x dP_x.$$

把场的三个分量所做的功合起来，就可得到单位体积的功为

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}.$$

由于 $\mathbf{P}$ 的大小正比于 $\mathbf{E}$ ，因此在使 $\mathbf{P}$ 从0增大至 $\mathbf{P}$ 时对单位体积所做的功就是对 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ 的积分。把这个功叫作 u_P ^[2]，就可写出

$$u_P = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_i E_i P_i. \quad (31.6)$$

现在可以根据式（31.5）用 $\mathbf{E}$ 表示 $\mathbf{P}$ ，因而有

$$u_P = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} E_i E_j. \quad (31.7)$$

这能量密度 u_P 是一个与坐标轴的选择无关的数值，因此是一个标量。这样，张量便有这么一种性质，即当它对其中一个下脚标（即对一矢量）求和时，会给出一个新的矢量；而当它对两个下脚标（即对两个矢量）都求和时，则会给出一个标量。

张量 α_{ij} 实际上应称为“二阶张量”，因为它有两个下脚标。矢量——带有一个下脚标——是一阶张量，而标量——完全没有下脚标——则是零阶张量。因此我们讲，电场 $\mathbf{E}$ 是一阶张量，而 u_P 则是零阶张量。有可能把张量的概念推广到三个或四个下脚标，因而形成了高于二阶的张量。

极化张量的下脚标取遍三个可能的数字，这是三维中的张量。数学家会考虑在四维、五维或更多维中的张量。我们在对电磁场的相对论性描述中已采用过一个四维张量 $F_{\mu\nu}$ （第26章）。

极化张量 α_{ij} 具有一个有趣的性质，即它是对称的，这就是说， $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ ，而对于任何对下脚标都是如此（这是实际晶体的一种物理性质，而对一切张量并不一定如此）。你可以通过在下述循环中计算晶体的能量变化而自己去证明那必然是正确的：（1）在 x 方向加一电场；（2）在 y 方向加一电场；（3）除去沿 x 方向的场；（4）除去沿 y 方向的场。现在晶体已回到原来出发时的那个状态，因而在极化过程中所做的净功必须回到零。然而，你能够证明，要此事成立， α_{xy} 必须等于 α_{yx} 。当然，相同种类的论证也可对 α_{xz} 等等进行。因而极化张量是对称的。

这也就意味着，极化张量可以通过只测量在不同方向上使晶体极化所需的能量而加以测定。假设我们加上一个只有 x 和 y 分量的 $\mathbf{E}$ 场，那么按照式（31.7），就有

$$u_P = \frac{1}{2} [\alpha_{xx} E_x^2 + (\alpha_{xy} + \alpha_{yx}) E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2]. \quad (31.8)$$

仅用一个 E_x 场，就可以测定 α_{xx} ；仅用一个 E_y 场，则可以测定 α_{yy} ；若同时用 E_x 和 E_y 两者，还可得到由含有 $(\alpha_{xy} + \alpha_{yx})$ 这一项而引起的附加能量。由于 α_{xy} 与 α_{yx} 相等，所以这一项为 $2\alpha_{xy}$ ，并且可以与能量联系起来。

式（31.8）的能量表示式具有漂亮的几何解释。假设我们问起对应于某一给定能量密度——比如说 u_0 ——该有什么样的场 E_x 和 E_y ，那恰好就是求解下列方程式的数学问题：

$$\alpha_{xx} E_x^2 + 2\alpha_{xy} E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2 = 2u_0.$$

这是一个二次方程，因此如果我们把 E_x 和 E_y 画成曲线，则这一方程的解便是在一个椭圆上的所有各点（图31-2）（它必须是个椭圆，而不是一条抛物线或双曲线，因为任何场的能量总是正的而且是有限的）。具有分量 E_x 和 E_y 的矢量 $\mathbf{E}$ 可以从椭圆的原点画到椭圆上，因此，像这样的—个“能量椭圆”就是使极化张量“形象化”的一种巧妙方法。

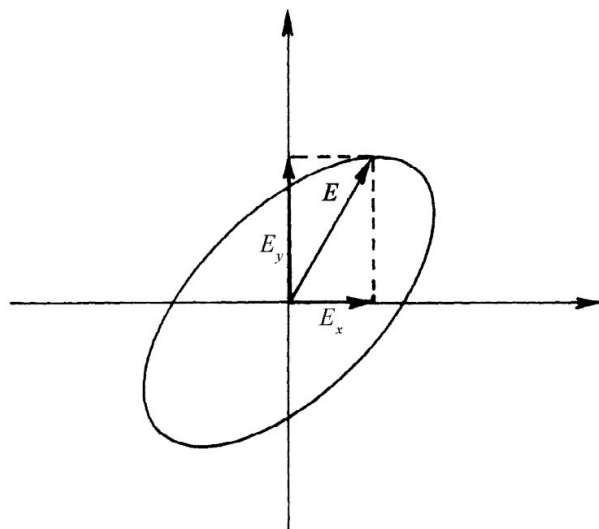


图31-2 提供恒定极化能的矢量 $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ 的轨迹

如果我们现在推广至包括所有三个分量的情况，则所需在任何方向提供单位能量密度的电场矢量 $\mathbf{E}$ 就会在椭球表面上给出一点，如图31-3所示。这个恒定能量椭球的形状唯一地表示着张量极化率的特征。

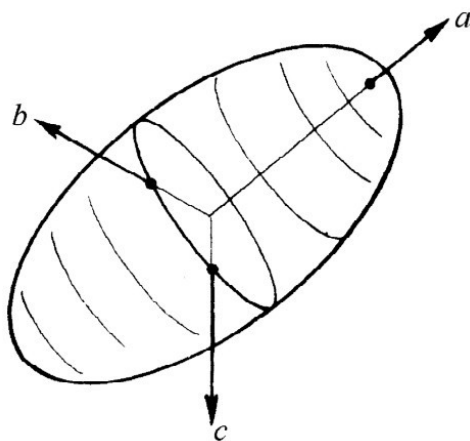


图31-3 极化张量的能量椭球

原来椭球具有这么一个有趣性质，即它总是可以简单地通过给出三个“主轴”方向以及沿这些轴的椭圆直径而加以描述。“主轴”的方向就是最长直径与最短直径的方向以及与两者都正交的另一方向。它们

由图31-3中 a ， b 和 c 三根轴所标明。相对于这些轴，椭球具有特别简单的方程

$$\alpha_{aa}E_a^2 + \alpha_{bb}E_b^2 + \alpha_{cc}E_c^2 = 2u_0.$$

因此，相对于这些轴，介电张量就只有三个不等于零的分量： α_{aa} ， α_{bb} 和 α_{cc} 。这就是说，不管晶体如何复杂，总能够选取一组坐标轴（不一定是晶体本身的轴），在其中极化张量只有三个分量。用这样一组坐标轴，式（31.4）便简单地变成

$$P_a = \alpha_{aa} E_a, \quad P_b = \alpha_{bb} E_b, \quad P_c = \alpha_{cc} E_c. \quad (31.9)$$

沿任何一个主轴的电场将产生沿同一个轴的极化，当然这三条轴的系数可能是不同的。

人们往往这样来描述张量，即把那九个系数列在一个方括号内：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.10)$$

对于主轴 a ， b 和 c 来说，只有那些对角线的项才不等于零，这时我们就说“张量是对角的”。整个张量为

$$\begin{bmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{bmatrix}. \quad (31.11)$$

重要之处在于，任何极化张量（实际上，在任何维数中凡属于二阶的任何对称张量）都可以通过选取适当的一组坐标轴而写成这种形

式。

若对角形极化张量的三个元素都相同，即如果

$$\alpha_{aa} = \alpha_{bb} = \alpha_{cc} = \alpha, \quad (31.12)$$

则能量椭球就变成圆球，极化率在所有方向都相同，这种材料就是各向同性的。在张量符号表示法中，

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (31.13)$$

式中 δ_{ij} 为单位张量

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31.14)$$

当然，这意思是：

$$\delta_{ij} = 1, \text{ 若 } i = j; \quad (31.15)$$

$$\delta_{ij} = 0, \text{ 若 } i \neq j.$$

这个 δ_{ij} 张量通常称为“克罗内克 δ ”。你可以这样来自己取乐，即证明：若把坐标系改变成任何其他的直角坐标系，则张量式（31.14）仍然具有完全相同形式。式（31.13）的极化张量会给出

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} E_j = \alpha E_i,$$

这个式子意味着与我们以前关于各向同性电介质的结果

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$$

相同。

极化椭球的形状和取向有时可与晶体的对称特性联系起来。我们曾在第30章中说过，三维晶格共有230种不同的可能内部对称性，而对于许多目的来说，它们可以按照单胞的形状方便地归纳成七类。现在这极化椭球就应该分享晶体的这些内禀几何对称性。例如，三斜晶体具有低级对称——其极化椭球将有互不等长的轴，而每一轴的方向一般都没有与晶轴排成一线。另一方面，单斜晶体具有这样的特性，即如果晶体对其中的一轴转过 180° ，它的性质不会改变。所以在经过了这样一个转动之后极化张量应仍然相同。结果是，极化椭球在经过了 180° 转动后就必须回到其本身，这只有在该椭球的一根轴与晶体的对称轴的方向相同时才能发生。除此之外，这个椭球的取向和大小都不受限制。

可是对于正交晶体，该椭球的诸轴就必须都对应于各晶轴，因为围绕三个轴中任一轴的 180° 转动都将重复同一晶格。如果我们涉及四方晶体，则椭球必须具有相同的对称性，因而就必然会有两根相等的直径。最后，对于立方晶体来说，椭球的所有三根直径都必须等长，它变成了一个球，而晶体的极化率在所有方向就都相同。

对晶体的一切可能对称性算出各种可能有的张量类型将是一场大型游戏，这称为“群论”分析法。但对于极化张量的简单情况，要看出其中关系应该会怎么样，还是相对容易的。

§31-4 其他张量；惯量张量

还有许多其他张量的例子出现在物理学中。例如，在金属或任何导体中，人们经常发现电流密度 $\mathbf{j}$ 近似地正比于电场 $\mathbf{E}$ ，比例常数称为电导率 σ ：

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

可是，对于晶体来说， $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{E}$ 的关系就比较复杂了；电导率并非在所有方向都是一样的。电导率乃是一个张量，因而可以写成

$$j_i = \sum \sigma_{ij} E_j.$$

物理张量的另一个例子是转动惯量。在第1卷第18章中我们曾经见过，一块固体绕某一固定轴旋转时就有一个与角速度 ω 成正比的角动量 L ，而我们称这个比例因数 I 为转动惯量：

$$L = I\omega.$$

对一任意形状的物体，转动惯量与物体相对于转动轴的取向有关。例如，一块矩形板对于它的三个正交轴的转动惯量就各不相同。现在角速度 ω 和角动量 $\mathbf{L}$ 两者都是矢量。对于绕每一根对称轴的转动，它们彼此互相平行。但如果对于三根主轴转动惯量各不相同，则一般说来， ω 和 $\mathbf{L}$ 就不会在同一个方向上（图31-4）。它们以类似于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$ 间关系的方式互相联系着。一般说来，我们应当写出

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \end{aligned} \tag{31.16}$$

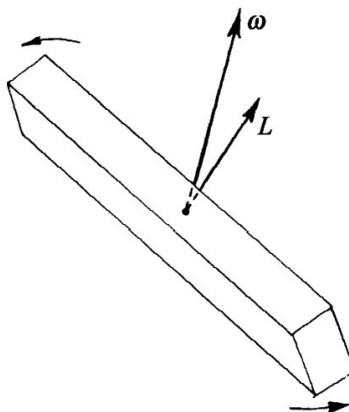


图31-4 一般说来，一块固体的角动量 L 并不平行于其角速度 ω

这九个系数 I_{ij} 称为惯量张量。按照与极化的类似性，任何角动量的动能理应为角速度分量 ω_x ， ω_y 和 ω_z 的某种二次型：

$$\text{KE} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (31.17)$$

我们可利用能量来定义惯量椭球。并且，关于能量的论证也可用来证明该张量是对称的，即 $I_{ij} = I_{ji}$ 。

若一刚性物体的形状为已知，则该物体的惯量张量便可以算出来。我们只需写下该物体中所有粒子的总动能。一个质量为 m 而速度为 v 的粒子具有动能 $\frac{1}{2}mv^2$ ，而总动能就不过是对该物体中所有粒子的动能求和

$$\sum \frac{1}{2}mv^2.$$

每个粒子的速度 v 与固体的角速度 ω 有关。现在假定，物体在绕我们认为静止的质心旋转。那么，若 $\mathbf{r}$ 是从质心到粒子的位移，则其速度

$\mathbf{v}$ 由 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 给出。因此总动能为

$$\text{KE} = \sum \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2. \quad (31.18)$$

眼前必须做的就是用 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 各分量和 x, y, z 写出 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ，并将这一结果与式 (31.17) 做一比较，通过识别各项以找出 I_{ij} 。在进行代数运算时，我们写出

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_x^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_y^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_z^2 \\ &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= +\omega_y^2 z^2 - 2\omega_y \omega_z x y + \omega_z^2 y^2 + \omega_z^2 x^2 - 2\omega_z \omega_x x z + \omega_x^2 z^2 + \omega_x^2 y^2 - 2\omega_x \omega_y y x + \omega_y^2 x^2. \end{aligned}$$

对这一方程乘以 $m/2$ ，对所有的粒子求和，并同式 (31.17) 做比较，我们见到，例如 I_{xx} 由下式给出：

$$I_{xx} = \sum m (y^2 + z^2).$$

这就是我们以前（第1卷第19章）曾经得到过的关于物体绕 x 轴的转动惯量公式。由于 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ，也可将这一项写成

$$I_{xx} = \sum m (r^2 - x^2).$$

算出所有其他各项，则惯量张量便可以写成

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m(r^2 - x^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(r^2 - y^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(r^2 - z^2) \end{bmatrix}. \quad (31.19)$$

如果你乐意的话，还可以按“张量符号表示法”写成

$$I_{ij} = \sum m (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j), \quad (31.20)$$

式中 r_i 是某个粒子位置矢量的 (x, y, z) 分量，而 $\sum$ 则意味着对所有粒子求和。于是转动惯量就是一个二阶张量，其中各项代表物体的一种属性，并且通过下式将 $\mathbf{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 联系起来：

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j. \quad (31.21)$$

对于不管什么形状的任何物体，我们都能够找到惯量椭球，从而找到三个主轴。对于这些轴来说，该张量将是对角的，所以对于任何物体就总存在三个互相正交的轴，绕这些轴的角速度与角动量互相平行。它们被称为惯量主轴。

§31-5 叉积

我们应当指出，从第1卷第20章后我们就已经应用过二阶张量了。在那里，我们曾用下式定义过“平面上的转矩”，诸如 τ_{xy} ：

$$\tau_{xy} = xF_y - yF_x.$$

推广到三维的情况，可以写成

$$\tau_{ij} = r_i F_j - r_j F_i. \quad (31.22)$$

τ_{ij} 这个量就是一个二阶张量。为了看清楚这个张量就是这样的形式，一种办法就是通过把 τ_{ij} 同某个矢量相结合，比方说按照下式同单位矢

量相结合，

$$\sum_j \tau_{ij} e_j.$$

如果这个量是一矢量，则 τ_{ij} 必然会像张量那样变换，这是我们关于张量的定义。把有关 τ_{ij} 的式子代入，便得

$$\sum_j \tau_{ij} e_j = \sum_j r_i F_j e_j - \sum_j r_j e_j F_i = r_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) F_i.$$

由于那些点积都是标量，所以右边两项都是矢量，因而它们之差也是矢量。因此 τ_{ij} 就是一个张量。

但 τ_{ij} 是一种特殊类型的张量，它是反对称的，即

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji},$$

所以它只有三个不等于零的项—— τ_{xy} ， τ_{yz} 和 τ_{zx} 。在第1卷第20章中我们已能够证明，这三项几乎是由于“偶然”才会像矢量的三个分量那样变换，以致我们可以定义：

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}).$$

我们所以说“偶然”，是因为它只发生于三维中。例如，在四维中，一个二阶的反对称张量就多达六个不等于零的项，因而肯定不能由具有四个分量的矢量来代替它。

正如轴矢量 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 实际上是一个张量那样，所以每个由两个极矢量构成的叉积也是张量——与上述相同的一切论证也都适用。可是，出自幸运，它们也可用矢量（实际上是一种膺矢）来表达，因而数学就给我们带来了方便。

从数学方面讲，若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是任意两个矢量，则那九个量 $a_i b_j$ 会形成一个张量（尽管它可能没有任何有用的物理目的）。这样，对于位置矢量 $\mathbf{r}$ 来说， $r_i r_j$ 就是一个张量，而由于 δ_{ij} 也是一个张量，我们便明白式（31.20）的右边确是一个张量。同样，式（31.22）也是一个张量，因为其右边的两项都是张量。

§31-6 应力张量

迄今我们所描述的对称张量都是在一个矢量与另一个矢量建立联系的过程中作为系数产生的。现在我们很想考察一个具有不同物理意义的张量——应力 张量。假设有一块被施以各种力的固体，我们说其内部会有各种“应力”，这意思是指，在材料中的相邻部分间存在一些内力。当我们在§12-3中考虑被伸展的膜中的表面张力时，就曾稍微谈及在二维情况下的这种应力。现在将看到，在三维物体的材料中内力可以由一个张量来描述。

考虑某种弹性材料——比如说是一大块果子冻——的物体。如果把这块材料切开，则切面每一边的物质一般都会受到内力作用而引起位移。在切开前，材料中的两部分间必然有力把材料维持在其固定位置，我们可以用这些力来定义应力。假设我们正在考察一块垂直于 x 轴的假想平面——像图31-5中的 σ 面——并询问在这个面上穿过小面

积 $\Delta y \Delta z$ 的力。设在这一面积左边的材料施力 $\Delta \mathbf{F}_1$ 于其右边的材料，如图（b）所示。当然，还有一个反作用力 $-\Delta \mathbf{F}_1$ 施于左边的材料上。如果该面积足够小，则我们预期 $\Delta \mathbf{F}_1$ 与面积 $\Delta y \Delta z$ 成正比。

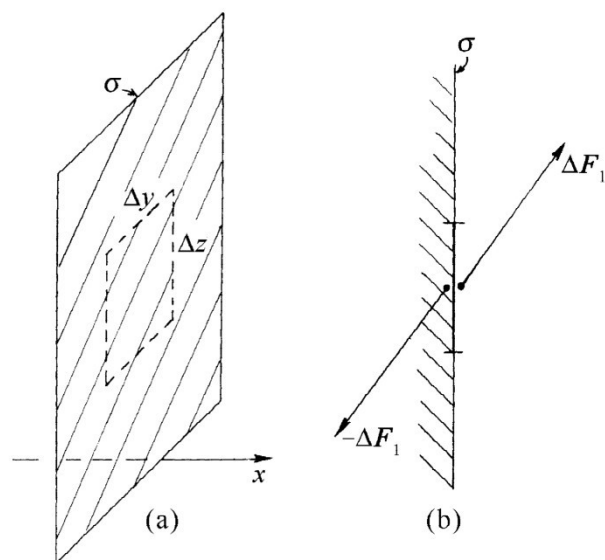


图31-5 σ 平面左边的材料穿过面积 $\Delta y \Delta z$ 施力 $\Delta \mathbf{F}_1$ 于该平面右边的材料上

你已经熟悉了应力中的一种——静止液体中的压强。在那里，力等于压强乘面积并与面积元垂直。对于固体——也对于运动中的黏滞性液体——来说，力就不一定与该面垂直，除了压强（正的或负的）之外还会有剪切力（所谓“剪切力”，指的是穿过面的力的切向分量）。力的所有三个分量都必须计算在内。也应该注意，如果我们在某个其他取向的平面上切割，则这些力将不相同。对于内应力的完整描述需要有一个张量。

我们按照下述办法对应力张量下定义：首先，我们想象一个垂直于 x 轴的切面并把穿过这切面上的力 $\Delta \mathbf{F}_1$ 分解成它的分量 ΔF_{x1} ， ΔF

y_1 和 ΔF_{z1} ，如图31-6所示。这些力对面积 $\Delta y \Delta z$ 的比值，分别被称为 S_{xx} ， S_{yx} 和 S_{zx} 。例如，

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta y \Delta z}.$$

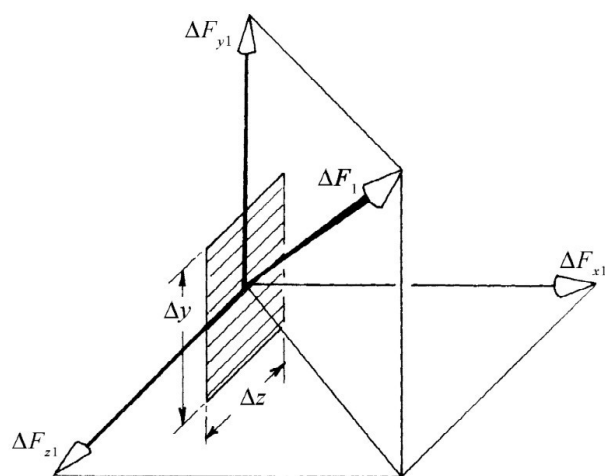


图31-6 穿过与 x 轴正交的面积元 $\Delta y \Delta z$ 的力 ΔF_1 可分解成三个分量 ΔF_{x1} ， ΔF_{y1} 和 ΔF_{z1}

第一个下脚标 y 指力的分量方向；第二个下脚标 x 指垂直于该面积的方向。如果你愿意，还可以把该面积 $\Delta y \Delta z$ 写成 Δa_x ，表明是一个垂直于 x 轴的面积元。于是

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta a_x}.$$

其次，我们设想一个垂直于 y 轴的想象的切面。穿过一小面积 $\Delta x \Delta z$ 将有力 $\Delta \mathbf{F}_2$ 。再把这个力分解成三个分量，如图31-7所示，并定义三个应力分量 S_{xy} ， S_{yy} ， S_{zy} ，作为在那三个方向上单位面积的力。最后，我们做一个垂直于 z 轴的想象切面并定义三个分量 S_{xz} ， S_{yz} 和 S_{zz} 。因此，我们就有了九个数值：

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.23)$$

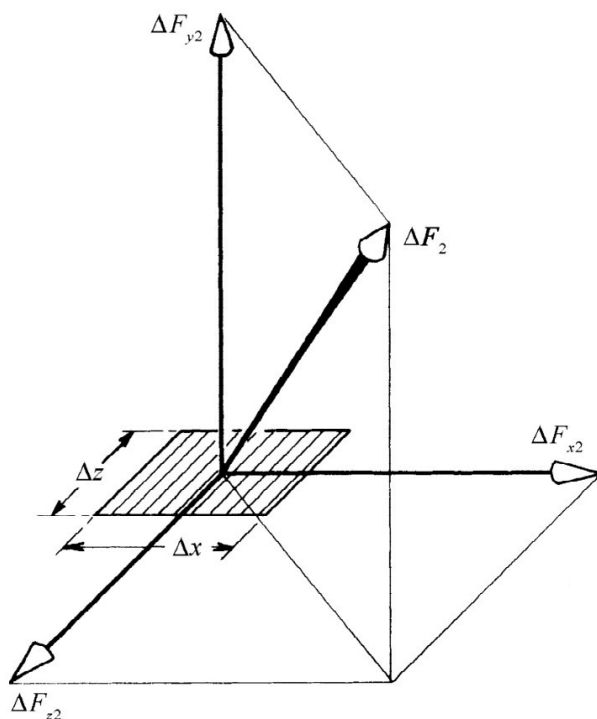


图31-7 穿过垂直于 y 轴的面积元的力被分解成三个互相垂直的分量

现在要来证明，这九个数值足以完整地描述应力的内部状态，而且 S_{ij} 的确是一个张量。假设我们想知道穿过一个以某个任意角度取向的面积元的力，能否从 S_{ij} 求得它呢？能，只要按照下述办法：试想象一

个小小的立体图形，在另加的面内有一个 N 面，而其他各面则都垂直于坐标轴。假如这个 N 面碰巧平行于 z 轴，则会有如图31-8所示的那个三角图形（这是有些特殊的情况，但将足以充分说明普遍的方法）。既然作用于图31-8中那个小三角体上的各应力是平衡的（至少在无限小尺寸的极限内），因而施于其上的总力就必须等于零。我们直接从 S_{ij} 知道了在垂直于各坐标轴的那些面上的力，它们的矢量和就应等于作用在 N 面上的力，因而我们可用 S_{ij} 来表示这个力。

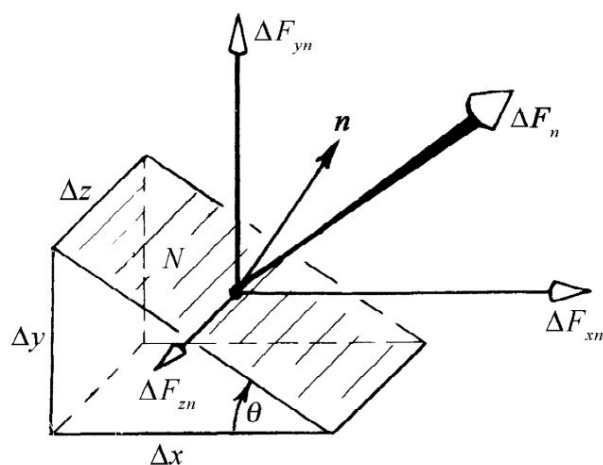


图31-8 把穿过 N 面（其单位法线为 n ）的力 ΔF_n 分解成各分量

关于作用在该小三角形体积上的表面力处于平衡这一假设，其中我们忽略了任何可能会存在的其他一些彻体力，诸如重力或摩擦力，如果我们的坐标系不是一个惯性坐标系的话就会存在摩擦力。然而，应该注意，这种彻体力将与那个小三角体的体积、因而也与 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 成正比，而所有的表面力则均与诸如 $\Delta x \Delta y$ ， $\Delta y \Delta z$ 等面积成正比。所以，如果我们把楔形物的尺寸取得足够小，则同表面力相比彻体力就总是可以被忽略的。

现在让我们把施于该小楔形物上的力都相加起来。首先考虑 x 分量，那是五个部分之和——从每一个面各有一部分。然而，如果 Δz 足够小，那么作用于（与 z 轴垂直的）那两个三角形上的力就会相等相反，因而可以将其忘却。作用于底面矩形上的力其 x 分量为

$$\Delta F_{x2} = S_{xy} \Delta x \Delta z .$$

作用于垂直矩形上的力为

$$\Delta F_{x1} = S_{xx} \Delta y \Delta z .$$

上述两力必须等于穿过 N 面向外的力的 x 分量。令 $\mathbf{n}$ 为垂直于 N 面的单位矢量，并令作用于此面上的力为 ΔF_n ，于是我们有

$$\Delta F_{xn} = S_{xx} \Delta y \Delta z + S_{xy} \Delta x \Delta z .$$

穿过这个平面的应力的 x 分量 S_{xn} 等于 ΔF_{xn} 除以面积 $\Delta z \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ，即

$$S_{xn} = S_{xx} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + S_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} .$$

由于 $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 就是 $\mathbf{n}$ 与 y 轴间夹角 θ 的余弦，如图31-8所示，因而我们可把它写成 n_y ，即 $\mathbf{n}$ 的 y 分量。同理， $\Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 就是 $\sin\theta = n_x$ 。我们便可将上式写成

$$S_{xn} = S_{xx} n_x + S_{xy} n_y .$$

如果现在推广至一个任意表面元，就该得到

$$S_{xn} = S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z,$$

或一般地，

$$S_{in} = \sum_j S_{ij}n_j. \quad (31.24)$$

我们能够求得以 S_{ij} 表示的穿过任何面元的力，因而 S_{ij} 的确完整地描述了材料内部的应力状态。

式(31.24)表明，张量 S_{ij} 使力 $\mathbf{S}_n$ 与单位矢量 $\mathbf{n}$ 相联系，就好像 α_{ij} 使 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 有关那样。既然 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{S}_n$ 都是矢量，所以 S_{ij} 的各分量就必然像张量那样随坐标系的改变而作变换。因此， S_{ij} 的确是一个张量。

我们也可通过考察作用于一个小立方体材料上的力来证明 S_{ij} 是一个对称张量。假设取一个小立方体，使其各个面的取向平行于我们的坐标轴，并从一个截面上去考察它，如图31-9所示。若令这个立方体的每个边长为一个单位，则作用于与 x 和 y 轴正交的那些面上的力的 x 和 y 分量就可能如图上所示。如果该立方体很小，则一个面上的应力与其相对的面上的应力就不会有显著的不同，因而力的分量就如图所示的那样大小相等而方向相反。现在对于该立方体必然不会有转矩作用，否则它就会开始转动。环绕中心点的总转矩为 $(S_{yx} - S_{xy})$ （乘以立方体的 $\frac{1}{2}$ 单位边长），而由于这总转矩为零， S_{yx} 就应等于 S_{xy} ，因而这应力张量就是一个对称张量。

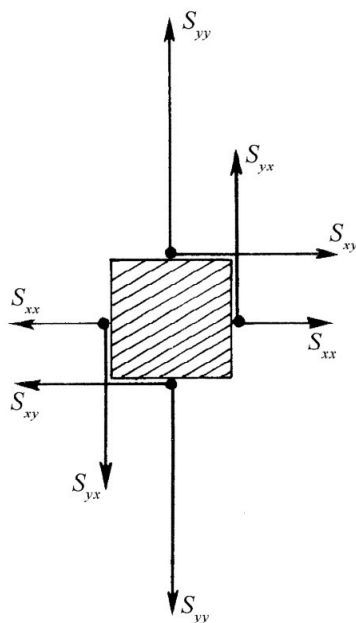


图31-9 作用于一小单位立方体的四个面上的力的 x 分量和 y 分量

既然 S_{ij} 是一个对称张量，因此它就可以用一个具有三根主轴的椭球来加以描述。对于与这些轴正交的面来说，应力特别简单——它们相当于与这些面正交的压力或拉力，因而沿这些面上就不会有剪切力了。对于任何应力来说，我们总能够选择坐标轴使其各切向分量为零。如果这椭球是一圆球，则在任何方向就只有法向力。这相当于流体静压强（正的或负的）。因此，对于流体静压强来说，这个张量就是对角的，而且所有三个分量都相等，实际上，它们刚好等于压强 p ，即可以写成

$$S_{ij} = p \delta_{ij}. \quad (31.25)$$

应力张量——因而还有它的椭球——一般将在一块材料中逐点变化，要描述整块材料，就需要给出作为位置函数的 S_{ij} 的每一分量。因此，应力张量就是一个场。我们已经有过标量场，像温度 $T(x, y, z)$ ，它们在空间每一点都给出一个数值，以及矢量场，像 $\mathbf{E}(x$

， y ， z ），它们对每一点给出三个数值。现在我们有了张量场，它们对空间每一点给出九个数值——或对于对称张量 S_{ij} 来说，实际上是六个数值。在一块任意畸变的固体中，对其内力的完整描述需要六个各含有 x ， y 和 z 的函数。

§31-7 高阶张量

应力张量 S_{ij} 描述了物质中的内力。如果材料是弹性的，用另一个张量 T_{ij} ——称为应变张量——来描述其内部畸变就较方便。对于像金属棒那样的简单物体，你知道长度的改变 ΔL 与作用力近似成正比，因而我们说它服从胡克定律：

$$\Delta L = \gamma F.$$

对于受了任意畸变的固态弹性体来说，应变 T_{ij} 与应力 S_{ij} 是由一组线性方程相联系的：

$$T_{ij} = \sum_{k, l} \gamma_{ijkl} S_{kl}. \quad (31.26)$$

并且，一根弹簧（或一根棒）的势能为

$$\frac{1}{2} F \Delta L = \frac{1}{2} \gamma F^2.$$

对于固体中的弹性能量密度，可推广为

$$U_{\text{弹性}} = \sum_{ijkl} \frac{1}{2} \gamma_{ijkl} S_{ij} S_{kl}. \quad (31.27)$$

因此晶体弹性的完整描述就必须用这些系数 γ_{ijkl} ，这带来了一个新的、难以控制的量，它是一个四阶张量，由于每一个下脚标可取 x ， y 或 z 中任何一个，共有 $3^4=81$ 个系数，但实际上却只有21个不同数值。首先， S_{ij} 是对称的，它只有6个不同的数值，因而在式(31.27)中就只需要36个不同系数。可是， S_{ij} 和 S_{kl} 可以互相交换而不改变能量，所以交换 ij 和 kl 时 γ_{ijkl} 必定是对称的，这样就把不同系数的数目又减少至21个。所以对于可允许的对称性最低的晶体来说，要描述它的弹性就需要21个弹性常数！当然，对于较高对称的晶体，这一数目还可以减少。例如，立方晶体只有三个弹性常数，而各向同性物质则只有两个弹性常数。

这后者的真实性可以这样理解。如同一块各向同性物质必然会对称那样， γ_{ijkl} 的各分量怎么可能与坐标轴的方向无关呢？答案是：只当它们可用张量 δ_{ij} 表达时，它们才能是与坐标无关的。有两个可能的表示式： $\delta_{ij} \delta_{kl}$ 和 $\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}$ ，它们都具备所需的对称性，因而 δ_{ijkl} 就必须是它们的线性组合。因此，对于各向同性材料来说，

$$\gamma_{ijkl} = a(\delta_{ij} \delta_{kl}) + b(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

所以这种材料就需要两个常数 a 和 b 来描述它的弹性。而立方晶体仅需要三个常数，我们将把它留给你们去证明。

作为最后一个例子，我们举出压电效应，这次是属于一个三阶张量。在应力作用下，晶体会产生一个正比于这个应力的电场，因此，

一般说来，其规律是

$$E_i = \sum_{j, k} P_{ijk} S_{jk} ,$$

式中 E_i 为电场，而 P_{ijk} 为压电系数——或压电张量。你能否证明，若晶体有一个反演中心（在 $x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$ 的变换下保持不变），则所有压电系数都等于零？

§31-8 电磁动量的四维张量

在这一章中，迄今所考察过的所有张量都是与三维空间有关的，它们被定义为在空间转动下具有某种变换性质。在第26章中，我们曾有机会用到在四维相对论性时空中的一个张量——电磁张量 $F_{\mu\nu}$ 。这样一个四维张量的各分量在洛伦兹坐标变换下以我们算出的特殊方式变换着（尽管我们并未那样做，但我们可能已经把洛伦兹变换认为是在叫作闵可夫斯基空间的“四维空间”里的一种转动，那么与我们这里正在做的做个类比，就会更加清楚了）。

作为最后一个例子，我们想要考虑在相对论四维（ t, x, y, z ）中的另一个张量。当我们在上面写出应力张量时，我们曾把 S_{ij} 定义为穿过单位面积的力的分量。可是力等于动量的变化率，因此，不说“ S_{xy} 是穿过垂直于 y 方向的单位面积力的 x 分量”，而同样可以说“ S_{xy} 是穿过垂直于 y 方向的单位面积动量的 x 分量的变化率”。换句话说， S_{ij} 的每一项也各代表通过垂直于 j 方向单位面积的动量的 i 分量流。这

些是纯空间分量，但它们却是在四维（ μ 和 $\nu=t, x, y, z$ ）中含有像 S_{tx}, S_{yt}, S_{tt} 等附加分量的一个“较大”张量 $S_{\mu\nu}$ 的一些部分，我们现在就试图找出这些附加分量的物理意义。

我们知道，那些空间分量代表动量流。我们可以从研究另一种“流”——电荷流——来获得如何把它推广到时间那一维上去的线索。对于标量电荷来说，其变化率（通过垂直于流的单位面积）就是一空间矢量——电流密度 j 。我们已经看到，这个流矢量的时间分量就是那些流动物质的密度。例如， j 可以同时间分量 $j_t = \rho$ ——即电荷密度——相结合而构成一个四维矢量 $j_\mu = (\rho, j)$ ，也就是说，当 j_μ 中的 μ 取 t, x, y, z 各值时，它指的是标量电荷的“密度，及标量电荷在 x 方向的流动速率，在 y 方向的流动速率，在 z 方向的流动速率”。

现在，与刚才所做的关于一个标量流的时间分量的说法相类似，我们也许会期待，与描述动量 x 分量流的 S_{xx}, S_{xy}, S_{xz} 一起，就应该有一个时间分量 S_{xt} ，它应代表正在流动的那种东西的密度，也就是说， S_{xt} 应该是 x 方向动量的密度。所以我们就能够沿水平方向把我们的张量推广到包含一个 t 分量。我们得

$$S_{xt} = x \text{ 动量密度,}$$

$$S_{xx} = x \text{ 动量的 } x \text{ 向流,}$$

$$S_{xy} = x \text{ 动量的 } y \text{ 向流,}$$

$$S_{xz} = x \text{ 动量的 } z \text{ 向流.}$$

同理，对于动量的 y 分量我们有三个流动分量—— S_{yx} ， S_{yy} ， S_{yz} ——此外还应加入一个第四项：

$$S_{yt} = y \text{ 动量密度.}$$

而当然，在 S_{zx} ， S_{zy} ， S_{zz} 之外我们也应该加上

$$S_{zt} = z \text{ 动量密度.}$$

在四维中还有一个动量的 t 分量，我们知道那就是能量。因此，张量 S_{ij} 应该在垂直方向上^[3]用 S_{tx} ， S_{ty} 和 S_{tz} 来推广，其中

$$S_{tx} = \text{能量的} x \text{ 向流,}$$

$$S_{ty} = \text{能量的} y \text{ 向流,} \quad (31.28)$$

$$S_{tz} = \text{能量的} z \text{ 向流.}$$

这就是说， S_{tx} 是单位时间内穿过垂直于 x 轴单位面积的能流，等等。最后，为使张量达到完整，还需要 S_{tt} ，那该是能量密度。我们已把三维的应力张量 S_{ij} 推广成四维的应力-能量张量 $S_{\mu\nu}$ 。那下脚标 μ 可以取四个值 t ， x ， y 和 z ，它们分别指“密度”、“在 x 向单位面积的流动”、“在 y 向单位面积的流动”、“在 z 向单位面积的流动”。同样地， ν 取 t ， x ， y ， z 四个值就告诉我们什么在流动，即“能量”、“沿 x 向的动量”、“沿 y 向的动量”和“沿 z 向的动量”。

作为一个例子，我们将讨论不是在实物中，而是在一个存在着电磁场的自由空间区域里的一个张量。我们知道，能流就是坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 。因此， $\mathbf{S}$ 的 x ， y 和 z 分量，从相对论的观点来看，就是我们的四维应力-能量张量的分量 S_{tx} ， S_{ty} 和 S_{tz} 。张量 S_{ij} 的对称性也同样移到了 t 分量，因而四维张量 $S_{\mu\nu}$ 是对称的：

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \quad (31.29)$$

换句话说，代表 x ， y 和 z 动量密度 的 S_{xt} ， S_{yt} ， S_{zt} 也等于坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ ，即能流 的 x ， y 和 z 分量——正如我们在前面一章中曾用不同的论证所证明过的那样。

这电磁应力张量 $S_{\mu\nu}$ 的其余各分量也可用电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 来表示。这就是说，必须把应力——或较少神秘性地说成是动量流——纳入电磁场之中。在第27章中与式 (27.21) 有关的地方我们曾对此有所讨论，但还未将其细节算出。

那些想要在四维张量方面锻炼本领的人们，也许乐于见到用场来表示的关于 $S_{\mu\nu}$ 的公式：

$$S_{\mu\nu} = -\epsilon_0 \left(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha, \beta} F_{\beta\alpha} F_{\beta\alpha} \right),$$

其中对于 α ， β 的求和是指对于 t ， x ， y ， z 的求和，不过（如同在相对论中经常做的那样）我们采用关于求和符号 Σ 与符号 δ 的特别含义。在总和中有关 x ， y ， z 的项都要去掉，并且 $\delta_{tt}=1$ ， $\delta_{xx}=\delta_{yy}=\delta_{zz}=-1$ ，对于 $\mu \neq \nu$ 则 $\delta_{\mu\nu}=0$ 。你能否证实（令 $c=1$ ）它会给出能量密度 S_{tt}

$= (\epsilon_0/2) (E^2 + B^2)$ 和坡印亭矢量 $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$? 你能否证明: 在 $\mathbf{B}=0$ 的静电场中, 应力的主轴在电场的方向, 而且有一个张应力 $(\epsilon_0/2) E^2$ 沿电场方向, 还有一个相等的压强 垂直于电场方向?

[1] 在第10章中, 我们曾按照通常惯例并写出 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$, 而称 χ (“khi”) 为“电极化率”。这里采用一个单独字母将更方便, 所以就把 $\epsilon_0 \chi$ 写成 α 。对于各向同性的电介质来说, $\alpha = (\kappa - 1) \epsilon_0$, 其中 κ 为介电常量 (见§10-4)。

[2] 由电场产生 极化而做的功, 不应与永偶极矩 $\mathbf{p}_0$ 的势能 $-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$ 互相混淆。

[3] 这表明是一个与 x, y, z 各轴都“正交”的方向, 即 t 方向。——译者注

第32章 稠密材料的折射率

§32-1 物质的极化

我们现在要来讨论由稠密材料所引起的光的折射——因而也包括光的吸收——现象。在第1卷第31章中，我们曾讨论过折射率理论，但那时由于我们的数学能力有限，就不得不局限于只是找出诸如气体那样的低密度材料的折射率。然而，产生折射率的物理原理却已经弄清楚了。光波中的电场使气体里的分子极化，产生了振动着的电偶极矩。这些振动电荷的加速度又会辐射出新的场波。这种新的场与旧的场相干，就会产生一个变化了的场，它相当于原来的波受到某个相移，由于这相移与该材料的厚度成正比，所以这一效应就相当于在材料里有不同的相速度。以前考察这一课题时，曾经略去了诸如新波会改变振动偶极子所在处的场这些效应所引起的复杂性。我们曾假定施于原子中电荷上的力仅来自那个入射波，而事实上，它们的振动不仅由入射波驱动，而且也由所有其他各原子的辐射波所推动。当时要把这种效应包括进去，对于我们来说会有困难，因而仅仅研究了稀薄气体，在那里上述效应变成无关紧要的了。

然而，现在我们将发现，通过利用微分方程来处理这个问题非常容易。这一办法掩盖了折射率的物理起源（如来自再辐射波与原来波的相干作用），但却使有关稠密材料的理论简单得多。本章将从以前的工作中拼集大量材料。实际上我们将选取所需要的一切东西，因而在引进的概念中属于全新的相对来说就不多。由于你可能需要重新想

起我们将要用的东西，因此我们提供一个关于即将用到的公式及其出处的清单（表32-1）。在大多数例子中，我们将不再花时间去提供物理论证，而只是要利用那些公式。

表32-1 本章的工作将建立在下列这些包含在以前各章中的材料的基础上

主 题	参 考	方 程 式
阻尼振动	第 1 卷第 23 章	$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F$
气体折射率	第 1 卷第 31 章	$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$
迁 移 率	第 1 卷第 41 章	$n = n' - \frac{\hbar m''}{m}$ $m\ddot{x} + \mu\dot{x} = F$
电 导 率	第 1 卷第 43 章	$\mu = \frac{\tau}{m}; \sigma = \frac{Nq_e^2 \tau}{m}$
极 化 率	第 2 卷第 10 章	$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
在电介质内部	第 2 卷第 11 章	$\mathbf{E}_{\text{局域}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$

我们从回忆气体折射率的机制着手。假定单位体积内共有 N 个粒子，而每个粒子的行为像一个谐振子，并采用这样的原子或分子模型：其中的电子被正比于其位移的力束缚住（好像被弹簧维持在其位置上似的）。我们曾经强调，这并非原子的正统经典模型，但以后将证明，正确的量子力学理论（在一些简单情况中）会给出等效于这一模型的结果。在以往的处理中，我们从未将原子振子中的阻尼力那种可能性包括进去，但现在就要这样来做。这种力相当于对运动的阻力，也就是与电子速度成正比的力。于是运动方程为

$$F = q_e E = m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x), \tag{32.1}$$

式中 x 是平行于 $\mathbf{E}$ 方向的位移（我们正假设一种各向同性的振子，其恢复力在一切方向都相同。并且，我们目前也在考虑一个线偏振波，以致 $\mathbf{E}$ 不改变方向）。如果作用于原子上的电场随时间正弦地变化，则可以写出

$$E = E_0 e^{i\omega t}. \quad (32.2)$$

于是位移将以同样的频率振动，因而可令

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

将 $\dot{x} = i\omega x$ 和 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 代入式 (32.1)，就能够用 E 来解出 x ：

$$x = \frac{q_e/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.3)$$

如果已经知道位移，则可算出加速度 $\ddot{x}$ ，并求得引起折射率的辐射波。这就是以前在第1卷第31章中曾经计算过折射率的那种办法。

然而，现在想要采取一种不同的计算方法。一个原子的感生偶极矩 p 为 $q_e x$ ，或利用式 (32.3)，即得

$$p = \frac{q_e^2/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.4)$$

由于 p 与 E 成正比，所以我们可写成

$$p = \epsilon_0 \alpha(\omega) E, \quad (32.5)$$

式中 α 称为原子极化率 [1]。采用这一定义，得

$$\alpha = \frac{q_e^2/m\epsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.6)$$

关于原子中电子运动的量子力学解给出除了下述一些修正之外的相似结果。每一种原子 [2] 具有若干个固有频率，而每个频率有其本身

的阻尼常数 γ 。并且，每种振动模式的有效“强度”各不相同，这可用每个频率的极化率乘以强度因子 f 来表示，我们预期 f 是数量级为1的数值。对于每个振动模式，用 ω_{0k} ， γ_k 和 f_k 代表那三个参数 ω_0 ， γ 和 f ，并对不同的模式全部求和，则我们可把式（32.6）修改成：

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k \omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.7)$$

如果 N 是该材料内单位体积的原子数，则极化强度 P 就恰好是 $Np = \epsilon_0 N \alpha E$ ，并正比于 E ：

$$P = \epsilon_0 N \alpha(\omega) E. \quad (32.8)$$

换句话说，当有一正弦电场作用于材料上时，就有一个正比于该电场的单位体积感生偶极矩——我们要强调比例常数 α 与频率有关。当频率非常高时， α 很小，即响应不厉害。然而，在低频时，就可能存在较强的响应。并且，这个比例常数是一复数，这意味着极化强度并不完全跟随着电场变化，而是其相位在某种程度上可能被移动了。无论如何，总会有一个其大小正比于电场强度的单位体积极化强度。

§32-2 在电介质中的麦克斯韦方程组

物质中极化现象的存在意味着材料内部有了极化电荷和极化电流，而为了求场就应该把它们放进完整的麦克斯韦方程组中。我们这回要在这种情况下求解麦克斯韦方程组，即其中的电荷和电流不像在真空中那样各等于零，而是由极化矢量所隐蔽地给出。第一步是明确

地找出电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{j}$ ，它们是对我们过去定义 $\mathbf{P}$ 时所考虑的相同尺度的小体积平均过的。于是，我们所需要的 ρ 和 $\mathbf{j}$ 能够从极化强度获得。

我们已在第10章中见到，当极化强度 $\mathbf{P}$ 逐处变化时，就存在由下式给出的电荷密度：

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (32.9)$$

虽然我们当时处理的是静场，但同样的公式也适用于随时间变化的场。可是，当 $\mathbf{P}$ 随时间变化时，就有电荷在运动，因而也存在极化电流。每个振动电荷贡献的电流等于其电荷 q_e 乘以其速度 v ，设单位体积共有 N 个这样的电荷，则电流密度 $\mathbf{j}$ 为

$$\mathbf{j} = Nq_e v.$$

既然我们知道 $v = dx/dt$ ，那么 $j = Nq_e (dx/dt)$ ，这恰好就是 dP/dt 。因此，由变化着的极化强度引起的电流密度为

$$\mathbf{j}_{\text{极化}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (32.10)$$

我们的问题现在既直接而又简单。利用式(32.9)和(32.10)，我们要用由 $\mathbf{P}$ 表示的电荷密度和电流密度来写出麦克斯韦方程组（假定在该材料中并没有别的电流和电荷）。然后再用式(32.5)把 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 联系起来，并对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 求解方程，寻找波动解。

在做此事之前，我们想要做一个历史性的注解。麦克斯韦原来写出的方程式在形式上与我们现在所用的不同。由于这些方程在过去许

多年中曾被写成这种不同形式——而且目前还有许多人按照那样来写——我们将解释其中的区别。在早期，介电常量机制还未受到充分和清楚的认识。原子的本性既未被理解，材料的极化也不清楚。因此人们并未认识到对电荷密度 ρ 会有来自 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 方面的贡献。他们仅凭那些不受原子束缚的电荷（诸如在导线中流动的电荷或从表面上擦去的电荷）来思考问题。

今天，我们更喜欢让 ρ 代表总电荷密度，包括被束缚的原子电荷所产生的那部分。若我们把这一部分称为 $\rho_{\text{极化}}$ ，则可以写出

$$\rho = \rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}},$$

式中 $\rho_{\text{其他}}$ 就是麦克斯韦曾经考虑过的电荷密度，而且是指那些不会被束缚于个别原子上的电荷。于是可写出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}.$$

把式（32.9）代入 $\rho_{\text{极化}}$ ，得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

或

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{其他}}. \quad (32.11)$$

在麦克斯韦方程组中有关 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的电流密度，一般也有来自受束缚的原子电流的贡献，因此可以写出

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{其他}},$$

而麦克斯韦方程则变成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_{\text{其他}}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{j}_{\text{极化}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.12)$$

利用式 (32.10)，我们得

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{其他}} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (32.13)$$

现在你可以明白，假如由下式定义一个新的矢量 $\mathbf{D}$ ：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (32.14)$$

则两个场方程就会变成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{其他}} \quad (32.15)$$

和

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{其他}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (32.16)$$

这些实际上就是麦克斯韦对于电介质所用的形式。他的其余两个方程则是

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

和

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

这些与我们目前所用的相同。

麦克斯韦以及其他早期工作者还遇到一个与磁性材料（我们不久即将加以考虑）有关的问题。由于他们还不知道导致原子磁性的环行电流，因此他们所使用的电流密度还缺少这另一部分。他们实际上写出的并非式（32.16），而是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (32.17)$$

式中的 $\mathbf{H}$ 与 $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B}$ 不同之处在于后者已包括了原子电流的效应^[3]

（于是 $\mathbf{j}'$ 就代表剩下的其余电流）。所以麦克斯韦拥有四个场矢量 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{D}$ ， $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 是不关心材料内部正在进行着的过程的一种隐蔽方法，你会在许多地方找到用这种方式写出的方程组。

为了求解该方程组，有必要把 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 与其他的场联系起来，而人们往往写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ 和 } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (32.18)$$

然而，这些关系式对于某些材料只是近似地正确，而且即使如此也只有在场随时间变化不太迅速时才行（对于按正弦变化的场，人们往往能够通过使 ϵ 和 μ 成为频率的复变函数而将式子按照这样写出，但对于场的任意时间变化那就不行）。所以在求解这些方程时往往受到各种形式的欺骗。我们认为，正确的办法乃是用目前所理解为基本的那些量来保持那些方程式——而这正是我们一贯做的。

§32-3 电介质中的波

我们现在想要求出：哪种类型的电磁波才能在这样的电介质中存在，其中除了束缚于原子中的电荷外并无其他附加电荷，为此我们取 $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 和 $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。这样，麦克斯韦方程组变成

$$\begin{aligned} (a) \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, & (b) c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} + \mathbf{E} \right), \\ (c) \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & (d) \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (32.19)$$

可按照以前做过的那样来求解这些方程式，即从取式（32.19c）的旋度开始：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}.$$

其次，利用矢量恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

利用式（32.19b）并代替 $\nabla \times \mathbf{B}$ ，便得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

对于 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 则利用式（32.19a），因而得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (32.20)$$

所以我们现在所得到的并非波动方程，而是达朗贝尔算符作用于 $\mathbf{E}$ ，等于含有极化强度 $\mathbf{P}$ 的两项。

然而，由于 $\mathbf{P}$ 取决于 $\mathbf{E}$ ，所以方程式 (32.20) 可能仍存在波动解。现在我们将限于各向同性 电介质中，因而 $\mathbf{P}$ 始终与 $\mathbf{E}$ 同向。让我们尝试找出沿 z 方向行进的波的解，这样电场也许会按 $e^{i(\omega t - kz)}$ 变化。我们也将假定波是在 x 方向偏振的，即电场只有一个 x 分量。我们写出

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (32.21)$$

你知道，任一个 $(z - vt)$ 的函数代表一个以速率 v 传播的波。式 (32.21) 的指数可以写成

$$-ik\left(z - \frac{\omega}{k}t\right),$$

因而式 (32.21) 就代表一个具有如下相速的波：

$$v_{\text{相}} = \omega / k.$$

折射率 n 是通过令

$$v_{\text{相}} = \frac{c}{n}$$

而被定义的（见第1卷第31章）。这样式 (32.21) 就变成

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)}.$$

因此，我们可以先求出要使式（32.21）满足适当的场方程所需的 k 值，然后再应用下式求出 n ：

$$n = \frac{kc}{\omega}. \quad (32.22)$$

由于在各向同性的材料中，常常只有极化的一个 x 分量，于是 $\mathbf{P}$ 不会随 x 坐标发生变化，所以 $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ ，这样便消除了式（32.20）右边的第一项。并且，由于我们现在假定电介质是线性的，所以 P_x 可能按 $e^{i\omega t}$ 变化，而 $\partial^2 P_x / \partial t^2 = -\omega^2 P_x$ 。这样，式（32.20）中的拉普拉斯算符简单地变成 $\partial^2 E_x / \partial z^2 = -k^2 E_x$ ，因而得到

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_x. \quad (32.23)$$

现在让我们暂时假定，由于 $\mathbf{E}$ 按照正弦形式变化，所以可以令 $\mathbf{P}$ 正比于 $\mathbf{E}$ ，犹如式（32.8）那样（以后我们将要回来讨论这一假定）。因而写出

$$P_x = \epsilon_0 N\alpha E_x.$$

这样，从式（32.23）中除去 E_x ，从而求得

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N\alpha). \quad (32.24)$$

我们已经发现一个像式（32.21）那样的波，其波数 k 由式（32.24）所给出，该波将满足各个场方程。利用式（32.22），则折射率 n 将由下

式给出：

$$n^2 = 1 + N\alpha. \quad (32.25)$$

让我们把这—个式同在气体折射率的理论（第1卷第31章）中所得到的式子做比较。在那里，我们曾经得到式（31.19），即

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (32.26)$$

由式（32.6）取 α ，则式（32.25）应给出

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.27)$$

首先，这里有一个新项 $i\gamma\omega$ ，这是由于我们正把振子的损耗包括进去的缘故。其次，前一个式子左边是 n 而不是 n^2 ，所以又有一个附加因数 $1/2$ 。但要注意，如果 N 足够小以致 n 接近于1（如在气体中的情况），则式（32.27）表明 n^2 等于1加上一个小数目： $n^2 = 1 + \epsilon$ 。于是可以写成 $n = \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$ ，而且两个表示式也就彼此等价。这样，我们的新方法对于气体给出与以前相同的结果。

现在，你或许认为，式（32.27）也应给出稠密材料的折射率。然而，由于以下几个原因它需要做修正。首先，关于这个式子的推导曾假定作用于每个原子的极化场是场 E_x 。然而，这一假定并不正确，因为在稠密材料中也还有附近其他原子所产生的、与 E_x 相差不多的场。当我们过去学习电介质中的静电场时也曾考虑过相似的问题（见第11章）。你会记得，我们当时通过想象将一个单独原子置于周围电介质的一个球形空穴中而估计它所在处的场。在这样一个空穴的场

——我们曾称为局部 电场——比起平均场 E 来要超出 $P / (3\epsilon_0)$ (然而, 应该记住, 这一结果只有在各向同性材料——包括立方晶体的那种特殊情况——中才是严格正确的)。

相同的论证对于波中的电场也会适用, 只要波长比原子间距大得多便行。在这种限制情况下, 我们可以写出

$$E_{\text{局部}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (32.28)$$

这局部电场应该就是用式 (32.3) 中的 E 场, 也就是说, 式 (32.8) 应重新写成

$$P = \epsilon_0 N\alpha E_{\text{局部}}. \quad (32.29)$$

应用式 (32.28) 的 $E_{\text{局部}}$, 求得

$$P = \epsilon_0 N\alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

或

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E. \quad (32.30)$$

换句话说, 在稠密材料中 P 仍旧正比于 E (对正弦变化的场来说)。然而, 比例常数却不是 $\epsilon_0 N\alpha$ [如在式 (32.23) 下面的式中我们曾写出的那样], 而应该是 $\epsilon_0 N\alpha / [1 - (N\alpha/3)]$ 。因此就必须将式 (32.25) 改正为

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}. \quad (32.31)$$

如果把这个式写成如下形式，那就更加方便：

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha, \quad (32.32)$$

在代数上上两式是等价的，这就是大家熟悉的克劳修斯-莫索提方程。

在稠密材料中还有另一种复杂性。由于相邻原子如此靠近，它们之间便有强烈的相互作用。因此，那些内部的振动模式改变了。原子振动的固有频率因这些相互作用而被扩大了，所以它们往往受到很严重的阻尼——阻力系数变得很大。因此，固体中的那些 ω_0 和 γ 与在自由原子中的相比就很不相同。虽然有这些限制，但我们仍然至少可以近似地利用式（32.7）来表示 α 。于是就有

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.33)$$

最后一个复杂性。如果稠密材料是几种成分的混合物，则每一种成分都对极化有贡献。总的 α 就等于这混合物中每种成分贡献之和 [除了对有序晶体中局部场近似式（32.28）的不准确性——过去分析铁电体时我们就曾讨论过的效应——外]。把每种成分单位体积的原子数写成 N_j ，便可用下式代替式（32.32）：

$$3 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) = \sum_j N_j \alpha_j, \quad (32.34)$$

其中每个 α_j 将由像式（32.7）那样的表示式给出。于是式（32.34）就完成了我们关于折射率理论的工作。 $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 这个量由频

率的某个复变函数给出，而这个函数就是平均原子极化率 $\alpha(\omega)$ 。关于稠密物质中 $\alpha(\omega)$ 的准确计算（即要求出 f_k ， γ_k 和 ω_{0k} ）是量子力学中的困难问题，只对于几种特别简单的物质才根据第一性原理完成了这种计算。

§32-4 复折射率

现在要来考察上述结果，即式（32.33）。首先，我们注意到 α 是一复数，因而折射率 n 也必将是一复数。这意味着什么呢？现在让我们试将 n 写成实部与虚部之和：

$$n = n_R - i n_I, \quad (32.35)$$

其中 n_R 和 n_I 都是 ω 的实数函数。我们在 $i n_I$ 之前写上一负号，因此在所有普通光学材料中 n_I 将是一正值（在普通非活动性材料——不像激光器或光源本身那样的材料——中 γ 是正数，而使得 n 的虚部为负）。式（32.21）所表示的平面波可以用 n 写出，为

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)}.$$

将 n 写成像式（32.35）中的那样，则有

$$E_x = E_0 e^{-\omega n_I z/c} e^{i\omega(t - n_R z/c)}. \quad (32.36)$$

项 $e^{i\omega(t - n_R z/c)}$ 表示以速率 c/n_R 传播的波，因而 n_R 就代表我们正常所认为的折射率。但这个波的振幅为

$$E_0 e^{-\omega n_I z/c},$$

它随 z 指数式地减弱。对于 $n_I \approx n_R / (2\pi)$ 的情况，在某一时刻，电场强度作为 z 的函数曲线如图32-1所示。至于折射率的虚部则表示由于在原子振子中的能量损耗而引起的波的衰减。波的强度 与波幅的平方成正比，因而

$$\text{强度} \propto e^{-2\omega n_I z/c}.$$

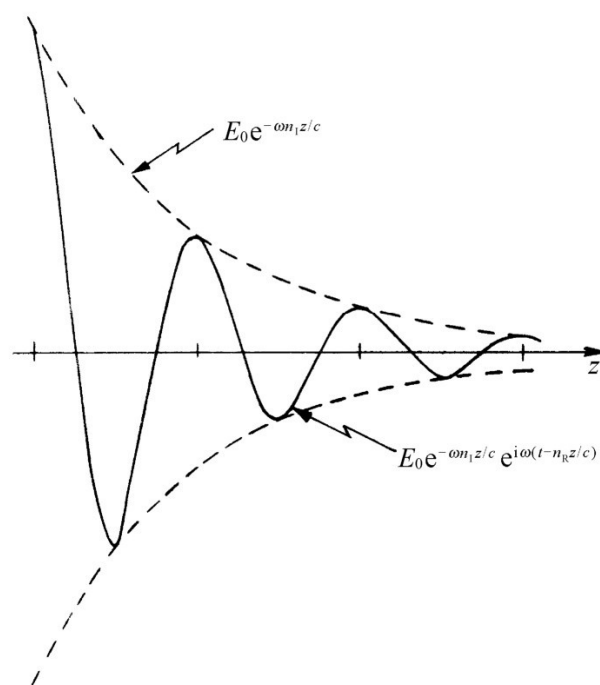


图32-1 在某一时刻 t ， $E_x(z)$ 曲线，设 $n_I \approx n_R / (2\pi)$

这往往被写成

$$\text{强度} \propto e^{-\beta z},$$

其中 $\beta = 2\omega n_1 / c$ 称为吸收系数。这样在式(32.33)中我们就不仅得到了材料的折射率理论，而且同样也有了材料吸收光的理论。

在通常我们认为是透明的材料中，量 $c / (\omega n_1)$ ——具有长度量纲——比起该材料的厚度来是很大的量。

§32-5 混合物的折射率

关于折射率理论还有另一个可以用实验来进行核对的预言。假设我们考虑一个含有两种材料的混合物。这混合物的折射率并非两种折射率的平均值，而应当按式(32.34)所示的那样由两个极化率之和来给出。如果我们问起（比如说）糖溶液的折射率，那么总极化率就是水与糖的两个极化率之和。当然，每个极化率必须用该种物质单位体积内的分子数作为 N 来计算。换句话说，若给定溶液中有 N_1 个极化率为 α_1 的水分子和 N_2 个极化率为 α_2 的蔗糖（ $C_{12}H_{22}O_{11}$ ）分子，则应该有

$$3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2. \quad (32.37)$$

可以通过测量不同浓度的蔗糖水溶液的折射率，应用此式对照实验结果来检验我们的理论。然而，这里我们得做几种假设。上面的公式假定当蔗糖溶解于水中时并没有发生化学反应，而对各个原子振子的扰动在不同浓度中差异不会太大。所以上述结果肯定只是近似的。不管怎样，还是让我们来看看这个式子到底如何有效。

选取蔗糖溶液这一例子是因为在《化学与物理学手册》（*Handbook of Chemistry and Physics*）中有一个关于折射率测量值的很好的表，而且又因为蔗糖是一种分子晶体，所以在其溶解过程中并没有发生过电离或其他任何会改变其化学状态的事情。

我们在表32-2的头三行中给出从手册中查出来的数据。A列为蔗糖按重量计的百分比，B列为测得的密度（ gcm^{-3} ），而C列则为用589.3 nm波长的光时测得的折射率。对于纯的糖，我们已经取得了糖晶体折射率的测量值。这种晶体并非各向同性的，因而所测得的折射率沿各方向是不同的。该手册给出三个数值：

$$n_1=1.537\ 6, \quad n_2=1.565\ 1, \quad n_3=1.570\ 5,$$

表32-2 蔗糖溶液的折射率，与式（32.37）的预言做比较

从手册中查出来的数据								
A 蔗糖分数 含量(以重 量计)	B 密 度 (gcm^{-3})	C n (20 °C)	D 每升蔗糖 ^d 的摩尔数 N_2/N_0	E 每升水 ^e 的摩尔数 N_1/N_0	F $3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$	G $N_1\alpha_1$	H $N_2\alpha_2$	J $N_0\alpha_2$
0 ^a	0.998 2	1.333	0	55.5	0.617	0.617	0	—
0.30	1.127 0	1.381 1	0.970	43.8	0.698	0.487	0.211	0.213
0.50	1.229 6	1.420 0	1.798	34.15	0.759	0.379	0.380	0.211
0.85	1.445 4	1.503 3	3.59	12.02	0.886	0.133 5	0.752	0.210
1.00 ^b	1.588	1.557 7 ^c	4.64	0	0.960	0	0.960	0.207

a 纯水；b 蔗糖晶体；c 平均值（见书中）；d 蔗糖的分子量=342；e 水的分子量=18。

我们取其平均值。

现在我们可以试着算出每种浓度的 n ，但不知道对 α_1 或 α_2 取何值。让我们用这种方法来检验该理论：假定水的极化率（ α_1 ）在所有各种浓度时都相同，并利用 n 的实验值及从式（32.37）解出 α_2 从而算

出蔗糖的极化率。如果这一理论正确，则对于所有浓度都应得到相同的 α_2 。

首先，必须知道 N_1 和 N_2 ：让我们用阿伏伽德罗数 N_0 来表示它们。试取1升（1 000 cm^3 ）作为体积单位。于是 N_i/N_0 等于每升的质量除以克分子量。而每升的质量则是密度（乘1 000后获得每升克数）乘以蔗糖或水的用分数表示的含量。就这样，得到了记在该表D和E两列中的 N_2/N_0 和 N_1/N_0 ^[4]。

在F列，我们从C列中的实验 n 值算出了 $3(n^2-1)/(n^2+2)$ 。对于纯水来说， $3(n^2-1)/(n^2+2)$ 为0.617，那恰好是 $N_1\alpha_1$ 。然后我们便能填上G列中的其余部分，因为对于每一行G/E只容许有相同的比值——即0.617:55.5。从F列减去G列，便得到蔗糖的 $N_2\alpha_2$ 那一部分贡献，如H列所示。把这些数字用D列中的 N_2/N_0 值来除，我们便得到如J列所示的 $N_0\alpha_2$ 的值。

根据我们的理论，应该预计所有的 $N_0\alpha_2$ 值都相同。它们虽然并不完全相同，但也相当接近。可以得出结论说，我们的想法是相当正确的。而且，我们还发现糖分子的极化率似乎与其周围环境的关系不是太大——它的极化率在稀溶液与在晶体中几乎相同。

§32-6 金属中的波

在本章中我们对固体材料所建立的理论也可应用于像金属那种良导体，但要作很小的修正。在金属中，某些电子缺乏把它们维系在任何特定原子上的束缚力，而正是这种“自由”电子才引起了导电性。别的电子则被束缚着，而上面的理论对这些电子是直接适用的。然而，这些束缚电子的影响往往被那些传导电子的效应所淹没，我们现在将只讨论自由电子的效应。

如果一个电子没有受到恢复力作用——但对其运动仍有某种阻力——则它的运动方程与式（32.1）的差别就仅在于缺少 $\omega_0^2 x$ 那一项。所以在其余的推导过程中我们所必须做的一切就是令 $\omega_0^2 = 0$ ——此外还有一点不同。过去所以必须要在电介质中区别平均场与局部场，是因为在电介质中每个偶极子的位置是固定的，从而与其他偶极子位置就有确定的关系。但由于金属中的传导电子到处运动，作用于其上的场平均说来恰好是平均场 $\mathbf{E}$ 。因此，我们利用式（32.28）对式（32.8）所做的修正，对于传导电子就不应该做了。这样，金属的折射率公式，除了应令 ω_0 等于零之外，看来就应像式（32.27），即

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (32.38)$$

这只是来自传导电子方面的贡献，但我们将假定对于金属来说这是主要项。

现在我们甚至知道了怎样去找出用于表示 γ 的值，因为它与金属的电导率有关。在第1卷第43章中就曾讨论过金属的电导率如何起源于自由电子在穿越晶体中时的扩散。这些电子从一次散射至另一次散射遵循的是锯齿形路径，而在两次散射之间除了由于任意的平均电场所

引起的加速之外，它们的运动是自由的（如图32-2所示）。在第1卷第43章中，我们曾求得平均漂移速度恰好等于加速度乘以两次碰撞间的平均时间 τ 。加速度为 $q_e E / m$ ，因而

$$v_{\text{漂移}} = \frac{q_e E}{m} \tau. \quad (32.39)$$

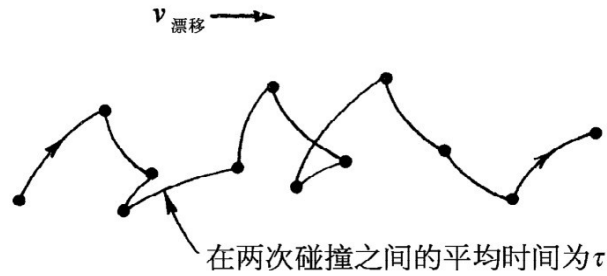


图 32-2 一个自由电子的运动

这一公式曾假定 E 为常数，从而 $v_{\text{漂移}}$ 就是一个恒定速度。由于没有平均加速度，所以阻尼力等于外加力。我们已用 $\gamma m v$ 表示阻尼力〔见式（32.1）〕而定义了 γ ，这个力应当等于 $q_e E$ ，因此就有

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (32.40)$$

虽然我们不能轻易地直接测得 τ ，但仍可以通过测量金属的电导率来确定它。从实验上发现，金属中的电场 $\mathbf{E}$ 会产生一个密度为 $\mathbf{j}$ 的电流（对于各向同性材料而言）：

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

这个比例常数 σ 称为电导率。这恰好就是我们从式（32.39）所预期的，只要令

$$j = Nq_e v_{\text{漂移}}.$$

于是

$$\sigma = \frac{Nq_e^2}{m} \tau. \quad (32.41)$$

所以 τ ——因而 γ ——就可以同观测到的电导率联系起来。利用式（32.40）与（32.41），还可以把折射率的公式（32.38）重新写成如下形式：

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)}, \quad (32.42)$$

其中

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Nq_e^2}. \quad (32.43)$$

这是关于金属折射率的一个简便公式。

§32-7 低频近似与高频近似；趋肤深度与等离子体频率

上述结果，即关于金属折射率的公式（32.42），预期对不同频率的波的传播会产生很不相同的特性。首先让我们看看在非常低频时发生的情况。若 ω 足够小，则式（32.42）可以近似为：

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}. \quad (32.44)$$

现在，正如你能够取下式的平方而加以核实^[5]，

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

所以对于低频来说，

$$n = \sqrt{\sigma/(2\epsilon_0\omega)}(1-i). \quad (32.45)$$

n 的实部与虚部的大小相同。由于 n 既有这么一个大的虚部，所以波在金属中就会迅速地衰减。参见式 (32.36) 可知，在 z 方向行进波的波幅是按照下式递减的：

$$\exp\left[-\sqrt{\sigma\omega/(2\epsilon_0c^2)}z\right]. \quad (32.46)$$

让我们将此式写成

$$e^{-z/\delta}, \quad (32.47)$$

于是，这里的 δ 是波幅被削弱一个因子 $e^{-1}=1/2.72$ ——或约三分之一——时波所经过的距离。这样一种波的波幅作为 z 的函数，如图32-3所示。由于电磁波将透入金属仅仅这段距离，所以 δ 称为趋肤深度。它由下式给出：

$$\delta = \sqrt{2\epsilon_0c^2/(\sigma\omega)}. \quad (32.48)$$

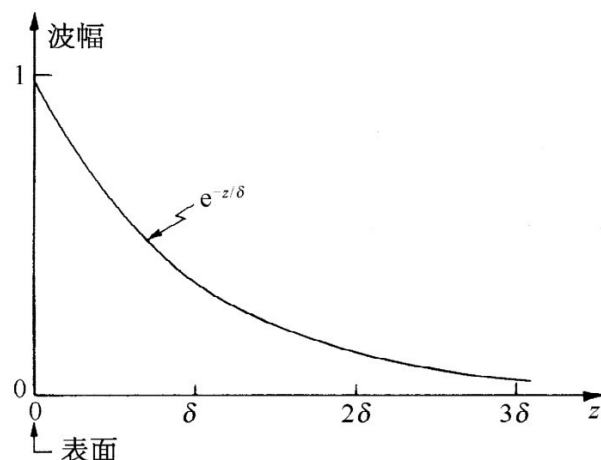


图32-3 一个横电磁波的波幅作为进入金属中距离的函数

那么所谓“低”频指的是什么呢？考察式（32.42）可以知道，只要 $\omega\tau$ 远小于1，而且 $\omega\epsilon_0\sigma$ 也远小于1，则它便可由式（32.44）做近似——这就是说，我们的低频近似适用的条件为：

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

和

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (32.49)$$

让我们来看看，对于一种像铜那样的典型金属，与这些条件相当的是什么频率。我们利用式（32.43）算出 τ ，并再利用观测得的电导率以求得 σ/ϵ_0 。从手册中查出下列数据：

$$\sigma = 5.76 \times 10^7 \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1},$$

原子量=63.5, [\[6\]](#)

密度=8.9 gcm⁻³,

阿伏伽德罗常量=6.02×10²³ (克原子量)⁻¹.

如果我们假定每个原子中有一个自由电子, 则每立方米的自由电子数为

$$N=8.5\times10^{28}\text{ m}^{-3}.$$

利用

$$q_e=1.6\times10^{-19}\text{ C},$$

$$\epsilon_0=8.85\times10^{-12}\text{ Fm}^{-1},$$

$$m=9.11\times10^{-31}\text{ kg},$$

我们得

$$\tau=2.4\times10^{-14}\text{ s},$$

$$\frac{1}{\tau}=4.1\times10^{13}\text{ s}^{-1},$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0}=6.5\times10^{18}\text{ s}^{-1}.$$

所以对低于约10¹² Hz的频率(这意思是指, 对于自由空间波长大于0.3 mm的波——即波长十分短的无线电波), 铜将具有如我们刚才所述

的那种“低频”行为。

对于这些波，在铜内的趋肤深度为

$$\delta = \sqrt{\frac{0.028 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}{\omega}}.$$

对每秒10 000 MHz的微波来说（3 cm波）

$$\delta = 6.7 \times 10^{-5} \text{ cm}.$$

说明这个波仅仅透入十分微小的一段距离。

由此我们可以看出，为什么在研究空腔（或波导）时，我们只需考虑空腔里的场，而不需关心金属里的或在空腔外面的场。并且，我们也明白，为什么通过用镀上一薄层银或金就能降低空腔里能量的损失。损耗来自电流，但只有在等于趋肤深度的那一薄层中它才是明显的。

假设现在考察像铜一类金属在高频时的折射率。对十分高的频率来说，由于 $\omega\tau$ 比1要大得多，而式（32.42）可很好地近似为：

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}. \quad (32.50)$$

对于高频波来说，金属的折射率变成实数——并小于1。这从式（32.38）来看也是明显的，只要含有 γ 的耗散项可以被忽略（这对于非常大的 ω 就可以做到）就行。式（32.38）给出

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0 \omega^2}. \quad (32.51)$$

当然，这与式（32.50）正好相同。以前我们曾见过 $Nq_e^2/(m\epsilon_0)$ 这个量，它曾被称为等离子体振动频率的平方（§7-3）：

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m},$$

因此就可以将式（32.50）或（32.51）写成

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2.$$

该等离子体频率是一种“临界”频率。

对于 $\omega < \omega_p$ ，金属的折射率有一虚部，因而波被衰减；但若 $\omega \gg \omega_p$ ，则折射率是实数，此时金属变成透明的了。你当然知道，金属对于X射线是相当透明的，但有些金属甚至在紫外光区也是透明的。表32-3中，给出了几种金属开始变成透明时的实验观测波长。在第二列中给出了算出来的临界波长 $\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$ 。鉴于实验上的波长值并非十分确切，所以理论与实践的这种符合程度就是相当好了。

表32-3* 低于下列各波长，金属就变成透明

金 属	λ (实验值)($\text{\AA}$)	$\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$ ($\text{\AA}$)
Li	1 550	1 550
Na	2 100	2 090
K	3 150	2 870
Rb	3 400	3 220

*转 录 自：C.Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956,
p. 266.

你可能会觉得奇怪，为什么等离子体频率会与金属中电磁波的传播有关。在第7章中，等离子体频率曾作为自由电子的密度 振荡的固有频率出现（一群电子由于电力作用而彼此互相排斥，又由于这些电子的惯性引起了一种密度振荡）。因此，那些等离子体纵 波会在 ω_p 处发生共振。可是现在我们所谈的却是横 电磁波，而又已发现这些横波在低于 ω_p 的频率时被吸收（这是一个有趣的然而并不是 偶然的巧合）。

尽管我们谈论了金属中波的传播，但此刻你会意识到物理现象的普适性——无论是金属中的电子，还是地球外面电离层的等离子体中的电子或星球大气中的电子，它们都不构成任何差别。为了理解电离层中无线电的传播，我们可以使用同样的表示式——当然，要采用适当的 N 和 τ 值。现在我们能够弄清楚，为什么无线电长波会被电离层吸收或反射，而短波则将一直贯穿过去（如果要同人造卫星通信，就必须采用短波）。

我们已经谈论了关于金属中波传播的高频与低频两种极端情况。对于中间频率，那全频段的式子（32.42）就必须用到了。一般说来，折射率具有实部和虚部，当波传入金属时会受到衰减。对于很薄的层，金属甚至在光频时也有一点透明。作为一个例子，为在高温炉旁工作的人们所制作的特种护目镜就是在玻璃上蒸发一薄层金制成的。可见光能够相当好地透过它——带有墨绿色——但红外线则强烈地被它吸收。

最后，读者肯定会注意到，这里许多公式同第10章中所曾讨论过的有关介电常量 κ 的那些公式在某些方面相似。介电常量量度了材料对恒定场、即对 $\omega=0$ 的场的响应。如果你仔细地考察 n 和 κ 的定义，你就会见到 κ 不过是当 $\omega \rightarrow 0$ 时 n^2 的极限。诚然，在本章的方程中，若令 $\omega=0$ 和 $n^2 = \kappa$ ，就会重现第11章中有关介电常量理论的那些方程。

[1] 在整个本章中我们将遵照第1卷第31章中的那种符号表示法，并令 α 代表原子 极化率，如在这里所定义的。在上一章中我们曾利用 α 代表体积 极化率——即 $\mathbf{P}$ 对 $\mathbf{E}$ 的比率，在本章的记法中则应该是 $\mathbf{P} = N\alpha\epsilon_0 \mathbf{E}$ ，见式 (32.8)。

[2] 这里按原文只是“The atoms”，我们将其改成“每一种原子”，似较确切些。——译者注

[3] 这说法从式子的表面看似似乎是对的，因为式左边只出现 $\mathbf{H}$ （而不出现 $\mathbf{B}$ ），右边只出现 $\mathbf{j}'$ （而不出现 $\mathbf{j}$ ）。但实际上 $\mathbf{H}$ 是不包括原子电流效应的，这可从式 (36.12) 看出。 $\mathbf{D}$ 也是不包括极化电荷的效应的，但由于 $\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ ，在减去此方面的效应时，负负为正得了在中间的一个正号（即 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ）。只有 $\mathbf{E}$ 才是包括一切电荷的电场，又只有 $\mathbf{B}$ 才是包括一切电流的磁场。这些正确观点在本书中各处都由作者经常加以反复强调。——译者注

[4] 本节原文中有些地方把重量和质量搞混了。——译者注

[5] 或者写出 $-i\mathbf{e}^{-i\pi/2}$ ， $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \cos \pi/4 - i\sin \pi/4$ ，这会给出相同的结果。

[6] 原文为atomic weight=63.5 grams；似乎有误。——译者注

第33章 表面反射

§33-1 光的反射与折射

本章的主题是光（一般地说即是电磁波）在表面上的反射和折射。我们曾在第1卷第26和33章中讨论过反射与折射定律，下面列出曾经在那里得到的一些结果：

1. 反射角等于入射角。若采用图33-1所规定的那些角，则

$$\theta_r = \theta_i. \quad (33.1)$$

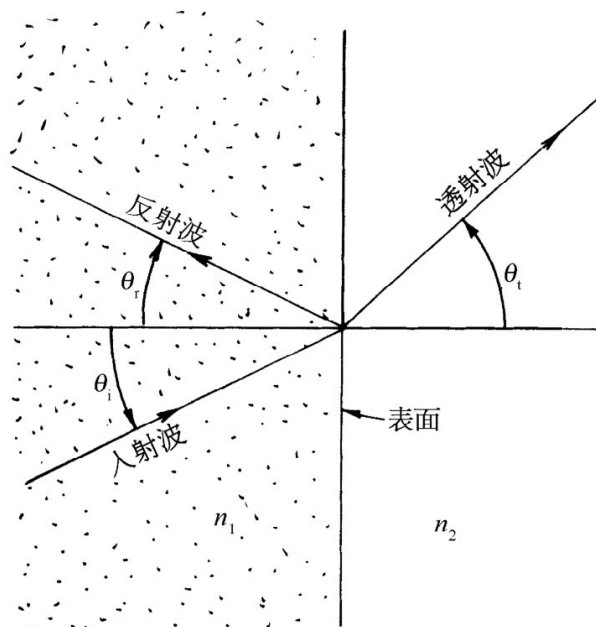


图33-1 在表面上光波的反射与折射（波的传播方向与各波峰垂直）

2. 对于入射和透射波束，乘积 $n \sin\theta$ 彼此相等（斯涅耳定律）：

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (33.2)$$

3. 反射光的强度取决于入射角和偏振方向。对于 E 与入射面正交的情况，反射系数 $R_{\perp}$ 为

$$R_{\perp} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \quad (33.3)$$

对于 E 与入射面平行的情况，反射系数 $R_{\parallel}$ 为

$$R_{\parallel} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}. \quad (33.4)$$

4. 对于法向入射（当然，不论哪一种偏振！），

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (33.5)$$

以前，我们曾用 i 代表入射角， r 代表反射角。由于不能对“折射”角和“反射”角两者都用 r ，所以现在就采用 θ_i =入射角， θ_r =反射角，而 θ_t =透射角。

我们以前所讨论的内容实际上是任何人至今正常跟上这个课题所需要的，但我们现在要用一种不同的方法完全重做一遍。为什么？一个原因是，以前我们假定折射率是实数（在材料中没有吸收）。另一个原因是，你应该知道怎样从麦克斯韦方程组的观点去处理波在表面上发生的情况。我们将得到与以前相同的答案，但目前却是从波动问题的一个直接解，而不是从某些聪明的论证得到的。

我们要强调，表面反射的振幅并不像折射率那样是材料的属性。它是一个“表面特性”，严格地取决于该表面是怎样构成的。在折射率为 n_1 和 n_2 的两种材料之间表面上一薄层额外的杂质往往会改变反射的情况（这里有各种类型干涉的可能性——像油膜的五颜六色。对某给定的频率适当的厚度甚至可以使反射波的振幅降低至零，那就是镀膜透镜的制作原理）。我们将要导出的公式，只在折射率的改变很急速——发生在一个与波长相比很小的距离之内——时才正确。对于光来说，其波长约为 $5\,000\text{ \AA}$ ，从而所谓“光滑”面我们指的是这样一种面：在面内经过仅仅几个原子（或几个 $\text{\AA}$ ）的距离，状况就改变。我们的方程式对于光在高度磨光的表面上将是有效的。一般说来，如果折射率是在超过几个波长的距离上逐渐改变的，则根本就很少反射。

§33-2 稠密材料中的波

首先，要向你们提起曾在第1卷第34章中采用过的描述平面正弦波的方便办法。波中任何场分量（我们用 E 作为例子）可以写成如下形式：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (33.6)$$

其中 E 表示 t 时刻在（从原点算起的）点 $\mathbf{r}$ 处的波幅。矢量 $\mathbf{k}$ 指向波传播的方向，而它的大小 $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$ ，即是波数。波的相速度为 $v_{\text{相}} = \omega/k$ ，对于折射率为 n 的材料中的光波， $v_{\text{相}} = c/n$ ，因而

$$k = \frac{\omega n}{c}. \quad (33.7)$$

假设 $\mathbf{k}$ 沿着 z 方向，那么， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 就恰好是 kz ，正如我们经常用到的那样。对于在任何其他方向的 $\mathbf{k}$ ，应当用 r_k 来代替 z ，那是在 $\mathbf{k}$ 方向上从原点算起的距离，也就是说，应该用 kr_k 代替 kz ，前者恰好是 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ （见图33-2）。因此，式（33.6）就是波在任何方向的简便表示式。

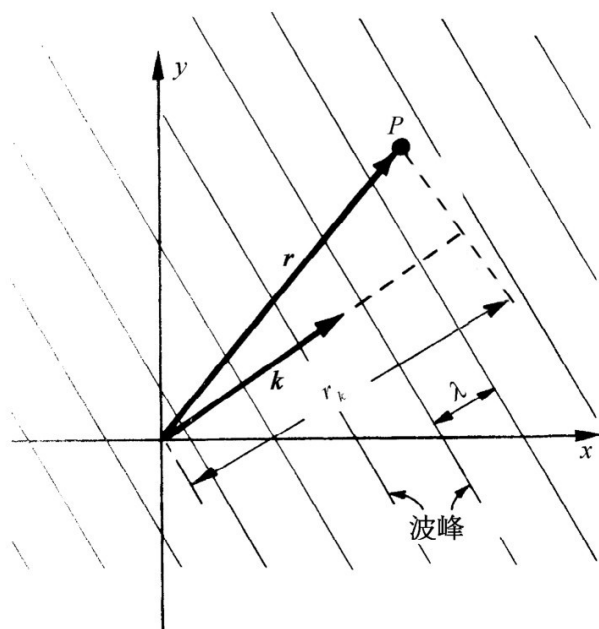


图33-2 沿 $\mathbf{k}$ 方向前进的波，在任一点 P 的相位为 $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

当然，还必须记得

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

式中 k_x ， k_y 和 k_z 是 $\mathbf{k}$ 沿三个坐标轴的分量。事实上，以前曾经指出过： (ω, k_x, k_y, k_z) 是一个四维矢量，而它与 (t, x, y, z) 的标积则是一个不变量。因此，波的相位 是一个不变量，而式（33.6）可以写成

$$E = E_0 e^{ik_\mu x_\mu}.$$

但是我们目前还不需要表示得那样漂亮。

对于一个如式 (33.6) 所示的那种正弦波形式的 E 来说, $\partial E / \partial t$ 等于 $i\omega E$, 而 $\partial E / \partial x$ 等于 $-ik_x E$, 其他各分量以此类推。你可以看出, 为什么当与微分方程打交道时, 运用式 (33.6) 那种形式会十分方便——微分都被乘法代替了。还有另一个有用之处: 算符 $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ 被三个乘积 $(-ik_x, -ik_y, -ik_z)$ 所代替。但这三个因子却按矢量 $\mathbf{k}$ 的三个分量变换, 因而算符 ∇ 就由 $-i\mathbf{k}$ 所代替了:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\omega,$$

$$\nabla \longrightarrow -i\mathbf{k}. \quad (33.8)$$

这对于 ∇ 的任一种运算——不论是梯度、散度或旋度——都保持正确。例如, $\nabla \times \mathbf{E}$ 的 z 分量为

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

若 E_y 和 E_x 两者都按 $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 变化, 则由上式得

$$-ik_x E_y + ik_y E_x,$$

你明白这是 $-\mathbf{i} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ 的 z 分量。

因此我们就得到非常有用的普遍事实，即每当你不得不对一个像三维波（这种波是物理学的一个重要部分）那样变化的矢量取梯度时，你始终可凭记住 ∇ 运算等价于乘上 $-\mathbf{i} \mathbf{k}$ ，就能够迅速地并几乎不需思索地取得那些微商。

例如，法拉第方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

对于波变成

$$-\mathbf{i} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\mathbf{i} \omega \mathbf{B}.$$

这告诉我们

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}, \quad (33.9)$$

上式相当于以前我们对自由空间里的波所求得的结果——波中的 $\mathbf{B}$ 既垂直于 $\mathbf{E}$ ，也垂直于波的传播方向（在自由空间中， $\omega/k=c$ ）。你可以从 $\mathbf{k}$ 沿着坡印亭矢量 $\mathbf{S}=\epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的方向这个事实记住式（33.9）中的符号。

如果你对其他麦克斯韦方程也运用同样的规则，你就会重新获得上一章中的那些结果，而特别是

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}. \quad (33.10)$$

但既然我们已经知道了那些结果，就无须再去做它了。

如果你想要自己寻点乐趣，可以尝试下述的可怕问题，回到1890年代那时研究生的毕业试题：当极化强度 $\mathbf{P}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 由一极化率张量相联系时，试解出麦克斯韦方程组以求出各向异性晶体中的平面波。当然，你应该选取你的坐标轴使其沿该张量的主轴，以致关系最为简单（这样 $P_x = \alpha_a E_x$ ， $P_y = \alpha_b E_y$ 和 $P_z = \alpha_c E_z$ ），但允许波有任意的方向和任意的偏振。你应能够求出 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的关系以及 $\mathbf{k}$ 怎样随着方向和波的偏振而变化，那么你将理解一块各向异性晶体的光学性质。最好是先从双折射晶体——像方解石——那种较简单的情况开始，其中两个极化率相等（比方说 $\alpha_b = \alpha_c$ ），并看看你是否能理解为什么当你通过这样的晶体观察时会得到双像。如果你已能够理解这些问题，那么便可尝试那最困难的情况，即三个 α 都不相同的那种情况。这样，你就会明白你是否已达到1890年代研究生的水平。然而，在本章中，我们只希望讨论各向同性物质。

我们从实验上得知，当一平面波到达两种不同材料——比如说，空气和玻璃，或水和油——之间的界面上时，就有一个反射波和一个透射波。假设我们除此之外不再假定有其他任何东西了，并看看能否算出些什么。首先，选取坐标轴使得 yz 面就是该界面，而 xy 面垂直于那些入射波面，如图33-3所示。

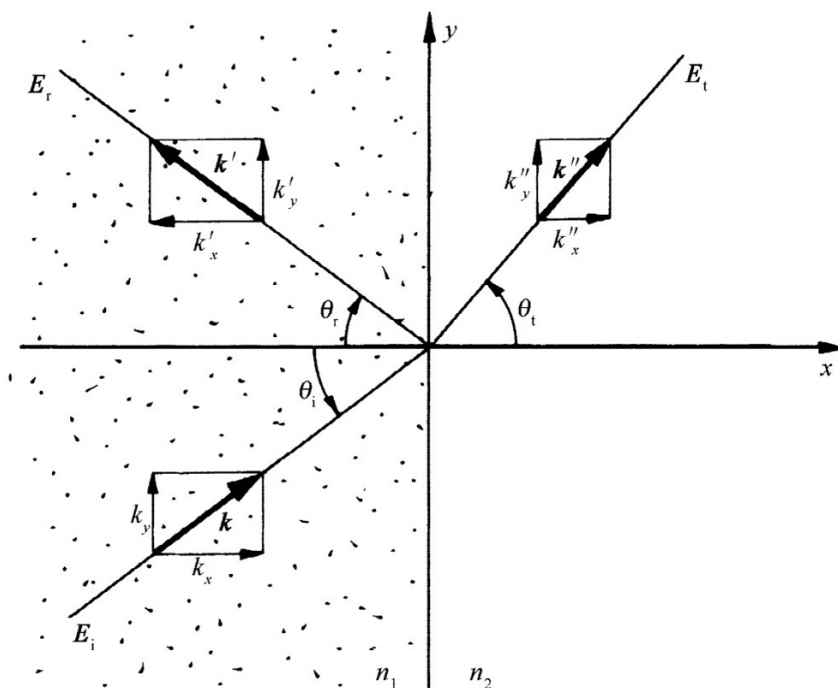


图33-3 关于入射、反射和透射波的传播矢量 k , k' 和 k''

于是入射波的电矢量就可以写成

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} . \quad (33.11)$$

既然 $\mathbf{k}$ 垂直于 z 轴, 因此

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y . \quad (33.12)$$

可以把反射波写成

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} , \quad (33.13)$$

以致它的频率为 ω' , 波数为 $\mathbf{k}'$, 而波幅为 $\mathbf{E}'_0$ (当然我们知道, 频率以及 $\mathbf{k}'$ 的大小分别与入射波的相同, 但甚至对此也不打算做假定。我们将让它出自数学设计)。最后, 对于透射波还可以写出

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0'' e^{i(\omega''t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})}. \quad (33.14)$$

我们知道，麦克斯韦方程组中的一个方程会给出式（33.9），因而对于每个波就有

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad \mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'}, \quad \mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''}. \quad (33.15)$$

并且，如果把那两种媒质的折射率叫作 n_1 和 n_2 ，则由式（33.10）可得

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}. \quad (33.16)$$

由于反射波是在同一种材料中的，因此

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1^2}{c^2}, \quad (33.17)$$

而对于透射波则为

$$k''^2 = \frac{\omega''^2 n_2^2}{c^2}. \quad (33.18)$$

§33-3 边界条件

迄今我们已描述了三种波，现在的问题是要用入射波的各参数算出反射波和透射波的各参数，我们怎样才能做到这一点呢？上述三个波都满足在均匀材料中的麦克斯韦方程组，但是在两种不同材料的边界处麦氏方程组也应该被满足。因此，现在就必须考察一下正好在边

界处发生的事情。我们将会发现，麦克斯韦方程组要求这三个波应以某种方式联系在一起。

作为我们意向的一个例子，电场 $\mathbf{E}$ 的 y 分量在边界两边一定要相同。这是法拉第定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33.19)$$

所要求的，同样也可以用下述方法看出。考虑一个横越边界的小矩形回路 Γ ，如图33-4所示。式（33.19）表明 $\mathbf{E}$ 绕 Γ 的线积分等于通过该回路的 $\mathbf{B}$ 通量的变化率：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da.$$

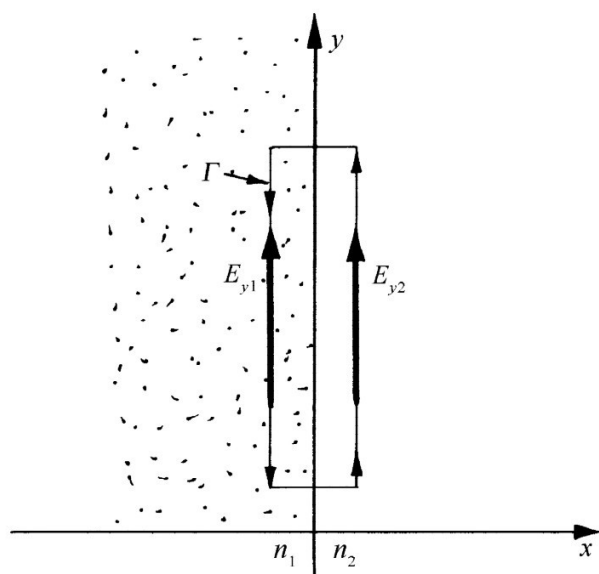


图33-4 边界条件 $E_{y2} = E_{y1}$ 是根据 $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ 获得的

现在设想该矩形十分狭窄，以致回路所包围的面积为无限小。如果 $\mathbf{B}$ 仍保持有限大（没有什么理由使它在边界上应该无限大），则通过该面积的通量为零，因此 $\mathbf{E}$ 的线积分就必然为零。若 E_{y1} 和 E_{y2} 为边界两边的场分量，又若矩形的长度为 l ，则得

$$E_{y1}l - E_{y2}l = 0$$

或

$$E_{y1} = E_{y2}, \quad (33.20)$$

正如我们在上面说过的那样。这向我们提供了三个波的场之间的关系。

计算麦克斯韦方程组在边界处的结果这一步骤称为“确定边界条件”。一般总是这样做的：通过对诸如图33-4的那个小矩形 Γ 或对跨越在边界上的小高斯面做的论证来找出尽可能多的类似式 (33.20) 那样的式子。尽管那是一种非常完美的做法，但它给人们的印象是，对于每一不同的物理问题处理边界问题的方法都不相同。

例如，在一个越过边界的热流问题中，两边的温度是怎样联系起来的呢？噢，你可能争辩说，首先，从一边流进边界的热流应该等于从另一边流出边界的热流。由做出这样的物理论证以求得边界条件，通常是可能的，而且一般也很有用。然而，有时当你在处理某一问题时你可能只有某些方程式，而还未能立刻看出要采取什么样的物理论证。所以虽然我们目前感兴趣的只在于电磁问题，其中我们能够做出那些物理论证，但是仍想要给你们指出一种可用于任何一种问题的方法——一种直接从微分方程求出在边界上所发生的情况的普遍方法。

从写出关于电介质的所有麦克斯韦方程开始——而这次很特别，
将把一切分量都明显地写出：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \quad (33.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (33.22a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (33.22b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (33.22c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (33.23)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (33.24a)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (33.24b)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (33.24c)$$

现在这些方程必须在区域1（边界左侧）和区域2（边界右侧）中全都成立。我们已写出了在区域1与区域2中的解。最后，它们也应当在边界内、即在我们称之为区域3中被满足。虽然人们往往把边界想象成明显不连续的区域，事实却并非如此。物理性质很迅速地变化，但并不是无限快的。在任何情况下，我们都可以想象在一个我们称之为区域3中的短距离内，折射率从区域1至区域2的过渡是非常快的，但

还是连续的。并且，任何像 P_x ， E_x 等场量在区域3中也将做相似的一种过渡。在这区域里，那些微分方程仍必须被满足，而根据这一区域中那些微分方程的结果我们就能获得所需的“边界条件”。

例如，假设有一个介乎真空（区域1）与玻璃（区域2）之间的边界。在真空中没有什么可极化的东西，因而 $\mathbf{P}_1=0$ 。假定在玻璃中有某种极化强度 $\mathbf{P}_2$ ，真空与玻璃之间有一个光滑而迅速的过渡。如果我们考察 $\mathbf{P}$ 的任一分量，比方说 P_x ，则它也许会如图33-5（a）所示那样变化。现在假设取第一个方程式（33.21），它含有 $\mathbf{P}$ 的分量对于 x ， y 和 z 的微商。对 y 和 z 的微商我们不感兴趣，在那些方向上不会发生什么特别事情。可是 P_x 的 x 微商在区域3中就将有一很大值，因为 P_x 的斜率极大。微商 $\partial P_x / \partial x$ 在边界处将有一明显的尖峰，如图33-5（b）所示。如果我们设想将边界挤压成更薄的一层，则该尖峰便会升得更高。如果对于我们关心的波，边界的确很陡，则在区域3中 $\partial P_x / \partial x$ 的大小将大大高于从边界外的波内 P 的变化中可能得到的任何贡献——这样就可以忽略除了由于边界引起的以外的其他一切变化。

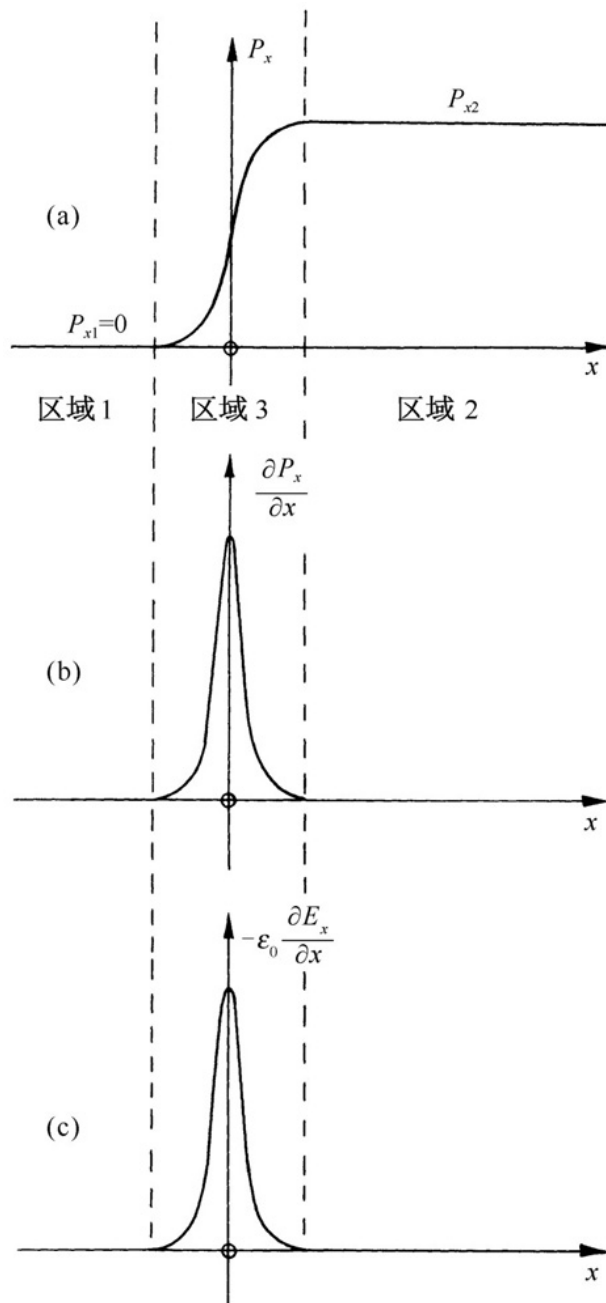


图33-5 处于区域1与区域2的两种不同材料之间的过渡区域3中的场

现在若在式 (33.21) 右边存在一个巨大的尖峰, 则该方程怎么才能够被满足呢? 除非在另一侧也有一个同样巨大的尖峰, 在左边的某种东西一定也很大。唯一的选择物是 $\partial E_x / \partial x$, 因为其他随 y 和随 z 的变化都只不过是我們刚才所说的波中的小效应。因此, $-\epsilon_0 (\partial E_x / \partial x$

）必然会如图33-5（c）所示的那样——刚好是 $\partial P_x / \partial x$ 的拷贝。我们有

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = - \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

如果把这一方程对 x 跨越区域3积分，则得出结论：

$$\epsilon_0 (E_{x2} - E_{x1}) = - (P_{x2} - P_{x1}). \quad (33.25)$$

换句话说，从区域1至区域2， $\epsilon_0 E_x$ 的跃变必然等于 $-P_x$ 的跃变。

可以将式（33.25）重新写成

$$\epsilon_0 E_{x2} + P_{x2} = \epsilon_0 E_{x1} + P_{x1}, \quad (33.26)$$

这说明在区域1和区域2中量 $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ 具有相等的值。人们说：越过边界面时量 $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ 是连续的。这样，我们有了一个边界条件。

尽管我们列举了一个由于区域1是真空而其中 $\mathbf{P}_1$ 是零的情况，但很清楚，这相同的论证也适用于在这两个区域中的任两种材料，因而式（33.26）是普遍正确的。

现在仔细检查其余的麦克斯韦方程，并看看它们中的每一个会告诉我们什么。下一步我们将选取式（33.22a）。这其中并没有 x 微商，因而不会告诉我们任何东西（记住场本身在边界处不会变得特别大，只有对于 x 的微商才可能变得如此巨大以致它们支配了方程）。其

次，我们考察式（33.22b）。啊！这里有一个 x 微商！在左边有 $\partial E_z / \partial x$ ，假定它是一个巨大微商。但请等一等！右侧并没有什么东西与它相配，因此 E_z 在从区域1进至区域2时就不能有任何跃变〔若果真有跃变的话，就会在式（33.22b）的左边出现一个尖峰，但在右边则没有，那么该方程式就是错的了〕。因此，我们有这么一个新的条件：

$$E_{z2} = E_{z1} . \quad (33.27)$$

通过同样的论证，式（33.22c）给出

$$E_{y2} = E_{y1} . \quad (33.28)$$

这最后的结果恰好就是根据线积分的论证而获得的式（33.20）。

我们继续讨论式（33.23）。唯一可能具有尖峰的项为 $\partial B_x / \partial x$ ，但在该式右侧却没有与之相配，因而可以断定

$$B_{x2} = B_{x1} . \quad (33.29)$$

面临麦克斯韦方程组的最后一个了！式（33.24a）不会给出什么，因为并没有 x 微商。式（33.24b）中有一个 x 微商，即 $-c^2 \partial B_z / \partial x$ ，但仍旧没有什么与之相配。因而得

$$B_{z2} = B_{z1} . \quad (33.30)$$

最后一个方程与此很相似，并将给出

$$B_{y2} = B_{y1} . \quad (33.31)$$

后面三个方程为我们提供了 $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$ 。然而，必须强调，只有当边界两侧的材料是非磁性材料——或宁可说，当我们可以忽略材料的任何磁效应——时才会获得这个结果。除了铁磁性材料之外，对于大多数材料来说往往是可做到的（我们将在以后某些章节中处理材料的磁性）。

上述计划已使我们获得关于在区域1与区域2之间场的六个关系式，已经将它们汇集在表33-1中。现在可以利用它们来匹配两个区域内的波。然而，还要强调，刚才所用到的那种概念在任何这样的物理情况下都适用。例如你有一些微分方程，并要求得方程跨越两区域之间（那里某种性质发生了改变）一个明显的边界的解，对于我们眼前的目标来说，可以利用关于在边界处通量与环流的那些论证轻易地推导出同样的方程（你或许想要看看能否按照那种办法来得到同样的结果）。但现在你已经看到，每当你遇到困难而又不明白关于在边界上发生的事情的物理方面的任何简易论证时，你们便会有一种行之有效的方法——可以只处理那些方程。

表33-1 在电介质表面上的边界条件

$(\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1)_x = (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2)_x$
$(\mathbf{E}_1)_y = (\mathbf{E}_2)_y$
$(\mathbf{E}_1)_z = (\mathbf{E}_2)_z$
$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$
（表面在yz 平面内）

§33-4 反射波与透射波

现在可以把前面的边界条件应用于§33-2中写下的波。我们曾有：

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (33.32)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}, \quad (33.33)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}, \quad (33.34)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad (33.35)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'}, \quad (33.36)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''}. \quad (33.37)$$

另外，还有一点知识：对于每一个波， $\mathbf{E}$ 垂直于其传播矢量 $\mathbf{k}$ 。

结果将取决于该入射波的 $\mathbf{E}$ 矢量方向（偏振）。如果我们把入射波具有平行于“入射面”（即xy 面）的 $\mathbf{E}$ 矢量的情况与入射波具有垂直于入射面的 $\mathbf{E}$ 矢量的情况分开处理，那么分析起来就会简单得多。任何其他偏振的波都不过是这两种波的线性组合。换句话说，反射与透射强度对于不同的偏振是不同的，而最容易做的是选出这两种最简单的情况而加以分别处理。

我们将对一个垂直于入射面偏振的入射波进行分析，然后对另一种情况只给出结果。通过选取这种最简单情况我们似乎未免有点不老实，但在原理上两者都是一样的。因此我们假定 $\mathbf{E}_i$ 只有一个z 分量，而既然所有的 $\mathbf{E}$ 矢量都在同一个方向上，就可取消矢量的符号。

只要两种材料都是各向同性的，那么材料里电荷的感生振动也将沿着 z 方向，而透射与反射波的 $\mathbf{E}$ 场也将各只有一个 z 分量。因此，对于所有的波， E_x 和 E_y 以及 P_x 和 P_y 都等于零。那些波的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 矢量如图33-6所示（这里对于原来想要从微分方程组得到一切的计划来说我们是抄了一条近路。这些结果也可从边界条件得到，但通过利用物理论证我们可以省去许多代数运算。如果你有些空闲时间，不妨试试能否从那些方程获得同样的结果。很清楚，我们上面所说的一切都与那些方程相一致，只是我们还没有证明不存在别的可能性而已）。

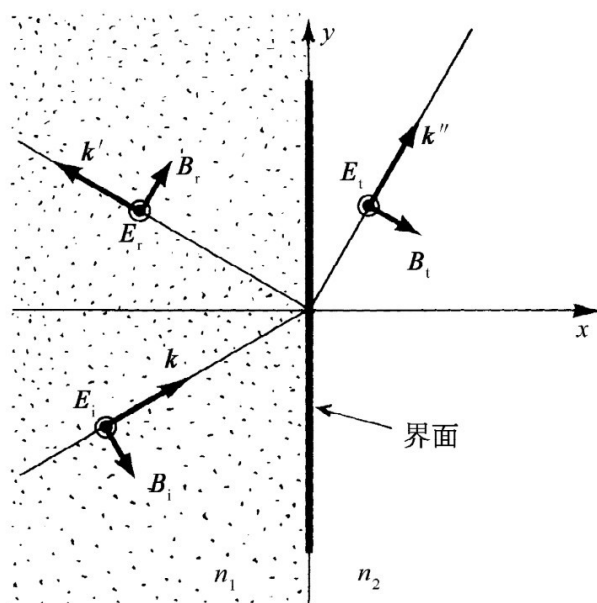


图33-6 当入射波的 $\mathbf{E}$ 场垂直于入射面时，反射波和透射波的偏振情形

现在从式（33.26）至（33.31）的边界条件给出区域1与区域2中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 各分量间的关系。在区域2中只有那透射波，而在区域1中则有两种波。我们要用哪一种波呢？当然，在区域1中的场等于入射波与反射波两个场的叠加（由于每个场都满足麦克斯韦方程组，因而两者之和亦然）。所以当我们应用边界条件时，就必须用到

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t,$$

对于 $\mathbf{B}$ 的情况来说，也与此相仿。

对我们正在考虑的偏振而言，式（33.26）和（33.28）不会提供任何新的知识，只有式（33.27）才有用处。它表明：在边界上，也就是在 $x=0$ 处，

$$E_i + E_r = E_t.$$

因此我们就有

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}, \quad (33.38)$$

上式必须对一切的 t 和所有的 y 都正确。假设首先考察在 $y=0$ 处的情况，此时我们有

$$E_0 e^{i\omega t} + E'_0 e^{i\omega' t} = E''_0 e^{i\omega'' t}.$$

这一方程表明，两个振动项之和等于第三个振动项，这只有当所有的振动都具有相同频率时才能出现（三个——或任何数目的——具有不同频率的这种项相加在任何时刻都为零，这是不可能的）。因此

$$\omega'' = \omega' = \omega. \quad (33.39)$$

正如我们过去一直都知道的那样，反射波及透射波的频率与入射波的相同。

其实一开始我们就可以将这一条件放进去以避免一些麻烦，但希望向你们证明它也可以从那些方程式得出。当你正在做实际的问题

时，往往最好一开头就把你所知道的每件事都正确地放到计算中去，从而使你避免许多麻烦。

根据定义， k 的大小 由 $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$ 给出，因而也就有

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k^2}{n_1^2}. \quad (33.40)$$

现在我们来考察 $t=0$ 时的式 (33.38)。再度利用刚才所做的相同类型的论证，但这一次是建筑在该方程必须对所有 y 值都满足这个事实基础上的，因而得

$$k_y'' = k_y' = k_y. \quad (33.41)$$

由式 (33.40)，即 $k'^2 = k^2$ ，所以得

$$k_x'^2 + k_y'^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

将此式与 (33.41) 相结合，我们有

$$k_x'^2 = k_x^2,$$

即 $k_x' = \pm k_x$ 。正号不构成任何意义，它不会给出反射波，却给出另一个入射波，而我们一开始就说过正在解只有一个入射波的问题，所以我们有

$$k_x' = -k_x. \quad (33.42)$$

式（33.41）和（33.42）向我们提供了反射角等于入射角的结论，正如所期待的（见图33-3）那样，反射波为

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega t + k_x x - k_y y)}. \quad (33.43)$$

对于透射波，则已有

$$k''_y = k_y$$

和

$$\frac{k''^2_x}{n_2^2} = \frac{k^2_y}{n_1^2}, \quad (33.44)$$

因而我们能够由这两式解出 k''_x 来，结果得到

$$k''^2_x = k''^2 - k''^2_y = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k^2_y. \quad (33.45)$$

暂时假定 n_1 和 n_2 都是实数（即两折射率的虚部都十分微小），那么所有的 k 也都是实数，并从图33-3求得

$$\frac{k_y}{k} = \sin \theta_i, \quad \frac{k''_y}{k''} = \sin \theta_t. \quad (33.46)$$

又由式（33.44），我们得到

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i, \quad (33.47)$$

这就是斯涅耳折射定律——又是我们熟悉的某种东西。如果折射率不是实数，则波数将是复数，而我们就得用到式（33.45）[仍然能够通过式（33.46）来定义角度 θ_i 和 θ_t 。而式（33.47）即斯涅耳方程大体上也应该正确。但此时“角度”也是复数，因而丧失了作为角度的简单几何解释。于是，最好是通过它们的复数 k_x 或 k''_x 的值来描述那些波的行为]。

迄今为止，我们没有发现任何新的东西。只是从复杂的数学方法中得到了某些明显答案而感到一种纯朴的喜悦。现在我们准备求出还不知道的波幅。利用关于 ω 和 k 的结果，式（33.38）中的指数因子就可以消去，因而我们得到

$$E_0 + E'_0 = E''_0. \quad (33.48)$$

由于 E'_0 和 E''_0 都属未知，所以需要另一个关系式。我们必须引用另一个边界条件。有关 E_x 和 E_y 的那些方程都无能为力，因为所有的 $\mathbf{E}$ 都只有一个 z 分量。因此，必须用到关于 $\mathbf{B}$ 的那些条件。让我们试一式（33.29）：

$$B_{x2} = B_{x1}.$$

根据式（33.35）至（33.37），

$$B_{xi} = \frac{k_y E_i}{\omega}, \quad B_{xr} = \frac{k'_y E_r}{\omega'}, \quad B_{xt} = \frac{k''_y E_t}{\omega''}.$$

并回忆起 $\omega'' = \omega' = \omega$ 和 $k''_y = k'_y = k_y$ ，我们便得

$$E_0 + E'_0 = E''_0.$$

但这恰好又是式（33.48）！我们不过在为得到已知的某些东西而浪费时间。

可以试一试式（33.30），即 $B_{z2}=B_{z1}$ ，但却没有 $\mathbf{B}$ 的 z 分量！因此剩下的就只有一个方程：即式（33.31）， $B_{y2}=B_{y1}$ 。对于那三个波：

$$B_{yi} = -\frac{k_x E_i}{\omega}, B_{yr} = -\frac{k'_x E_r}{\omega'}, B_{yt} = -\frac{k''_x E_t}{\omega''}. \quad (33.49)$$

把 $x=0$ 处（即在边界上）波的表示式作为 E_i ， E_r 和 E_t 代入，则边界条件为

$$\frac{k_x}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + \frac{k'_x}{\omega'} E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = \frac{k''_x}{\omega''} E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

而且所有的 ω 和所有的 k_y 都相等，因而上式将简化成

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0. \quad (33.50)$$

这为我们提供了一个不同于式（33.48）的有关 E 的方程。有了这两个式，便可解出 E'_0 和 E''_0 了。由于 $k'_x = -k_x$ ，我们得

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} E_0, \quad (33.51)$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x} E_0. \quad (33.52)$$

这些，再加上关于 k_x'' 的式 (33.45) 或 (33.46)，便向我们提供了想要的东西。将在下一节中讨论这一答案的后果。

如果从一开始就设偏振波的 $\mathbf{E}$ 矢量平行于入射面，则 $\mathbf{E}$ 将有 x 和 y 两分量，如图33-7所示。代数运算虽然直截了当，但较为复杂点（在这种情况下通过用全都沿 z 方向的磁场 $\mathbf{B}$ 来表示，工作量会稍为减轻些）。人们求得

$$|E'_0| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k_x''}{n_2^2 k_x + n_1^2 k_x''} |E_0| \quad (33.53)$$

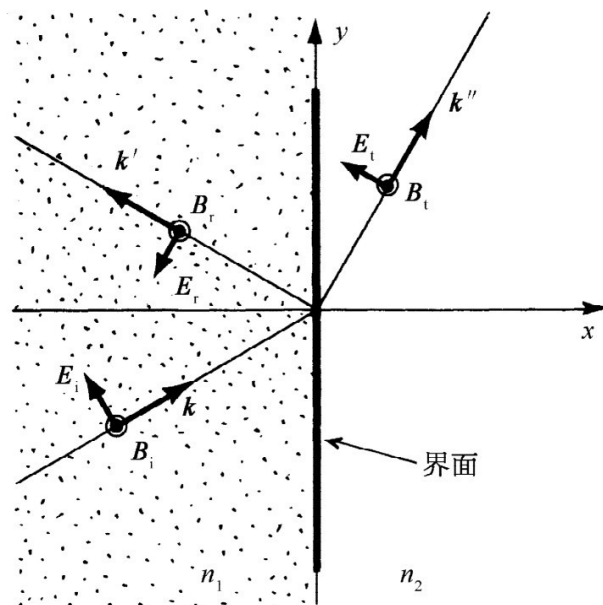


图33-7 当入射波的 $\mathbf{E}$ 场平行于入射面时各波的偏振情形

和

$$|E''_0| = \frac{2n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k_x''} |E_0|. \quad (33.54)$$

让我们来看看，上述结果是否与我们以前得到的相符。式（33.3）就是在第1卷第33章中我们曾经算出来的关于反射波与入射波强度的比。然而，我们当时只考虑了实数折射率。对于实数折射率（以及实数 k ）来说，就可以写成

$$k_x = k \cos \theta_i = \frac{\omega n_1}{c} \cos \theta_i,$$

$$k''_x = k'' \cos \theta_t = \frac{\omega n_2}{c} \cos \theta_t.$$

把这些代入式（33.51）中，则得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (33.55)$$

看来上式还是与式（33.3）不同。然而，如果我们运用斯涅耳定律以消去那些 n ，则两式就会相同。即令 $n_2 = n_1 \sin \theta_i / \sin \theta_t$ ，并对上式中的分子和分母各乘以 $\sin \theta_t$ ，便得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\cos \theta_i \sin \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\cos \theta_i \sin \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_t}.$$

分子和分母都仅是 $-(\theta_i - \theta_t)$ 和 $(\theta_i + \theta_t)$ 的正弦，因而得到

$$\frac{E'_0}{E_0} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}. \quad (33.56)$$

由于 E'_0 和 E_0 都在同一种材料中，强度都正比于其电场的平方，所以我们就得到与以前相同的结果。同理，式（33.53）也与式（33.4）相同。

对于沿法向入射的波， $\theta_i=0$ 和 $\theta_t=0$ 。式（33.56）便给出0/0，那不是十分有用的。然而，我们可以回到式（33.55）上去，它会给出

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E'_0}{E_0} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (33.57)$$

自然，这一结果适用于上述两者中的“任一种”偏振，因为对于法向入射来说不存在特殊的“入射面”。

§33-5 金属上的反射

我们现在可以引用上述结果来理解从金属上反射的有趣现象。为什么金属会闪闪发亮呢？在上一章中我们曾看到，金属的折射率对于某些频率来说具有大的虚部。让我们来看看，当光从空气（ $n=1$ ）照射到 $n=-in_I$ 的材料时我们会得到什么样的反射强度。因此式（33.55）给出（对于法向入射）：

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{1 + in_I}{1 - in_I}.$$

关于反射波的强度，我们需要 E'_0 和 E_0 的绝对值的平方：

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{|E'_0|^2}{|E_0|^2} = \frac{|1 + in_I|^2}{|1 - in_I|^2}$$

或

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1 + n_i^2}{1 + n_i^2} = 1. \quad (33.58)$$

对于折射率为纯虚数的材料，会发生百分之百的反射！

金属并不会百分之百地反射，但其中有许多对可见光的反射非常好。换句话说，它们的折射率的虚部很大。但我们已经知道，折射率的巨大虚部意味着强烈的吸收。因此就有这么一个普遍法则：任何材料如果对任何频率都变成为十分优良的吸收体，则这种波会在其表面强烈反射而很少会进入其内部被吸收。你可以利用一些浓稠颜料看到这个效应。最浓颜料的纯晶体会有一种“金属”光泽。也许你已注意到，在一个紫色墨水瓶边缘上那些干燥了的颜料会发出一种金黄色的金属反射，或干燥了的红墨水有时会给出一种浅绿色的金属反射。红墨水把透射光中的绿色吸收掉了，因而如果该墨水很浓，它就会表现出对绿色光那些频率的强烈表面反射。

你可以用红墨水涂于玻璃片之上并让它干燥后来轻易地表演这一效应。如图33-8所示，如果你用一束白光从玻璃片后面照射上去，则可得到一束红色透射光和一束绿色反射光。

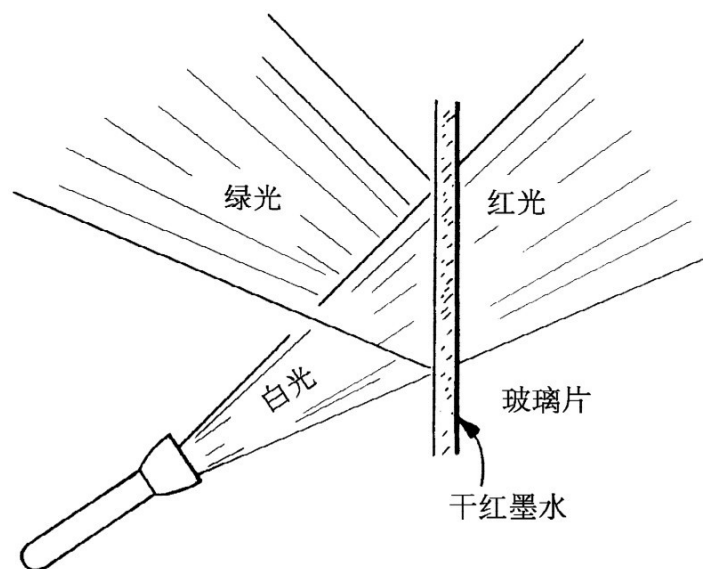


图33-8 对频率为 ω 的光会强烈吸收的材料也能对该频率的光进行反射

§33-6 全内反射

如果光从像玻璃那样具有实数折射率 n 大于1的材料向折射率等于1的空气传播，则由斯涅耳定律

$$\sin\theta_t = n \sin\theta_i.$$

可知，当入射角等于由下式所给出的“临界角” θ_c

$$n \sin\theta_c = 1 \quad (33.59)$$

时，该透射波的角 θ_t 会变成 90° 。对大于这临界角的 θ_i 又会发生什么情况呢？你知道将会有全内反射，但那是怎么产生的呢？

让我们回到式 (33.45) 上去，它给出透射波的波数 k'' 。我们应有

$$k_x''^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2.$$

这里 $k_y = k \sin \theta_i$ ，而 $k = \omega n / c$ ，因而

$$k_x''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_i),$$

如果 $n \sin \theta_i$ 大于1，则 $k_x''^2$ 就是负的，因而 k_x'' 是个纯虚数，比方说 $\pm i k_I$ 。至此你已明白那意味着什么了！该透射波（式33.34）将有这种形式：

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0'' e^{\pm k_I x} e^{i(\omega t - k_y y)}.$$

波幅会随 x 的增大而按指数式地增加或减少。很清楚，这里所要的是那个负号。这样在界面右边的波幅就将如图33-9中所示的那样递减。注意 k_I 为 ω / c ，它具有 $1/\lambda_0$ 的数量级，其中 λ_0 为光在自由空间中的波长。当光从玻璃—空气界面上发生全内反射时，在空气里仍会有场，但只延伸到光波长的数量级那么一段距离。

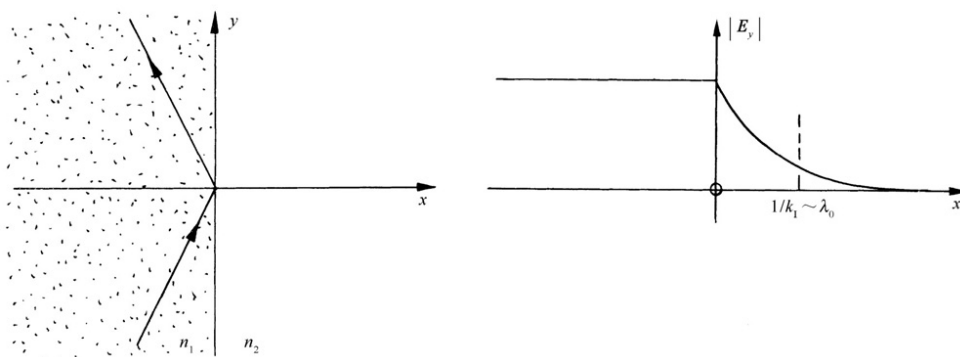


图33-9 全内反射

现在我们可以知道如何来回答下述问题：如果玻璃中的光波以一足够大的角度到达表面，则它会被反射回来，如果把另一块玻璃移到该表面上去（以致“表面”实际上是消失了），则此时光将透射过去。试问这恰好是在什么时候发生的呢？肯定地说，必然存在从全反射变成无反射的连续变化过程。答案当然是：如果该空气间隙如此之小，以致波在空气中的指数曲线的尾部在那第二块玻璃中还有相当大的强度，则它仍将会在那里振动着电子而产生一个新的波，如图33-10所示。某些光将透射过去（显然，我们的解是不完全的，本来应该就两层玻璃间一薄层空气的情况再对所有的方程求解）。

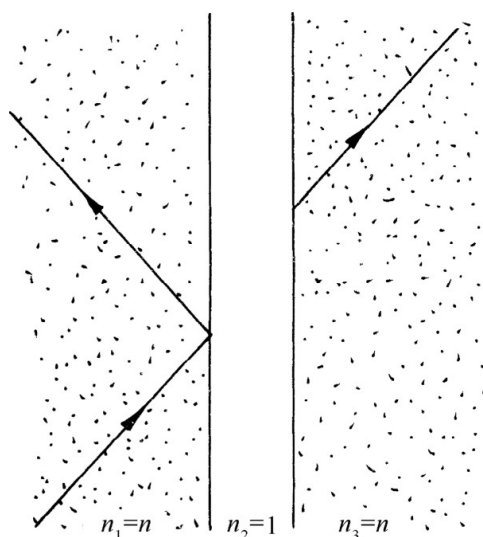
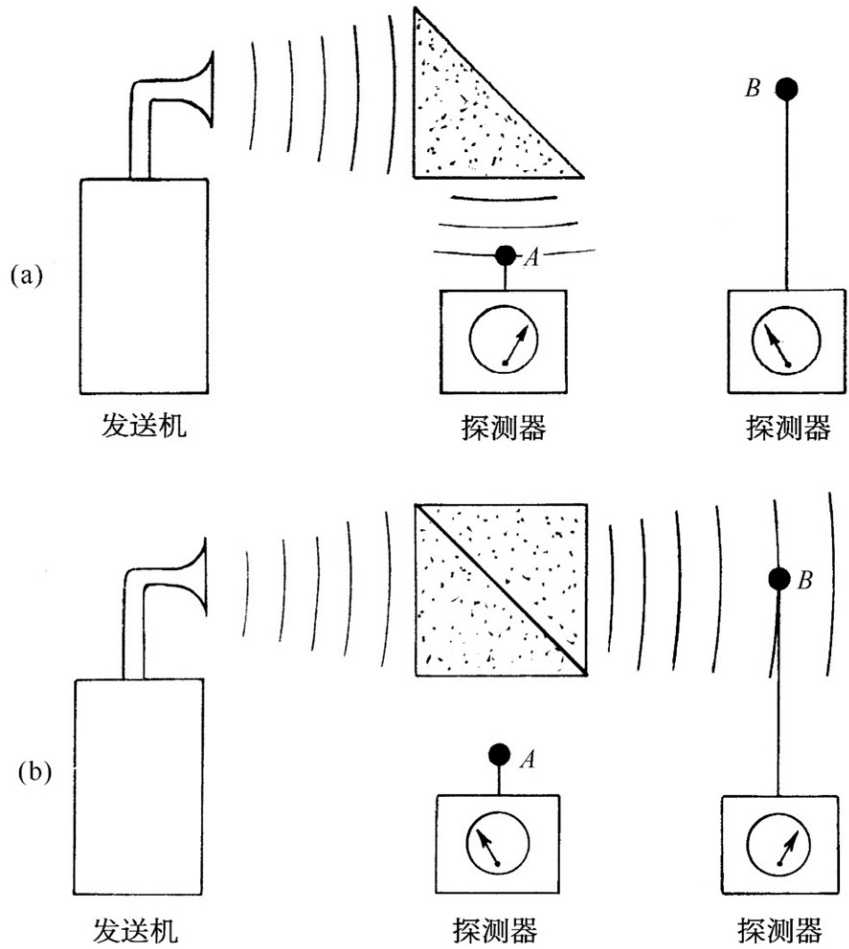


图33-10 如果有一个小间隙，则内反射就不完全，在该间隙之外会出现一个透射波

这种透射效应可以用普通光观察到，只要空气间隙十分微小（属于光波波长的数量级，诸如 10^{-5} cm），但如果采用三厘米波，则不难演示出来。这时按指数函数衰减的场就会伸展几个厘米。一种能表现这一效应的微波装置如图33-11所示。从三厘米波的小发送机发出波对准一个 45° 角的石蜡棱镜。对于这种频率石蜡的折射率为1.50，因而临界角为 41.5° 。所以波全部从那个 45° 的面上反射而由探测器A采集，如图33-11（a）所示。如果将第二个石蜡棱镜与该第一个棱镜互相接触

地放在一起，如图33-11（b）中所示，则波将笔直地贯穿过去而在探测器B那里被接收。如果在两个棱镜之间留下几厘米厚的空隙，如图33-11（c）所示那样，则透射波与反射波两者都同时并存。在图33-11（a）中存在于该棱镜的45°面之外的电场，也可以通过把探测器B移至离该表面几厘米内而加以鉴定。



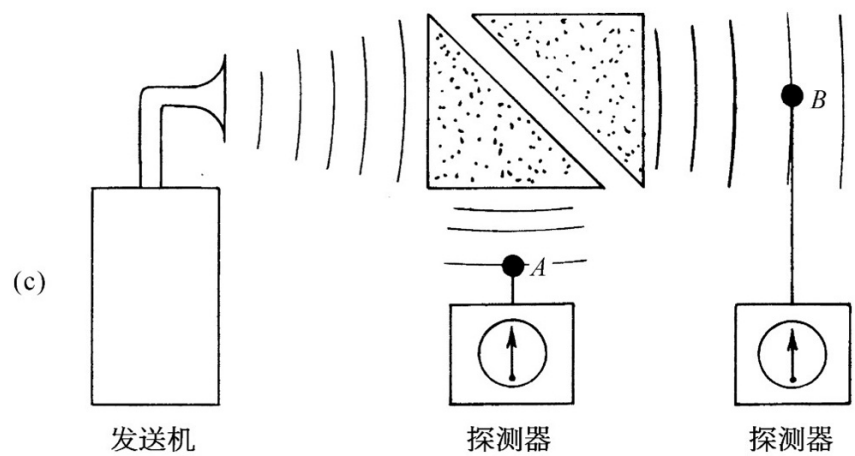


图 33-11 对内反射波的贯穿程度的演示

第34章 物质的磁性

§34-1 抗磁性和顺磁性

在本章中，我们将要谈论物质的磁性。具有最显著磁性的材料当然是铁。与此类似的磁性材料还有镍、钴，以及——在足够低的温度下（低于 16°C ）——钆和若干特种合金。这类被称为铁磁性的磁性足够显著和复杂，所以我们将专门用一章来加以讨论。然而，所有普通物质也确实会表现出某些磁效应，尽管十分微弱——比铁磁性材料中的效应要小千倍至百万倍。这里我们将描述普通的磁性，也就是说，描述除了那些铁磁性物质以外的其他物质的磁性。

这种微小磁性分成两类。有些材料会被引向磁场，而其他材料则被排斥。不像物质中的电效应那样，始终引起电介质被吸引，而这种磁效应却有二种符号。这两种符号可以借助于一座配备有一个尖极和一个平极的强电磁铁来轻易地加以证明，如图34-1所示。在尖极附近的磁场比平极附近的磁场要强得多。如果一小块物质由一根长线缚住并悬挂在两极之间，则一般说来，将有一微小的力作用于其上，这个小力可以通过电磁铁通电时悬挂材料的微小位移看出来。上述那几种铁磁材料会十分强烈地被吸引至该尖极上去，其他一切材料只会感到十分微弱之力，有的被轻微地引向尖极，有的则轻微地被排斥。

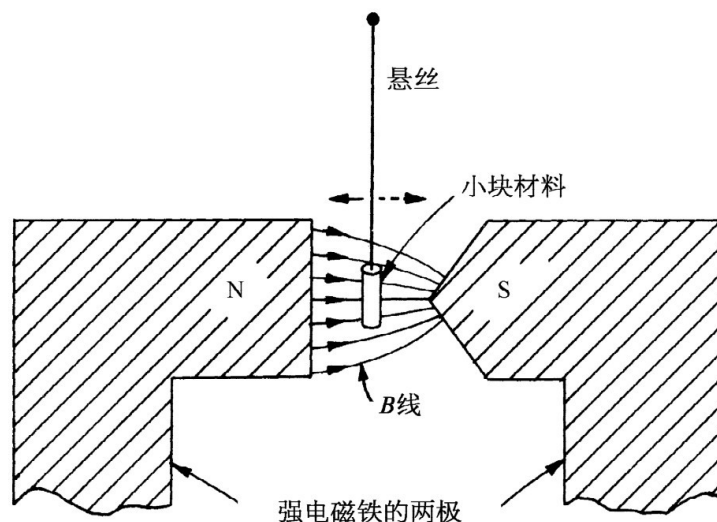


图34-1 一块铍的小柱体会被尖极轻微排斥；而一块铝则会被吸引

用铍的一个小柱体最容易看到这一效应，它会从强场区域被推开。像这样受到排斥的物质称为抗磁性物质。铍就是一种最强的抗磁性物质，但即使如此，效应仍然十分微弱。抗磁性总是十分弱的。如果一小块铝被挂在两极之间，则也会受到一微小之力，但却是指向该尖极的。像铝这类物质称为顺磁性物质（在这么一个实验中，当电磁铁通电或断路时会发生一些涡流，而这些力就能够引起强烈冲击。所以你必须小心地测出该悬挂物体静止后的净位移）。

现在我们要来简略地描述这两种效应的机制。首先，在许多种物质中的原子都不具有永久磁矩，或者毋宁说，每个原子内部的磁体都互相抵消了以致该原子的净磁矩等于零。电子自旋及其轨道运动都完全给抵消掉了，使得任何特定的原子都不具有平均磁矩。在这种场合下，当你把磁场开动时，由于感应在原子内部产生了一个小小的额外电流。按照楞次定律，这些电流处在反抗正在增长着的磁场这样一种方向，所以原子的感生磁矩的指向就与磁场的指向相反，这就是抗磁性的机制。

另外，还有某些物质，其中原子确实具有永久磁矩——各电子的自旋和轨道运动具有不等于零的净环流。所以除了抗磁性（这始终会存在）之外，还存在把各个原子的磁矩排列整齐的可能性。在这一种情况下，磁矩试图随同 磁场整齐排列（正如电介质中的永久电偶极子会被电场排齐一样），因而这感生磁场就有加强原来磁场的倾向。这一类物质就是顺磁性的物质。顺磁性一般都相当弱，因为那些使其排列整齐的力比起那些来自企图扰乱秩序的热运动之力相对较微小。由此也可以推断说，顺磁性通常都对温度较敏感（由造成金属导电性的自由电子的自旋所引起的顺磁性则是个例外。我们将不在这里讨论这种现象）。对于普通的顺磁性，温度越低，效应就越强。在低温下当碰撞引起的混乱效应较少时就会有较整齐的排列。另一方面，抗磁性几乎与温度无关。在任何具有固有磁矩的物质中抗磁和顺磁两种效应同时存在，但顺磁效应却往往占优势。

在第11章中，我们曾描述过一种铁电性 材料，其中所有电偶极子都被它们本身共有的电场所排齐。也有可能设想这种铁电性的磁性模拟，其中所有的原子磁矩都会排列整齐并连接在一起。如果你对这种情况如何会发生进行计算，则你就会发现由于磁力比电力小得那么多，所以甚至在绝对温度十分之几度时热运动就应能把这种排列冲散。因此在室温时不可能存在任何磁矩的永恒排列。

反之，这恰好就是铁中发生的事情——磁矩的确得到了整齐排列。在铁的不同原子的磁矩间有一种比直接磁 相互作用要强得多得多的有效力。这是一种只能用量子力学加以解释的间接效应。它比直接的磁相互作用约强一万倍，而这就是把铁磁性材料中的磁矩整齐排列起来的力。我们将在后面一章中讨论这种特殊的相互作用。

既然我们已经试着向你们提供了一个有关抗磁性与顺磁性的定性解释，因此我们必须纠正自己并且说明，不可能从经典物理学的观点用任何普通的方法来理解材料的磁效应。这样的磁效应完全是一种量子力学现象。然而，却可以做出某些虚假的经典论证而获得关于事情将发生的某种概念。我们也许可以这样说。你可做出某些经典论证并得到关于材料性能的一些猜测，但这些论证在任何意义上都不是“合法”的，因为最本质的是在每一种这样的磁现象中都绝对涉及量子力学。另一方面，有一些情况，诸如在等离子体中或在含有许多自由电子的空间区域中，在那里电子的确遵循经典力学规律。而在那些场合下，某些来自经典磁性的定理才有价值。并且，由于历史原因经典论证也确有某些价值。人们最初几次能够猜测到磁性材料的意义及其行为，的确是用经典论据的。最后，正如我们上面所指出的，经典力学也还能够向我们提供有关或许会发生的事态的某些有用猜测——尽管要研究这一课题的真正简单的方法应该是先去学习量子力学，然后再用量子力学来理解磁性。

另一方面，我们却不想等到彻底学习了量子力学以后才来理解像抗磁性这么一种简单东西。我们不得不依靠经典力学作为对发生过程的一种不完全证明，但始终必须认识到，那些论证实际上是不正确的。为此，我们做出了一系列会使你们发生混乱的有关经典磁性的定理，因为它们会证明另一些东西。除了最后那一条定理外，其他每一条都将是错误的。而且，作为对物理世界的描述它们全都是错的，因为量子力学被漏掉了。

§34-2 磁矩与角动量

我们所要证明的第一个来自经典力学方面的定理如下：如果电子在一个圆周轨道上运动（比方，在有心力的影响下绕核旋转），则磁矩与角动量间存在一个确定的比率。对于在轨道上运动的电子，让我们称它的角动量为 $\mathbf{J}$ ，磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$ 。角动量的大小就是电子质量乘上速度再乘以半径（见图34-2），它的方向与轨道的平面垂直，

$$\mathbf{J} = m\mathbf{v}r \quad (34.1)$$

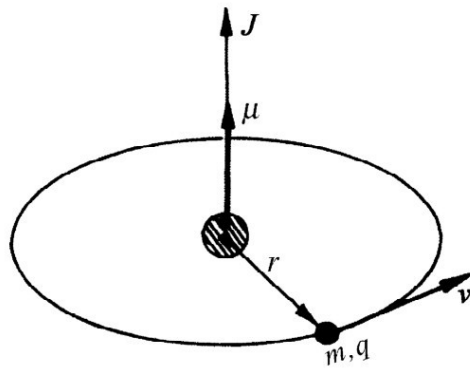


图34-2 对任一圆周轨道，磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 为 $q/2m$ 乘角动量 $\mathbf{J}$

（当然，这是一个非相对论性的公式，但它对于原子却是一种很好近似，因为对于电子所涉及的 v/c 值一般为 $e^2/\hbar c \approx 1/137$ 或约1%的数量级）。

相同轨道的磁矩是电流乘以面积（见§14-5），电流等于单位时间通过轨道上任一点的电量，也即电荷 q 乘以转动频率，因为频率等于速度除以轨道的周长，所以

$$I = q \frac{v}{2\pi r}.$$

因面积为 πr^2 ，所以磁矩为

$$\mu = \frac{qvr}{2}, \quad (34.2)$$

它也指向与轨道平面垂直的方向，所以 $\mathbf{J}$ 与 $\boldsymbol{\mu}$ 处在相同的方向：

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{J} (\text{轨道}). \quad (34.3)$$

它们间的比率与速度和半径都无关。对于任何在圆周轨道上运动的粒子，其磁矩等于角动量的 $q/(2m)$ 倍。对于一个电子来说，电荷是负的——我们把它叫作 $-q_e$ ，因而有

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{q_e}{2m} \mathbf{J} (\text{电子轨道}). \quad (34.4)$$

那是我们按照经典理论所预期的，但相当奇怪，它在量子力学中却仍然正确。它属于这类事情中的一件。可是，若你继续应用经典物理，你就会发现在其他一些地方，从它得出来的答案乃是错误的，因而试图记住哪些是对的与哪些是错的将是一场大的游戏。我们也许可以立刻向你们提供在量子力学中一般是正确的东西。首先，式（34.4）对轨道运动是正确的，但那并不是唯一存在的磁性。电子还有对其本身的轴自旋的运动（有点像地球绕地轴的转动），而作为自旋的结果它同时具有角动量和磁矩。但由于纯粹是量子力学方面的原因——并没有经典方面的解释——所以关于电子自旋的 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\mathbf{J}$ 的比率是该自旋电子的轨道运动的二倍，即

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{q_e}{m} \mathbf{J} (\text{电子自旋}). \quad (34.5)$$

一般说来，在任何原子中既有几个电子，又有关于自旋和轨道运动的某种结合，从而造成一个总角动量和一个总磁矩。尽管没有经典方面的理由可以说明为什么会这样，但在量子力学中却始终正确，即

（对于一个孤立原子）磁矩的方向恰好与角动量的方向相反。这两者之间的比率不一定为 $-q_e/m$ 或者为 $-q_e/(2m)$ ，而是介乎这两值之间，因为有来自轨道和自旋两方面贡献的混合。我们可以写成

$$\boldsymbol{\mu} = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \mathbf{J}, \quad (34.6)$$

式中 g 是标志原子状态的一个因子，对于纯轨道矩它应该为1，对于纯自旋矩它应该是2，若对于一个像原子那样的复杂系统，则 g 应该处于1与2之间的其他某个数值。当然，这一公式并不会告诉我们很多东西，它只是说磁矩平行于角动量，但可以有任意的大小。然而，式（34.6）的形式却很方便，因为被称作“朗德 g 因子”的这个 g 是一个大小为1的量级的无量纲常数。量子力学的任务之一就是对于任何特定的原子态预言这个 g 因子。

你或许也会对核里发生的情况感兴趣。在核里存在着质子和中子，它们可能在某种轨道上绕行，而同时，像电子一样，也具有内禀自旋。磁矩再度平行于角动量。对于绕圆周运动的质子来说，只有现在这两者之比的数量级才是你可能想到的，即式（34.3）中的 m 应等于质子质量。因此对于核来说经常写成

$$\boldsymbol{\mu} = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) \mathbf{J}, \quad (34.7)$$

式中 m_p 为质子质量，而 g 称为核的 g 因子，是一个接近于1的常数，对每一种核要分别加以测定。

关于核的另一个重要差别就是质子的自旋 磁矩并不像电子那样具有一个等于2的 g 因子。对于质子而言， $g=2$ （2.79）。非常奇怪，中子也有自旋磁矩，而此磁矩相对于其角动量则为2（-1.91）。换句话

说，在磁的意义上，中子并不严格表现“中性”，它好像是个小磁体，而且具有一个旋转着的负电荷才会有那种磁矩。

§34-3 原子磁体的进动

磁矩与角动量成正比的后果之一是，放在磁场中的一个原子磁体将会进动。首先，我们将按照经典方式来做论证。假设在匀强磁场中有一个自由悬挂着的磁矩 μ ，它将感受到一个等于 $\mu \times B$ 的力矩，该力矩试图将它转至场的方向。但原子磁体是个陀螺仪——它具有角动量 J 。因此，由磁场所产生的力矩并不会使该磁体排列整齐。而是，磁体将会进动，正如我们以前在第1卷第20章中分析陀螺仪时所见到的。角动量——以及和它相随的磁矩——相对一平行于磁场的轴进动。我们可以通过与第1卷第20章中所用的相同的方法求出这个进动速率。

假设在一小段时间 Δt 内角动量从 J 变至 J' ，如图34-3所示，而相对于磁场 B 的方向始终保持一个相同角度 θ 。让我们称这个进动角速度为 ω_p ，使得在时间 Δt 内进动的角（度）为 $\omega_p \Delta t$ 。从图中的几何形状就可看出，在时间 Δt 内角动量的改变为

$$\Delta J = (J \sin \theta) (\omega_p \Delta t) .$$

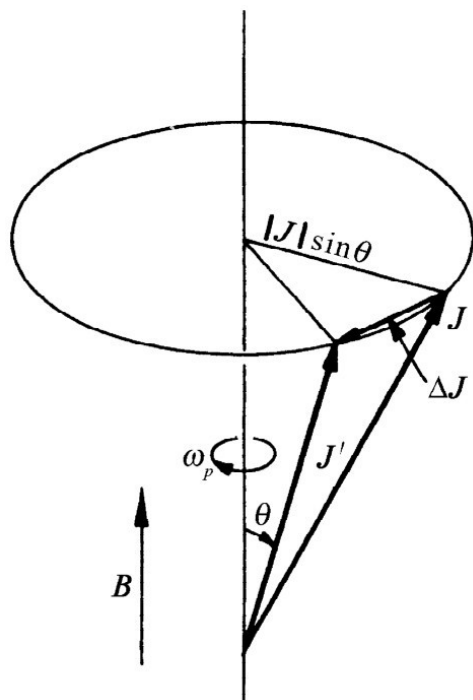


图34-3 一个具有角动量 J 和与之平行的磁矩 μ 的物体被放在磁场 B 中时，将以角速度 ω_p 进动

因而角动量的变化率为

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_p J \sin \theta, \quad (34.8)$$

它必定等于转矩

$$\tau = \mu B \sin \theta. \quad (34.9)$$

于是进动的角速度为

$$\omega_p = \frac{\mu}{J} B. \quad (34.10)$$

由式 (34.6) 代入 μ/J ，则我们见到，对于一个原子系统来说，

$$\omega_p = g \frac{q_e B}{2m}, \quad (34.11)$$

进动频率与 B 成正比。记住下列两个关系式会很方便，即对于一个原子（或电子），

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (1.4 \text{ 兆周/Gs}) gB, \quad (34.12)$$

而对于一个核，

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (0.76 \text{ 千周/Gs}) gB \quad (34.13)$$

（关于原子与核这两公式不同之处，仅仅是由在这两种情况下 g 的不同规定引起的）。

这样，按照经典理论，原子中的电子轨道——和自旋——应在磁场中进动。按照量子力学这是否也正确呢？基本上是正确的，但关于“进动”的意义却有所不同。在量子力学中人们不能在与经典相同的意义上谈论角动量的方向，尽管如此，还是存在着十分密切的类似——类似得那么密切以致我们仍称之为“进动”。以后在谈论量子力学时将对此再作讨论。

§34-4 抗磁性

接下来我们从经典观点来考察抗磁性。它可以用几种方法算出，但其中一种巧妙的办法则是这样的。假设在一个原子附近我们慢慢地开动磁场。当磁场改变时，由于磁感应而产生一电场。按照法拉第定律， $\mathbf{E}$ 环绕任一闭合路径的线积分等于穿过该路径的磁通量的变化

率。假设我们选取这样一条路径 Γ ，即是与该原子中心同心的一个半径为 r 的圆周，如图34-4所示。环绕这一路径的平均切向电场 E 由下式给出：

$$E2\pi r = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2),$$

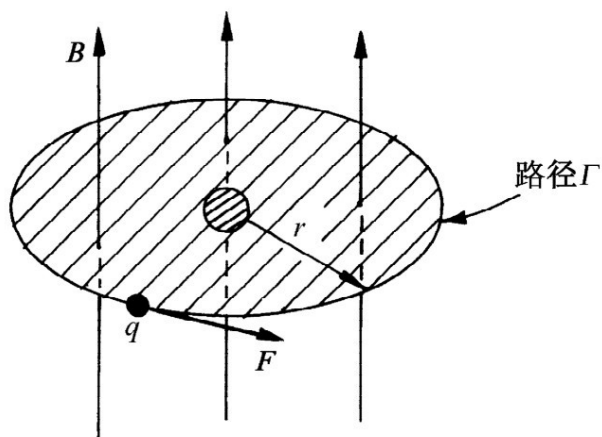


图 34-4 作用于原子中电子上的感生电力

因而就有一个强度为

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

的旋转电场。

作用于原子中一个电子上的这个感生电场会产生一个等于 $-q_e E r$ 的转矩，它必然等于角动量的变化率 dJ/dt ：

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_e r^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (34.14)$$

从零场开始对时间积分，我们就求得由于开动磁场而引起的角动量改变

$$\Delta J = \frac{q_e r^2}{2} B. \quad (34.15)$$

这就是当场开动时由于造成电子转动而引起的额外角动量。

这附加的角动量产生附加的磁矩，由于那是一种轨道运动，所以附加磁矩恰等于 $-q_e / (2m)$ 倍的角动量。这感生的反抗磁矩为

$$\Delta \mu = -\frac{q_e}{2m} \Delta J = -\frac{q_e^2 r^2}{4m} B. \quad (34.16)$$

式中负号（正如你通过应用楞次定律就可以看得出它是正确的）意味着这附加磁矩与磁场反向。

我们想要把式（34.16）写成稍微不同的形式。在该式中出现的 r^2 是指从原子中通过的平行于 $\mathbf{B}$ 的轴量起的距离的平方，因而若 $\mathbf{B}$ 沿着 z 方向，则它为 $x^2 + y^2$ 。如果我们所考虑的是球对称原子（或对固有轴在所有方向的原子做平均），则 $x^2 + y^2$ 的平均值将是真正从原子中心点量起的径向距离平方的平均值的2/3倍。因此，把式（34.16）写成下式往往更加方便：

$$\Delta \mu = -\frac{q_e^2}{6m} \langle r^2 \rangle_{\text{平均}} B. \quad (34.17)$$

总之，我们已求得一个与磁场 $\mathbf{B}$ 成正比而方向相反的、感生的原子磁矩，这就是物质的抗磁性。这个磁效应是造成一非均匀磁场中作用于一块铍上的那种小力的主要原因（你有可能通过下述办法计算出

这个力，即算出这些感生矩在磁场中的能量，并弄清楚当该材料移进或移出高场区时这能量究竟如何变化）。

我们还剩下这么一个问题：半径的平方平均值 $\langle r^2 \rangle_{\text{平均}}$ 是什么？经典力学不能提供任何答案。我们必须回去并用量子力学重新开始。在原子内部我们不能确实说出电子在哪里，而只知道它将位于某处的概率。若把 $\langle r^2 \rangle_{\text{平均}}$ 理解为距中心距离的平方对概率分布的平均值，则由量子力学所给出的抗磁矩就恰恰与式（34.17）相同。当然，这个式子是关于一个电子的磁矩。总磁矩应由对原子内所有各电子求和给出。令人惊异的事情是，经典论证与量子力学都会给出相同的答案，虽则正如我们将要看到的，给出式（34.17）的经典论证在经典力学中实际上并没有充分的根据。

即使原子已经有了永久磁矩，相同的抗磁效应依然会发生，此时系统将在磁场中进动。当整个原子进动时，它取得一个附加的小角速度，而这个缓慢转动又会产生一个代表对该磁矩修正的小电流。这不过是用另一种方式表示的抗磁效应。但我们在谈论顺磁性时实在无须为它操心。如果这抗磁效应像刚才所做的那样先行算出，则我们不必对来自进动方面的那个附加小电流留意，它已经包含在抗磁性项之内了。

§34-5 拉莫尔定理

从迄今所获得的结果我们已能够做出某种结论了。首先，在经典理论中磁矩 μ 始终正比于 J ，而对于特定的原子就有一个给定的比例常数。由于过去谈及的电子都没有自旋，所以，该比例常数始终等于-

$q_e / (2m)$ 。这就是说，在式(34.6)中我们应该令 $g=1$ 。 μ 对 $\mathbf{J}$ 的比值与电子的内部运动毫无关系。这样，按照经典理论，所有电子系统就该以相同的角速度进动（在量子力学中这是不正确的）。这个结果与我们现在要来证明的一个经典力学定理有联系。假设我们有一群电子，它们都被指向一中心点的吸引力维系在一起——就像各电子被核所吸引似的。电子之间也彼此相互作用，因而一般而言它们可以有复杂的运动。假设你已求出了没有磁场时的运动，然后希望知道有一弱磁场时运动又会怎样。这一定理讲，当有一弱磁场时运动总等于无场时的解之一加上一个角速度 $\omega_L = q_e B / (2m)$ 的绕场的轴的附加转动（若 $g=1$ ，则这与 ω_p 相同）。当然，会有许多种可能的运动。要点是，对于无磁场时的每个运动在场中就有一个与之相对应的运动，那就是原来的运动加上一个均匀转动。这称为拉莫尔定理，而 ω_L 称为拉莫尔频率。

我们很想说明这定理如何才能加以证明，但细节将留给你们自己算出来。首先，考虑中心力场中的一个电子，对它的作用力只是指向中心的 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 。如果现在开动一匀强磁场，就有一附加力 $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，因而合力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) + q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (34.18)$$

现在让我们从一个转动坐标系来考察同样的系统，该坐标系以角速度 ω 绕通过力心且与 $\mathbf{B}$ 平行的轴旋转着。这不再是一个惯性系，因而就得放进那些适当的膺力——在第1卷第19章中所曾经谈及的离心力及科里奥利力。我们在那里发现，在一个以角速度 ω 旋转着的参照系中，会有一个正比于速度的径向分量 v_r 的表观切向力：

$$F_t = -2m\omega v_r. \quad (34.19)$$

又有一个由下式给出的表观法向力：

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_t, \quad (34.20)$$

其中 v_t 是在该转动着的参照系中测得的速度切向分量（法向分量 v_r 则对于该转动系统和惯性系统是相同的）。

现在，对于足够小的角速度（也就是，如果 $\omega r \ll v_t$ ），我们在式（34.20）中同第二项（科里奥利力）相比可以忽略第一项（离心力）。于是式（34.19）和（34.20）就可以合并写成

$$\mathbf{F} = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (34.21)$$

现在若把转动和磁场联合起来，则必须将式（34.21）中的力与式（34.18）中的力相加。合力为

$$\mathbf{F}(r) + q \mathbf{v} \times \mathbf{B} + 2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (34.22)$$

[我们颠倒式（34.21）中的叉积及符号以便获得这末一项]。考察上述结果，我们看到，若

$$2m \boldsymbol{\omega} = -q \mathbf{B},$$

则右边两项互相抵消，因而在转动参照系中就只有力 $\mathbf{F}(r)$ 了。电子的运动正好同没有磁场——当然也就没有转动——时一样。我们已对一个电子证明了拉莫尔定理。由于这个证明假定了 ω 较小，那也就意味着这个定理只对于弱磁场才正确。我们唯一要求你们对此做出改

进的事情就是考虑许多电子彼此相互作用的情况，但是这些电子都处在相同的有心力场中，并要求你们证明同样的定理。因此，不管一个原子多么复杂，若它有一个有心力场，则这个定理就是正确的。但那是经典力学的末日，因为事实上原子是并不会像那样进动的。式(34.11)的进动频率只有当 g 碰巧等于1时才会等于 ω_L 。

§34-6 经典物理不会提供抗磁性或顺磁性

现在我们想要来证明，按照经典力学完全不可能有抗磁性或顺磁性。这听起来有点像发疯似的——起初，我们证明了存在顺磁性、抗磁性、进动轨道等等，而如今却又要证明那是完全错的。的确，我们将要证明若你跟随经典力学走得足够远，则不会有这样的磁效应，因为它们全都抵消掉了。如果你在某处开始做经典论证并且不走得太远，则你可以获得任何想要获得的答案。但唯一合理而又正确的证明却显示不会有任何磁效应存在。

经典力学的一个结论是：若你有任意类型的系统——比如含有电子、质子或其他任何东西的气体——被保持在一个箱子中以致整个系统不能够转动，则不会有任何磁效应发生。如果你有一个孤立系统，比如由其本身维系在一起的一颗星体，当你加上磁场时它能够发生转动，那么就可能有磁效应。但如果你有一块材料，它的位置被固定得不能发生旋转，那么就不会有磁效应了。我们所谓抑制自旋的意思可以概括为：在某一给定温度下，假定系统只有一个热平衡状态。于是定理讲：如果你开动磁场并等待该系统达到热平衡状态，则不会有顺磁性或抗磁性——不会有感生的磁矩。证明：按照统计力学，一个

系统将处于任意给定运动状态的概率与 $e^{-U/kT}$ 成正比，其中 U 为系统运动的能量，那么，运动能量又是什么呢？对于一个在匀强磁场中运动的粒子，其能量等于通常的势能加上动能 $mv^2/2$ ，磁场并不会附加任何东西〔你知道，来自电磁场之力为 $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，而功率 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 正好就是 $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ ，并不会受磁场影响〕。因此一个系统的能量，不管是否处于磁场之中，始终等于动能加上势能。既然任何运动的概率仅取决于能量——这就是说，取决于速度和位置——不管是否有磁场存在都一样。因此，对于热平衡来说，磁场并不会产生影响。如果有一个系统处于箱子中，然后有另一个系统处于第二个箱子中，但这回是存在磁场的，那么处于第一个箱子中的任何一点具有任何特定速度的概率将与在第二个箱子中的相应概率相同。如果在第一个箱子中并没有平均环行电流（这将不会出现，倘若是与静止箱壁达成平衡的话），那就不会有平均磁矩。由于在第二个箱子中一切运动又都是一样的，所以那里也没有平均磁矩。因此，如果温度保持不变而热平衡在磁场开动之后又重新建立起来，则按照经典力学，不可能存在由磁场感生的磁矩。所以我们只能从量子力学方面得到有关磁现象的满意理解。

可惜，不能假定你们对量子力学已有了充分理解，因而这里不可能是讨论这一课题的场所。反之，我们并不总得在学习某些东西时先学习正确的法则，然后学习如何把它们应用于不同情况。在本科中几乎所有考虑到的每一课题都曾经按照另一种方式处理过。对于电学情况，我们曾在“第一页”就写出了麦克斯韦方程组，然后才推导出所有的结果来。那是一条途径。但我们现在决不试图去创立新的“第一页”，即把量子力学的各个方程都写下来并从它们推导出一切东西。在你们弄清楚其出处以前，我们将只得告诉你们某些量子力学结果。在这里我们就这样干。

§34-7 量子力学中的角动量

上面已向你们提供了关于磁矩与角动量之间的关系式。这很令人高兴。但这磁矩和角动量在量子力学中又意味着什么呢？为了保证人们懂得到底指的是什么，在量子力学中，事实证明最好是用像能量这种概念来定义如磁矩那样的东西。现在，要用能量来定义磁矩并不困难，因为磁矩在磁场中的能量按照经典力学为 $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ 。因此，下述定义已为量子力学所采用：如果我们算出一个系统在磁场中的能量并发现它正比于该场强（对于弱场来说），那么这个比例系数就称为磁矩在该场的方向上的分量（目前我们无须对工作要求得那么精致，可以仍然按照那种普通的、在某种程度上是经典的意义来考虑磁矩）。

现在我们要讨论量子力学中的角动量概念——更确切地说，是量子力学中所称为角动量的一些特性。你知道，当你着手新型的定律时，就不能只假定每一个词都要表示与以前完全相同的东西。比方，你可以这样想：“呵，我懂得了角动量是什么。它是会受转矩改变的那种东西。”但转矩又是什么呢？在量子力学中我们不得不对一些旧物理量赋予新的定义。因此，合理地说，最好就是用诸如“量子角动量”或其他相似名称来称呼它，因为它是在量子力学中定义出来的角动量。但如果你在量子力学中能够找到一个量，在系统变成足够大时与我们关于角动量的古老概念相同，则去发明一个额外字眼就没有什么用处了。我们也可以同样叫它作角动量。有了这么一点认识，即将加以描述的这种古怪东西也就是角动量了。它是在大系统中我们用经典力学观点认为是角动量的那种东西。

首先，我们取一个角动量守恒的系统，诸如完全处在真空中的一个孤立原子。于是像这样的东西（像绕自己的轴自转的地球）在通常

意义上来说，它有可能环绕人们所任意选取的轴旋转着。而对于给定的自旋，可能会有许多不同的状态，全都具有相等能量，每一个“态”相当于角动量轴的一个特定方向。所以在经典理论中，对于给定的角动量，就有无数个可能的态，它们全都有相同能量。

然而，结果是在量子力学中出现了若干件奇怪的事情。首先，在这样的系统中能够存在的状态数目是受限制的，即只存在有限个数目。如果系统很小，这有限的数目也很小，但如果系统大了，则这个有限的数目便变得非常非常大。其次，我们不能通过给出其角动量方向以描述一个“态”，而只能通过给出沿某一方向——诸如 z 方向——的角动量分量来给予描述。按照经典理论，具有给定总角动量 J 的物体，对于其 z 分量该可以有从 $+J$ 与 $-J$ 的任何数值。可是按照量子力学，角动量的 z 分量只能取某些分立数值。任何具有一定能量的给定系统——一个特定原子、原子核或任何一种东西——都各有一个特征数目 j ，而它的角动量的 z 分量就只能有下列这组数目中的一个：

$$j\hbar \quad (j-1)\hbar \quad (j-2)\hbar \quad \cdots \quad -(j-2)\hbar \quad -(j-1)\hbar \quad -j\hbar \quad (34.23)$$

最大的 z 分量为 j 乘 $\hbar$ ，次大的是减少一个 $\hbar$ 单位，一直减少到 $-j\hbar$ 为止。这数值 j 叫作“该系统的自旋”（有些人却叫它做“总角动量量子数”，但我们将称之为“自旋”）。

你或许会担心我们现在所谈的可能只对于某一“特殊” z 轴才正确，但并非如此。对于一个自旋为 j 的系统，沿任何轴的角动量分量只能取式（34.23）中所列数值之一。虽然这看来很神秘，但仅要求你们暂且接受它，以后我们才回来讨论这一点。你至少可能乐于听到 z 分量会从某一数值变到负的相同数值，使得我们至少无须去决定哪一个是 z 轴的正方向（当然，假如我们曾经说过它要从 $+j$ 变到负的某个

其他数值，那么就会是无限神秘的，因为在指明了其他方向后，我们不可能再定义 z 轴）。

于是，如果角动量的 z 分量必须从 $+j$ 起按整数递减到 $-j$ ，那么 j 就必须是整数了。非也！并不尽然， j 的二倍才必须是整数，只有在 $+j$ 与 $-j$ 之间的差值才必须是整数。所以，一般说来，自旋 j 或者是整数或者是半整数，取决于 $2j$ 是偶数还是奇数。例如，像锂那样的核，它具有 $3/2$ 的自旋，即 $j=3/2$ ，于是绕 z 轴的角动量，以 $\hbar$ 为单位，就是下列诸值之一：

$$+3/2 \quad +1/2 \quad -1/2 \quad -3/2.$$

总共有四个可能态，若该核处在无外场的真空中，则每个态具有相同能量。如果我们有一个自旋为2的系统，则按 $\hbar$ 为单位角动量的 z 分量就只能有下列诸数值：

$$2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2.$$

如果你数一下对给定的 j 共有多少个态，则共有 $(2j+1)$ 个可能性。换句话说，如果你将能量和自旋 j 都告诉我，结果表明，正好存在 $(2j+1)$ 个具有那种能量的态，每个态相当于角动量分量的一个不同的可能值。

我们要加上另一事实。如果你随意选取一个已知其 j 值的原子而测量其角动量的 z 分量，那么你会获得可能数值中的任何一个，而每个数值是同样可能的。所有的态实际上都是单态，而每个态同任意另一个态恰恰是一样。在世界上每个态都各具有相同“权重”（我们假定并没有预先挑选出一个特殊样品）。顺便说说，这个事实有一个简单的经典类似。如果你按照经典方式提出这同样的问题：若取一个都

具有相同总角动量的随机系统样品，那么对于某个特定角动量分量的可能性究竟如何呢？——答案是，从极大至极小的所有数值都具有同样的可能（你可以不难把它计算出来）。这一经典结果就相当于在量子力学中 $(2j+1)$ 个可能性具有相等的概率。

从迄今我们所得到的结果，还能够得出另一个有趣而有点令人吃惊的结论。在某些经典计算中，最终结果中出现的量是角动量 $\mathbf{J}$ 大小的平方——换句话说，那就是 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 。结果是，通过利用经典的计算结果和下述的简单法则：由 $j(j+1)\hbar^2$ 取代 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，就往往能够猜出正确的量子力学公式。这一法则通常是有效的，而且往往但并非永远会给出正确结果。我们可以提供下面的论据来证明为什么你可能预料到这一法则会起作用。

标积 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 可以写成

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

由于它是标量，所以对于自旋的任意取向它都应相同。假定我们随机地选择任何给定的原子系统的样品并作出对 J_x^2 , J_y^2 或 J_z^2 的测量，那么对每一个的平均值都应该相同（对任何一个方向都不存在任何特殊区别）。因此， $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 的平均值就恰恰是任一分量的平方——比方说 J_z^2 ——平均值的三倍：

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \rangle_{\text{平均}} = 3 \langle J_z^2 \rangle.$$

但由于 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 对所有一切取向都相同，所以它的平均值当然也就刚好是它的恒定值，于是我们有

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 3\langle J_z^2 \rangle. \quad (34.24)$$

如果我们现在说，对于量子力学也将采用同样的式子，则可以容易地求得 $\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}}$ 。我们只需取 J_z^2 的 $(2j+1)$ 个可能值之和并除以总数：

$$\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}} = \frac{j^2 + (j-1)^2 + \cdots + (-j+1)^2 + (-j)^2}{2j+1} \hbar^2. \quad (34.25)$$

对于一个自旋为3/2的系统，这个式子成为：

$$\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}} = \frac{(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2}{4} \hbar^2 = \frac{5}{4} \hbar^2.$$

我们断定

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 3\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}} = 3 \times \frac{5}{4} \hbar^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \hbar^2.$$

将把它留给你们自己去证明，式（34.25）加上式（34.24）就会给出这个普遍结果：

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = j(j+1)\hbar^2. \quad (34.26)$$

虽然我们可能从经典理论想到 $\mathbf{J}$ 的 z 分量最大可能值会恰好等于 $\mathbf{J}$ 的大小——也即 $\sqrt{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}$ ——但按照量子力学 J_z 的极大值却总要比这略微小些，因为 $j\hbar$ 总是小于 $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ 的。所以角动量从不“完全沿 z 方向”。

§34-8 原子的磁能

现在，我们又要再来谈论磁矩。上面曾经说过，在量子力学中一个特定原子系统的磁矩可通过式（34.6）用角动量写出：

$$\boldsymbol{\mu} = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \mathbf{J}, \quad (34.27)$$

其中 $-q_e$ 和 m 分别表示电子的电荷和质量。

一个置于外加磁场中的原子磁体将具有额外能量，这取决于它的磁矩沿场向的分量。我们知道，

$$U_{\text{磁}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (34.28)$$

选择 z 轴使其沿 $\mathbf{B}$ 方向，则

$$U_{\text{磁}} = -\mu_z B. \quad (34.29)$$

利用式（34.27），我们得

$$U_{\text{磁}} = g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J_z B.$$

量子力学表明， J_z 只能有某些值： $j\hbar, (j-1)\hbar, \dots, -j\hbar$ 。因此，原子系统的磁能并不是任意的，它只能有某些值。例如，它的极大值为

$$g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \hbar j B.$$

$q_e \hbar / (2m_e)$ 这个量通常被赋予“玻尔磁子”的名称而被写成 μ_B ：

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m}.$$

磁能的可能值为

$$U_{\text{磁}} = g\mu_B B \frac{J_z}{\hbar},$$

其中 $J_z/\hbar$ 取可能值: $j, (j-1), (j-2), \dots, (-j+1), -j$ 。

换句话说，一个原子系统当被置于磁场中时，其能量改变的值正比于场，同时也正比于 J_z 。我们讲，一个原子系统的能量被磁场“分裂成 $2j+1$ 个能级”。例如，在磁场外时能量为 U_0 而 j 值为 $3/2$ 的一个原子，当被置于磁场中时，就会有四个可能的能量。我们可以通过像图 34-5 中所画的能级简图来表明这些能量。任何特定原子在任何给定的磁场中只能有这四个可能能量中的一个。这就是量子力学所说的关于一个原子系统在磁场中的行为。

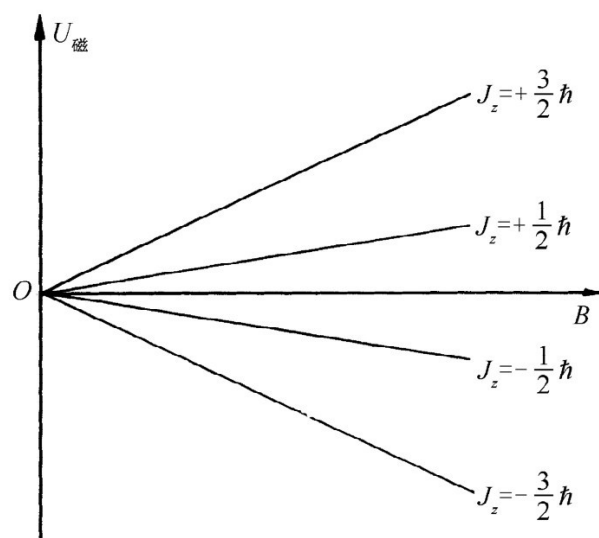


图34-5 自旋为3/2的原子系统在磁场 B 中可能具有的磁能

最简单的“原子”系统乃是单个电子。电子的自旋为 $1/2$ ，因而就有两个可能的状态： $J_z = \hbar/2$ 和 $J_z = -\hbar/2$ 。对于一个静止（没有轨道运动）的电子来说，自旋磁矩具有等于2的 g 值，因而磁能可以是 $\pm\mu_B B$ 中的一个，在磁场中的可能能量如图34-6所示。大概而言，我们就说电子或者具有“向上”（沿场方向）的自旋，或者具有“向下”（逆场方向）的自旋。

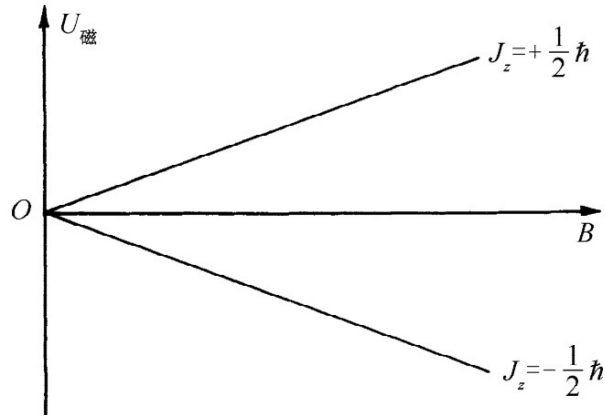


图34-6 电子在磁场 B 中两个可能的能量状态

对具有较高自旋的系统，就会存在更多的态。我们可以设想其自旋是“向上”或是“向下”，还是在这两者之间翘起某个“角度”，这都要取决于 J_z 值。

在下一章我们将用这些量子力学结果来讨论材料的磁性。

第35章 顺磁性 与 磁共振

§35-1 量子化磁态

上一章我们曾描述过在量子力学中一物体的角动量怎么会不具有任意方向，而在一个给定轴上它的分量却只能取某些间隔相等的分立值，那是一件令人震惊而又独特的事情。你可能认为，在你的智力达到更高水平并准备好接受这种概念之前也许不应该探索这种事情。实际上，就能够轻易地接受这样一件事情的意义上来说，你的智力将永远不会变得更高级。并没有任一种描述方法可以使其明白易懂，而同时在其本身的形式上又不会那么微妙和高级以致比起你企图要加以解释的东西更复杂。在小尺度范围内的物质行为——正如我们曾经多次提到的——与通常所熟悉的任何事情都不相同，而且确实十分奇怪。当我们继续讲解经典物理时，试图对小尺度范围内物质的行为得到一个逐渐增长的感性认识，开始的时候作为一种缺乏任何深刻理解的经验，乃是一个好主意。对这些事情的理解，在任何程度上都是很慢地达到的。当然，人们逐步变成能够更好地懂得在量子力学情况下所发生的事情——如果这就是所谓理解的涵义——那么人们将永远得不到一个认为量子力学法则是“自然的”那种舒舒服服的感觉。当然那些法则的确是“自然的”，但对于我们本身在普通水平的经验上来说它们却不是自然的。我们对待这一角动量的法则的态度与过去对待许多曾经谈到的其他东西的态度很不相同，这一点应该有所解释。我们并不试图解释“它”，但至少必须告诉你们发生的情况，要对材料磁性进行解

释而又不提及有关磁性——包括角动量和磁矩——的那种经典解释乃是不正确的，那可能是不诚实的。

关于量子力学的一个最令人震惊而又扰乱人心的特征在于：如果你沿任一根特定轴取角动量，则你会发现它总等于一整数或半整数乘以 $\hbar$ 。不管你取的是哪一根轴，结果是一样的这一奇怪事实——你可取任一根其他轴并发现在它上面的分量也被固定在那同一组数值上——所涉及的微妙之处我们将留在后面一章中讨论，到那时你将会因看到这一表观佯谬如何最后获得解决而感受到欢欣鼓舞。

目前我们将仅仅接受这个事实，即对于每个原子系统就有一个数值 j ，称为该系统的自旋，它必须是一个整数或一个半整数，而沿任一特定轴的角动量分量则将始终具有下列从 $+j\hbar$ 到 $-j\hbar$ 之间的那些值之一：

$$J_z = \left\{ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ j-2 \\ \cdots \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{array} \right\} \cdot \hbar \text{之一.} \quad (35.1)$$

我们也曾提及每个简单原子系统都有一个与角动量的方向相同的磁矩。这不仅对于原子和核正确，而且对于基本粒子也都正确。每个基本粒子有其本身的特征值 j 和磁矩（对于某些粒子来说，这两者均为零）。在这一句话中，所谓磁矩我们指的是，比方说在一个沿 z 方向的磁场中，对于小磁场来说系统的能量可以写成 $-\mu_z B$ 。我们一定要有磁场不应太大的条件，否则它就可能干扰该系统的内部运动，从

而能量不会成为磁场发动前存在的那个磁矩的一种量度。但如果场足够弱，则由该场所改变的能量由量

$$\Delta U = -\mu_z B \quad (35.2)$$

表示，而条件是在这个式子里的 μ_z 要由下式来代替：

$$\mu_z = g \left(\frac{q}{2m} \right) J_z, \quad (35.3)$$

其中 J_z 就是式（35.1）中那些数值之一。

假设考虑一个自旋为 $j=3/2$ 的系统。在没有磁场时，该系统就有四个不同的可能状态，这些状态对应于那些不同的 J_z 值，但都具有完全相同的能量。可是一旦我们加上磁场，就有一个附加的相互作用能量把这些状态分隔开，形成四个稍微不同的能级。这些能级的能量是由某些与 B 成正比而又乘以 J_z 值（ $3/2$ 、 $1/2$ 、 $-1/2$ 和 $-3/2$ ）的 $\hbar$ 倍给出。关于自旋分别为 $1/2$ 、 1 和 $3/2$ 的原子系统的能级分裂，如图35-1的那些简图所示（记住对于电子的任何配置，磁矩始终与角动量反向）。

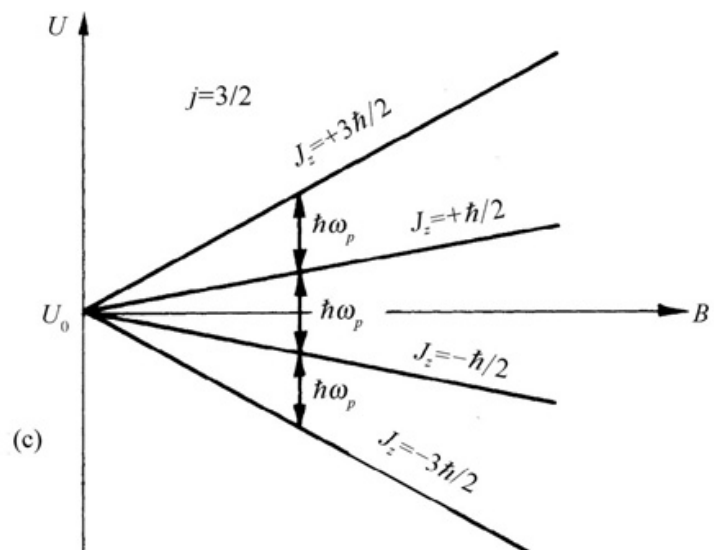
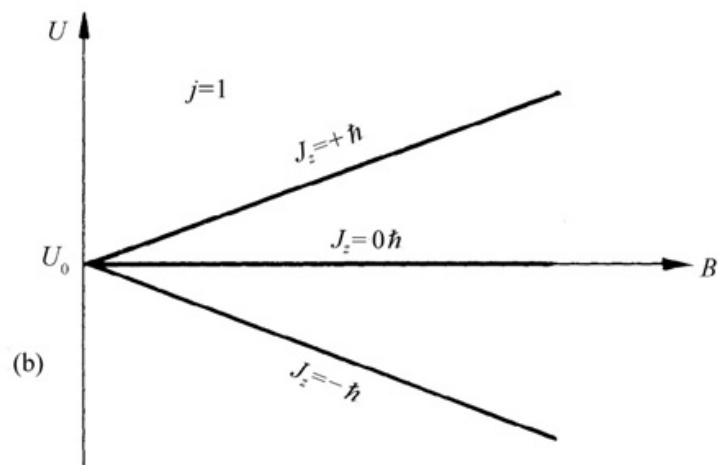
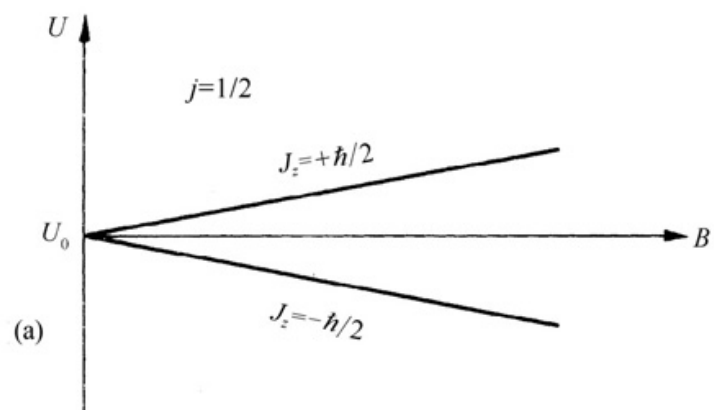


图35-1 自旋为 j 的一个原子系统在磁场 B 中具有 $(2j + 1)$ 个可能能量，对于小场来说，能量间隔与 B 成正比

你将从图上注意到，那些能级的“重心”在有磁场和没有磁场时都一样。并且注意到，对于给定磁场中的某个给定粒子来说从一个能级至下一能级的间隔总是相等的。对于某一给定磁场 B 我们想把能量间隔写成 $\hbar \omega_p$ ——这仅仅是 ω_p 的定义。利用式 (35.2) 和 (35.3)，我们得

$$\hbar \omega_p = g \frac{q}{2m} \hbar B$$

或

$$\omega_p = g \frac{q}{2m} B. \quad (35.4)$$

量 $g [q / (2m)]$ 恰好就是磁矩对角动量的比——它是该粒子的一种性质。式 (35.4) 与我们在第34章中得到的角动量为 J 而磁矩为 μ 的陀螺仪在磁场中的进动角速度的公式相同。

§35-2 斯特恩-格拉赫实验

角动量被量子化这一事实是那么令人惊异，所以我们将根据历史的观点对它稍微谈一下。从它被发现的那一刻起就成为一种震动（尽管在理论上已预期到了）。最初由斯特恩格拉赫于1922年在一个实验上观察到。如果你愿意的话，尽可以认为斯特恩-格拉赫实验就是关于

角动量量子化这一信念的直接验证。斯特恩和格拉赫设计了一种测量个别银原子磁矩的实验。他们通过在一个热炉中把银汽化并让某些银蒸气穿过一系列小孔而产生出一银原子束。这原子束对准一块独特磁铁的极尖之间的空隙，如图35-2所示。他们的意图如下：如果银原子有磁矩 μ ，则在磁场 B 中它就具有能量 $-\mu_z B$ ，这里 z 为磁场方向。在经典理论中， μ_z 应等于磁矩乘以该矩与磁场间夹角的余弦，因而在场中的附加能量该是

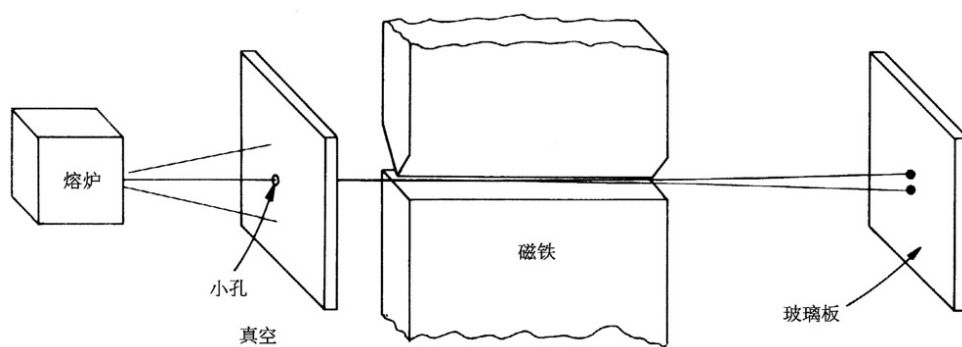


图 35-2 斯特恩-格拉赫实验

$$\Delta U = -\mu B \cos\theta. \quad (35.5)$$

当然，当原子从炉中跑出来时，它们的磁矩会指向每一个可能方向，因而会有所有的 θ 值。现在如果磁场随 z 变化得很快——有一个很强的场梯度——那么磁能也将随位置变化，因而将有一个力作用于磁矩之上，这力的方向取决于 $\cos\theta$ 是正还是负。原子将被一个正比于磁能微商的力拉向上或拉向下，根据虚功原理，

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos\theta \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (35.6)$$

斯特恩和格拉赫所制成的磁铁，其中一个极的头部形成十分尖锐的刃以便产生迅速变化的磁场。银原子束恰好对准沿这一尖锐的刃，

使得原子在那个非均匀磁场中会感受到一个垂直方向的力。一个磁矩按水平取向的银原子不会受任何力的作用而将笔直地经过该磁铁。一个其磁矩完全垂直向上的原子则会受到一个拉其向上指向磁铁尖刃的力。一个其磁矩指向下的原子则会感受到一向下的推力。于是，当这些原子离开磁铁时，它们就会按照其磁矩的垂直方向分量而被分散开来。在经典理论中所有的角度都属可能，以致当这些原子由淀积在玻璃板上而被收集时，人们应该期望沿垂直方向出现一条银斑线。这条银线高度应与磁矩的大小成正比。当斯特恩和格拉赫看到实际所发生的情况时，经典概念的惨败完全被揭露了。他们在玻璃板上发现了两个明晰的斑点，那些银原子形成了两束。

一束自旋显然是杂乱取向的原子竟被分裂成分开的两束，这是最令人感到惊奇的。磁矩怎么会知道只允许它在磁场的方向上取某些分量呢？噢，那实际上就是角动量量子化被发现的开始，而不是试图给你一个理论上的解释，我们只是说你已被这一实验结果难住了，正如当年这个实验刚被做出来时物理学家们不得不接受该结果那样。这是原子在磁场中的能量会取一系列分立值的实验事实。对于这些数值中的每一个，能量正比于磁场强度。因而在场变化的区域中，虚功原理告诉我们，作用于原子上的可能磁力将具有一系列的分立值，由于对每个态所作用的力不同，因而原子束就被分裂成分开的若干束。从这些束偏移的尺度，人们就能求出磁矩的大小来。

§35-3 拉比分子束法

现在我们要来描述一种由拉比及其同事们所发展起来的、经改进的测量磁矩用的仪器。由于在斯特恩-格拉赫实验中原子的偏移很小，

因而磁矩的量度并不是很精确。拉比的技术使得磁矩的测量有可能达到难以想象的精度。这一方法是以这种事实为基础的，即原子的固有能量在磁场中被分裂成有限数目的能级。一个原子在磁场中的能量只能有某些分立值，这件事实际上并不比原子一般只具有某些分立能级的事实——我们在第1卷中曾经常提及的某些事情——更令人诧异。为什么这同样的事情对处于磁场中的原子来说就不成立呢？它仍然成立。但正是希望把这一事实与取向磁矩的概念相联系的意图才给量子力学带来某些奇怪的含意。

当一原子具有能量差约为 ΔU 的两个能级时，它可以通过发射一个频率为 ω 的光量子，从较高的能级跃迁到较低的能级。 ω 满足下式

$$\hbar \omega = \Delta U. \quad (35.7)$$

处于磁场中的原子也可以发生同样的事情。只是此时，能量差竟会那么小以致该频率与光对应不起来，而是对应于微波或无线电波。原子从低能级至较高能级的跃迁，也可通过对光的吸收而发生，对于原子处于磁场中的情况则通过对微波能量的吸收而实现。这样，如果有一个原子处于磁场中，则我们可以通过加一频率适当的附加电磁场使其从一个态跃迁至另一个态。换句话说，若有一个处在强磁场中的原子，而我们用一个弱的变化电磁场来“扰动”该原子，则会存在某个概率把它撞到另一个能级上去，只要该频率接近于式（35.7）中的 ω 值。对于一个处在磁场中的原子，这个频率恰好就是我们以前曾称之为 ω_p 的、根据式（35.4）用磁场所给出的那个频率。若该原子受一错误频率扰动，则能够引起跃迁的机会将十分微小。于是在引起跃迁的概率内就有一个在 ω_p 处的尖锐共振。通过在一已知磁场 B 中测量这

个共振频率，我们就能以巨大的精度测得量 g [$q / (2m)$] ——从而也测得了 g 因子。

十分有趣，人们从经典的观点也会得出相同的结论。按照经典图像，当我们把一个磁矩为 μ 而角动量为 J 的小陀螺仪置于一外磁场中时，该陀螺仪将环绕平行于磁场的轴进动（见图35-3）。假设我们要问：如何改变经典陀螺仪相对于场——也即相对于 z 轴——的角度呢？磁场会产生一个绕水平 轴的转矩。你会认为这样的转矩正在试图使该磁体与场排成直线，可是它却仅仅引起了进动。如果想要改变该陀螺仪相对于 z 轴的角度，那就必须对它施一环绕 z 轴 的转矩。倘若所施的是一个与进动同向的转矩，则该陀螺仪的角度将会这样改变以给出一个在 z 方向较小的 J 分量。在图35-3中， J 与 z 轴间的夹角将会增大。若试图阻止进动， J 会朝着垂直方向运动。

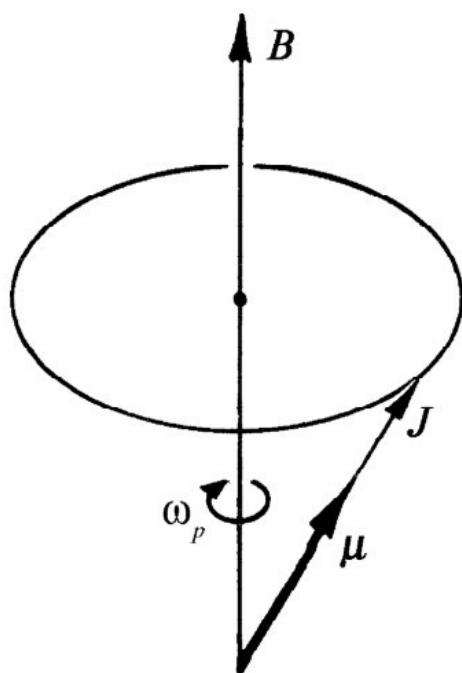


图35-3 具有磁矩 μ 和角动量 J 的原子的经典进动

对一个在均匀场中正在进动的原子，如何才能加上我们所要的那种类型的转矩呢？答案是，从旁加一个弱磁场。乍看起来你也许认为这个磁场的方向必须随同磁矩的进动一起旋转，使得它总是垂直于磁矩，如图35-4（a）中由场 B' 所指出的那样。像这样的场会工作得很好，但一个交变的水平场几乎同样优良。如果有一个小的水平场 B' ，它总是在（正的或负的） x 方向上而且以频率 ω_p 振动着，那么在每个半周期内施于磁矩上的力矩就将倒转方向，以致它具有一个积累效应，该效应几乎与一转动的磁场同样有效。于是，从经典方面说，我们就会期待，若有一个频率恰恰为 ω_p 振动着的很弱的磁场，则磁矩沿 z 方向的分量就应该改变。当然，按照经典理论， μ_z 应该是连续变化的，但在量子力学中这磁矩的 z 分量就不能做连续调整，它必须从一个值突然跳跃至另一个值。我们已做出了经典力学与量子力学两种结果之间的比较，为你们提供在经典理论中也许会发生某种事情与在量子力学中实际发生的事情如何联系起来的线索。顺便说说，你将会注意到，该期待的共振频率在这两种情况下是相同的。

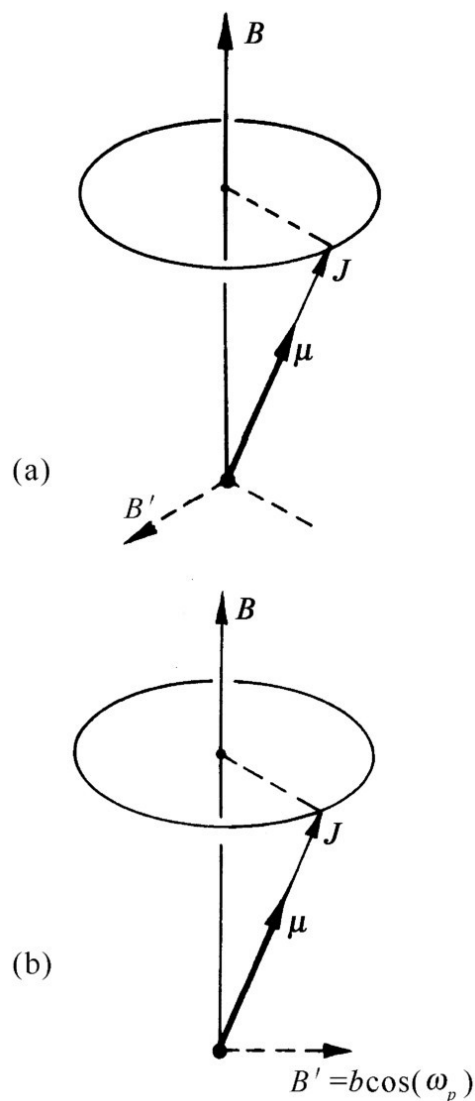


图35-4 一个原子磁体的进动角度，可以通过始终垂直于 μ 的、如在 (a) 或 (b) 中的一个振动着的水平磁场来加以改变

又一附注：从我们所曾谈到的关于量子力学的事情来看，并没有明显的理由说明为什么不能够在 $2\omega_p$ 的频率也发生跃迁。碰巧在经典情况下没有任何与此类似的东西，而在量子力学中也不会发生这种跃迁——至少对于我们刚才所述的那种独特诱导跃迁的方法来说是不会发生的。采用一个水平方向的振动磁场，频率 $2\omega_p$ 引起同时跳跃两步

的概率等于零。只有在频率 ω_p ，无论向上或向下的跃迁才可能发生。

现在，我们准备来描述有关测量磁矩的拉比方法。这里将仅仅考虑对自旋为 $1/2$ 的那种原子的操作。仪器设备的简图如图35-5所示。有一个熔炉，它发出的中性原子流直通过直线排列的三组磁铁。磁铁1几乎与图35-2中的一样，具有强大的场梯度——比方说，其 $\partial B_z / \partial z$ 为正。如果原子有一磁矩，而且 $J_z = +\hbar/2$ ，则它会被向下偏转；如果 $J_z = -\hbar/2$ ，则将被向上偏转（因为对于电子来说， μ 的方向与 J 的方向相反）。若只考虑那些能穿过狭缝 S_1 的原子，就有如图所示的两条可能轨道。凡 $J_z = +\hbar/2$ 的原子必定沿曲线 a 穿过该狭缝，而凡 $J_z = -\hbar/2$ 的原子则必定沿曲线 b 通过。从熔炉发出来的、沿其他路径的原子将不会穿过该狭缝。

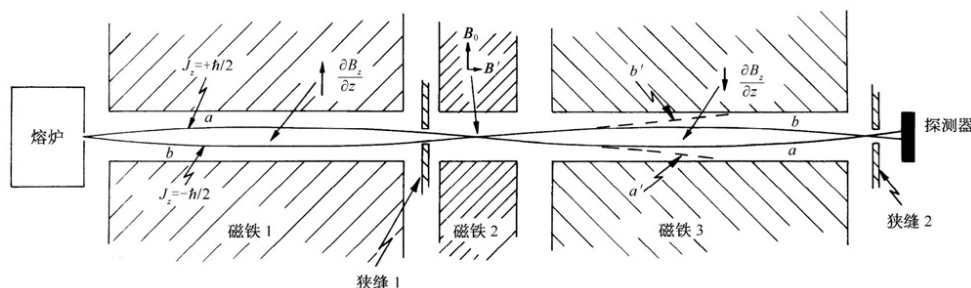


图 35-5 拉比的分子束仪器

磁铁2产生一个匀强场。在这一区域中没有力施于原子上，因而它们将直接通过而进入磁铁3中。磁铁3恰好像磁铁1，但其场是反转过来的，所以 $\partial B_z / \partial z$ 具有相反符号。那些具有 $J_z = +\hbar/2$ （我们讲“自旋向上”）的原子，先前在磁铁1中被推向下的，现在在磁铁3中却被推向上了，它们将继续沿着路径 a 穿过狭缝 S_2 到达探测器。那些具

有 $J_z = -\hbar/2$ （即“自旋向下”）的原子，在磁铁1和磁铁3中也各受到反向的力而沿路径***b*** 穿过狭缝 S_2 达到探测器。

探测器可以用各种不同方式制成，这取决于被测量的原子。例如，对于像钠一类的碱金属原子，探测器可以是一根与一灵敏电流计相连接的细热钨丝。当钠原子到达钨丝上时， Na^+ 离子被蒸发出去，留下来一个电子。因此在该导线上就有一个正比于每秒到达的原子数目的电流。

在磁铁2的间隙中有一组能产生小的水平磁场 $\mathbf{B}'$ 的线圈。这组线圈由以一可变频率 ω 振动的电流所驱动，所以在磁铁2的两极间就有一个强大而恒定的垂直方向的磁场 $\mathbf{B}_0$ 和一个弱小的振动着的水平磁场 $\mathbf{B}'$ 。

现在假设该振动场的频率 ω 被调至 ω_p 处——即处于场 $\mathbf{B}$ 中原子的“进动”频率。这交变场将使某些从旁经过的原子作出从一个 J_z 值至另一个 J_z 值的跃迁。一个原来自旋“向上” ($J_z = +\hbar/2$) 的原子可能给翻转“向下” ($J_z = -\hbar/2$)。此时这个原子已把它的磁矩方向倒转了，因而它将在磁铁3中感受到一个向下 的力并将沿着路径 a' 运动，如图35-5所示。它将不再穿过狭缝 S_2 而到达探测器了。同理，有些原子原来自旋是向下 ($J_z = -\hbar/2$) 的，当经过磁铁2时将被翻转向上 ($J_z = +\hbar/2$)，于是它们将沿着路径 b' 而不会到达探测器。

若振动场 $\mathbf{B}'$ 的频率与 ω_p 明显不同，则它将不会引起任何自旋的倒转，因而各原子将按照它们不受干扰的路径到达探测器。因此你可以看到，原子在 $\mathbf{B}_0$ 场中的“进动”频率 ω_p 可以这样求得，即变更场 $\mathbf{B}$

的频率 ω 直到抵达探测器的原子流的减弱被观测出来。原子流的下降将发生在 ω 等于 ω_p 的“共振”时刻。探测器中的电流作为 ω 的函数曲线或许看来像图35-6所示的那样。知道了 ω_p ，就能得到原子的 g 值。

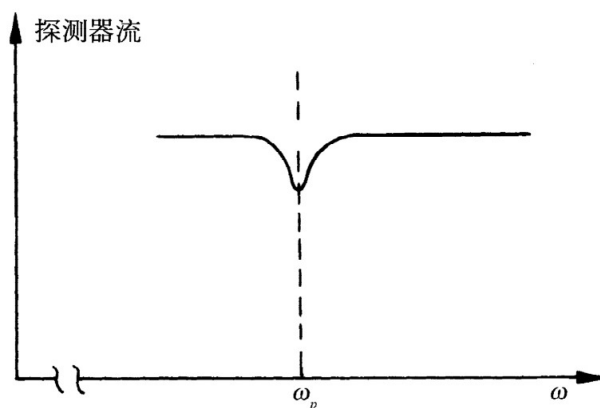


图35-6 当 $\omega = \omega_p$ 时，在束中的原子流就会减弱

像这样的原子束、或通常被称为“分子”束的共振实验，是测量原子客体磁性的一种漂亮而又精密的方法。这共振频率 ω_p 可以用极高的精度测得——事实上，比起我们对（为了求 g 而必须知道的）磁场 B_0 可能进行的测量要精确得多。

§35-4 大块材料的顺磁性

现在我们很想描述大块材料的顺磁现象。假设有一种物质其原子具有永磁矩，比如像硫酸铜那样的晶体。在这种晶体中存在这样的铜离子，其内部的电子壳层有一净角动量和一净磁矩。所以这种铜离子就是一个具有永磁矩的物体。请让我们就这件事说一句，有些原子具有磁矩而有些不具有。任何比如像钠那种含有奇数个电子的原子，将具有磁矩。钠有一个电子位于它的未填满的壳层内，这个电子给该原

子一个自旋和一个磁矩。然而，通常当化合物形成时，在外壳层中的额外电子就会与自旋方向恰巧相反的其他电子互相耦合，使得所有价电子的角动量和磁矩都经常被抵消掉，这就是为什么分子一般都不具有磁矩的原因。当然，如果是钠原子气体，则不会有这样的抵消作用[1]。并且，如果你有那种在化学中所谓“自由基”的东西——一种具有奇数个价电子的物体——则键不会完全被满足，因而就有一个净角动量。

在多数大块材料中，只要存在其内 电子壳层未被填满的原子就具有净磁矩，此时可能会有一个净角动量和磁矩。这样的原子在周期表中的“过渡元素”部分被找到了——诸如铬、锰、铁、镍、钴、钨和铂等就是这一类元素。此外，所有的稀土元素也都具有未填满的内壳层和永久磁矩。还有其他两三种奇怪的东西会偶尔具有磁矩，诸如液态氧，但我们将把它留给化学系去解释原因。

现在，假设有一个箱子充满了具有永久磁矩的原子或分子，比如气体、液体或晶体。我们想要知道，当加上一外磁场时将会发生什么情况。当没有 磁场时，原子因热运动而被到处撞来撞去，因而它们的矩在所有方向上转来转去。一旦有了磁场时，它就使那些小磁体整齐排列起来，于是趋向场的矩比离开场的矩就多些，即该材料已被“磁化”了。

我们将把材料的磁化强度 $\mathbf{M}$ 定义为单位体积中的净磁矩，而这指的是单位体积内原子磁矩的矢量和。如果单位体积中有 N 个原子，而它们的平均 磁矩为 $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle_{\text{平均}}$ ，则 $\mathbf{M}$ 可以写成 N 乘以平均原子磁矩：

$$\mathbf{M} = N \langle \boldsymbol{\mu} \rangle_{\text{平均}} . \quad (35.8)$$

$\mathbf{M}$ 的定义相当于第10章中关于电极化强度 $\mathbf{P}$ 的定义。

顺磁性的经典理论很像第11章中曾向你们表明的有关介电常量的理论。人们假定每个原子都有一个磁矩 μ ，它的大小固定，但其方向是任意的。在场 $\mathbf{B}$ 中，其磁能为 $-\mu \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos\theta$ ，其中 θ 为矩与场之间的夹角。根据统计力学，具有任意角度的相对概率为 $e^{-\text{能量}/(kT)}$ ，因而靠近零度的角比靠近 π 的角更可能出现。同以前在 §11-3 中所进行的步骤完全一样，我们会发现，对于小磁场来说， $\mathbf{M}$ 平行于 $\mathbf{B}$ ，大小为

$$M = \frac{N\mu^2 B}{3kT} \quad (35.9)$$

[见式 (11.20)]。这一近似公式只对 $\mu B/(kT)$ 比1小得多时才正确。

我们已求得感生磁化强度——单位体积中的磁矩——与磁场成正比，这即是顺磁性现象。你将会看到，这效应在低温时较强而在高温时较弱。当我们在该物质上加一磁场时，对于弱场会产生一个正比于该场的磁矩。 M 对 B 的比率（对于弱场而言）称为磁化率。

现在，我们要从量子力学观点来考察顺磁性。首先考虑原子自旋为 $1/2$ 的情况。在没有磁场的情况下，原子具有某个能量；但当处于磁场中时，就有两个可能的能量，每一个 J_z 值对应一个能量。对于 $J_z = +\hbar/2$ ，能量被磁场改变的量为

$$\Delta U_1 = +g\left(\frac{q_e \hbar}{2m}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B \quad (35.10)$$

（由于电子的电荷为负^[2]，因此对于一个原子来说能量移动 ΔU_1 是正的）。对于 $J_z = -\hbar/2$ ，能量被改变的量为

$$\Delta U_2 = -g \left(\frac{q_e \hbar}{2m} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B. \quad (35.11)$$

为了书写方便，让我们令

$$\mu_0 = g \left(\frac{q_e \hbar}{2m} \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad (35.12)$$

于是

$$\Delta U = \pm \mu_0 B. \quad (35.13)$$

μ_0 的意义很明显： $-\mu_0$ 是在自旋向上的情况下磁矩的 z 分量，而 $+\mu_0$ 则是在自旋向下时磁矩的 z 分量。

可是统计力学告诉过我们，一个原子处在一个态或另一个态，其概率正比于

$$e^{-(\text{态的能量})/kT}.$$

当没有磁场时，这两个态具有相同能量，所以当在磁场中达到了平衡时，概率就正比于

$$e^{-\Delta U/kT}. \quad (35.14)$$

单位体积中自旋向上的原子数为

$$N_{\text{向上}} = a e^{-\mu_0 B/kT}, \quad (35.15)$$

而自旋向下的原子数为

$$N_{\text{向下}} = a e^{+\mu_0 B/kT}. \quad (35.16)$$

常数 a 是被这样确定下来的，即

$$N_{\text{向上}} + N_{\text{向下}} = N, \quad (35.17)$$

式中 N 为单位体积中的原子总数。因此就得到

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.18)$$

我们所感兴趣的是沿 z 轴的平均 磁矩。由于自旋向上的那些原子将各贡献 $-\mu_0$ 之矩，而自旋向下的那些原子则各贡献 $+\mu_0$ 之矩，因而平均矩为

$$\langle \mu \rangle_{\text{平均}} = \frac{N_{\text{向上}}(-\mu_0) + N_{\text{向下}}(+\mu_0)}{N}. \quad (35.19)$$

于是单位体积中的磁矩 M 就是 $N \langle \mu \rangle_{\text{平均}}$ 。利用式（35.15）、（35.16）和（35.17），便可得到

$$M = N\mu_0 \frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.20)$$

这就是关于 $j=1/2$ 的原子其 M 的量子力学公式。顺便提及，这个式也可以用双曲正切函数写得更简洁些：

$$M = N\mu_0 \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}. \quad (35.21)$$

M 作为 B 的函数其曲线如图35-7所示。当 B 变得非常大时，双曲正切函数趋于1，因而 M 趋于其极限值 $N\mu_0$ 。所以在强场的情况下，磁化达到饱和。我们可以明白为什么会这样，在足够强的场中，磁矩全部被排列在同一个方向上了。换句话说，它们全都处于自旋向下的状态，因而每一原子贡献一个磁矩 μ_0 。

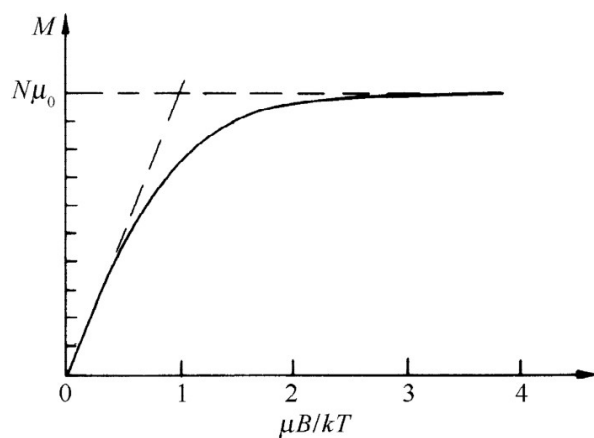


图35-7 顺磁性磁化强度随磁场强度 B 的变化

在大多数正常情况下——比如说，对于典型的矩、室温以及我们通常能够获得的场强（诸如10 000 Gs）——比值 $\mu_0 B / kT$ 约等于0.002。人们一定要达到极低温度时才能见到饱和现象。对于常温来说，我们往往能够用 x 来代替 $\tanh x$ ，因而上式可以写成

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT}. \quad (35.22)$$

正如我们曾在经典理论中见到的， M 与 B 成正比。事实上，这个式子几乎和以前的完全相同，除了因子1/3似乎不见了以外。但我们仍需要把量子力学中的 μ_0 同式（35.9）经典结果中出现的 μ 联系起来。

在经典公式中，出现的是 $\mu^2 = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}$ ，即矢量磁矩的平方，也即

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g \frac{q_e}{2m}\right)^2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}. \quad (35.23)$$

我们曾在上一章中指出，通过用 $j(j+1) \hbar^2$ 代替 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，你就很可能会从经典的计算结果中得到正确答案。在我们这个特殊例子中， $j=1/2$ ，因而

$$j(j+1) \hbar^2 = \frac{3}{4} \hbar^2.$$

若用此来顶替式 (35.23) 中的 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，则可得

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g \frac{q_e}{2m}\right)^2 \frac{3\hbar^2}{4},$$

或者利用式 (35.12) 所定义的 μ_0 ，我们得

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = 3\mu_0^2.$$

用这个结果代替经典公式 (35.9) 中的 μ^2 ，的确会重现正确的量子公式 (35.22)。

关于顺磁性的量子理论很容易推广到任意自旋 j 的原子。弱场磁化强度为

$$M = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{\mu_B^2 B}{kT}, \quad (35.24)$$

其中

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m} \quad (35.25)$$

是一个具有磁矩量纲的常数组合。大多数原子都具有近似这种大小的磁矩。它被称为玻尔磁子。电子的自旋磁矩就几乎正好是一个玻尔磁子。

§35-5 绝热退磁冷却法

关于顺磁性有一种很有趣的特殊应用。在非常低的温度下，有可能把原子磁体在一个强磁场中整齐排列起来。这时就能够通过一种所谓绝热退磁过程来获得极端低的温度。我们可取一种顺磁性盐（比方，像硝酸镨铵那样含有一些稀土原子的盐），并一开始就在强磁场中用液态氦把它降低到绝对温度1或2度，这时因子 $\mu B/kT$ 就会大于1——比如说大概是2或3。大多数自旋已被整齐排列，因而磁化几乎饱和。为简易起见，让我们说，磁场很强而温度很低，以致几乎所有原子都被整齐排列。那么，你就把盐绝热隔离（比如说，通过移去液态氦并保留高度真空），并将磁场撤除。盐的温度就大大降低下来。

现在假如你突然把磁场除去，那么晶格内原子的轻微的摆动或振动就会逐渐把所有自旋从整齐排列中撞散开来。它们有些自旋向上，而有些自旋向下。但若没有磁场（并略去原子间的相互作用，它只会造成微小误差），则翻转原子磁体并不需要能量。所以它们会在能量不发生改变因而也就没有任何温度变化的条件下，使本身的自旋处在随机分布的状态。

然而，假定正当那些原子磁体被热运动所翻转时还存在一些磁场，那么当把它们翻转到逆着磁场时就需要作一些功——它们必须反抗场而作功。这会从热运动中取出能量，从而降低了温度。因此，如果该强磁场并非消除得太快，则盐的温度将降低——它是通过去磁而

被冷却的。根据量子力学观点，当场强时所有原子都处于最低能态，因为任何会处于较高能态的可能性不可能大。但当场减弱时，热涨落使原子处在较高能态的可能性变得越来越大。当此事发生时，原子吸收了能量 $\Delta U = \mu_0 B$ 。因此，若场慢慢除去，则这种磁跃迁会从晶体的热振动中取出能量，因而就把它冷却了。用这种办法能够将温度从绝对温度几度降低至千分之几度。

你是否想要制造甚至比这更冷的东西？事实证明，自然界已提供了一条途径。我们曾经提到过原子核也有磁矩。关于顺磁性的公式对核也同样适用，不同之处仅在于核磁矩约比原子磁矩小千倍〔它们具有 $q\hbar/(2m_p)$ 的数量级，其中 m_p 为质子质量，由于电子质量与质子质量之比较小，所以核磁矩也较小〕。对于这样的磁矩，即使在2K的温度，因子 $\mu B/kT$ 也只有千分之几。但如果利用顺磁性的去磁过程把温度降低至千分之几度，那么 $\mu B/kT$ 就会变成一个接近于1的数——在这种低温下，我们能够着手使核磁矩饱和。那很幸运，因为此后便可利用核磁性的绝热去磁方法来达到更低温度。这样，就有可能做出两级的磁冷却。首先，利用顺磁性离子的绝热去磁达到千分之几度。然后，再利用这寒冷的顺磁性盐来冷却某些具有强核磁性的材料。最后，当我们从这一材料中移去磁场时，它的温度就会降低到绝对零度1度的兆分之一内——只要我们非常小心地做完每件事情。

§35-6 核磁共振

我们曾经说过，原子顺磁性很小，而核的磁性甚至比它还要小千倍。然而通过核磁共振的方法来观测核的磁性相对而言还是容易的。假设取一种像水那样的物质，其中全部电子的自旋都完全抵消，以致

它们的净磁矩为零。但水分子仍将有非常非常微小的磁矩，那是由氢核的核磁矩引起的。假设将水的一个小样品放在磁场 $\mathbf{B}$ 之中。由于（氢的）质子具有 $1/2$ 的自旋，所以它将有二个可能的能态。如果水处于热平衡状态，则将有较多一点的质子处在那较低能态——它们的磁矩方向平行于场的方向。在每个单位体积中就有一个小的净磁矩。由于质子磁矩仅仅约等于原子磁矩的千分之一，表现为 μ^2 的磁化强度——应用式（35.22）——大约只有典型原子顺磁性强度的兆分之一（这就是为什么我们得先挑选一种不具有原子磁矩的材料）。如果你把它算出来，那些自旋指向上的质子数目与那些自旋指向下的质子数目相差只有 10^{-8} 个，因而这效应的确十分微小！然而，它仍然可以按下述办法观测出来。

假设用一个能产生小水平振动磁场的小线圈把样品水包围起来。如果这个场以频率 ω_p 振动，则它将在二个能态之间诱导跃迁——正如在§35-3中我们曾对拉比实验所描述的那样。当质子从较高能态跃迁至较低能态时，它将放出能量 $\mu_z B$ ，而这正如我们曾经见到的，它等于 $\hbar \omega_p$ 。如果它是从较低能态跃迁到较高能态，则它将从线圈那里吸收能量 $\hbar \omega_p$ 。由于处在较低态上的质子数目略微多于处在较高态上的，所以将从该线圈吸收净的能量。尽管该效应十分微弱，但很小的能量吸收可以用一台灵敏的电子放大器观测到。

正如在拉比的分子束实验中那样，这能量的吸收将仅当振动场处于共振时、也即当

$$\omega = \omega_p = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) B$$

时才会被看到。通过保持 ω 固定不变而变更 B 来寻找共振往往较为方便。能量吸收显然将在

$$B = \frac{2m_p\omega}{gq_e}$$

时出现。

一台典型的核磁共振仪器如图35-8所示。一个高频振荡器驱动着置于一对大电磁铁两极间的一个小线圈。两个绕于极尖上的小辅助线圈由60 Hz的电流驱动着，以便整个磁场围绕其平均值作十分微小的“摆动”。例如，假设该磁铁的主电流被调至会产生一个等于5 000 Gs的磁场，而辅助线圈则围绕这一值产生 ± 1 Gs的变化。如果该振荡器被调至21.2 MHz，那么当场每次扫过5 000 Gs时它就会处在质子的共振范围内了〔应用式（34.13），对于质子要用 $g=5.58$ 〕。

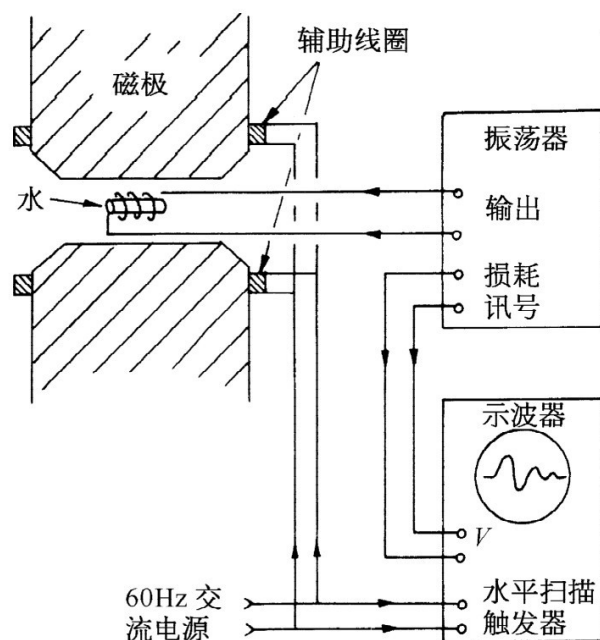


图 35-8 一台核磁共振仪器

这振荡器电路还被安排得能够给出一个附加的输出信号，这信号与从该振荡器所吸收的功率的任何改变成正比。把这一信号馈入示波器垂直方向偏转放大器中。示波器的水平扫描在该磁场摆动的每一周中被触发一次（更一般的是，这水平偏转被制成与该摆动场的大小成正比）。

在样品水还未放进该高频线圈内之前，从振荡器所吸收的功率为某个值（它不会随磁场改变）。然而，当一小瓶水放进线圈中时，示波器上就出现一个如图所示的信号。我们见到由于质子翻转所引起的功率被吸收的一个图像！

在实践中，很难掌握如何把主磁场恰恰调至5 000 Gs。人们所做的是将主磁电流调至使共振出现在示波器上为止。结果证明，这是目前对磁场强度做出精密测量的最方便办法。当然，过去为了测定质子的g 值有人不得不精确测量磁场和频率。但现在这件事已经完成了，因此如图所示的质子共振仪就可用作“质子共振磁强计”了。

应该提一句关于该信号的形状。假如磁场十分缓慢地摆动，就会期待看到一条正常的共振曲线。当 ω_p 恰好达到振荡器频率时，能量吸收就会显示出一个极大值。在附近的频率处也有一些吸收，因为并不是所有质子都处在完全相同的场内——而不同的场就意味着稍微不同的共振频率。

顺便说说，人们也许会怀疑，在共振频率是否真的会看到任何信号。我们应否期望该高频场会使那两个态的粒子数相等——使得除了水刚放入时之外就该没有任何信号？不完全是这样，因为尽管我们试

图使该两个粒子数相等，但热运动方面却力图保持对于温度 T 的粒子数的适当比率。如果处于共振态，则被核所吸收的功率恰好就消耗在热运动上。然而，在质子磁矩与原子运动之间只有相对微弱的“热接触”。质子被相对彻底地隔离于电子分布的中心。因此在纯水中，该共振信号实际上往往太小，难于被观察到。要增加吸收，就必须加强“热接触”。这通常是在水中添加一点点氧化铁而做到的。这些铁原子像小磁体一样，当它们以其热舞蹈的方式到处跳动时，就会在质子上造成一种微小的摆动磁场。这些变化着的场会把质子磁体与原子振动“耦合”起来并往往会建立起热平衡。正是通过这一“耦合”，才使处于较高能态上的那些质子能够消耗它们的能量，以便再有可能从振荡器吸取能量。

实际上核共振仪的输出信号看来并不像一条正常的共振曲线。经常是一个更复杂的还含有一些振动的信号——像图上所画出的那样。这种信号的出现是由于变化磁场引起的。解释应该由量子力学来提供，但也可以证明，在这种实验中有关进动磁矩的那些经典概念总会给出正确的答案。按照经典理论，我们应该说，当到达共振时就开始同步地驱动大量进动着的核磁体。当这样做时，就使它们一起共同进动。当这些核磁体全部一起转动时，将在振荡器线圈中建立起一个频率为 ω_p 的感生电动势，但由于磁场正随着时间增加，所以进动频率也将随着提高，因而这感生电压立即就会处在比振荡器频率稍微高一点的频率上。当这感生电动势与振荡器间交替地处于同相与异相时，该“被吸收”功率就会交替地变成正或负。因而在示波器上我们就会见到在质子频率与振荡器频率之间的那种拍音。由于质子频率并非全都相同（不同质子会处在稍微不同的磁场上），而也可能由于来自水里氧化铁的干扰，那些自由进动着的磁矩不久就会异相，从而该拍的信号也消失了。

这些磁共振现象已有广泛应用，作为寻找关于物质的新情况的工具——特别是在化学和核物理上。不用说关于核磁矩的数值会告诉我们有关核的结构。在化学中，许多知识是从共振的结构（或形态）中弄清楚的。由于附近的核所产生的磁场，核共振的准确位置稍微有点移动，这取决于任一特定核本身所处的环境。测量出这些移动会帮助人们去确定哪些原子靠近其他哪些原子，并帮助解释分子结构中的细节。同样重要的是关于自由基的电子自旋共振。虽然在平衡时并不会出现于任意的非常大的范围内，但这种自由基往往是化学反应中的中间态。对电子自旋共振的测量是对自由基存在的一种精密检验，而往往也是理解某些化学反应机制的一把钥匙。

[1] 通常的钠蒸气大多是单原子的，虽则也有一些 Na_2 分子存在。

[2] 在上一章§34-2中曾令电子电荷为 $-q_e$ ，因此那时 q_e 是正的。——译者注

第36章 铁磁性

§36-1 磁化电流

在本章中，我们将讨论某些材料磁矩的净效应远大于顺磁性或抗磁性的情况，这种现象称为铁磁性。在顺磁性或抗磁性材料中，感生磁矩往往那么微弱，以致我们无须担心磁矩所产生的附加场。然而，对铁磁性材料来说，那些由外加磁场所感生的磁矩非常巨大并会对场本身产生很大的影响。事实上，感生磁矩竟是如此强大，以致它们在产生被观测场的过程中往往起着支配的作用。因此，我们将不得不操心的事情之一，就是关于巨大的感生磁矩的数学理论。当然，那不过是一个技术性问题。真正的问题是，为什么磁矩会那么强——到底是怎么造成的？过一会儿我们就要来讨论这一问题。

求铁磁性材料中的磁场与存在电介质时求静电场的问题有些相似。你会记得，我们开始曾用一矢量场 $\mathbf{P}$ ——即单位体积中的偶极矩——来描述电介质的内部特性。然后，我们弄清楚了这种极化的结果与 $\mathbf{P}$ 的散度所提供的电荷密度 $\rho_{\text{极化}}$ ，即

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (36.1)$$

是等效的。在任何情况下，总电荷都可以写成这个极化电荷加所有其他电荷之和，其他电荷的密度我们将写成 [\[1\]](#) $\rho_{\text{其他}}$ 。于是把 $\mathbf{E}$ 的散度与电荷密度相联系起来的麦克斯韦方程便变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}$$

或

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}.$$

因此我们便可把电荷的极化部分抽出来并放在方程式的另一边，就得到一个新的定律：

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{其他}}. \quad (36.2)$$

这一定律表明，量 $(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$ 的散度等于其他电荷的密度。

当然，像在式 (36.2) 中那样把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$ 放在一起，只有当我们懂得了它们间的关系时才会有用。我们已经知道，将感生偶极矩与场联系起来的理论是相当复杂的，而实际上它只能应用于某些简单情况，并且即使那样也还只是一种近似。我们希望使你们想起曾经用过的一个近似概念。为了求得电介质内部一个原子的感生偶极矩，就必须知道作用于一个单独的原子上的电场。我们做过这种近似——在许多情况下还不太坏——即作用于原子上的场与我们把该原子挖出后（保持所有附近其他原子的偶极矩都不变）留下的小洞中心处的场相同。你也会记得，极化电介质中空穴内的电场取决于该空穴的形状。我们就把以前的结果都总结在图36-1中。对于一个垂直于极化的薄盘形空穴，穴里的电场由下式给出：

$$E_{\text{空穴}} = E_{\text{电介质}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

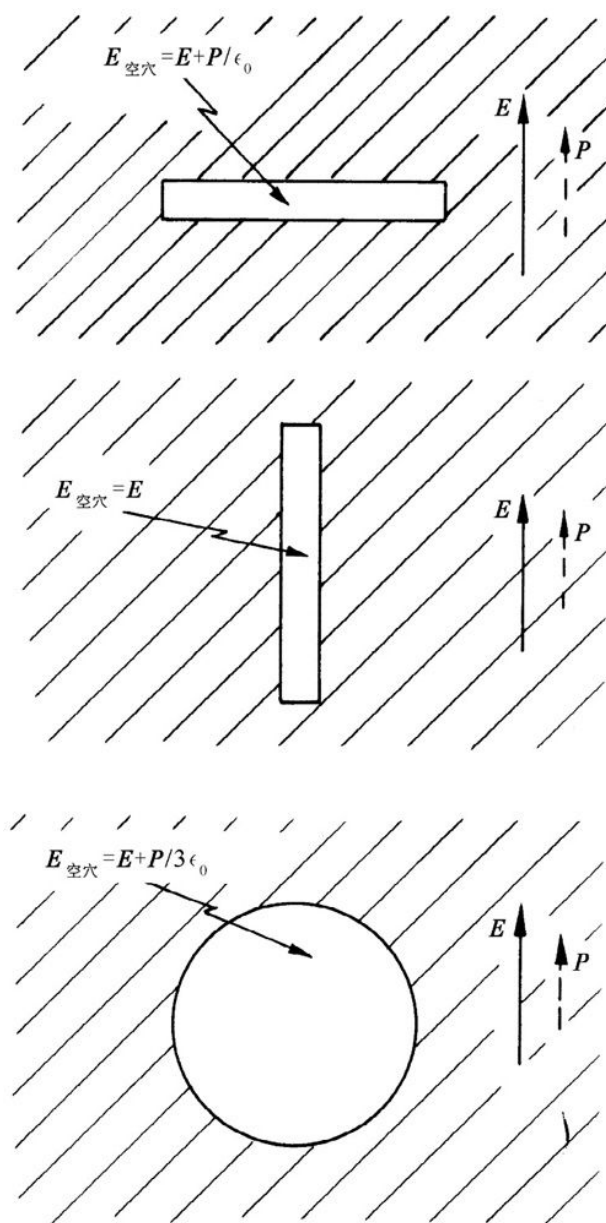


图36-1 在电介质里的空穴中，电场取决于该空穴的形状

这是我们用高斯定律证明的。另一方面，在一个平行于极化的针状槽里，我们曾经利用 $\mathbf{E}$ 的旋度等于零的事实证明槽内电场与槽外电场相同。最后，我们曾求出球形空穴中的电场介于槽内的场与盘内的场之间三分之一的样子：

$$\mathbf{E}_{\text{空穴}} = \mathbf{E}_{\text{电介质}} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \text{ (对于球形空穴).}$$

(36.3)

这就是我们在考虑极化电介质中原子的遭遇时所用过的场。

现在我们不得不用完全类似的方法来讨论磁的情况。完成此事的简单办法是讲：单位体积中的磁矩 $\mathbf{M}$ ，完全与单位体积中的电偶极矩 $\mathbf{P}$ 相似，因而 $\mathbf{M}$ 的负散度等价于一个“磁荷密度” ρ_m ——不管它可能指的是什么。当然，困难在于物理世界中并不存在任何像“磁荷”那样的东西。正如我们所知道的， $\mathbf{B}$ 的散度恒为零。但这并不能阻止我们做出人为的类比 并写出

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m, \quad (36.4)$$

这里不用说 ρ_m 是纯数学形式。于是就能够做出与静电情况完全类似的结论并从静电学中引用我们所有原来的方程。人们常常做过一些像那样的事情。事实上，从历史方面讲，人们甚至相信这种类比是正确的。他们确信量 ρ_m 就是代表“磁极”密度。然而，如今我们知道，材料的磁化乃起因于原子里的环行电流——或者来自原子内自旋的电子或者电子的运动。因此，依照物理观点，对事情如实地用原子电流而不用某种神秘莫测的“磁极”密度来加以描述，是较好的。顺便说说，这些电流有时被称为“安培”电流，因为安培最早提出物质磁性起因于环行的原子电流。

当然，在磁化物质中实际的微观电流其密度十分复杂，它的数值依赖于你在原子中进行观察的地方——它在某些地方会较大而在其他地方则较小；它在原子的某一部分指向这一方向而在另一部分又指向相反方向（正如微观电场在电介质中变化很大一样）。然而，在许多实际问题中，我们所感兴趣的仅仅是物质外面的场，或物质里面的平均场——这里我们指的是对许许多多多个原子取的平均。只有对于这种宏观问题，用单位体积中的平均偶极矩 $\mathbf{M}$ 来描写物质的磁态才是方便的。我们现在所要证明的是，磁化物质的原子电流能够产生一种与 $\mathbf{M}$ 有关的大规模电流。

于是，我们将要做的就是，把电流密度 $\mathbf{j}$ ——那是磁场的真正来源——分成几个部分：一部分是描述原子磁矩的环行电流；而其他部分则为描述那里可能会存在的其他电流。把电流分成三部分往往最为方便。在第32章中我们曾对电流做过这样的区别，即在导体中能够自由流动的电流及在电介质中由于束缚电荷的来回运动所引起的电流。在§32-2中我们就曾写出

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{其他}},$$

式中 $\mathbf{j}_{\text{极化}}$ 代表电介质中束缚电荷的运动所产生的电流，而 $\mathbf{j}_{\text{其他}}$ 则代表所有其他各种电流。现在我们要再进一步，把 $\mathbf{j}_{\text{其他}}$ 再分成两部分，一部分 $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$ 描述该磁化材料内部的平均电流，另一部分为一个附加项，它是任何留下来的我们可称之为 $\mathbf{j}_{\text{传导}}$ 的那种电流。这最后一项一般将指导体中的电流，但也可包括其他电流——比如由穿过真空间自由运动的电荷所产生的电流。所以我们将总电流密度写成：

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{磁化}} + \mathbf{j}_{\text{传导}}. \quad (36.5)$$

当然，正是这个总电流属于 $\mathbf{B}$ 旋度的麦克斯韦方程：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (36.6)$$

现在必须把电流 $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$ 与磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 相联系。为了使你们能够明白今后将往何处去，此刻就告诉你们即将得到的结果是

$$\mathbf{j}_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (36.7)$$

若已知一磁性材料中每一处的磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ ，那么该环行电流密度就可以用 $\mathbf{M}$ 的旋度来表示。让我们来看看能否理解为什么会这样。

首先考虑一根柱形棒的情况，它具有平行于其轴的均匀磁化。从物理方面讲，我们懂得像这样的均匀磁化，实际上意味着在材料内部各处原子环行电流的密度均匀。让我们试着想象在这材料的横截面内有效电流看起来会像什么。应该期望会看到有点像图36-2所示的那种电流。每个原子电流在一个小圆周上兜着圈子，而且所有这些环行电流都是沿同一方向绕行。那么这一物体的有效电流究竟怎么样呢？噢，在棒里的大多数地方完全没有什么效应，因为在每一电流近旁恰好有另一个与之反向的电流。如果设想一个小面积——但比起一单独原子来却要大得多的面积——诸如图36-2中由 $\overline{AB}$ 线所标明的那个面，则穿过这个面的净电流等于零。因此在该材料内部任何地方都没有净电流。可是要注意，在材料表面上会存在未被其附近的反向电流所抵消的原子电流。在表面上始终有一个以相同方向环绕着该棒的净电流。现在我们明白，为什么以前会讲，一根均匀磁化棒相当于载有电流的一个长螺线管。

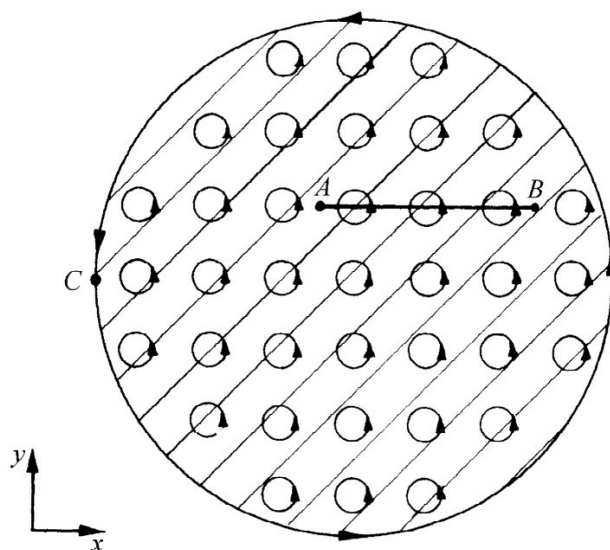


图36-2 从一根沿 z 方向被磁化的铁棒横截面上所看到的原子环行电流的示意图

这个观点怎么会与式(36.7)一致呢？首先，在材料内部，磁化强度 $\mathbf{M}$ 是一恒量，因而它的一切微商就都等于零。这与我们的几何图像相符。可是，在表面上， $\mathbf{M}$ 实际上却不是恒量——它只在到达边缘之前才是常数，然后便突然消失为零。因此，刚好在表面上存在巨大的梯度，而按照式(36.7)这将会给出一个大的电流密度。假设我们考察图36-2中 C 点附近所发生的情况，选取如图中所示的 x 和 y 方向，则磁化强度 $\mathbf{M}$ 将沿 z 方向。写出式(36.7)的各分量，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_z}{\partial y} &= (j_{\text{磁化}})_x, \\ -\frac{\partial M_z}{\partial x} &= (j_{\text{磁化}})_y.\end{aligned}\tag{36.8}$$

在 C 点上，微商 $\partial M_z / \partial y$ 为零，而 $\partial M_z / \partial x$ 则很大并为正。式(36.7)表明，在负 y 方向上有一个大的电流密度。这与环绕该棒的表面电流的上述图像相符。

现在要求出材料中磁化强度逐点变化那种较复杂情况下的电流密度。不难定性地看到，如果相邻区域内的磁化强度不同，则那些环行电流不会完全抵消，因而在该材料体积中会有净电流。我们想要定量地算出的就是这一效果。

首先，我们需要回忆一下§14-5中的结果，即环行电流 I 具有的磁矩 μ 由下式所给出：

$$\mu = IA, \quad (36.9)$$

其中 A 为该电流回路的面积（见图36-3）。现在让我们考虑磁化材料内部的一个小矩形块，如示意图36-4所示。我们选取的这块材料是那么小，以致可以认为其中的磁化强度是均匀的。若这一块材料在 z 方向有一磁化强度 M_z ，则其净效果将与围绕着图上所示的那些垂直面上的面电流相同。根据式（36.9）我们能够求出这些电流的大小。这块材料的总磁矩等于磁化强度乘以其体积：

$$\mu = M_z (abc),$$

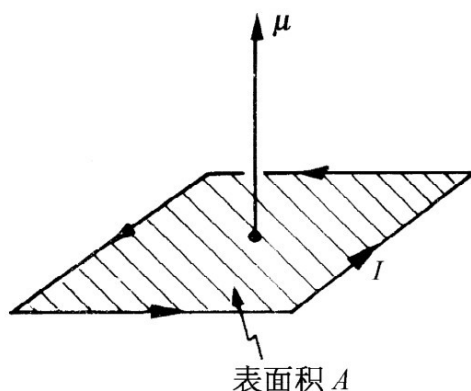


图36-3 一个电流回路的磁偶极矩 μ 为 IA

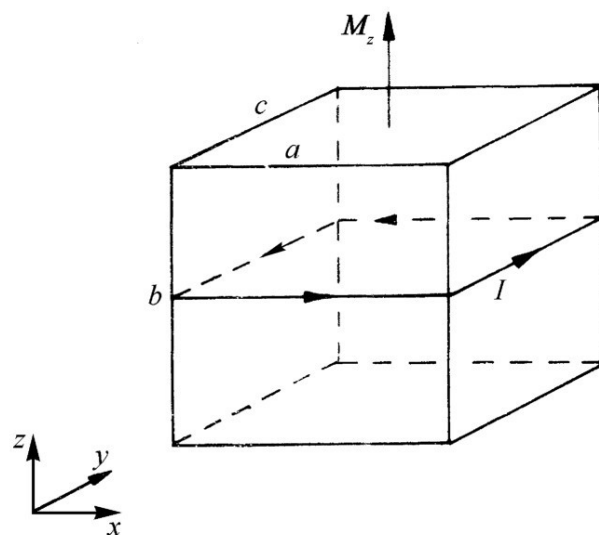


图36-4 被磁化的一小块材料与一环行的表面电流等效

由此得到（记住该回路的面积为 ac ）

$$I = M_z b .$$

换句话说，在每一垂直面上单位（垂直方向）长度的电流等于 M_z 。

现在假设我们想象两个彼此相邻的小块，如图36-5所示。由于第二块被从第一块那里稍微移动了一点，所以它会有一稍微不同的磁化强度垂直分量，我们称之为 $M_z + \Delta M_z$ 。在两块之间的界面上，对总电流现有两种贡献。第一块将产生一个流向正 y 的电流 I_1 ，而第二块则将产生流向负 y 方向的面电流 I_2 ，沿正 y 向的总面电流等于两者的代数和^[2]：

$$I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b .$$

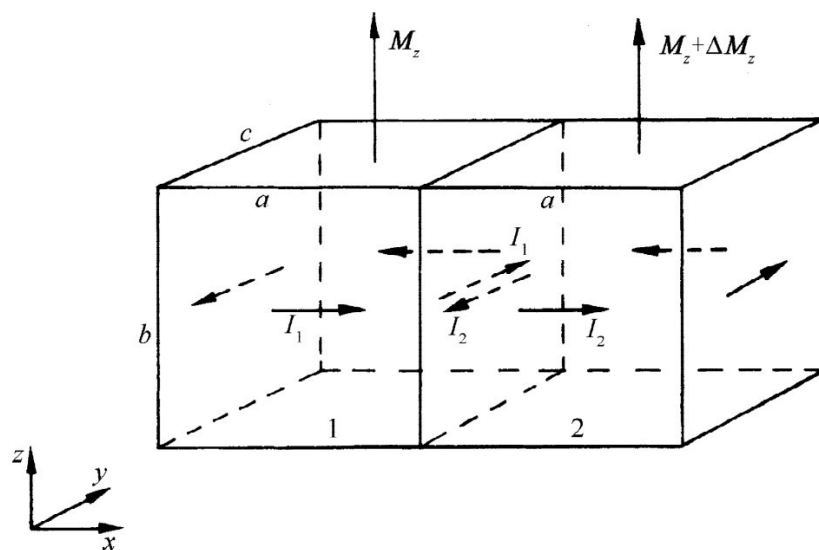


图36-5 如果两相邻块中的磁化强度不一样，便将有净表面电流存在于其间

可以将 ΔM_z 写成 M_z 在 x 方向上的微商乘以从第一块至第二块的位移，那刚好是 a ：

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} a.$$

这样流经两块间的电流就是

$$I = - \frac{\partial M_z}{\partial x} ab.$$

要把电流 I 与平均体积电流密度 $\mathbf{j}$ 联系起来，就必须认识到，这一电流 I 实际上被布满于某个横截面积上。如果我们设想材料的整个体积是由这样的小块充填起来的，则每一个（垂直于 x 轴的）这样的侧面便可以与每一小块联系起来^[3]。于是我们看到要与电流 I 联系的面积恰好就是前面一个面的面积 ab 。因而得到结果：

$$j_y = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

我们至少开始有了 $\mathbf{M}$ 的旋度。

在 j_y 中，还应有因磁化强度 x 分量随 z 变化而引起的另一项。对 $\mathbf{j}$ 的这一贡献，来自如图36-6所示的那种上下重叠的两小块之间的界面。利用刚才所做的相同论证，你可以证明这个界面将对 j_y 贡献量 $\partial M_x / \partial z$ 。这些就是能够对电流 y 分量作出贡献的唯一一些面，因而我们得到在 y 方向上的总电流密度

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

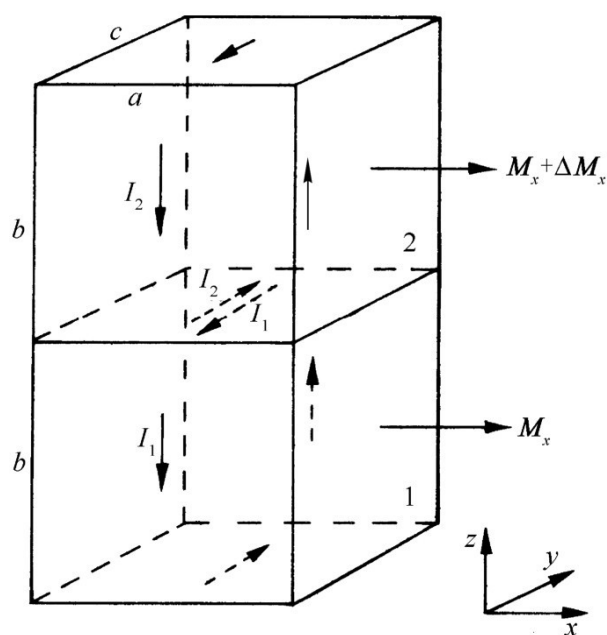


图36-6 高低相重叠的两块也可对 j_y 作出贡献

计算出一个立方体其余表面上的电流——或者在利用了 z 方向完全是任意的这个事实——我们能够得出结论，电流密度矢量确实是由下式给出的：

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}.$$

因此，若我们选择用单位体积的平均磁矩 $\mathbf{M}$ 来描述物质中的磁化情况，则可发现，那些环行的原子电流等效于由式 (36.7) 给出的物质内的平均电流密度。如果该材料也是一种电介质，则另外还可能有极化电流 $\mathbf{j}_{\text{极化}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。倘若该物质又是导体，则同时还可能有传导电流 $\mathbf{j}_{\text{传导}}$ 。因此我们可以将总电流写成

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (36.10)$$

§36-2 H 场

接下来，要将式 (36.10) 中所写出的电流代入麦克斯韦方程组。得：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\mathbf{j}_{\text{传导}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

可以将含 $\mathbf{M}$ 的项移至式的左边：

$$c^2 \nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{\mathbf{j}_{\text{传导}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right). \quad (36.11)$$

正如第32章所述，许多人喜欢把 $(\mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0)$ 写成一个新的矢量场 $\mathbf{D}/\epsilon_0$ 。同理，把 $[\mathbf{B} - \mathbf{M}/(\epsilon_0 c^2)]$ 写成单独的矢量场也往往较为方便。我们 决定用下式定义一个新的矢量场 $\mathbf{H}$ ：

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.12)$$

于是式 (36.11) 变成：

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.13)$$

这看来似乎较简单，但所有的复杂性都被隐藏在字母 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 之中了。

现在得给你们一个警告。许多采用米·千克·秒 (mks) 制的人们却曾决定用一个与这里的 $\mathbf{H}$ 不同的定义。将他们的 场叫作 $\mathbf{H}'$ (当然，他们也仍然叫它为 $\mathbf{H}$ ，而不加上一撇)，它被定义为：

$$\mathbf{H}' = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (36.14)$$

(并且，他们通常把 $\epsilon_0 c^2$ 写成新的数 $1/\mu_0$ ，这样他们所要记住的常数就又多了一个)。采用这一定义，式 (36.13) 看起来甚至更为简单：

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.15)$$

但若用 $\mathbf{H}'$ 的定义，则困难在于：第一，它与不采用米·千克·秒制的人们的定义不相符；第二，它使得 $\mathbf{H}'$ 和 $\mathbf{B}$ 有不同的单位。我们认为， $\mathbf{H}$ 具有与 $\mathbf{B}$ 相同的单位——而不是像 $\mathbf{H}'$ 那样具有 $\mathbf{M}$ 的单位——更加

方便。但如果你将成为一名工程师，并且将从事变压器、电磁铁等的设计工作，那你就得小心注意。你将会发现许多书本是采用式（36.14）作为 $\mathbf{H}$ 的定义，而不是采用我们在式（36.12）中的定义，还有其他许多书——特别是有关磁性材料的手册——按照我们所用的方式把 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 联系了起来。你得仔细弄清楚他们所用的定义。

一种区别的办法是根据他们所用的单位。应该记住在米·千克·秒制中， $\mathbf{B}$ ——从而我们的 $\mathbf{H}$ ——都是以如下单位度量的：1 Wbm⁻² 等于 10 000 Gs。在米·千克·秒制中，磁矩（电流乘以一面积）的单位为 1 Am²。于是磁化强度 $\mathbf{M}$ 就具有单位：1 Am⁻¹。对于 $\mathbf{H}'$ 来说，其单位与 $\mathbf{M}$ 的一样。你可以看到，这也与式（36.15）相符，因为 ∇ 具有 1 被长度除的量纲。那些从事电磁铁工作的人们，也有把 $\mathbf{H}$ （采用那 $\mathbf{H}'$ 的定义）的单位叫作“1 安培匝 / 米”的习惯——考虑到绕组上的导线匝数。可是“匝”实际上是一个无量纲数，因而不至于打扰你们。既然我们的 $\mathbf{H}$ 等于 $\mathbf{H}' / (\epsilon_0 c^2)$ ，所以如果你正在采用米·千克·秒制，则 $\mathbf{H}$ （以 Wbm⁻² 计的）就等于 $4\pi \times 10^{-7}$ 乘以 $\mathbf{H}'$ （以 Am⁻¹ 计）。记住 $\mathbf{H}$ （以 Gs 计）= 0.012 6 $\mathbf{H}'$ （以 Am⁻¹ 计），也许会更方便。

还有另一桩更为糟糕的事情。许多采用我们关于 $\mathbf{H}$ 定义的人们还决意要对 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 的单位赋予不同名称！尽管它们具有相同量纲，但他们还是叫 $\mathbf{B}$ 的单位为高斯，而把 $\mathbf{H}$ 的单位叫作奥斯特（当然，是为了纪念高斯和奥斯特两人）。因此，在许多书本中你会找到一些用高斯表达的 $\mathbf{B}$ 和用奥斯特表达的 $\mathbf{H}$ 而做成的曲线，它们实际上是同一种单位——即米·千克·秒制的单位的 10⁻⁴ 倍。关于磁性单位的混乱情况我们已将其综合列于表 36-1 上。

表 36-1 磁量单位

$$[B] = \text{Wbm}^{-2} = 10^4 \text{ Gs}$$

$$[H] = \text{Wbm}^{-2} = 10^4 \text{ Gs 或 } 10^4 \text{ Oe}$$

$$[M] = \text{Am}^{-1}$$

$$[H'] = \text{Am}^{-1}$$

方便的换算关系:

$$B (\text{Gs}) = 10^4 B (\text{Wbm}^{-2})$$

$$H (\text{Gs}) = H (\text{Oe}) = 0.0126 H' (\text{Am}^{-1})$$

§36-3 磁化曲线

现在将考察某些简单情况, 其中磁场为恒量、或场变化得足够缓慢以致同 $\mathbf{j}_{\text{传导}}$ 相比可以略去 $\partial \mathbf{D} / \partial t$, 于是场将遵循方程组:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (36.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{传导}} / \epsilon_0 c^2, \quad (36.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M} \epsilon /_0 c^2. \quad (36.18)$$

假设有一个由铜线圈包扎的铁环（炸面饼圈模样），如图36-7（a）所示。导线中有电流 I 流动。这样，磁场将会怎么样呢？磁场将主要存在于铁环之内，那里， $\mathbf{B}$ 线将是一些圆圈，如图36-7（b）所示。由于 $\mathbf{B}$ 通量是连续的，所以它的散度便是零，而式（36.16）被满足。其次，通过绕图36-7（b）所示的闭合回路 Γ 进行积分而把式（36.17）写成另一种形式。根据斯托克斯定理，我们有

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j}_{\text{传导}} \cdot \mathbf{n} da, \quad (36.19)$$

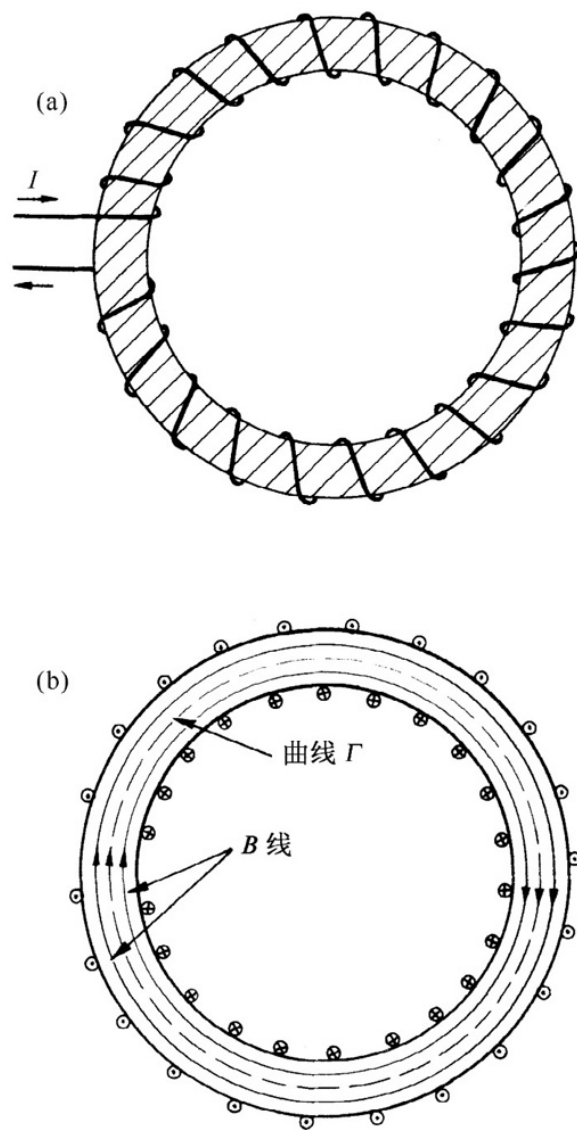


图36-7 (a) 一个绕上了绝缘导线圈的铁环；(b) 铁环截面中的场线

其中 $\mathbf{j}$ 的积分是对整个以 Γ 为边界曲面进行的。这个曲面被每一匝绕线穿过一次，每一匝对积分都贡献了电流 I ，若总共有 N 匝，则积分为 NI 。根据我们问题中的对称性，环绕曲线 Γ 各处的 $\mathbf{B}$ 都相同，若假定磁化强度——从而场 H ——沿着 Γ 也是恒定不变的，则式 (36.19) 变成

$$Hl = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

其中 l 为该曲线 Γ 的长度。因此，

$$H = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{NI}{l}. \quad (36.20)$$

正是在像这样一种情况下 $\mathbf{H}$ 与起磁电流成正比，所以 $\mathbf{H}$ 有时被称为磁化场。

现在，只需要 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{B}$ 有关的方程。但不存在任何这样的方程！当然，我们有个方程式（36.18），不过那没有什么帮助，因为对于像铁那样的铁磁性材料 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间并没有直接的关系。磁化强度 $\mathbf{M}$ 取决于铁整个过去历史，而不仅取决于该时刻的 $\mathbf{B}$ 。

然而，并不是毫无希望。在某些简单情况下我们还是能够获得一些解答的。如果从未磁化的铁开始——让我们说该块铁已在高温下退了火——那么在铁环的简单几何中，全部铁就都有相同的磁性历史。这样，我们就能根据实验测量结果对 $\mathbf{M}$ ——从而对 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 间的关系——说出某些东西。根据式（36.20），铁环里的场 $\mathbf{H}$ 可以表示为一常数乘以绕线中的电流 I 。而场 $\mathbf{B}$ 则可通过对线圈中（或绕于图示的那个起磁线圈上面的另一个辅助线圈中）的电动势对时间的积分而量度出来。由于这个电动势等于 $\mathbf{B}$ 通量的变化率，因而电动势对时间的积分就等于 $\mathbf{B}$ 乘以该铁环的横截面积。

图36-8显示出用一个软铁环所观测到的 B 和 H 之间的关系。当电流初接通时， B 沿曲线 a 随着 H 的增大而增大。要注意， B 和 H 的不同标度。起初，只要相对小的 H 就能造成大的 B 。为什么用铁所得的 B 会比在空气中得到的大那么多呢？这是因为有一个大的磁化强度 M ，它等效于在铁上有一个较大的表面电流——场 B 来自这一电流与绕线中的传导电流之和。为什么 M 会那么大，我们将在以后讨论。

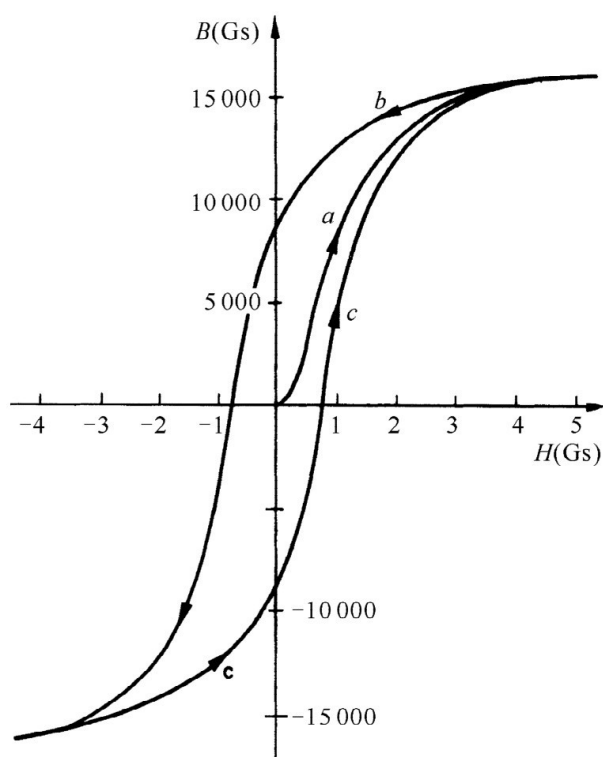


图36-8 软铁的典型磁化曲线和磁滞回线

在 H 值较高时，磁化曲线趋于水平，我们就说铁块已经饱和。按图上的那种标尺，曲线看来已变成水平。实际上，它稍微继续上升——对于强场来说， B 变成正比于 H ，并有一单位斜率。 M 不再增加。顺便提一下，我们应该指出，假如该环是由某种非磁性材料制成的，则对于所有场 M 均应该为零，而 B 应等于 H 。

我们所注意到的第一件事，是图36-8中曲线 a ——通常所说的磁化曲线——的高度非线性。但更糟的是若达到了饱和之后，我们减少线圈里的电流使 H 回到零，则磁场 B 将沿曲线 b 下降。当 H 达到零时，仍会有些剩余的 B 。即使没有起磁电流，在铁里仍有磁场——它已被永远磁化了。如果我们此时在线圈中接通一负 电流，则 $B-H$ 曲线仍将继续沿着 b 下降，直到铁在负方向达到饱和。然后若我们再使电流回到零，则 B 将沿曲线 c 变化。如果使电流在大的正值与负值之间交变，则 $B-H$ 曲线将会沿着极接近于 b 与 c 的两条曲线来回变化。然而，若以某种任意方式改变 H ，则可获得更为复杂的曲线，一般而言它们将位于曲线 b 与 c 之间的某些地方。由场的反复振荡所形成的回路称为铁的磁滞 回线。

于是我们看到，不可能写出一个像 $B=f(H)$ 的函数关系，因为在任意时刻的 B 值不但取决于在该时刻的 H 值如何，而且还取决于它过去的整个历史。自然，磁化曲线和磁滞回线对于不同物质是不同的。这些曲线的形状既密切依赖于该材料的化学成分，也依赖于其制备及随后物理处理的细节。我们在下一章中将对这些复杂情况的某些物理解释进行讨论。

§36-4 铁芯电感

磁性材料的最重要应用之一，是在电路中——诸如在变压器、电动机等器件中。一个原因是，有了铁我们就能够控制磁场的走向，并且对于某一给定电流能够获得大得多的场。例如，那种典型“环形”电感就做得很像图36-7所示的物体。一个给定的电感与一个等值的“空芯”电感相比在体积上要小得多，所用的铜也少得多。对于一给定电

感，我们可以在绕组中得到小得多的电阻，从而该电感就更接近于“理想”的了——特别对于低频的情况。定性地理解这种电感如何工作是十分容易的。如果 I 是绕组中的电流，则在其内部产生的场 $\mathbf{H}$ 正比于 I ——如式 (36.20) 所给出的那样。跨越线端的电压 V 与磁场 $\mathbf{B}$ 有关。略去绕线中的电阻，这电压 V 便与 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 成正比。自感 L 是 V 与 $\partial I / \partial t$ 的比（见 §17-7），因此就涉及铁中 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 的关系。由于 $\mathbf{B}$ 远大于 $\mathbf{H}$ ，所以我们在电感中得到很大的倍数。从物理上讲，发生的情况是：在线圈里的小电流，通常产生一个小磁场，在铁里就会引起从属的小磁体全都排列整齐，因而产生了一个比绕组里的外电流要大得惊人的“磁化”电流，似乎流经线圈的电流比实际的电流大得多了。当我们把电流的方向反转时，所有这些小磁体都翻转过来——所有那些内在电流都反转了方向——从而得到一个比没有铁时高得多的感生电动势。如果我们要计算自感，则可通过能量来做——如在 §17-8 中所描述的那样。从电流源释放出来的能量的时间变化率为 IV 。电压 V 等于该铁芯的截面积 A ，乘以 N ，再乘以 $d\mathbf{B} / dt$ 。根据式 (36.20)， $I = (\epsilon_0 c^2 l / N) H$ 。因而我们有

$$\frac{dU}{dt} = VI = (\epsilon_0 c^2 l A) H \frac{dB}{dt}.$$

对时间积分，得到

$$U = (\epsilon_0 c^2 l A) \int H dB. \quad (36.21)$$

注意 lA 乃是该环的体积，所以我们已证明在一磁性材料中的能量密度 $u = U / \text{体积}$ ，由下式给出：

$$u = \epsilon_0 c \int^2 H dB. \quad (36.22)$$

这里包含着一个重要的特点。当我们应用交变电流时，铁环中的磁性被迫循着一条磁滞回线变动。由于 B 并非 H 的一个单值函数，所以环绕一个完整循环的 $\int H dB$ 积分不会等于零，而等于该磁滞曲线所包围的面积。这样，策动源在一周期内就会付出一定的净能——一个正比于磁滞回线内面积的能量。而这些能量“损失”了。这种损失是由维持该电磁现象而造成的，但却变成了铁里的热量，这称为磁滞损耗。为了确保这种能量损失得少一点，我们希望磁滞回线尽可能窄一些。减少回线面积的一种办法是将每周中场所达到的峰值降低。对于较小峰值的场，我们可得到一条像图36-9所示的那种磁滞曲线。并且，具有十分狭窄回线的特殊材料亦已设计出来。那种所谓变压器用铁——含有少量硅的铁合金——就是为了具有这种特性而被研究出来的。

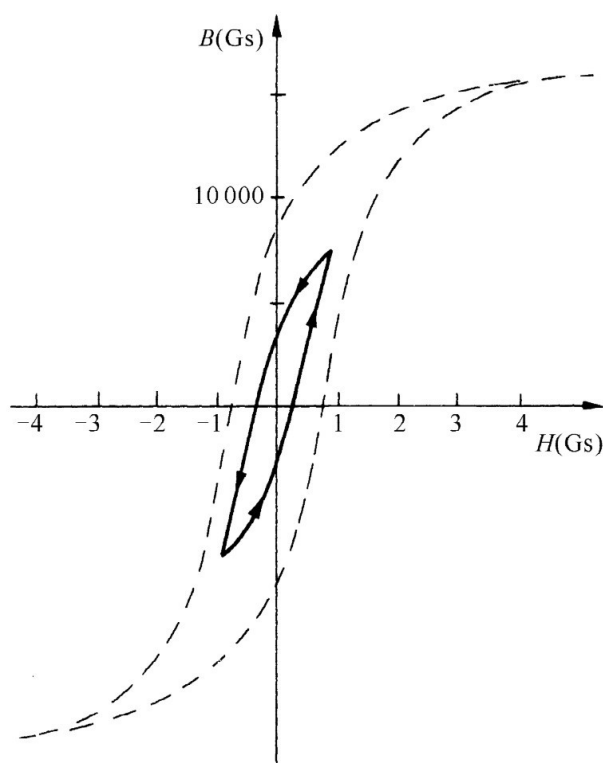


图36-9 一条未达到饱和的磁滞回线

当电感环绕一小磁滞回线运行时， B 和 H 的关系可用一个线性方程来近似。人们经常写成

$$B = \mu H. \quad (36.23)$$

常数 μ 并非我们以前曾用过的磁矩，它称为该铁的磁导率（有时称为“相对磁导率”）。普通铁的磁导率其典型值为几千。有几种像“超透磁合金”的那类特殊合金，磁导率可高达一兆。

如果我们把 $B = \mu H$ 这种近似式应用到式（36.21）中去，则可将一环形电感中的能量写成

$$U = (\epsilon_0 c^2 l A) \mu \int H dH = (\epsilon_0 c^2 l A) \frac{\mu H^2}{2}. \quad (36.24)$$

因而能量密度近似地为

$$u \approx \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mu H^2.$$

现在可令式（36.24）中的能量等于电感的能量 $LI^2/2$ ，并解出 L 。从而获得

$$L = (\epsilon_0 c^2 l A) \mu \left(\frac{H}{I} \right)^2.$$

利用来自式（36.20）的 H/I ，就有

$$L = \frac{\mu N^2 A}{\epsilon_0 c^2 l}, \quad (36.25)$$

自感与 μ 成正比。如果你想要有为声频放大器这类东西所用的电感，你就得尝试将其运用于 B - H 关系尽可能线性的那种磁滞回线上（你会记得，我们曾在第1卷第50章中谈论过关于非线性系统中谐波产生的事）。对于这样的目的，式（36.23）乃是一个有用的近似。反之，如果你希望产生谐波，则可以采用一种故意按高度非线性方式运作的电感。此时你就得利用全部 B - H 曲线，并用图解法或数值计算法来分析所发生的情况。

变压器通常是把两个线圈套在同一个磁性材料的环或芯上制成的（对于较大型的变压器，为了方便起见，铁芯是按矩形的尺寸比例制作的）。这样在“原”绕组中变化着的电流就会引起铁芯中磁场的变化，而磁场的变化又在“副”绕组中感生一电动势。由于穿过两绕组中每匝的磁通量都相同，所以两绕组中的电动势比值就与其匝数的比值相同。这样加于原绕组上的电压就在副绕组中转变成不同的电压。由于为了产生必需的磁场变化就要求环绕铁芯有某个净电流，因而两绕组中的电流代数和就被确定，并且等于所必需的“起磁”电流。若从副绕组取出的电流增加，则原绕组中的电流也应按比例增加——和电压的变换相同，也有电流方面的相互“变换”。

§36-5 电磁铁

现在让我们来讨论一种稍微复杂些的实际情况。假设有一块如图36-10所示的、形式相当标准的电磁铁——由一块“C形”轭铁以及绕在这块轭铁上的多匝导线圈制成。缝隙中的磁场 B 将会怎样呢？

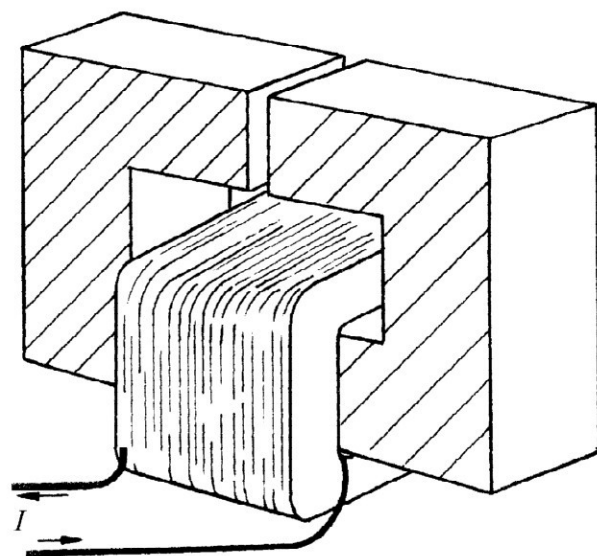


图 36-10 电磁铁

如果缝隙厚度比所有其他尺寸都小，则作为一级近似，可以认为 $\mathbf{B}$ 线将环绕整个回路，正如它们在铁环中所表现的那样。它们看来有点像图36-11 (a)，在缝隙处往往散开一些，但若缝隙很窄，则这种散开只是一个微小的效应。假设通过轭铁任一截面的 $\mathbf{B}$ 通量是一个常数，这是一个相当好的近似。如果轭铁具有均匀的横截面积 A ——而我们又忽略在缝隙处和在转弯处的任何边界效应——那么便可以讲，环绕轭铁的 $\mathbf{B}$ 是均匀的。

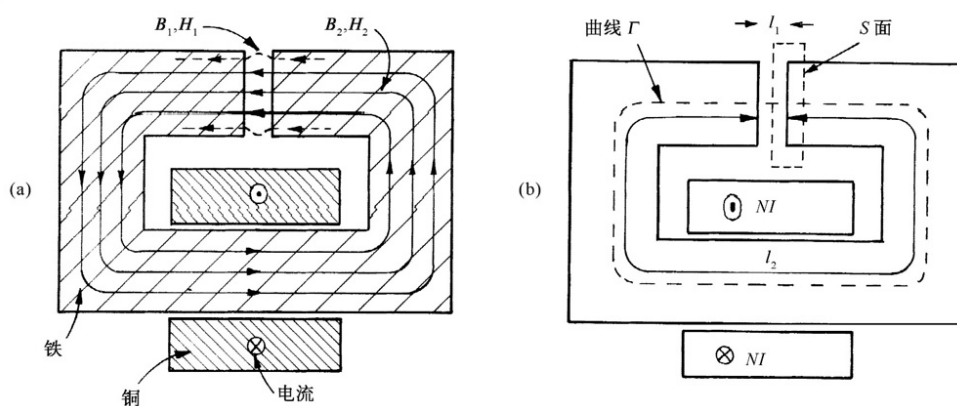


图 36-11 电磁铁的截面

并且，在缝隙中 $\mathbf{B}$ 将有同样的数值，这是从式 (36.16) 得出来的结论。试想象如图36-11 (b) 所示的闭合曲面 S ，它的一个面位于缝隙中而另一个面位于铁中，从这个闭合曲面跑出来的总 $\mathbf{B}$ 通量必为零。如果把缝隙中的场称为 B_1 ，而把铁里的场称为 B_2 ，则我们得

$$B_1 A_1 - B_2 A_2 = 0.$$

所以可推断 $B_1 = B_2$ 。

现在让我们来看看 H 。可以仍然利用式 (36.19)，环绕图36-11 (b) 中的曲线 Γ 进行线积分。右边的积分照旧是 NI ，即匝数乘电流。然而，现在铁里和空气中的 H 将不相同。称铁里的场为 H_2 ，环绕轭铁的路径长度称为 l_2 ，则这一部分的曲线将对积分贡献量 $H_2 l_2$ ；把缝隙里的场称为 H_1 ，假定缝隙厚度为 l_1 ，则可获得来自缝隙的贡献 $H_1 l_1$ 。于是我们有

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.26)$$

现在还知道另外一些情况：由于在空气缝隙里磁化强度可以忽略，因而 $B_1 = H_1$ 。由于 $B_1 = B_2$ ，所以式 (36.26) 变成

$$B_2 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}, \quad (36.27)$$

我们仍然有两个未知数。为了求得 B_2 和 H_2 ，还需要另一个关系式——即把铁中的 B ， H 联系起来的公式。

如果可作 $B_2 = \mu H_2$ 这个近似，则就能用代数法求解上述方程。然而，让我们考虑普遍的情况，即其中铁的磁化曲线如图36-8所示。我们希望得到的就是这个函数关系与式（36.27）结合后的联立解。这个解可以这样找到，通过把式（36.27）的曲线和磁化曲线画在同一个图上，如图36-12所示，两条曲线相交之处，就是我们要求的解。

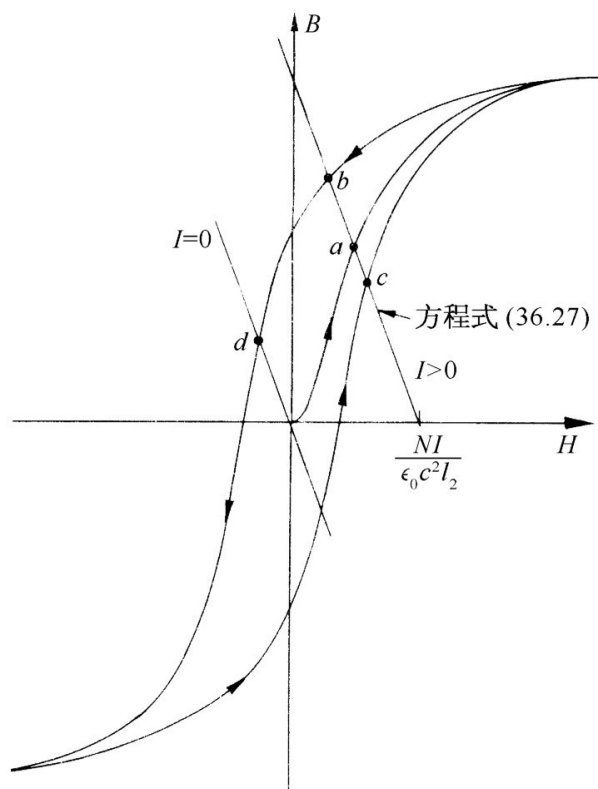


图36-12 求解电磁铁中的场

对于一给定电流 I ，函数式（36.27）就是图36-12中标明 $I > 0$ 的直线。该线与 H 轴（ $B_2 = 0$ ）相交于 $H_2 = NI / (\epsilon_0 c^2 l_2)$ 处，而其斜率为 $-l_2 / l_1$ 。不同的电流仅仅是沿水平方向移动该直线。从图36-12我们看到，对于一给定电流可以有几个不同的解，这取决于你怎样到达那里。如果你刚好制成该块磁铁，并接通电流而上升到了 I ，则场 B_2

（也即 B_1 场）的值就将有点 a 给出。如果你已经使电流达到某个很大的值，而下降至 I ，则场将由点 b 给出。或者，如果在磁铁中你刚好有一个高负值电流，然后才把它升高至 I ，则场就是 c 点处的场。因此，缝隙里的场将取决于你在过去做过的事情。

当磁铁中的电流为零时，式（36.27）中 B_2 和 H_2 的关系式用图中标明为 $I=0$ 的那条直线来表示。仍然存在各种可能的解。如果你先使铁达到了饱和，则可能存在一个由 d 点给出的、在磁铁里相当大的剩余磁场。你可以将线圈除掉，从而得到一个永久磁体。由此可见，若要制成一块优质永久磁体，你必须要有宽磁滞回线的材料。诸如铝镍钴V族那类特种合金，就具有很宽阔的磁滞回线。

§36-6 自发磁化

现在要转到这样一个问题上来，为什么在铁磁性材料中一个小磁场就会产生那么大的磁化强度。诸如铁和镍那种铁磁性材料的磁化强度来自原子内壳层中电子的磁矩。每个电子都具有等于 $q/(2m)$ 乘以其 g 因子、再乘以其角动量 $\mathbf{J}$ 的磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 。对于不具有净轨道运动的单个电子， $g=2$ ，而 $\mathbf{J}$ 在任一方向——比如在 z 方向——上的分量为 $\pm \hbar/2$ ，因而 $\boldsymbol{\mu}$ 沿 z 轴的分量为

$$\mu_z = \frac{q\hbar}{2m} = 0.928 \times 10^{-23} \text{ Am}^2. \quad (36.28)$$

一个铁原子中，实际上存在两个对铁磁性有贡献的电子。为了使讨论比较简单，我们将谈谈关于镍的磁性，它是与铁相似的一种铁磁性材

料，不过在其内壳层中只有一个电子。不难把该论证推广到铁的情况。

现在的要点在于，在一外加场 $\mathbf{B}$ 存在的情况下，那些原子磁体倾向于随场整齐排列，但受到热运动的冲撞，正如同我们对顺磁性材料曾描述的那样。在上一章中，我们曾找出企图把原子磁体排列整齐的场与力图把它们打乱的热运动之间的平衡会产生出这样的结果，即单位体积内的平均磁矩最后应为

$$M = N\mu \tanh \frac{\mu B_a}{kT}. \quad (36.29)$$

所谓 $\mathbf{B}_a$ ，我们意指作用于原子上的场， kT 为玻耳兹曼能量。在顺磁性理论中，我们不过是用 $\mathbf{B}$ 本身表示 $\mathbf{B}_a$ ，忽略了由附近其他原子在任何给定原子处贡献的那部分场。在铁磁性情况下，却存在一种复杂性。我们不应当用铁里的平均场表示作用于单个原子上的 $\mathbf{B}_a$ 。相反，我们必须像在电介质情况下所做过的那样来处理——我们必须求出作用于单个原子上的局域 磁场。在精密计算中，我们应当把由晶格中所有其他原子对有关原子所贡献的场都相加起来。但正如我们对电介质所做过的那样，将做这样的近似，即在一个原子处的场与我们在该材料内一个小球形空穴中可能找到的场相同——假定其邻近原子的磁矩都不会因该空穴的存在而改变。

根据我们曾在第11章中所做的论证，也许认为可以写成

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \quad (\text{错了!}),$$

但这却不正确。然而，如果我们把第11章中的式子和本章中有关铁磁性的方程仔细比较一下，就会发现那里的一些结果还是可以利用的。让我们把对应的方程放在一起，对不存在传导电流或传导电荷的区域，我们有：

$$\begin{array}{ll}
 \text{静电学} & \text{静铁磁性} \\
 \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
 \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = 0
 \end{array} \tag{36.30}$$

这两组方程可以认为彼此相类似，只要做出如下的纯数学性对应：

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}, \quad \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{B}.$$

这与做出下列的类比相同：

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}/c^2. \tag{36.31}$$

换句话说，若我们将铁磁性的方程写成

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= 0,
 \end{aligned} \tag{36.32}$$

那么它们看起来就很像静电学方程了。

这种纯代数的对应性，过去曾经引起过某些混乱。人们往往认为 $\mathbf{H}$ 就是“磁场”。可是，正如我们已经明白，在物理上 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 才是基本场，而 $\mathbf{H}$ 只是一种衍生出来的概念。所以尽管方程式彼此类似，但

其物理意义却不类似。然而，这不会阻止我们去运用相同方程具有相同解答的原理。

可以利用关于电介质中各种不同形状空穴中电场的以前结果——概括在图36-1内的场——来找出在各对应空穴中的场 $\mathbf{H}$ 。一旦知道了 $\mathbf{H}$ ，便可以确定 $\mathbf{B}$ 。例如（利用那些我们在第1节中总结出来的结果），在一个平行于 $\mathbf{M}$ 的针状空穴中，场 $\mathbf{H}$ 与在材料里的 $\mathbf{H}$ 相同，

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}}.$$

但由于空穴中的 $\mathbf{M}$ 等于零，所以得

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.33)$$

另一方面，在一个垂直于 $\mathbf{M}$ 的盘状空穴中，我们有

$$\mathbf{E}_{\text{空穴}} = \mathbf{E}_{\text{电介质}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

这可转换成

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}.$$

或者用 $\mathbf{B}$ 来表示，则为

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}}. \quad (36.34)$$

最后，对于一个球状空穴，通过与式（36.3）做类比，我们应有

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}} + \frac{\mathbf{M}}{3\epsilon_0 c^2}$$

或

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}} - \frac{2}{3} \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.35)$$

这一结果与我们以前对于 $\mathbf{E}$ 所得的结果很不相同。

当然，通过直接利用麦克斯韦方程组，有可能用更加物理的方式来获得这些结果。例如，式（36.34）就是直接从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 推得的（你可以用一个一半在材料里而另一半在材料外的高斯面）。同理，你可以通过利用沿一条在空穴内部往上而通过材料后又返回的曲线的线积分而得到式（36.33）。在物理上，空穴中的场，由于表面电流——那是由 $\nabla \times \mathbf{M}$ 提供的——而被削弱了。式（36.35）也可通过考虑该球形空穴边界上的表面电流效应而获得。我们将把它留给你们去证明。

为了由式（36.29）求得平衡时的磁化强度，事实证明，最方便的乃是同 $\mathbf{H}$ 打交道，从而写出

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{H} + \lambda \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.36)$$

在那球形空穴的近似中，我们应该有 $\lambda = 1/3$ ，但是，正如你将会看到的，我们以后要用到某个其他值，因而就保留它作为一个可调参数。而且，我们还将假定所有的场都在同一个方向上，以致无须去担心那些矢量的方向。假如现在将式（36.36）代入式（36.29）中，就会有一个把磁化强度 $\mathbf{M}$ 与磁化场 $\mathbf{H}$ 相联系的方程：

$$M = N\mu \tanh \mu \left[\frac{H + \lambda M / (\epsilon_0 c^2)}{kT} \right].$$

然而，这是一个不可能明显解出的方程，因而将用图解法解它。

让我们把式（36.29）写成

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \tanh x \quad (36.37)$$

而将问题置于一种普遍形式中，其中 $M_{\text{饱和}}$ 为磁化强度的饱和值，即 $N\mu$ ，而 x 则代表 $\mu B_a / (kT)$ 。 $M/M_{\text{饱和}}$ 对 x 的依存关系由图36-13中的曲线 a 表示。我们也可以把 x 写成 M 的函数——利用关于 B_a 的式（36.36）——为

$$x = \frac{\mu B_a}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \left(\frac{\mu \lambda M_{\text{饱和}}}{\epsilon_0 c^2 kT} \right) \frac{M}{M_{\text{饱和}}}. \quad (36.38)$$

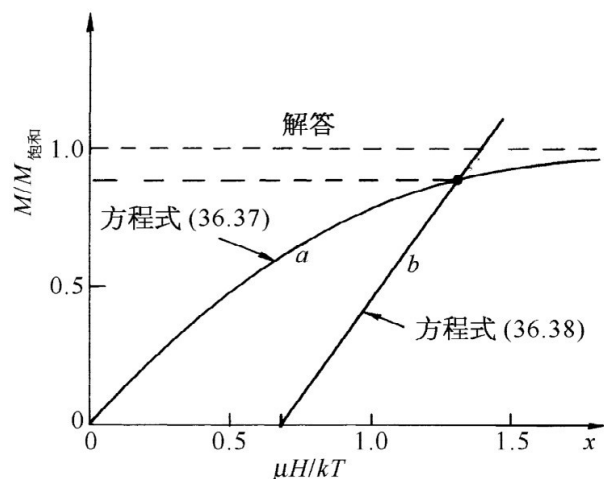


图 36-13 (36.37) 和 (36.38) 两方程的图解法

对于任何给定的 H 值，这是 $M/M_{\text{饱和}}$ 与 x 间的直线关系式。直线的 x 的截距在 $x = \mu H / (kT)$ 处，而其斜率为 $\epsilon_0 c^2 kT / (\mu \lambda M_{\text{饱和}})$ 。对于某个特定的 H ，我们会有一条像图36-13中标明为 b 的直线。曲线 a 与直线 b 的交点向我们提供了关于 $M/M_{\text{饱和}}$ 的解。这样我们就把问题解决了。

让我们看一看，各种不同情况下的解答将会怎样。我们从 $H=0$ 开始。有两种可能情况，分别用图36-14中的 b_1 和 b_2 两直线表示。你将从式(36.38)注意到，直线的斜率与绝对温度 T 成正比，因此，在高温时就会有一条像 b_1 的线，其解答为 $M/M_{\text{饱和}}=0$ 。当磁化场 H 为零时，磁化强度也为零。但在低温时，我们会有一条像 b_2 的线，而对于 $M/M_{\text{饱和}}$ 就有两个解答——一个是 $M/M_{\text{饱和}}=0$ ，而另一个是 $M/M_{\text{饱和}}$ 接近于1。事实证明，只有那个较高的解才是稳定的——正如你可以通过考虑围绕这些解的微小变化所看到的那样。

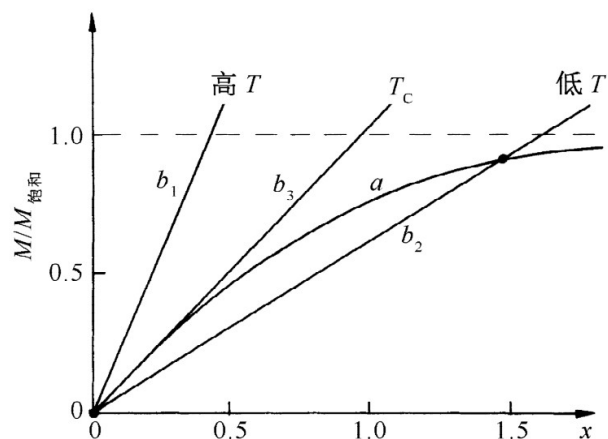


图36-14 求出当 $H=0$ 时的磁化强度

于是，按照这些概念，磁性材料在足够低的温度下会自发地使本身磁化。总之，当热运动足够小时，原子磁体间的耦合作用就会导致它们全部互相平行地排列起来——我们就有了一种与第11章中讨论过的铁电性相似的永磁材料。

若我们从高温出发而逐渐降低温度，则存在一个称为居里温度 T_C 的临界温度，在那里铁磁性行为突然出现。这一温度对应于图36-14中的直线 b_3 ，它与曲线 a 相切，因而具有等于1的斜率。居里温度由下式给出：

$$\frac{\epsilon_0 c^2 k T_C}{\mu \lambda M_{\text{饱和}}} = 1. \quad (36.39)$$

如果我们乐意的话，可以利用 T_C 将式（36.38）写得更简单些：

$$x = \frac{\mu H}{k T} + \frac{T_C}{T} \left(\frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right). \quad (36.40)$$

现在要来看看，对于小的磁化场 H 会发生什么情况。我们可以从图36-14看到，如果将那些直线稍微往右移动一下事情会怎样进行。对于低温情况，交点将沿着曲线 a 的低斜率部分移出一点点，而 M 就将改变得相对少一点。然而，对于高温情况，交点却沿曲线 a 的陡峭部分往上升，而 M 便将改变得相对快一些。实际上，可以将曲线 a 的这一部分用一条具有单位斜率的直线来做近似，并写成：

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left(\frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right).$$

现在就可以解出 $M/M_{\text{饱和}}$ ：

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \frac{\mu H}{k(T - T_c)}. \quad (36.41)$$

这里有一条有些像顺磁性中有过的定律。关于顺磁性，我们曾有

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \frac{\mu B}{kT}. \quad (36.42)$$

此刻的一个差别在于，我们有一个用 H 表示的磁化强度，而 H 包含了各原子磁体相互作用的某些效应，但主要的差别还在于，磁化强度是与 T 和 T_c 之间的差值成反比，而不仅仅与绝对温度 T 成反比。略去相邻原子间的相互作用就相当于选取 $\lambda=0$ ，根据式（36.39）这意味着取 $T_c=0$ 。于是结果正好就是第35章中我们有过的。

可以把有关镍的理论图像与实验数据核对一下。在实验上已经观测到，当温度升高至超过631 K时镍的铁磁性特征便消失了。我们可将此值与由式（36.39）计算出来的 T_c 相比较。记住 $M_{\text{饱和}}=N\mu$ ，则有

$$T_C = \lambda \frac{N\mu^2}{k\epsilon_0 c^2}.$$

根据镍的密度和原子量，可以得到

$$N=9.1\times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

从式 (36.28) 取 μ ，并设 $\lambda = \frac{1}{3}$ ，则得

$$T_C=0.24 \text{ K}.$$

存在的误差约等于2 600倍！我们关于铁磁性的理论完全失败了。

可以像外斯（Weiss）曾经做过的那样，通过说明由于某种未知原因， λ 不是等于三分之一，而是等于 $(2\,600) \times \frac{1}{3}$ ——或约900——尝试“修补”我们的理论。结果是人们对像铁那样的其他铁磁性材料获得了一些相似的值。为了弄清楚这意味着什么，让我们回到式 (36.36) 上去。我们看到，一个大的 λ 值意味着作用于原子上的局部场 B_a ，似乎比我们所想到的要大得多。事实上，若写成 $H=B-M/(\epsilon_0 c^2)$ ，则有

$$B_a = B + \frac{(\lambda - 1)M}{\epsilon_0 c^2}.$$

按照我们原来的意思——令 $\lambda = \frac{1}{3}$ ——局部磁化强度 M 使有效场 B_a 约减少了量 $\frac{2}{3}M/\epsilon_0 c^2$ 。即使我们关于球形空穴的模型不是很好，仍然预期会有某些减弱。与此相反，为了解释铁磁现象，我们必须想象场

的磁化作用会把局部场增强 某个巨大——比如一千或更大——的倍数。似乎没有任何合理办法能在一个原子附近造成这么巨大的场——甚至适当符号的场也都不可能！显然，我们关于铁磁性的“磁”性理论是一场可悲的失败。因此必然得出结论，铁磁性必定与相邻原子中自旋电子间的某种非磁性 相互作用有关。这种相互作用必然会产生一种强大的趋势，使所有邻近的自旋都沿一个方向整齐排列。以后我们将会明白这必须用量子力学以及泡利不相容原理来处理。

最后，我们来考察在低温时——即 $T < T_C$ ——所发生的情况。我们已经看到，此时将有一种自发磁化——即使 $H=0$ ——由图36-14中曲线 a 与 b_2 的交点给出。如果对于不同的温度——通过变更直线 b_2 的斜率——解出 M ，则我们就能得到如图36-15所示的那条曲线。对于所有其中原子磁矩都起因于一个单独电子的铁磁性材料来说，这条曲线应该是相同的。对于其他材料的曲线，只稍微有点不同。

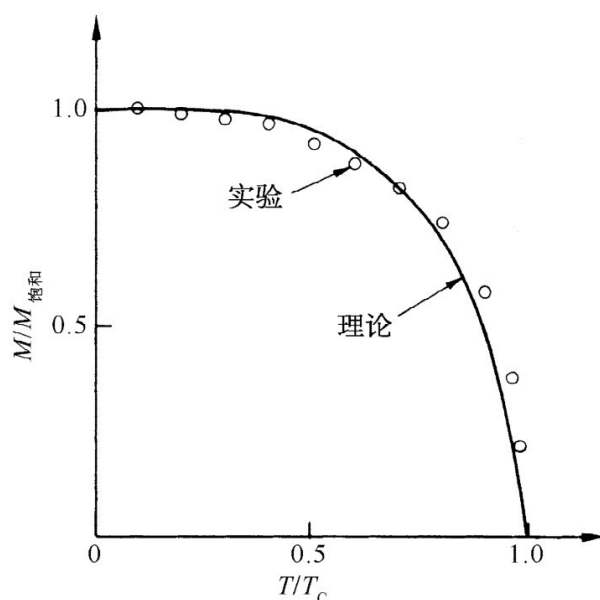


图36-15 镍的自发磁化作为温度的函数

在极限的情况下，如 T 趋向于绝对零度时， M 变成 $M_{\text{饱和}}$ 。当温度升高时，磁化强度会逐渐减少，至居里温度时就降为零。图36-15中的那些点是镍的实验观测值。它们与该理论曲线符合得相当好。尽管我们并不理解其基本机制，但理论的一般特征似乎是正确的。

最后，在我们尝试理解铁磁性时，还有一个更令人烦恼的误差。我们已发现，在高于某一温度时该材料的性能应该像顺磁物质，其磁化强度 M 与 H （或 B ）成正比；而在低于该温度时则它应变成自发磁化。但那不是我们测定铁的磁化曲线时所求得的。只有在我们使它“磁化”之后，它才会变成永久磁化。按照刚才所讨论的意思，它就应当本身磁化！毛病出在哪里呢？噢！事实证明，如果你对一块足够小的铁或镍晶体进行观察，则它的确是完全磁化了的！但在一大块铁中，就有许多沿不同方向被磁化了的区域或“畴”，以致在大的尺度范围内平均磁化强度似乎为零。然而，在每个小畴中，铁具有被锁住的、几乎等于 $M_{\text{饱和}}$ 的磁化强度 M 。这种畴结构的重要性在于，大块材料的整体性质与实际进行处理的微观性质是很不相同的。我们将在下一次演讲中介绍大块磁性材料的实际行为。

[1] 假如所有其他电荷都是在导体上，这 $\rho_{\text{其他}}$ 就会与我们在第10章中的 $\rho_{\text{自由}}$ 相同。

[2] 这里原文是“和”，我们将其改为“代数和”，似较确切些。——译者注

[3] 或者如果你乐意的话，每一个面上的电流 I 应可以用两侧上的那些小块分解成 50×50 份。

第37章 磁性材料

§37-1 已知的铁磁性

在本章中，我们将讨论铁磁性材料和其他一些奇异磁性材料的行为和特点。然而，在对磁性材料进行研究以前，我们将十分迅速地复习一下上一章中学过的某些有关磁铁方面的普遍理论。

首先，想象材料内部引起磁性的原子电流，然后再用体电流密度 $\mathbf{j}_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M}$ 来描述它。我们要强调，这并不认为它代表那些实际电流。当磁化强度均匀时，电流也并非真的恰好互相抵消。也就是说，在某原子中一个电子的旋转电流与在另一个原子中一个电子的旋转电流并不会以这样的方式交叠，以致其总和恰好等于零。即使在单个原子内部，磁性的分布也不是平滑的。例如，在铁原子中，磁化强度被分布在一个近似是球形的壳层上，它既不很靠近核，也不离核太远。因而，物质中的磁性就其细节而言是很复杂的事情，它非常不规则。然而，我们现在不得不略去这种细致的复杂性，而从整体的、平均的观点来讨论那些现象。于是在任何比原子大的有限范围内，当 $\mathbf{M} = 0$ 时，在内部区域里的平均电流确实为零。因此，在目前我们正在考虑的程度，所谓单位体积的磁化强度以及 $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$ 等等，我们指的都是比单个原子所占空间要大的区域里的平均。

在上一章中，我们也曾发现铁磁材料具有如下的重要性质：在超过某一温度时，它并不具有强磁性，而在这一温度之下才会变得有磁

性。这个事实不难被演示出来。一段镍线在室温时会被一块磁铁吸引。然而，如果用煤气火焰把它加热至高于其居里点时，则它便变成非磁性体，此时即使被带至磁铁近旁，也不会为磁铁所吸引。如果让它在磁铁近旁冷却，则当温度降至临界温度以下时便会突然再度被磁铁吸引！

我们将采用的有关铁磁性的普遍理论，假定电子的自旋导致了磁性。电子的自旋为 $1/2$ 并带有一个玻尔磁子的磁矩 $\mu = \mu_B = q_e \hbar / (2m)$ 。电子自旋可“向上”也可“向下”。由于电子有负电荷，所以当其自旋“向上”时，就有一个负的矩，而当其自旋“向下”时则有一个正的矩。按照我们常用的惯例，电子的磁矩 μ 与其自旋反向。我们已求得一个磁偶极子在给定外加磁场 $\mathbf{B}$ 中的取向能为 $-\mu \cdot \mathbf{B}$ ，可是一个自旋电子的能量也取决于邻近自旋的排列情况。在铁中，若附近一原子的磁矩“向上”，则与之相邻的另一原子就有使其本身磁矩也同样“向上”的强烈倾向。这就是促使铁、钴、镍等具有如此强大磁性的因素——磁矩全都必须互相平行。我们不得不讨论的第一个问题就是这个为什么。

量子力学发展起来之后不久，人们就注意到存在一个很强的表观力——既不是一种磁力，也不是任何其他种类的真实力，而只是一种表观力——试图把相邻电子的自旋互相反向整齐排列。这些力与化学键力密切相关。在量子力学中有一个原理——称为不相容原理——两个电子不能处于完全相同的状态，即它们的位置和自旋取向不能完全相同。例如，若它们位于相同的地点，则唯一可能的就是它们的自旋相反。因此，如果两原子之间有一个空间区域，电子乐于聚集在那里（像在化学键中那样），而我们也想把另一个电子放在已经待在那里（的一个电子的上面，则唯一办法就是将这第二个电子的自旋指向与第

一个电子的自旋指向相反。要使它们的自旋平行是违反规律的，除非这两个电子间互相离得很远。这样就产生了一个效应，即一对互相靠近、自旋平行的电子比一对自旋相反的电子具有大得多的能量。净效应好像有一个企图把自旋翻转过来的力，有时把这种使自旋翻转的力称为交换力，但那样只能使它更加神秘——并不是一个很好的名称。只是由于不相容原理才使得电子具有一种促使其自旋相反的倾向。事实上，这就是关于几乎一切物质都缺乏磁性的解释！原子外部自由电子的自旋具有在相反方向达到平衡的强大趋势。问题是要来解释为什么像铁那样的材料其性质恰恰与我们所预期的相反。

对想象的排列效应我们已在能量公式中加上一个适当的项而加以概括了，即假定如果邻近的电子磁体具有平均磁化强度 $\mathbf{M}$ ，则电子的磁矩就具有同邻近原子的平均磁化强度处于相同方向的强大趋势。这样，就可以将两种可能的自旋取向写成^[1]：

$$\begin{aligned}\text{自旋“向上”的能量} &= +\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right), \\ \text{自旋“向下”的能量} &= -\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right).\end{aligned}\tag{37.1}$$

当弄清楚量子力学可能会提供一个巨大的自旋取向力时——即使其符号显然错误——人们曾认为铁磁性也许都起源于这同一种力。由于铁的复杂性以及牵涉到大量电子，所以这互作用能的符号计算结果相反。自从这一主意被想出来之后——约在1927年，当量子力学开始被理解的时候——许多人就曾做出各种估计和半定量计算，试图得到一个关于 λ 的理论预言。关于铁里两电子自旋间能量的最新计算——假定该相互作用是相邻原子里两个电子间的一种直接相互作用——仍然会给出错误的符号。目前对此的理解依旧假定，情况的复杂性不知

道是什么原因造成的，并希望下一个根据更复杂情况而进行计算的人能获得正确答案！

目前人们相信，在内壳层上一个造成磁性的电子向上自旋，力图使在外层飞绕的传导电子具有反向自旋。人们也许期待此事会发生，因为那些传导电子已进入与“磁性”电子相同的区域。由于这些传导电子到处运动，它们可以带着其自旋已经颠倒的偏见来到另一个原子附近。这就是说，一个“磁性”电子企图强迫一个传导电子与之反向，此后这传导电子又会促使次一个“磁性”电子与它反向。这双重相互作用就等效于企图使那两个“磁性”电子平行排列的一种相互作用。换句话说，造成两自旋平行的趋势是由于一种媒介物作用的结果，这媒介物在某种程度上有与两者都相反的倾向。这个机制并不要求传导电子完全“颠倒”过来。它们只可以稍微有些自旋向下的偏向，刚刚足够促使那些“磁性”电子指向另一方向。那些曾经计算过这类事情的人们目前认为这是导致铁磁性的主要原因。但我们必须强调，直到今天还没有人只凭知道该材料在周期表中的数目26就能够算出 λ 的大小来。总之，我们对它还未充分了解。

现在让我们继续来谈谈这个理论，待以后再回来讨论某一项涉及我们对这一问题的提法上的错误。如果某个电子的磁矩“向上”，则能量既来自外加磁场，也来自使自旋成为平行的那种倾向这两方面。由于当自旋互相平行时能量较低，所以这效应有时被认为是起因于一种“有效内场”。但要记住，这并非由真实的磁力引起的，而是一种更为复杂的相互作用。不管怎样，我们把式（37.1）作为关于一个“磁性”电子的两个自旋态的能量公式。在温度 T 时，这两个态的相对概率正比于 $e^{-\text{能量}/(kT)}$ ，我们可把它写成 $e^{\pm x}$ ，其中 $x = \mu [H + \lambda M / (\epsilon_0 c^2$

)] / (kT))。这样，若我们计算磁矩的平均值，则会（如同上一章中那样）求得

$$M = N\mu \tanh x. \quad (37.2)$$

现在，我们想要计算材料的内能。我们注意到一个电子的能量恰好与磁矩成正比，因而平均能量的计算就与平均磁矩的计算相同——只要在式 (37.2) 中 μ 的地方，我们应该写成 $-\mu B$ 也即 $-\mu [H + \lambda M / (\epsilon_0 c^2)]$ 。于是平均能量为

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -N\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x.$$

可是这并不是很正确的。由于 $\lambda M / (\epsilon_0 c^2)$ 这一项代表所有可能的原子对之间的相互作用，所以必须记住，每一对只能计数一次（当我们考虑一个电子在其余电子的场中的能量、而后再考虑第二个电子在其余电子的场中的能量时，我们就已将第一次能量中的一部分多算了一次）。因此，我们就必须将相互作用的项除以2，于是有关能量的公式结果为

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -N\mu \left(H + \frac{\lambda M}{2\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x. \quad (37.3)$$

在上一章中，我们曾经发现过一件有趣事情——低于某一温度时，对于该材料人们找到了一个即使没有外加磁化场其磁矩也并不是零的方程组的解。当我们在式 (37.2) 中令 $H=0$ 时，曾求得

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \tanh\left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_{\text{饱和}}}\right), \quad (37.4)$$

式中 $M_{\text{饱和}} = N\mu$ ，而 $T_c = \mu\lambda M_{\text{饱和}} / (k\epsilon_0 c^2)$ 。当（用图解法或其他方法）解这一方程时，我们发现，比率 $M/M_{\text{饱和}}$ 作为 T/T_c 的函数是一条像图37-1中标明为“量子理论”的曲线。而那条标明为“钴、镍”的虚曲线则表示这些元素晶体的实验结果。理论和实验符合得相当好。在这图上也显示出经典理论的结果，其计算是在假定原子磁体在空间中可以具有一切可能的取向进行的。你可以看出，这个假定提供了一个甚至不会与实验事实接近的预言。

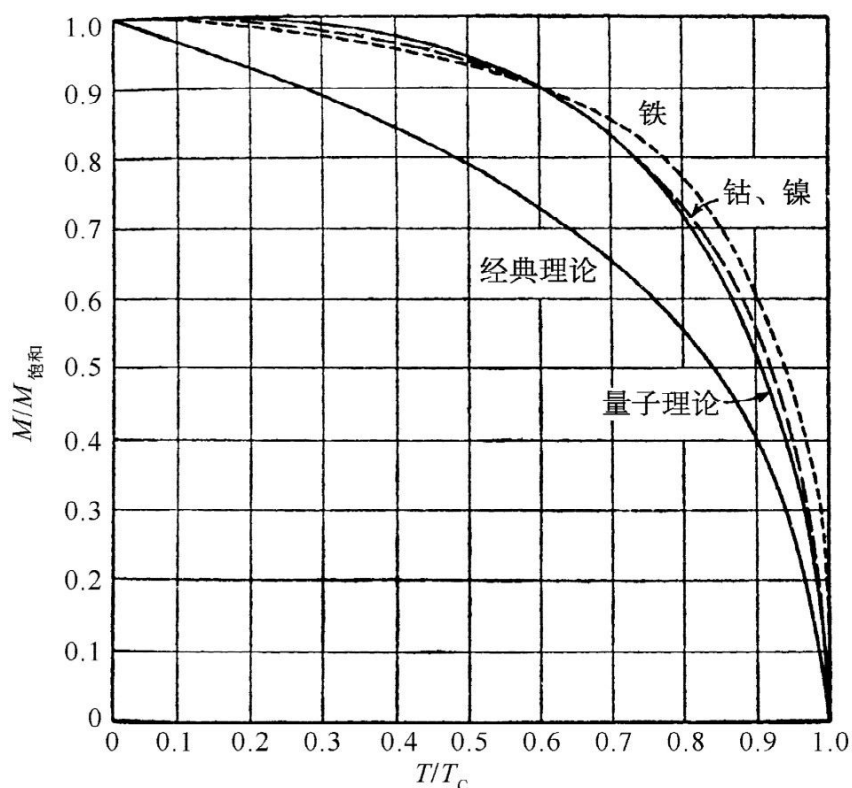


图37-1 铁磁性晶体的自发磁化强度 ($H=0$) 作为温度的函数 [摘自

Encyclopaedia Britannica]

即使是量子理论，在高温和低温两区域中，也都与所观测到的行为有所偏离。发生偏离的原因是，在该理论中我们曾经做出过一个相当草率的近似：即假定一个原子的能量取决于它的附近原子的平均磁化强度。换句话说，对于在一给定原子附近的每个“向上”磁矩，就将存在由于那种量子力学排列效应而引起的能量贡献。但究竟有多少个磁矩指“向上”呢？就平均来说，这是用磁化强度 M 来度量的——不过只是在平均的意义上而言的。某处的一个特定原子也许会发现它的所有邻居都是“向上”的。这样，它的能量便会大于平均值。另一个原子可能发现其邻居有些“向上”，而有些“向下”，或许平均为零，因而就该没有来自这一项的能量，如此等等。我们所应当做的是，采用某种较复杂的平均法，因为在不同位置上的原子会有不同的环境，因而对于不同原子就有不同数目的向上和向下的邻居。不仅仅考虑一个受到平均影响的原子，而是应该考虑每一个处于实际情况下的原子，算出它的能量，并求出平均能量。但我们如何来找出在其附近的原子中究竟有多少个“向上”和多少个“向下”呢？当然，这恰恰就是我们企图要算出的东西——“向上”的和“向下”的数目——因而就有一个十分复杂的相互联系的关联问题，即是一个从未得到解决的问题。这是一个错综复杂而又令人振奋的问题，已存在了许多年，而某些鼎鼎大名的物理学界人士在这方面也曾写过一些论文，但即使是他们也仍未能完全解决该问题。

结果证明，在低温时，当几乎全部原子磁矩都指“向上”而只有少数几个指“向下”时，问题易于解决；而在比居里温度 T_C 高得多的高温、且它们几乎全都混乱时，问题又容易解决。往往还不难算出在某

种简单而又理想的情况下的微小偏差，因而对于为什么会在低温时与该简单理论有所偏离已有相当好的理解。在物理上也已理解到基于统计原因磁化强度应该在高温时有所偏离。但接近居里点的准确行为就从未被完全算出来过。如果你希望有一个从未被解决的问题的话，则那就是一个有朝一日会计算出来的有重要意义的问题。

§37-2 热力学性质

在上一章中，我们已经为计算铁磁性材料的热力学性质打下了必要的基础。自然，这些性质与晶体内能有关，而晶体的内能包括各种自旋的相互作用、由式（37.3）给出。对于比居里点为低的自发磁化能量，可以令式（37.3）中的 $H=0$ ，因而——注意到 $\tanh x = M / M_{\text{饱和}}$ ——可求得正比于 M^2 的平均能量：

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = - \frac{N\mu\lambda M^2}{2\epsilon_0 c^2 M_{\text{饱和}}}. \quad (37.5)$$

如果现在把由磁性引起的能量作为温度函数而作图，我们便会得到一条图37-1中那条曲线的平方取负值后的曲线，如图37-2（a）所示。要是此时测量这种材料的比热，我们便会得到一条如图37-2（b）所示的曲线，它是图37-2（a）所示曲线的微商。它随温度增加而缓慢地上升，但在 $T=T_C$ 时就突然降低至零。这一急剧下降是由于磁化能量曲线的斜率刚好在居里点上出现巨大改变引起的。因此，完全不需要任何磁性测量，根据测量这一热力学性质，我们就可以发现在铁或镍中将发生的某些事情。然而，实验和经过了改进的理论（包括涨落）却都显示这条简单的曲线是错误的，而真实的情况实际上更加复杂。该曲线在那尖峰处升得更高，而下降至零时则有点缓慢。即使温度已高

至足以在平均上使自旋处于混乱状态，但是仍然会有局部区域存在某些磁化量，而在这些区域中自旋具有小的额外相互作用能——这只有在温度进一步升高而情况变得越来越混乱时才会缓慢地消失。因此，实际的曲线看来就像图37-2 (c) 那样。今天理论物理学的挑战之一就是要找出在居里转变点附近关于比热特性的准确的理论描述——一个还未得到解答的引人入胜的问题。自然，这个问题与同一区域内磁化曲线的形状会有十分密切的关系。

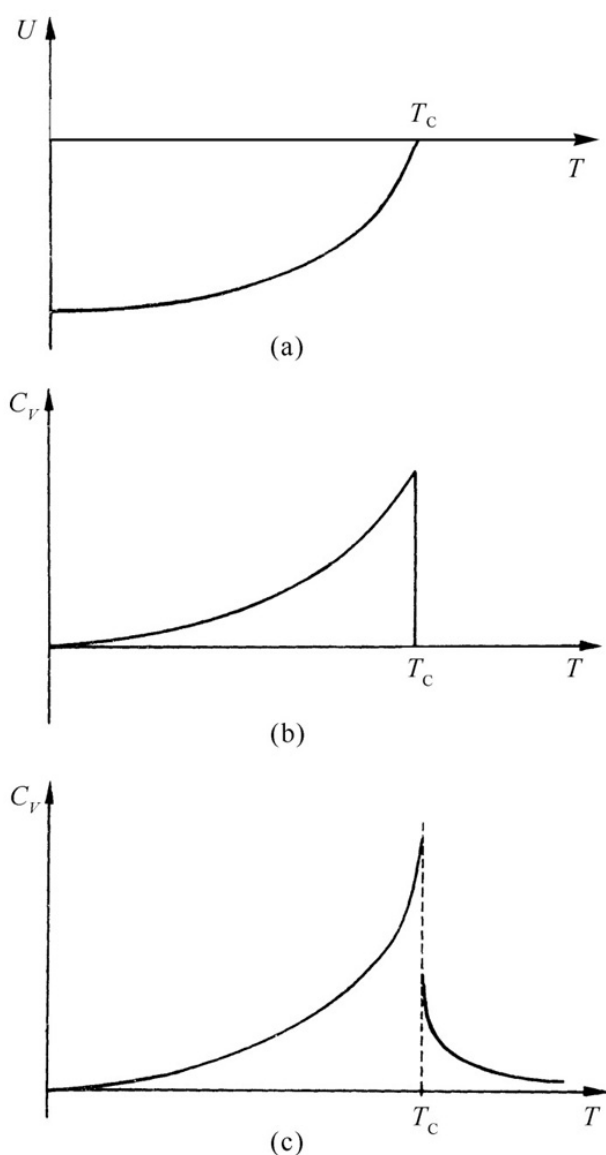


图37-2 一块铁磁性晶体的单位体积能量和比热

现在要来描述某些除热力学以外的实验，这些实验会证明，我们对磁性的解释有些是正确的。当材料在低温下被磁化至饱和程度时， M 很接近于 $M_{\text{饱和}}$ ——几乎所有自旋以及它们的磁矩都是平行的。这可以通过下述实验加以核实。假设将一条形磁铁用一根细丝悬挂起来，然后对它包围上一个线圈，使得无须接触磁铁或对其施加任何转矩就能使磁场倒转过来。这是一个十分难做的实验，因为磁力如此巨大以致任何不平衡、任何倾斜或在铁里的任何不完整都会产生一些偶然的转矩。然而，该实验已在这种偶然转矩被减至最低程度的小心谨慎条件下完成了。利用包围在磁铁上的那个线圈的磁场，我们一下子就将所有的原子磁体全都翻转过来了。当我们这样做时，也将所有自旋的角动量都由“向上”变成了“向下”（见图27-3）。如果在这全部自旋都翻转过来时角动量守恒，则铁条的其余部分就必然在角动量方面有相反的改变，整块磁体将开始旋转。果然，当我们做这一实验时，就发现磁铁的微小转动。可以测出给予整条磁铁的总角动量，而这仅是 N 乘以 $\hbar$ ，后者为每个自旋角动量的变化。由这样量得的角动量与磁矩的比率同我们的计算值相差约在10%以内。实际上，我们的计算曾假定原子磁体纯粹起因于电子自旋，但在大多数材料中除了自旋之外，还有某种轨道运动。由于这种轨道运动不是完全脱离晶格的，因而对于磁性的贡献就不会超出百分之几很多。事实上，通过取 $M_{\text{饱和}} = N\mu$ 及利用铁的密度为7.9和自旋电子的磁矩 μ ，人们所得到的饱和磁场约为20 000 Gs。但根据实验，它实际上是在21 500 Gs左右。这是误差的典型值——5%~10%，由于忽略了包含在所做的分析中的轨道磁矩的贡献造成的。于是，上述回转磁测量中的微小偏差就完全理解了。

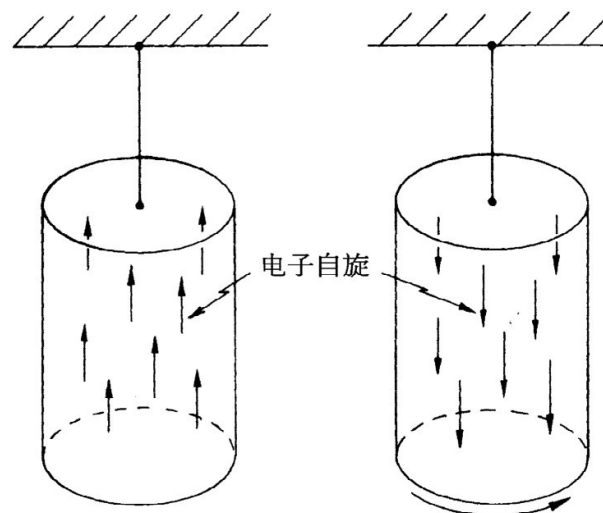


图37-3 当铁条中的磁化方向倒转过来时，铁条会得到某一角动量

§37-3 磁滞回线

从上面的理论分析我们就已断定，在某一定温度之下铁磁性材料应当自发地磁化，以致所有磁性都指向同一方向。可是我们知道，这对于一块普通的、尚未经磁化的铁来说是不正确的。为什么并不是所有的铁都被磁化了呢？我们可以借助于图37-4来解释。假定铁全部是一大块如图37-4（a）所示形状的单晶，并都已在一个方向上自发地磁化了，那么就有相当强的外部磁场，即具有大量能量。我们能够减少这种场的能量，只要布置得使铁块一边被“向上”磁化，而另一边则被“向下”磁化，如图37-4（b）所示。当然，这时铁外的场就会伸展至较小体积，因而使那里有较少能量。

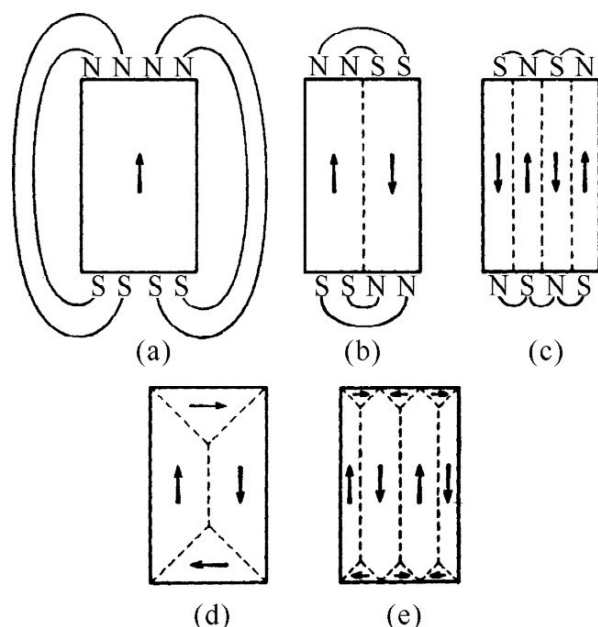


图37-4 铁的一块单晶中磁畴的形成 [转载自Kittel *C. Introduction to Solid State Physics* , 2nd ed. , 1956]

啊，等一等！在两个区域的边界层内，自旋向上的电子紧靠着自旋向下的电子。但铁磁性只在这样的材料中才会表现出来，即其中电子自旋若互相平行而非互相反向，则能量会削减。因此，我们在沿图37-4（b）的那条虚线上就已加进了一些额外能量，这种能量有时称为壁能。一个仅有单一磁化方向的区域叫作磁畴。在两磁畴间的界面——“壁”——处，在对边上的原子按不同方向旋转着，因而具有单位面积的壁能。我们已把它描写成好像是有两个相邻原子，以恰恰相反的方向自旋，但事实证明，大自然会把事情调整得使转变较为平缓。然而这里我们无须为这样的细节操心。

现在的问题是：在什么时候造成一个壁较好或较差？答案是，这取决于那些磁畴的大小。假设把一铁块按比例增大，以致整个事物增大一倍，则在体外充满给定磁场强度的空间就会是八倍大，从而正比于体积的磁场能量也会是八倍大。可是在提供壁能的两磁畴间的界面

面积，却只有四倍大。因此，如果铁块足够大，则把它分裂成多个磁畴将是合算的。这就是为什么只有那些十分微小的晶体才能拥有单个磁畴的缘故。任何大的——尺度大于百分之一毫米的——物体将至少有一个磁畴壁；而任何普通“厘米大小”的物体则将分裂成如图所示的许许多多多个磁畴。分裂成磁畴的这种过程将继续下去，一直到再插进一个附加壁所需的能量与晶体外面磁场降低的能量同样大时为止。

实际上大自然还发现了另一种降低能量的途径。完全不需要有磁场跑出外面，只要有一小块三角形区域被斜着磁化就行，如图37-4（d）所示^[2]。因此按图37-4（d）的那种排列，我们知道体外不会存在磁场，只不过增加了一点点畴壁而已。

然而，那又会引起一种新问题。事实证明，当铁的单晶体被磁化时，在磁化方向改变了长度。因而一个“理想”立方体当其磁化强度比如是“向上”时，就不再是一完美的立方体了。其“竖向”尺寸将不同于“水平”尺寸。这一种效应叫作磁致伸缩。由于这种几何形态上的变化，因此图37-4（d）中的小三角块，比如说，不再与那些适用的空间“相配”了——该晶体在一个方向已变得太长，而在另一个方向则太短了。当然，实际上还是相配的，只不过是硬挤进去罢了，而这就会牵涉到某些机械应力。因此，这种排列也引进了一种附加能量。正是所有这些不同能量的互相平衡，才决定在一块未经磁化的铁中磁畴最后如何把它们自己排列成那种复杂的形式。

现在，当加上一个外加磁场时会发生什么情况呢？为了简单起见，试考虑磁畴如图37-4（d）所示的晶体。如果我们加上一个方向向上的外磁场，则该晶体将以什么方式进行磁化呢？首先，中间的畴壁可以向侧向（向右）移动而减少能量。之所以这样移动，其目的在于

使“向上”区域变成大于“向下”区域。有更多的基本磁体与场整齐排列，而这就提供了一个较低的能量。因此，一块铁在弱场中——即在磁化过程中的最初阶段——那些畴壁会开始移动并侵蚀与场反向的磁化区域。当场继续增强时，整块晶体便逐渐转变成一个单独大畴，那是外场帮助维持整齐地排列成的。在强场中晶体“喜欢”全都排列成一个方向，只是因为在外磁场中它的能量会被降低——这时有关系的就不再仅仅是晶体本身的外场。

如果几何形态不那么简单又会怎么样呢？若晶体的轴与其自发磁化处于同一方向，但我们所加磁场却在其他某个方向——比如说在 45° 上——那又会怎样呢？我们也许认为，各磁畴会改造自己使得其磁化强度与外场平行，然后和以前一样，它们就能够全部生长成一个畴了。但这对于铁来说是不容易办到的，因为磁化晶体所需的能量依赖于相对于晶轴的磁化方向。要把铁在平行于其晶轴的方向上磁化是相对容易的，但要在其他某个方向——比如相对于其中一轴成 45° 角的方向——把它磁化就需要较多能量。因此，如果我们就在这样一个方向加一磁场，则首先发生的是，那些指向接近于外加磁场方向的从优方向之一的磁畴将会长大，直到磁化全都沿着这些方向中的一个为止。因此，如果加上更强大的场，则磁化强度就逐渐被扭转至与场平行的方向，如图37-5所粗略表示的那样。

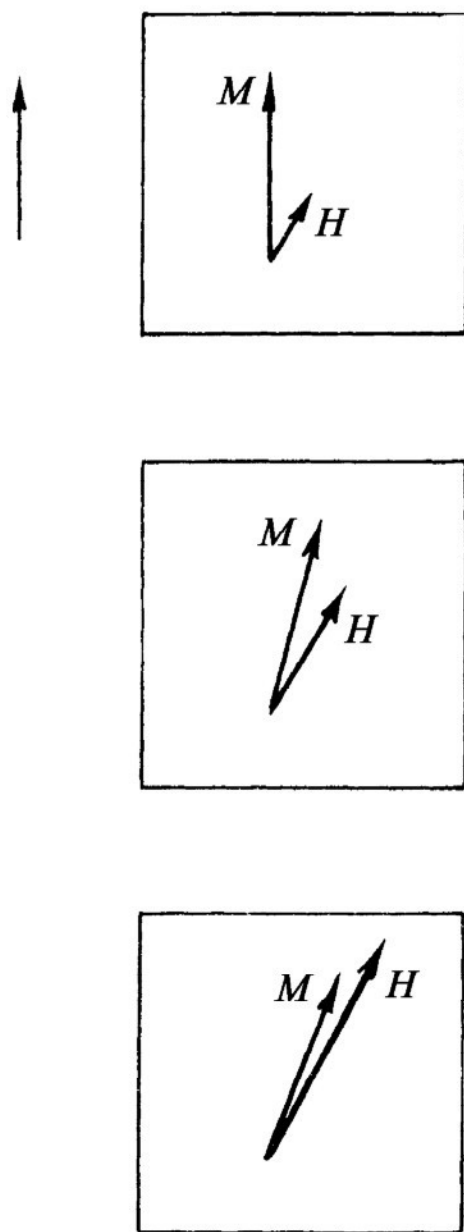


图37-5 一个与晶轴成一角度的磁化场 H 将逐渐改变磁化强度的方向，而不会改变其大小

图37-6画出了铁单晶磁化曲线的一些观测结果。为了便于理解它们，我们首先必须对描述晶体中有关方向的符号做一些解释。一块晶体可以用多种不同方式把它切开，以便产生原子水平的表面。任何曾驱车经过果园或葡萄园的人们都会知道这么一件事——对之观望令人

神往。如果你朝一个方向望去，会见到一行行的树——若朝另一方向看，又会见到另外一行行的树，如此等等。同样地，一块晶体也有一些确定的平面族，其中每个平面都包含了许多原子，而这些平面都具有这么一个重要特点（为较易于理解起见只考虑立方晶体），即如果观察这些面与那三条坐标轴相交于什么地方——则我们发现这些交点与原点间距离的倒数会形成一些简单的整数比。这三个整数就被取作为该组平面的定义。例如图37-7（a）中我们把一个平行于 yz 面的平面描绘出来了，这叫作 $[100]$ 晶面，它与 y 轴和 z 轴的交点的倒数都是零。对于（立方晶体中的）这种面的垂直方向也给予相同一组数目。在立方晶体中要理解这个意思是容易的，因为此时 $[100]$ 这些指数意味着一个矢量，它在 x 方向具有单位分量，而在 y 和 z 方向则都没有任何分量。 $[110]$ 这一方向是同 x 轴和 y 轴均成 45° 角的那一个方向，如图37-7（b）所示；而 $[111]$ 的方向则是沿立方体对角线的方向，如图37-7（c）所示。

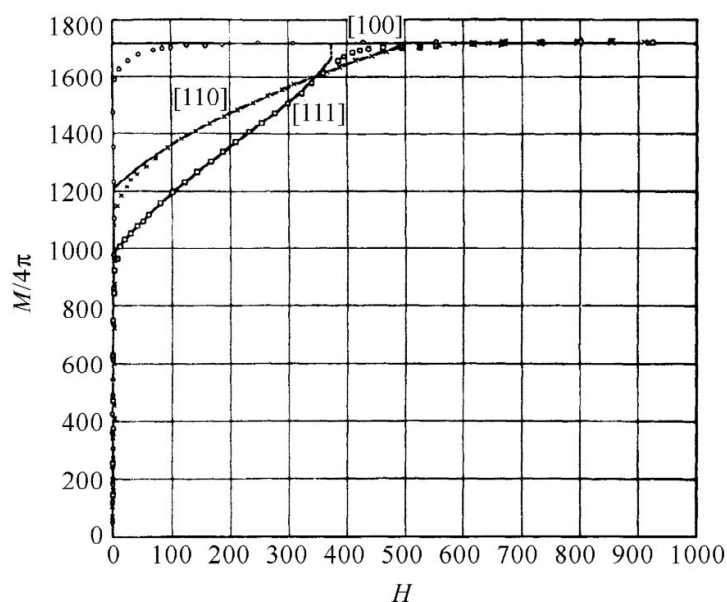


图37-6 对 H 的不同方向（相对于晶轴而言），与 H 平行的 M 分量 [转载自 Bitter F. *Introduction to Ferromagnetism*, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1937]

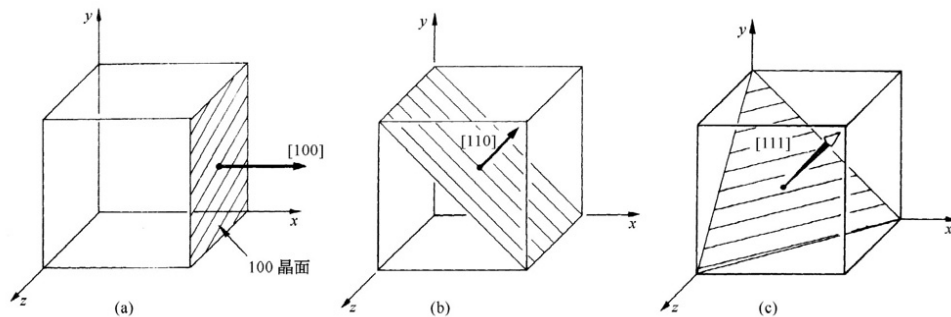


图37-7 标明各晶面的方法

现在回到图37-6，我们看到了铁的单晶在各个方向上的磁化曲线。首先应当注意，对于十分微小的场——弱至在标度上极难见到它——磁化强度非常迅速地达到了一个十分大的值，如果这个场处在 $[100]$ 方向——即是沿那些敏锐而容易磁化的方向之一——则该曲线会上升至一个高值，稍微弯曲一点，然后就饱和了。所发生的情况是，那些已经在那里的磁畴非常易于移动。只要有一小场，就引起畴壁移动而吃掉所有那些“方向错误”的磁畴。单晶铁与普通的多晶铁相比，其导磁本领要大得多。一块理想晶体非常易于磁化。但为什么它的磁化曲线竟被弯曲了呢？为什么它不会立刻就达到饱和呢？我们不确定。你或许有一天会学习到这些东西。但我们的确懂得，在高场时该曲线很平坦。当整块都已是一个单独的磁畴时，为什么附加磁场就不能造成任何更多的磁化——它已经处在 $M_{\text{饱和}}$ 的状态，其中所有电子都已经排列整齐了。

现在，若试图在 $[110]$ 方向上——那是与晶轴成 45° 角的——做同样的事情，那会发生什么呢？我们试开动一个小小的场，而当那些磁畴长大后磁化就跳跃上去。然后，当把场再增大一点时，我们便发现需要有一个相当大的场才能达到饱和，因为此刻磁化已偏离了那个“容易”的方向。如果这一解释正确，则 $[110]$ 曲线外推回至纵轴上的交点应为饱和值的 $1/\sqrt{2}$ 。事实上，结果证明这的确非常非常接近于

$1/\sqrt{2}$ 。同理，在 $[111]$ 方向上——那是沿立方体的对角线——我们发现，正如期待的那样，曲线会外推回至接近饱和值的 $1/\sqrt{3}$ 。

图37-8显示有关其他两种材料（镍和钴）的对应情况。镍与铁不同。在镍中，事实证明 $[111]$ 方向才是易磁化方向。钴具有六角晶形，而人们对于这一情况就曾拙劣地修补了一套名称。他们希望取六角柱的底面上的三个坐标轴和另一个垂直于底面的坐标轴，因此一共用了四个指数。 $[0001]$ 的方向指沿六角轴的方向，而 $[1010]$ 的方向则是垂直于这一条轴的。我们看到不同金属的晶体其行为用不同的方法来表示。

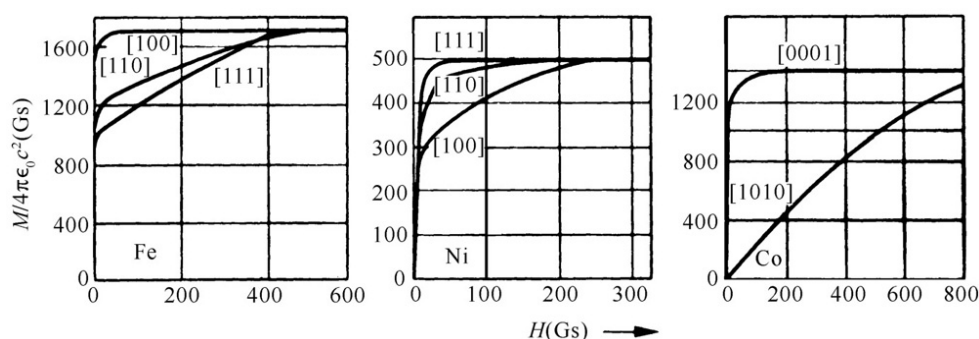


图37-8 铁、镍和钴单晶的磁化曲线 [转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956]

现在我们应该讨论多晶材料，诸如一块通常铁。在这种材料中有许许多多小晶体，它们的晶轴指向各个方向。这些是与磁畴不同的。应该记住，几个磁畴可能属于同一单晶，但在一块铁中就有许多其轴取不同方向的不同的晶体，如图37-9所示。在这些晶体的每一个中，一般也会有几个磁畴。当对一块多晶材料加上一个小磁场时，所发生的情况是：畴壁开始移动，而那些具有易磁化的有利方向的畴会长得较大。这一种成长过程是可逆的，只要场保持很小——若我们把场除

去，磁化强度就会回到零。磁化曲线的这一部分在图37-10中标明为 a 。

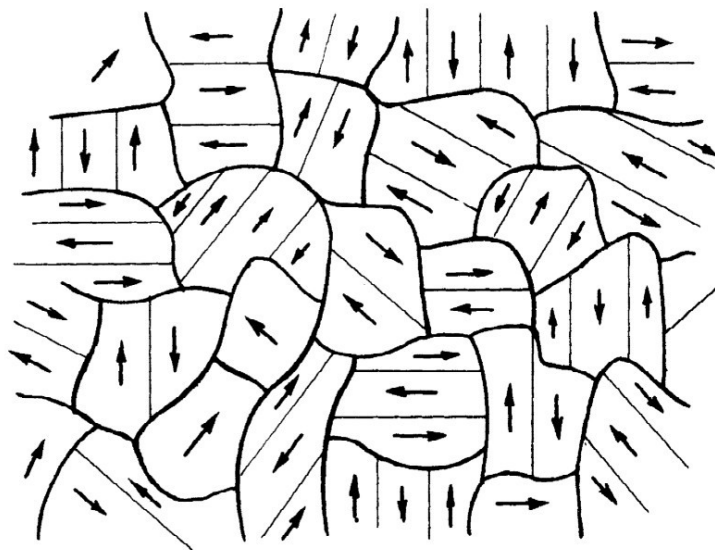


图37-9 未被磁化的铁磁材料的微观结构。每一晶粒具有一个易磁化方向，并分裂成一些平行于这一方向的自发磁化的磁畴

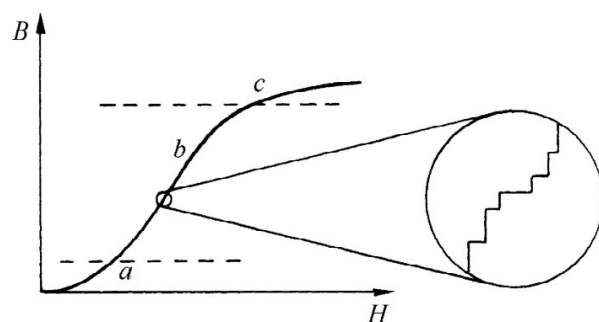


图37-10 多晶铁的磁化曲线

对于较大的场——在所示的磁化曲线的 b 区中——情况复杂得多。在材料的每个小晶体中，会有应变和位错存在，同时也会有杂质、尘埃和不完整性。而除了最小的场之外的一切场，当畴壁移动时就会被这些东西所阻挡住。在畴壁与位错之间、与晶粒间界之间或与杂质原子之间，都会有一种相互作用能。因而当畴壁到达其中之一

时，它就受到阻挡。它在某个磁场时被阻塞在那里。但若此时将场增大一些，则畴壁会突然迅速地移动过去。因此畴壁的运动并不像理想晶体中那样顺利——它不时被拖住，然后又做跳跃式的运动。要是我们在微观范围内来注视这一磁化过程，则会见到像图37-10中那个插入圆圈内的某些情况。

现在重要的事情在于，这些在磁化过程中的跳动会引起能量损失。首先，当磁畴边界最后滑过一个障碍物时，它会很快地移到下一个障碍物上去，因为场已超过对无障碍运动所需的了。迅速运动意味着有迅速变化的磁场，这会在晶体中产生涡电流。这些电流在加热金属的过程中丧失了能量。第二种效应则是，当磁畴突然变化时，晶体的一部分由于磁致伸缩而改变了它的大小。畴壁的每一突然移动都会产生一个带走能量的小声波。由于这些效应，磁化曲线的第二部分就是不可逆的，并有能量损失。这便是磁滞效应的来源，因为要把边界壁向前移动——迅速地移动——然后又向后移动——又迅速地移动——会产生不同的结果。它像一种“颠簸”的摩擦力，因而带走了能量。

最后，对于足够高的场，当我们已把所有畴壁都移动并将每一晶体都在其最佳的方向上磁化了时，仍然会有某些小晶体的易磁化方向不在我们所加的外磁场方向上。这时要将那些磁矩转动就需要很强的额外磁场。因此对于强场来说，磁化曲线会缓慢而平稳地增加——即在图上标明为 c 的区域。磁化强度并不会急剧达到它的饱和值，因为在该曲线的最后部分原子磁体正在一个强场中进行转动。因此，我们就见到为什么通常的多晶材料的磁化曲线，如图37-10中所示的那样，会在开头升高一点点并且是可逆的，然后就不可逆地升高，最后才再

慢慢地弯过去。当然，在这三个区域之间并没有明显的转折点——它们会平滑地互相融合。

不难证明那磁化曲线中部的磁化过程是跳跃式的——畴壁在移动时跳跃和突然停止。你只需要将一个——绕上了许多千匝的——线圈接至放大器及扬声器上，如图37-11所示。如果你把几张硅钢片（如在变压器中所用的那一种）放置在该线圈中心并将一条形磁铁慢慢地移近该叠硅钢片，那么磁化的突然改变就会在线圈中产生一些脉冲电动势，它会在扬声器中产生听得到的清楚的嘀嗒声。当你把磁铁移得更靠近铁片时，你将听到一大串的嘀嗒声，有点像把一罐沙子倒转时沙粒竞相落下来的那种嘈杂声。当场增强时，畴壁就在跳跃、突然停止和摇动。这一现象叫作巴克豪森效应。

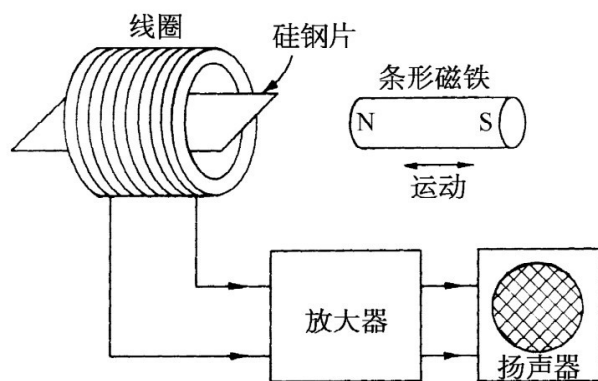


图37-11 钢片里磁化的突然变化在扬声器中发出嘀嗒响声

当你把磁铁再移近铁片时，有一段时间这噪声变得越来越响亮，但之后当磁铁十分靠近铁片时噪声又相对小了。为什么呢？因为几乎所有畴壁都已被移至尽可能远了。所以任何更大的场都只是在转动每个磁畴中的磁化强度，那是一种平稳的过程。

如果你现在将磁铁移开，以便使它沿磁滞回线的那条下降支路返回来，那么各磁畴便全都企图再回到低能量上去，而你就会听到另一

大串反向跳跃的声音。你也可注意到，若把磁铁带到某一指定地点而在那里稍微来回移动，便将只有相对少的噪声，再又像是把一罐沙倾倒——但一旦那些沙粒已经站稳了位置，罐的细小运动便将不会对它造成扰动。在铁中磁场小的变化不足以移动任何边界越过任何“驼峰”（即克服阻挡）。

§37-4 铁磁材料

现在我们很想来谈谈在技术领域中所用到的各种磁性材料，并讨论为不同目的而设计磁性材料时所涉及的某些问题。首先，“铁的磁性”这个人们经常听到的名词是一种误称——并没有这么回事。“铁”不是一种完全确定的材料——铁的性质严格地取决于所含杂质的份量和该块铁是怎样制成的。你可以体会到，磁性将依赖于畴壁移动的难易程度，以及那是一种整体的性质而不是个别原子的特性。所以凡实用的铁磁性实际上并非一个铁原子的一种特性——它是处于某一形态上的固体铁的性质。例如，铁可取两种不同的结晶形式。普通形式具有体心立方晶格，但它也可有面心立方晶格，不过后者只在超过 1100°C 的温度时才会稳定。当然，在该温度时体心立方的结构早已越过其居里点了。可是，通过把铬和镍加入铁中形成合金（一种可能的混合物，其中含有18%的铬和8%的镍），我们能够获得所谓的不锈钢，这虽然主要含的是铁，但即使在低温时也仍保留其面心晶格。由于它的晶体结构不同，它便具有完全不同的磁性。大多数品种的不锈钢并不带有可观程度的磁性，尽管有某些品种稍微带点磁性——这取决于该合金的成分。即使这样一种合金有磁性，它仍不是像普通铁那样的铁磁性——尽管该合金所含的成分大多数是铁。

现在我们很想来描述几种为某些特定磁性而研制起来的特种材料。首先，如果想制成一块永磁体，想要具有宽磁滞回线的那种材料，使得当撤去电流而把起磁场降低至零时，磁化强度仍会保持强大。对于这样的材料，磁畴边界应该尽可能“冻结”在原地。这种材料中的一种就是“铝镍钴V”（含有51%铁，8%铝，14%镍，24%钴，3%铜）。（这种合金相当复杂的成分标志着要制成优质磁铁所必须经历过的详尽的努力。要把五种东西混合起来，并一直试验到求得最理想的物质，需要多少耐性啊！）当铝镍钴凝固时，就有一种“第二相”淀积出来，造成许多微小晶粒和很高的内应变。在这种材料中，畴壁边界根本难于移动。除了应具备准确的成分外，铝镍钴是这样机械“加工”的，即使晶体具有长晶粒结构，而且晶粒沿着将要磁化的方向。这样，磁化就有在这些方向上被排列起来的一种自然趋势，而凭这种各向异性效应磁化就会被保持在那里了。而且，材料在制造时甚至被置在外加磁场中冷却，以致晶粒将按正确的结晶方向生长。铝镍钴V的磁滞回线如图37-12所示。你看它比上一章图36-8中关于软铁的磁滞回线要宽约700倍。

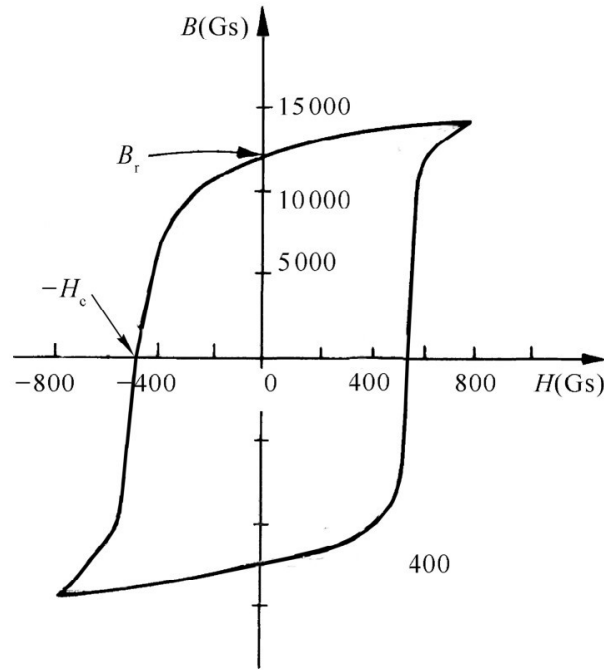


图 37-12 铝镍钴V的磁滞回线

现在让我们转到另一种不同的材料上来。为了制造变压器和电动机，需要一种“软”磁材料——它的磁性很容易改变，以致由一个十分微小的外加磁场就造成大量的磁化。为做到这点，我们需要一些纯净的而又退火退得很好的材料，其中将含有很少的位错和杂质，使得畴壁能够容易移动。要是我们能制成小的各向异性，那也会是很好的。这时，即使材料中的晶粒有相对于场处在不恰当的角度，但它也仍然容易被磁化。原来我们已经说过，铁比较喜欢沿 $[100]$ 方向磁化，而镍则倾向于 $[111]$ 方向，因此如果我们把铁和镍以各种不同的比例混合，也许有希望用刚好恰当的比例找到一种不会偏爱任何方向的合金—— $[100]$ 和 $[111]$ 两个方向可能彼此等价。事实证明，这发生于混合物中含有70%镍和30%铁的情况。此外——也许由于幸运，或可能由于在各向异性与磁致伸缩效应之间存在某种物理关系——结果是，铁与镍的磁致伸缩 具有相反的符号。而在这两种金属的合金中，当含有约80%的镍时，这一性质就会通过零值。因此，镍含量在70%

~80%之间时，我们将获得一种非常“软”的磁性材料——极易于磁化的合金，它们被叫作坡莫合金。这种坡莫合金用于优质（在低信号水平的）变压器中，但对于永磁则毫无用处。坡莫合金一定要很小心地制造和使用。一块坡莫合金若所受的应力超过弹性限度，性质将激烈发生变化，即不能把它弯曲。如果把它弯曲，其磁导率将由于机械形变所产生的位错、滑移带等等而降低，畴壁不再容易移动了。然而，这高磁导率可以通过在高温中退火而恢复。

用某些数字来表征各种不同磁性材料往往很方便。有两个有用的数字，那就是磁滞回线与 B 轴和 H 轴的截距，如图37-12所标明出来的那样。这些截距分别称为剩余磁场 B_r 和矫顽力 H_c ，在表37-1中我们把几种磁性材料的这些数字列举了出来。

表 37-1 某些铁磁材料的性质

材料名称	剩余磁场 B_r (Gs)	矫顽力 H_c (Gs)
超坡莫合金	($\approx 5\,000$)	0.004
硅钢(变压器)	12 000	0.05
阿姆科铁(工业用纯铁)	4 000	0.6
铝镍钴 V	13 000	500

§37-5 特殊磁性材料

我们现在想要讨论一些更奇异的磁性材料。在周期表上有许多元素其内电子壳层尚未填满因而具有原子磁矩。例如，紧靠着铁磁性元素铁、镍、钴，你就会找到铬和锰。为什么它们不是铁磁性的呢？答案是，对于这些元素式（37.1）中的 λ 项具有相反的符号。例如，在铬晶格中，铬原子的自旋逐个改变方向，如图37-13（b）所示。所以铬从它本身的观点来看是“磁性”的，但在技术上却不是令人感兴趣

的，因为缺乏外部 磁性效应。这样，铬就是量子力学效应使自旋交替的那类材料的一个例子。像这样一种材料称为反铁磁性 的。反铁磁材料中的自旋排列也与温度有关。低于某一临界温度，所有自旋都会在每隔一列上排列整齐，但当晶体被加热到高于某个温度——还是称为居里温度——时，自旋便突然变得混乱起来。在内部发生了一次突然转变。这一转变可以在比热曲线中看到，也在某些独特的“磁性”效应中表现出来。例如，这种交替自旋的存在可通过被铬晶体中散射出来的中子而加以证实。由于中子本身具有自旋（和磁矩），所以它就具有不同的散射振幅，这取决于它的自旋是平行还是反平行于散射物质中的自旋。这样，当晶体中的自旋交替与具有无规分布时，我们会得到不同的干涉图样。

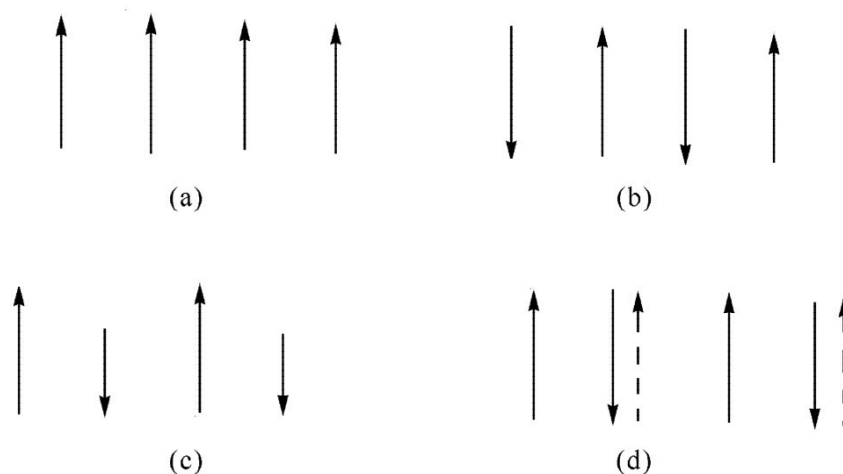


图37-13 在各种不同材料中电子自旋的相对取向：（a）铁磁性；（b）反铁磁性；（c）铁氧体；（d）钆铁合金（虚线箭头代表包括轨道运动在内的总角动量方向）

还有另一种物质，量子力学效应促使其中电子的自旋交替排列，但无论如何它还是铁磁性 的——这就是说，这种晶体具有净的永久磁化强度。这一类物质的内部结构如图37-14所示。图上显示出尖晶石、即 MgAl_2O_4 的晶体结构，这如同图上所示，乃是不净 磁性的。这种

氧化物含有两种金属原子：镁和铝。现在，若用两种像铁和镍、或锌和锰的磁性元素来代替镁和铝——换句话说，如果放进磁性原子而不是原来的非磁性原子——一件有趣的事情就会发生。让我们称其中一种金属原子为 a 而另一种金属原子为 b ，那么下述各种力的组合就必须加以考虑。有一种 $a-b$ 互作用，企图促使 a 原子与 b 原子具有相反自旋——因为量子力学总是给出相反符号（除了铁、镍和钴那些神秘的晶体以外）。然后，还有直接的 $a-a$ 相互作用，企图促使 a 与 a 间反向，另外还有企图促使 b 与 b 间反向的那种 $b-b$ 相互作用。现在，我们当然不能使每一件东西与其他每一件东西都相反—— a 与 b 反， a 与 a 反，而 b 又与 b 反。大概是由于 a 与 a 间的距离较大并有氧原子存在（尽管我们实际上还不知道其所以然），结果是 $a-b$ 相互作用比 $a-a$ 或 $b-b$ 的较强。因此，大自然在这种情况下所采用的解答是使所有的 a 都互相平行，以及所有的 b 也都互相平行，可是这两个系统却互相反向。该解答会给出最低能量，因为 $a-b$ 相互作用较强。结果变成：所有的 a 都是自旋向上，而所有的 b 则都是自旋向下——当然，或者与此相反。但如果 a 型原子与 b 型原子的磁矩不相等，则我们该得到如图37-13（c）所示的那种情况，而在材料中就可能存在净的磁化强度。于是材料将属于铁磁性的——虽然弱了一点。这样的材料叫作铁氧体。它们不具有像铁那么高的饱和磁化强度——由于明显的原因——因而只对较弱的场才有用。但有一个十分重要的差别——它们都是绝缘体，铁氧体是铁磁绝缘体。在高频场中，它们会有十分微小的涡电流，并从而可用于诸如微波系统中。微波场能够进入像这样的绝缘材料的内部，而它们在像铁那样的导体中将被涡流逐出体外。

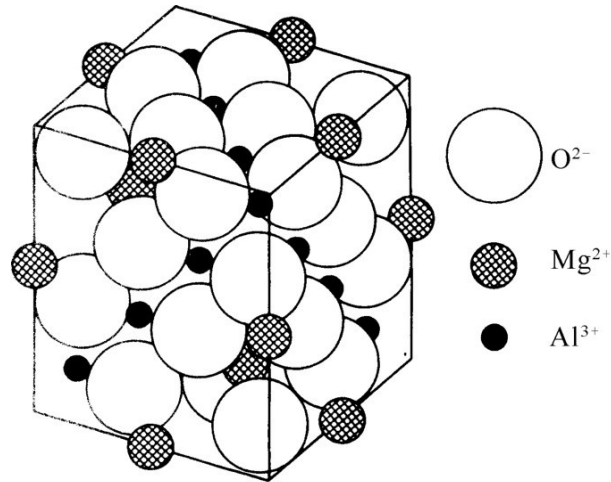


图37-14 尖晶石 (MgAl_2O_4) 矿物的晶体结构。 Mg^{+2} 离子占据正四面体位置，每个被四个氧离子所包围； Al^{3+} 离子占据八面体位置，每个被六个氧离子所包围 [转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956]

还有另一类最近才被发现的磁性材料——称为石榴石的正交硅酸盐族的成员。它们也是在晶格中含有两种金属原子的晶体，因而我们又有几乎可以随意地代替其中两个原子的那种情况。在许多感兴趣的化合物中，有一种是完全磁性的，它在该石榴石结构中含有钇和铁，而它所以具有铁磁性的原因是很难理解的。这里量子力学又再使相邻的自旋反向，从而形成铁中电子自旋指向一方、而钇中电子自旋则指向相反的一个同步系统。但钇原子比较复杂，它是一种稀土元素，它的磁矩从电子的轨道运动中获得大的贡献。对于钇来说，轨道运动的贡献与自旋方面的贡献相反，并且还比较大。于是，借助不相容原理而工作的量子力学，虽然会使钇的自旋与铁的自旋反向，但由于轨道效应就仍能使钇原子的总磁矩平行于铁的原子磁矩——如图37-13 (d) 所简略表示的那样。因此，该化合物就是一种正常的铁磁体。

铁磁性的另一个有趣例子存在于某些稀土元素中，它与自旋的一种更特殊的排列有关。该材料既不是自旋全都平行意义上的铁磁性，

也不是每个原子的自旋相反意义上的反铁磁性。在这些晶体中，处于某一层内的所有自旋都互相平行，并躺在该层的平面之上。在邻接的一层内，所有自旋又彼此平行，但却指着稍微不同的方向。在接下来的一层又再有另一个方向，如此等等。结果是，局部的磁化强度矢量按螺旋式变化——当沿一条垂直于各层的直线通过时，逐层的磁矩在旋转。试图分析当加一磁场于这样一个螺旋体时会发生什么情况——在所有各原子磁体中所必须进行的一切扭转和旋转——是很有趣的（有些人就喜欢用这些东西的理论来自我取乐）。不仅存在“平坦”螺旋的那些情况，也还存在逐层磁矩，它们的方向会形成一个锥面，以致它既具备一个螺旋分量而又具备沿某一方向均匀的铁磁性分量！

在比我们这里所能做出的更高的水平上计算出来的物质磁性，曾经使各种类型的物理学家着迷。首先，有些实际工作者，他们喜欢寻找以更佳方式制造出各种东西来的途径——他们乐于去设计出更为优良而又更加有意义的磁性材料。像铁氧体那类东西的发现或其应用，立即使得那些喜欢看到用灵巧的新方法来做出东西的人们很高兴。除此之外，还有一些人在大自然能够用几条基本定律就产生出的极度复杂性中寻找魅力。仅从唯一一个相同的普遍概念出发，大自然便从铁的铁磁性和磁畴开始，至铬的反铁磁性，又至铁氧体和石榴石的那种磁性，以致一些稀土元素的螺旋结构，等等，等等。要在实验上去发现这些特殊物质中所发生的一切奇异事情是挺令人向往的。然后，对于那些理论物理学家来说，铁磁性代表着若干项十分有趣、但尚未得到解决而又挺漂亮的挑战。一项挑战就是去理解为什么铁磁性真的会存在。另一项挑战则是去预言在一理想晶格中有相互作用的自旋的统计性。即使忽略任何可能不重要的复杂性，这一问题迄今仍难以充分理解。那么有趣的原因在于它竟是这么容易表述的问题：设在常规晶格中存在以如此这般的规律相互作用着的大量电子自旋，试问它们究

竟会做什么呢？问题虽然简单地说明了，但多年来人们就是难以对它做出完全的分析。尽管对于温度不太靠近居里点的情况已做了相当仔细的分析，但在居里点处的突然转变的理论仍有待完成。

最后，有关自旋的原子磁体系统——在铁磁性材料、或在顺磁性材料以及在核磁性中——的整门学科，对于物理系的高年级学生来说，也已是一种具有魅力的东西。这些自旋系统可用外加磁场加以推和拉的作用，从而人们就能够利用共振、弛豫效应、自旋回波以及其他各种效应达到许多目的。它被用作许多复杂热力学系统的原型。但在顺磁性材料中情况往往相当简单，而人们已经很高兴去做实验以及从理论上解释那些现象。

我们现在已结束了电学和磁学的学习。在第1章中，我们曾谈到自从早期希腊人对于琥珀和天然磁石的奇怪行为进行了观察以来已经大有进步。可是在我们一切冗长而又复杂的讨论中，却从未解释过为什么当我们摩擦一块琥珀时会在它上面获得电荷，而我们也没有解释过为什么一块天然磁石会被磁化！你可能会说：“呵！我们不过未能得到一个正确符号罢了。”不，比这还要糟些。因为即使我们的确曾获得过正确符号，仍然会有这么一个问题：为什么在地壳里的天然磁石会被磁化呢？当然，存在地球磁场，但地球磁场又是从哪里来的呢？实际上并没有任何人知道——只能有一些良好的猜测。所以你看，我们这一套物理学竟是一套赝品——从天然磁石和琥珀现象出发，而就在对这两者都不很了解处收场，但是，我们在这一过程中也已经学到了大量十分令人振奋而又非常实用的知识！

[1] 为了同上一章的工作一致，我们用 $H = B - M / (\epsilon_0 c^2)$ ，而不是用 B 来写出这些方程。你也许喜欢把它写成 $U = \pm \mu B_a = \pm \mu (B + \lambda' M / \epsilon_0 c^2)$ ，其中 $\lambda' = \lambda - 1$ 。但那是同一件事。

[2] 你可能会觉得奇怪，那些或者“向上”或者“向下”的自旋怎么又能够“斜着”了呢！这问题提得好，但我们此刻不需去担心它。我们将采取经典观点，认为原子磁体都是一些经典的磁偶极子，可以在斜着方向受到磁化。要求对量子力学相当熟悉，才能理解物体如何能够“上与下”以及“左与右”同时全部被量子化。

第38章 弹性学

§38-1 胡克定律

弹性学这一学科，是与使物体产生形变的力被撤去后即能恢复其大小和形状的那些物质行为打交道的。对于所有固态物体，我们在某种程度上都发现了这种弹性特征。要是我们有时间详尽地处理这一课题，则要观察下列许多事情：材料行为、弹性的一般规律、弹性的普遍理论、决定弹性的原子机制以及最后当力大至范性流动和破裂发生时的弹性定律限度。要详细地涉及全部这些课题，所花费时间可能比我们具有的更多，因而将不得不忽略某些东西。例如，我们将不讨论范性或弹性定律的限度（当过去谈论金属中的位错时，就曾稍微接触过这些课题）。并且，也将不能讨论弹性的内在机制——所以下述处理就将不会有如我们在以前各章中所试图达到的那种完整程度。我们的目的主要在于使你们熟悉怎样去处理诸如梁的弯曲那样的实际问题的某些方法。

当你挤压一块材料时，它将“屈服”——材料发生了形变。如果力足够小，则材料中各点的相对位移与力成正比——我们说这行为是弹性的。下面将仅仅讨论弹性行为。首先，写出弹性的基本定律，然后，将其应用于若干不同情况。

假设取一根长度为 l 、宽度为 w 及高度为 h 的矩形杆，如图38-1所示。如果在其两端用力 F 来拉，此时其长度将伸长 Δl 。我们将假定在

整个过程中这长度的改变是原来长度的一个微小分数。事实上，对于诸如木材和钢等材料，若长度改变超过其原长的百分之几，则该材料便将断裂。对于大多数材料，实验证明，在伸长足够小时，力与伸长成正比：

$$F \propto \Delta l. \quad (38.1)$$

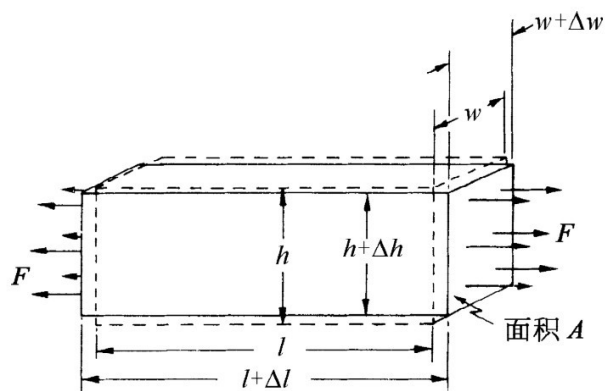


图 38-1 一根杆在受均匀张力时发生的伸长

这一关系就是大家熟悉的胡克定律。

杆的伸长 Δl 也与其长度有关，我们可以通过下述论证来尽可能弄清楚这关系。若把全同的两块材料头对头地粘在一起，作用于每块上的力相同，且每块都将伸长 Δl 。这样，长为 $2l$ 的一块伸长即为截面与之相同但长度为 l 的另一块的伸长的两倍。为得到一个更能表征该材料性质而包含较少特殊形状的数字，我们决定与伸长对原长的比率 $\Delta l / l$ 打交道。这一比率与力成正比但与 l 无关：

$$F \propto \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.2)$$

力 F 也将取决于该块材料的横截面积。假设将两块材料侧面与侧面相靠，那么，对于给定伸长 Δl ，我们作用于每块的力就应为 F ，亦

即对这两块的组合作用了两倍的力。对于一给定的伸长量，力必定与该块材料的截面积 A 成正比。为获得一个比例系数与物体的线度无关的定律，我们把对于一矩形块的胡克定律写成下列形式：

$$F = YA \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.3)$$

常数 Y 仅代表材料的特征性质，被称为杨氏模量（你将经常见到杨氏模量被写成 E ，但我们已把 E 用作为电场、能量和电动势了，因而建议采用另一个字母）。

单位面积的力称为应力，而单位长度的伸长——分数伸长——则称为应变。因此式（38.3）便可重新写成：

$$\frac{F}{A} = Y \times \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.4)$$

$$\text{应力} = (\text{杨氏模量}) \times (\text{应变}).$$

胡克定律的另一个主要部分是：当你在一个方向上拉伸一块材料时，它将在一垂直于伸长的方向上收缩。宽度的收缩正比于原来宽度，也正比于 $\Delta l / l$ 。这侧向收缩对于宽度和高度两方面都有相同比例，并经常被写成

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.5)$$

其中常数 σ 表示另一种称为泊松比的材料性质。在符号上它总是正的，而且是一个小于1/2的数目（ σ 一般应取正值，那是“合理”的，但为什么一定是这样，就不十分清楚）。

Y 和 σ 这两常数就完全规定了一种均匀而各向同性（即非晶体）材料的弹性。在结晶材料中，伸长和收缩在不同方向上可以不同，因而可以有許多弹性系数。我们将暂时把讨论局限于其性质可以由 Y 和 σ 加以描述的那些均匀而又各向同性的材料。和往常一样存在描述事物的不同方法——有些人喜欢用不同的常数来描述材料的弹性，但始终要用到两个，而且它们都可以与 σ 和 Y 联系起来。

我们所需要的最后一个普遍原理是叠加原理。由于式（38.4）和（38.5）两定律在力和位移方面都是线性的，所以叠加将有效。如果你有一组力并得到某个位移，然后你增加一组新的力并得到某个另外的位移，则合位移将是你从这两组力独立作用时所得到的两个位移之和。

现在，我们有了所有的普遍原理——叠加原理和方程式（38.4）与（38.5）——就有了全部弹性学。但这也好像是在说，一旦有了牛顿定律，就有了全部力学。或者，给出了麦克斯韦方程组，也就给出了全部电学。当然，有了这些原理你便可以得到许多东西，因为具备了你目前的数学本领你就能够走得很远。不过，我们还将演算几个特殊的应用问题。

§38-2 均匀应变

作为第一个例子，让我们来找出在均匀的流体静压强的作用下，一个矩形块发生的情况。现在把一块东西放进压力箱的水里，那么，这一块东西的每一个面就都会受到一个正比于该面积向内的作用力（见图38-2）。由于流体静压强是均匀的，所以作用于该块东西每一面上的应力（单位面积之力）就都相同。我们将首先算出在长度上的

变化。该块东西的长度变化可以想象成如图38-3中所简示出来的那三个独立问题中可能发生的长度变化之和。

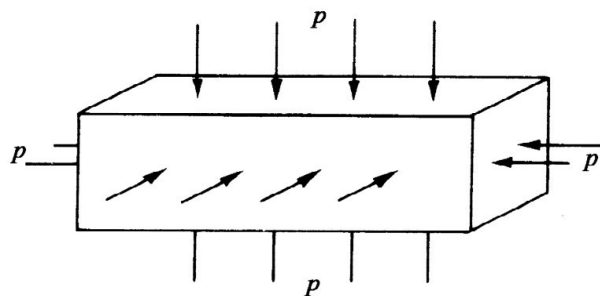


图38-2 受到均匀的流体静压强作用的一根杆

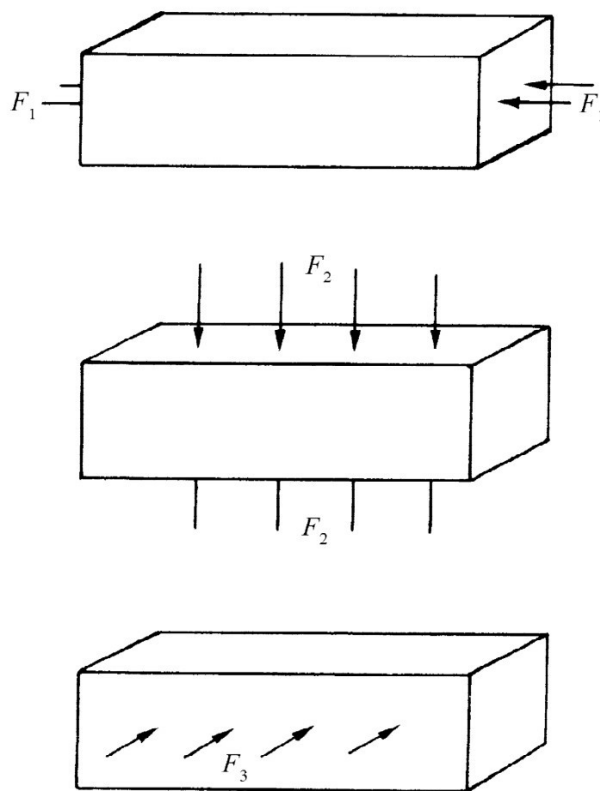


图38-3 流体静压强是三个纵向压缩力的叠加

问题1 若在该块材料两端我们用压强 p 将其推压，则压缩应变为 p/Y ，而且符号是负的，

$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y}.$$

问题2 若加压强 p 于该块材料的两个侧面，则压缩应变又是 p/Y ，但此刻我们所要的是纵向应变，它可以由侧向应变乘以 $-\sigma$ 而得到。侧向应变为

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y},$$

因而

$$\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}.$$

问题3 若在该块材料的顶上加以推压，则压缩应变又是 p/Y ，而其相应的侧向应变再次为 $-p/Y$ 。因而得到

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}.$$

把这三个问题的结果合起来——也就是说，取 $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$ ——我们便得

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.6)$$

当然，这一问题在所有三个方向上都对称，因此，

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.7)$$

在流体静压强作用下的体积变化也是有些令人感兴趣的。由于 $V = lwh$ ，所以对于小位移可写出

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}.$$

利用式 (38.6) 和式 (38.7)，我们得

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.8)$$

人们喜欢把 $\Delta V/V$ 叫作体应变，并写为

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}.$$

该体应力 p 与体应变成正比——再次得到胡克定律。系数 K 称为体积弹性模量，它与其他常数间的关系为

$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (38.9)$$

由于 K 具有某种实用价值，许多手册常给出 Y 和 K 而不是给出 Y 和 σ 。如果你想要得到 σ ，就总可以由式（38.9）获得它。我们也可从式（38.9）看出，泊松比 σ 必然小于1/2。假如不是这样的话，则体积弹性模量会是负值，因而材料便会在增大压强时膨胀。这使得我们能够从任一块旧材料中获取机械能量——这意味着该块材料处于不稳定平衡中。如果我们开始让它膨胀，则它就会自己继续膨胀同时释放出能量来。

现在我们要来讨论，当把“切”应变加于某个东西上时发生的情况。所谓切应变，我们指图38-4所示的那种畸变。作为对这一问题的准备，让我们考察受到如图38-5所示的力作用的一块立方体材料内的应变。可以再度把它分解成两个问题：垂直方向的推力和水平方向的拉力。设这立方体每一面的面积为 A ，则对于水平长度的变化得

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} + \sigma \frac{1}{Y} \frac{F}{A} = \frac{1+\sigma}{Y} \frac{F}{A}. \quad (38.10)$$

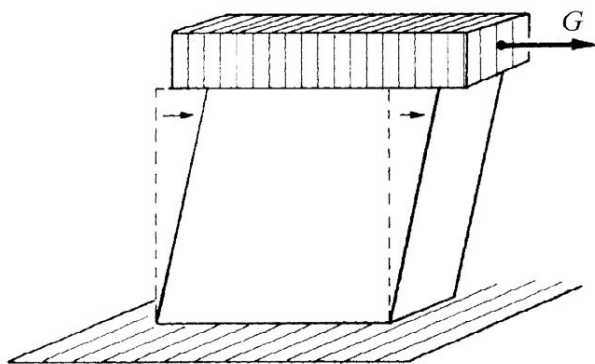


图38-4 在均匀剪切作用下的立方体

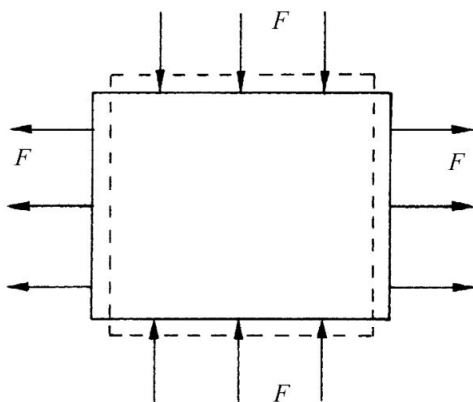


图38-5 在顶部和底部都受到压缩力作用而在两侧受到相等的拉伸力作用的一个立方体

垂直方向高度的变化恰好就是此式的负值。

现在假设同样的立方体受到如图38-6（a）所示的那些剪切力作用。注意！如果要不产生净转矩并要立方体处于平衡态中的话，则所有力必须相等（相似的力也必须在图38-4中出现，因为这块东西是处于平衡态。这种力是由使这块东西固定在台面上的“黏胶”提供的）。这时，该立方体被认为是处于纯剪切的状态。但必须注意，若用一个 45° 角的面——比如说沿图中的对角线 A ——来切割该立方体，则作用于这一截面上的总力垂直于这个平面并等于 $\sqrt{2}G$ 。受这个力所作用的面积为 $\sqrt{2}A$ ，因此，垂直于这个面上的张应力仅为 G/A 。同理，如果我们检查一下与另一方向作成 45° 角的平面——图中的对角线 B ——便会看到有一个垂直于这个面的压缩应力 $-G/A$ 。由此可见，在一“纯剪切”中的应力相当于彼此大小相等、互相正交，并与原立方体的面成 45° 角的那个张应力和压应力的组合。内应力和内应变与我们在图38-6（b）所示的那种力作用下的较大块材料中将要求得的相同，但这就是我们已经解答的问题。对角线长度的改变由式（38.10）给出：

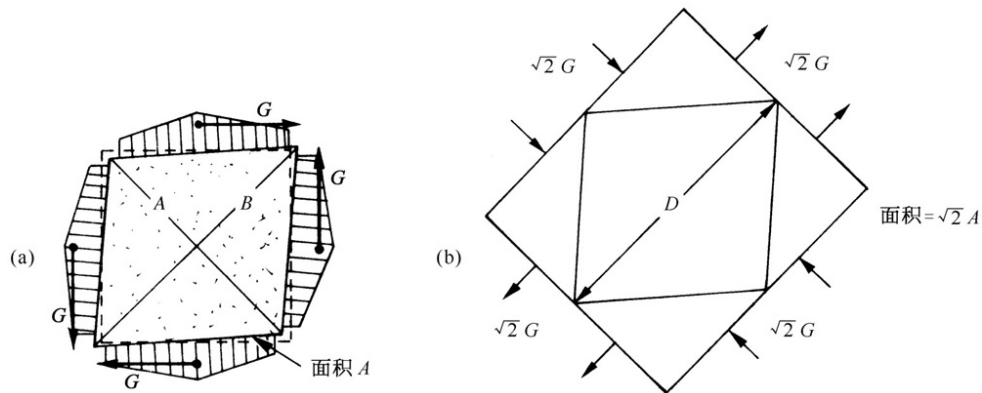


图38-6 (a) 中的两对剪切力产生了与在 (b) 中的压缩和拉伸力相同的应力

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1+\sigma}{Y} \frac{G}{A} \quad (38.11)$$

(其中一条对角线缩短，另一条则伸长)。

把剪切应变用立方体受扭转的角度——图38-7中的 θ 角——来表示往往很方便。从这个图的几何形状你便可以看出，顶边的水平位移 δ 等于 $\sqrt{2}\Delta D$ ，因此

$$\theta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{l} = 2 \frac{\Delta D}{D}. \quad (38.12)$$

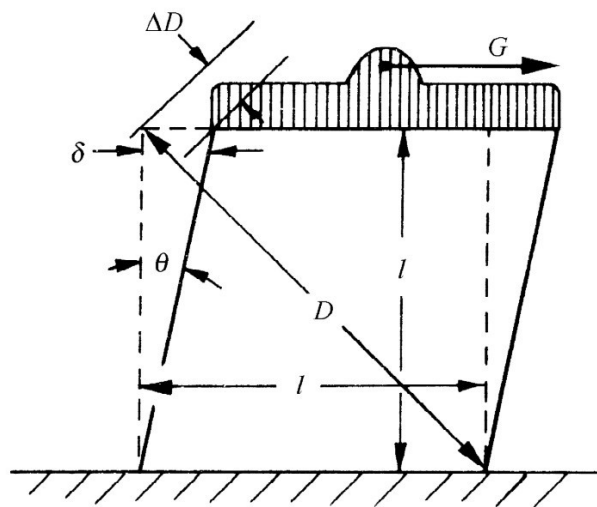


图 38-7 切应变 θ 为 $2\Delta D / D$

剪切应力 g 被定义为作用于一个面上的切向力除以该面面积，即 $g = G / A$ 。应用式 (38.11) 于 (38.12) 中，得

$$\theta = 2 \frac{1 + \sigma}{Y} g.$$

或者，把这个式子写成“应力=常数乘应变”的形式，即

$$g = \mu \theta. \quad (38.13)$$

比例系数 μ 称为剪切模量（或者有时称为刚度系数）。如果用 Y 和 σ 来表达，则为

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}. \quad (38.14)$$

顺便提一下，这剪切模量必须是个正值——要不然你就可以从正在受到剪切作用的一块材料中获得功。根据式 (38.14)， σ 必须大于 -1。

这样，我们便知道 σ 一定要在 -1 与 $+\frac{1}{2}$ 之间。然而，实际上，它却总是大于零的。

作为整个材料中应力均匀的那种典型情况的最后一个例子，让我们考虑这样的问题，一块材料被拉伸而同时又受到约束以致没有什么横向收缩能够发生（在技术上，对它进行压缩而同时不避免侧向凸起来稍微容易些——但这是同样的问题）。会发生什么情况呢？噢，必然存在使它的厚度不变的那种侧向力——一些我们此时不知道但必须计算出来的力。这与上面已经做过的问题类型相同，只是要用一点不同的代数。我们设想作用于所有三个侧向面上的力如图38-8所示，计算各种线度的改变，而选择一些横向力使得宽度和高度都保持不变。按照通常的论证，对于那三个应变得：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta l_x}{l_x} &= \frac{1}{Y} \frac{F_x}{A_x} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_y}{A_y} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_z}{A_z} \\ &= \frac{1}{Y} \left[\frac{F_x}{A_x} - \sigma \left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right], \quad (38.15)\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_y}{A_y} - \sigma \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right], \quad (38.16)$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_z}{A_z} - \sigma \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right) \right]. \quad (38.17)$$

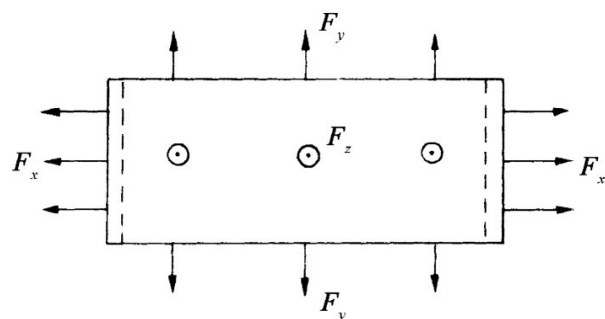


图38-8 没有侧向收缩的伸长

现在，由于 Δl_y 和 Δl_z 都假定为零，所以式（38.16）和（38.17）给出了把 F_y 和 F_z 与 F_x 相联系的两个方程式。对它们一起求解，得到

$$\frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{F_x}{A_x}. \quad (38.18)$$

代入式（38.15）中，得

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma} \right) \frac{F_x}{A_x} = \frac{1}{Y} \left(\frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma} \right) \frac{F_x}{A_x}. \quad (38.19)$$

你以后会经常看到把这个式倒转，并将 σ 的二项式分解成因式，于是它被写成

$$\frac{F}{A} = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} Y \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.20)$$

当我们把各侧都约束住时，杨氏模量得用一个复杂的 σ 函数相乘。正如你可以由式（38.19）最容易见到的，在 Y 前面的那个因子总大于1。当各侧都固定时，拉伸一块东西是较难的——这也就意味着，一块东西的强度当其各侧都被固定时会比不固定时强。

§38-3 扭转的棒；剪切波

现在让我们把注意力转到一个较复杂的例子上来，因为这里材料的不同部分受到不同量值的应力作用。试考虑一根被扭转的棒，诸如某种机械的驱动轴或在一部精密仪器中用来作为悬丝的被扭转的石英纤维。正如你可能从扭摆实验中所知道的，作用于扭转的棒上的转矩与角度成正比——该比例常数显然取决于棒的长度、棒的半径以及材料的性质。问题是：按怎样的方式？我们目前能够回答这个问题，因为那不过是演算某个几何问题。

图38-9（a）表示一根长度为 L 、半径为 a 、其一端相对于另一端扭过一个角度 ϕ 的柱形棒。如果要把这应变同我们已知道的东西联系起来，则可以把棒设想为由许多个柱形壳所构成，并分别算出每个壳所发生的情况。作为开始，我们考察一个薄而短的、半径为 r （小于 a ）而厚度为 Δr 的柱形壳——如图38-9（b）所示。现在，如果考察这个柱壳上原本是一个小正方形的部分，则会看到它已被扭转成一个平行四边形。圆柱壳的每个这样的单元都处在剪切之中，而其剪切角为

$$\theta = \frac{r\phi}{L}.$$

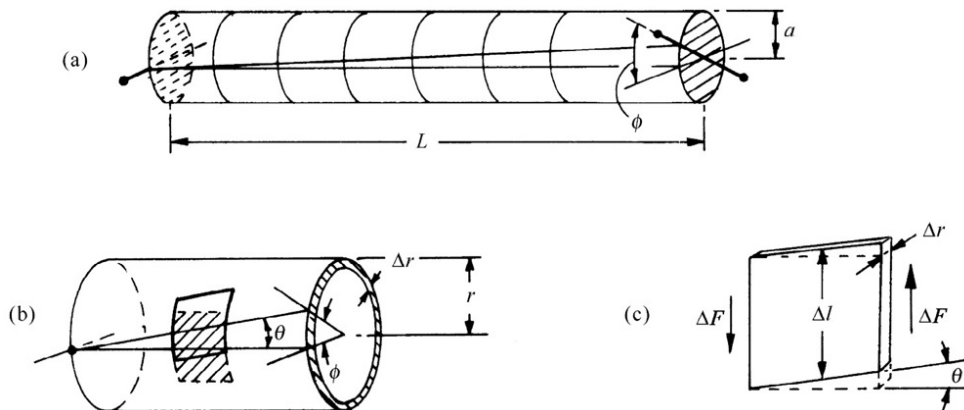


图38-9 (a) 一根扭转的柱形棒；(b) 一个扭转的柱形壳；(c) 壳中每一小部分都处在剪切中

因此，材料中的剪切应力 g [根据式 (38.13)] 为

$$g = \mu\theta = \mu \frac{r\phi}{L}. \quad (38.21)$$

剪切应力为作用于正方体端面上的力 ΔF 除以其端面积 $\Delta l \Delta r$ [参见图38-9 (c)]，

$$g = \frac{\Delta F}{\Delta l \Delta r}.$$

作用于这样一个正方体端面上的力 ΔF 贡献出绕柱轴的转矩 $\Delta\tau$ ：

$$\Delta\tau = r \Delta F = rg \Delta l \Delta r. \quad (38.22)$$

总转矩 τ 就是绕该柱壳整圆周的这种转矩之和。所以把足够多的部分拼在一起使得所有 Δl 相加成 $2\pi r$ ，我们就得到一个空心管 的总转矩为

$$rg (2\pi r) \Delta r. \quad (38.23)$$

或者，利用式（38.21），得

$$\tau = 2\pi\mu \frac{r^3 \Delta r \phi}{L}. \quad (38.24)$$

我们得到一根空心管的转动刚度 τ/ϕ 是与该管半径 r 的立方和厚度 Δr 成正比而与其长度 L 成反比的。

现在可以想象一根实心棒是由一系列同心管所构成的，而每个管子都被扭转相同的角度 ϕ （虽然对于每个管子来说内应力是不同的），总转矩是转动每一个柱壳所需的转矩之和，因此对于实心棒

$$\tau = 2\pi\mu \frac{\phi}{L} \int r^3 dr,$$

其中积分是从 $r=0$ 积至 $r=a$ 的， a 为该棒的半径。经过积分后，得

$$\tau = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \phi. \quad (38.25)$$

对于一根被扭转的棒，转矩正比于角度并且与其直径的四次幂都成正比——一根两倍那么粗的棒产生16倍那么大的扭转刚度。

在放下扭转这一课题之前，让我们把刚才所学到的东西应用到一个有趣的问题：即扭转波。如果你取一根长棒并突然扭转其一端，则一个扭转波将会沿该棒发展下去，如图38-10（a）所简略表示出来的那样。这比一个稳恒扭转更令人精神振奋——让我们看看是否能算出所发生的情况。

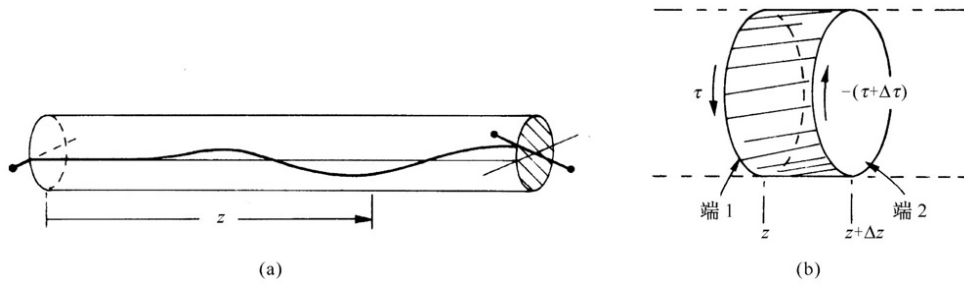


图38-10 (a) 在一根棒上行进的扭转波；(b) 棒的一个体积元 [\[1\]](#)

令 z 为沿棒从一端至某一点的距离。对于一个静扭转来说沿棒各处都有相同的转矩，并且正比于 ϕ/L ，即总扭转角除以总长度。对材料要紧的是局部扭转应变，你会知道它就是 $\partial \phi / \partial z$ ，当沿棒的扭转不均匀时，则应该用下式来代替式(38.25)：

$$\tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (38.26)$$

现在让我们来看看如放大图38-10 (b) 所示的、长度为 Δz 的体积元所发生的情况。设在一小段棒的端1处有转矩 $\tau(z)$ ，而在端2处有一不同的转矩 $\tau(z + \Delta z)$ ，如果 Δz 足够小，则可采用泰勒级数把它展开并写成

$$\tau(z + \Delta z) = \tau(z) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \Delta z. \quad (38.27)$$

作用于 z 与 $z + \Delta z$ 间那一小段棒上的净转矩显然等于 $\tau(z)$ 与 $\tau(z + \Delta z)$ 之差，即 $\Delta \tau = (\partial \tau / \partial z) \Delta z$ 。对式(38.26)取微分，得

$$\Delta \tau = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z. \quad (38.28)$$

这个净转矩的效果是对该小段棒提供一个角加速度。这小段棒的质量为

$$\Delta M = (\pi a^2 \Delta z) \rho ,$$

式中 ρ 为材料密度。我们曾经在第1卷第19章中算出一圆柱体的转动惯量为 $mr^2/2$ ，若把上述那小段材料的转动惯量叫作 ΔI ，则有

$$\Delta I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z. \quad (38.29)$$

牛顿定律讲：转矩等于转动惯量乘以角加速度，即

$$\Delta \tau = \Delta I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (38.30)$$

把每个公式集合起来，我们得

$$\mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (38.31)$$

你会认识到这是一个一维的波动方程。我们已求得扭转波将以下述速率沿棒传播下去：

$$C_{\text{剪切波}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (38.32)$$

棒越致密——对于相同的刚度来说——波行得越慢；而棒越坚硬，则波发展下去就越快。这速率与棒的直径无关。

扭转波是剪切波的一个特例。一般说来，剪切波是其中应变不会改变材料任何部分体积的那种波。在扭转波中，存在这种切应力的一个特殊分布——即分布于一个圆周上。但对于切应力的任一种安排，波将以相同速率——即由式（38.32）所给出的那一速率——传播。例如，地震学家发现了在地球内部传播的这种波。

在一固体材料内部，我们还可以有另一种弹性领域中的波。如果你推动某一件东西，就可以引起“纵”波——也称为“压缩”波，这有如空气或水中的声波——位移与波的传播沿同一方向（在一弹性体的表面上也还可以有其他类型的波——叫“瑞利波”或“乐甫波”。在其中应变既不是纯纵向的也不是纯横向的。我们目前没有时间研究它）。

正当我们论述波这个课题时，试问在像地球这样一块巨大的固体中纯压缩波的速度究竟如何？我们所以讲“巨大”，是因为在一粗而厚的物体中的声速与在一根（比如）细棒中的声速不同。所谓“粗厚”物体，是指其横向尺寸比声音的波长要大得多。于是，当我们推动该物体时，它就不能向旁伸展——只能在一维上受压缩。幸亏，我们已算出了一块受约束的弹性材料的特殊压缩情况，亦曾在第1卷第47章中算出过气体中声波的速率。按照同样的论证你可以知道，在固体中声音的速率等于 $\sqrt{Y'/\rho}$ ，其中 Y' 为受约束情况下的“纵向模量”——或压强除以长度的相对变化，这恰好就是我们曾在式（38.20）中得到的 F/A 对 $\Delta l/l$ 的比。因此，纵波的速率由下式给出：

$$C_{\text{纵波}}^2 = \frac{Y'}{\rho} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{Y}{\rho}. \quad (38.33)$$

只要 σ 在零与 $\frac{1}{2}$ 之间，则剪切模量 μ 就小于杨氏模量 Y ，而 Y' 比 Y 还要大，因而

$$\mu < Y < Y'.$$

这意味着纵波比剪切波传播得更快。一种用来量度物质弹性常数的最精密方法，就是测量该材料的密度和这两种波的速率。从这种数据我们就能得到 Y 和 σ 。顺便说说，通过对发自一次地震的那两种波到达时间差的测量，一位地震学家——甚至仅从一个站所收到的信号——就能够估计出振源的距离。

§38-4 弯曲的梁

现在要来考察另一个实际问题——棒或梁的弯曲。当我们弯曲一根具有任意截面的棒时，力会怎么样呢？虽然我们将算出的是设想的一根具有一圆截面的棒，但其答案将适用于任何的形状。然而，为了节省时间，我们将抄近路，因而即将得到的理论仅仅是近似的。我们的结果将只在弯曲的半径比梁的厚度大得多时才正确。

假定你抓住一根直棒的两端而把它弯成像图38-11那样的曲线，在该棒内部会发生什么情况呢？噢，如果它被弯曲了，则意味着在该曲线之内的材料受到压缩，而在曲线之外的材料受到拉伸。存在某一个近似与棒轴平行的面既不被拉长也不被缩短，这个面叫作中性面。你会预期，这个面靠近横截面的“中间”。可以证明（但我们将不在这里做出）：对于简单梁的微小弯曲，中性面会穿过横截面的“重心”。这只有对于“纯”弯曲——只要你不同时对梁拉伸或压缩——才正确。

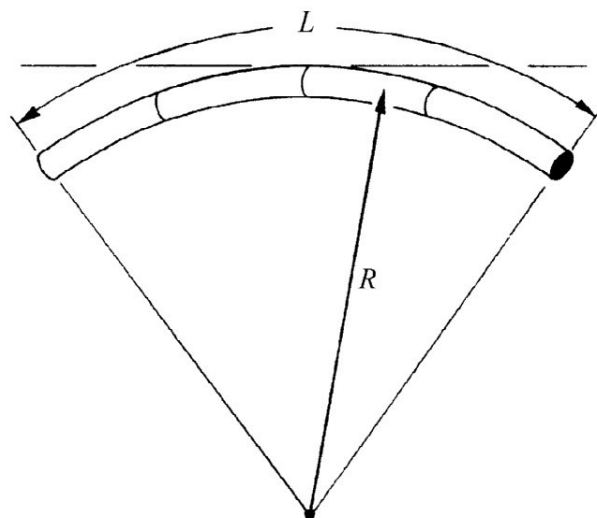


图38-11 一根弯曲的梁

这样，对于纯弯曲来说，梁的一块横向薄片就会如图38-12（a）所示的那样变形。在该中性面之下的材料具有与距这一中性面的距离成正比的压缩应变；而在其上的材料则被拉伸，其应变也正比于距这一中性面的距离。因此，纵向伸长 Δl 与高度 y 成正比，其比例常数恰好就是 l 除以该棒的曲率半径——参见图38-12：

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}.$$

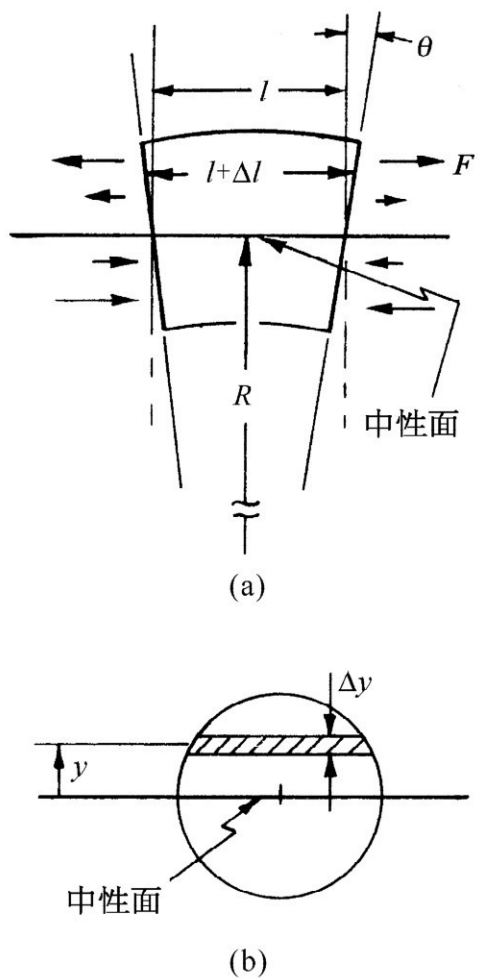


图 38-12 (a) 一根弯曲梁中的一小片段；(b) 梁的横截面

所以在 y 处的一条小带上单位面积的力——应力——也与距中性面的距离成正比：

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y \frac{y}{R}. \quad (38.34)$$

现在让我们来考察这一应变产生的力。作用于图38-12中那一小段上的各个力如图所示。如果设想任何横向截面，则作用于其上的力在中性面之上朝一个方向，而在中性面之下则朝另一个方向，它们成对地构成一个“弯曲转矩” $\mathfrak{M}$ ——这指的是绕该中性线的转矩。我们可

通过对图38-12中那样一小段的一个面上的力乘以距中性面的距离，然后进行积分，从而计算出总转矩：

$$\mathfrak{M} = \int_{\text{横截面}} y dF. \quad (38.35)$$

根据式（38.34）， $dF = (Yy/R) dA$ ，因而

$$\mathfrak{M} = \frac{Y}{R} \int y^2 dA.$$

$y^2 dA$ 的积分我们可称之为该几何截面绕穿过其“质心”的水平轴的“转动惯量”[\[2\]](#)，我们将把它叫作 I ：

$$\mathfrak{M} = \frac{YI}{R}, \quad (38.36)$$

$$I = \int y^2 dA. \quad (38.37)$$

于是，式（38.36）向我们提供了有关弯曲转矩 $\mathfrak{M}$ 与梁的曲率 $1/R$ 之间的关系。梁的“刚度”与 Y 和转动惯量 I 均成正比。换句话说，如果你要用比如说一定数量的铝来制造一根尽可能强硬的梁，那你就得把尽可能多的铝放在离中性面较远的地方，以便造成一个大的转动惯量。然而，不能把此推至极端，因为这么一来该件东西就将不会如我们所假定的那样弯曲——但却将弯折或曲折，因而又会变成较脆弱了。可是现在你已明白，为什么结构梁要造成工字形或H字形——如图38-13所示的那样。

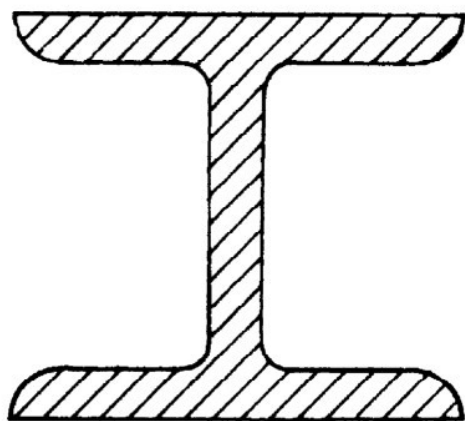


图 38-13 “工字” 梁

作为梁方程式 (38.36) 的一个应用例子，让我们算出有集中力 W 作用于其自由端的一根悬臂梁的偏离，如图 38-14 所示意的那样（所谓“悬臂”我们只是指梁被支持得使其一端的位置和斜率都保持固定——它被插入水泥墙内）。这根梁的形状将会怎么样呢？让我们把距固定端的距离为 x 处的偏离量叫作 z ，我们希望知道 $z(x)$ ，将只对小的偏离作出计算，也将假定与其截面比较起来梁是很长的。现在，正如你已从数学课中懂得，任一条曲线 $z(x)$ 的曲率 $1/R$ 由下式给出：

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z / dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}}, \quad (38.38)$$

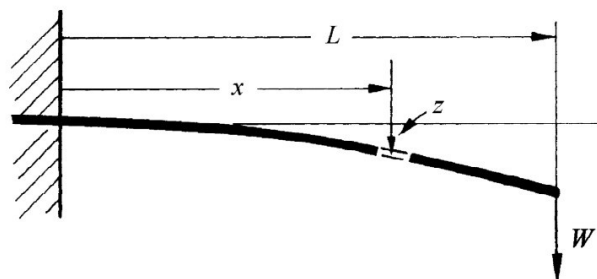


图 38-14 一端加有重量的一根悬臂梁

由于我们只对于小斜率感兴趣——这往往是工程结构中的情况——与1比较起来略去 $(dz/dx)^2$ ，从而取

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (38.39)$$

我们也需要知道弯曲转矩 $\mathfrak{M}$ ，它是 x 的函数，因为它等于绕任一个横截面的中性轴的转矩。让我们略去梁本身的重量而仅仅考虑在梁末端处向下的力 W （如果你愿意的话，可以把梁的重量也考虑进去）。于是在 x 处的弯曲转矩为

$$\mathfrak{M}(x) = W(L - x),$$

因为那是由重量 W 所施加的、围绕着 x 点的转矩——梁必须在 x 处加以支撑的转矩。我们就得到

$$W(L - x) = \frac{YI}{R} = YI \frac{d^2 z}{dx^2}$$

或

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{W}{YI}(L - x). \quad (38.40)$$

这是一个没有什么窍门的、可以积分的方程，结果得到

$$z = \frac{W}{YI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (38.41)$$

这里利用了 $x=0$ 处 $z(0)=0$ 及 dz/dx 也等于零的假定。那是由梁的形状决定的。末端的位移为

$$z(L) = \frac{W}{YI} \frac{L^3}{3}, \quad (38.42)$$

即一根梁末端的位移随长度的立方而增加。

上面在导出梁的近似理论时，我们曾经假定过梁的横截面在梁被弯曲时不会改变。当梁的厚度与曲率半径相比显得微小时，因横截面的改变非常小，所以我们的结果是好的。不过，一般说来，这一效应是不能忽略的，正如你能够通过把一块软橡皮擦弯曲在手指上而容易自行验证出来那样。如果原来的横截面是一个矩形，你将会发现，当它被弯曲时在其底部会凸起来（见图38-15）。此事之所以发生，是因为当我们推压其底部时，材料便向旁延伸——正如由泊松比所描述的那样。橡皮是容易弯曲或伸长的，但它有点像液体，即很难改变其体积——犹如你在弯曲那块橡皮擦时它所明白表现出来的那样。对于不可压缩的材料，泊松比应该恰好等于1/2——橡皮几乎就是这样。

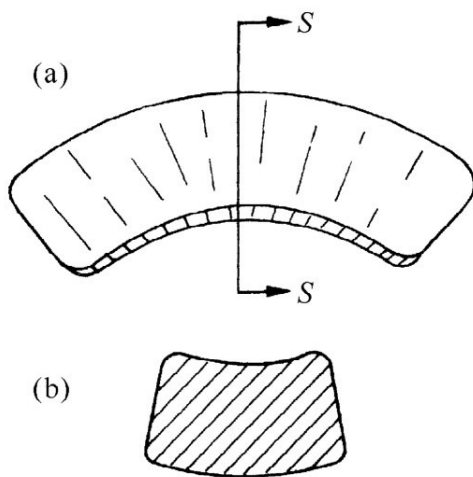


图38-15 (a) 一块被弯曲的橡皮擦；(b) 横截面

§38-5 弯折

现在要用我们关于梁的理论来理解有关梁或者柱和棒弯折的道理。考虑示意图38-16中所表示的情况，一根原来是直的棒，在其两端受一对反向力所推压而保持弯曲的形状。我们想要计算这根棒的形状以及作用于两端的力的大小。

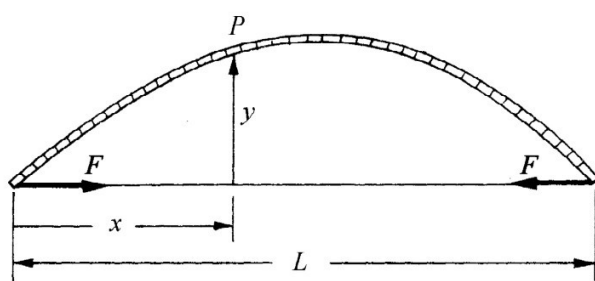


图 38-16 一根弯曲的梁

令棒与两端之间直线的偏离为 $y(x)$ ，其中 x 为距一端的距离。在图中 P 点的弯曲转矩 $\mathfrak{M}$ 等于力 F 乘以力臂，即垂直距离 y ，

$$\mathfrak{M}(x) = Fy. \quad (38.43)$$

利用关于梁的方程式 (38.36)，便有

$$\frac{YI}{R} = Fy. \quad (38.44)$$

对于小偏离来说，可以取 $1/R = -d^2 y / dx^2$ （负号来源于向下弯曲）。我们就得到

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{YI}y, \quad (38.45)$$

这是正弦波的微分方程。因而对于小的偏离，这样一根被弯曲的梁其曲线为正弦曲线。这正弦波的“波长” λ 为两端间距离 L 的两倍。若弯曲

程度很小，则这正好是棒未被弯曲时长度的两倍。因而该曲线为

$$y = K \sin \pi x / L .$$

对此式取二次微商，便得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\pi^2}{L^2} y .$$

将其同式（38.45）比较，可以看到力为

$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2} . \quad (38.46)$$

对于微小弯曲来说，力与弯曲位移 y 无关！

这样，在物理上就有下述情况，如果力小于式（38.46）所给出的 F ，则根本就没有什么弯曲。但如果稍微大于这个力，则材料将突然严重弯曲——这就是说，对于超过这一临界力 $\pi^2 YI/L^2$ （常称为“欧拉力”）的那些力，梁将“弯折”。如果一座建筑物的楼上的负载超过了支柱的欧拉力，则该建筑物将倒塌。另一个显示这种弯折力最重要的地方是在太空火箭上。一方面，火箭必须在发射台上能够支持它本身的重量并在加速期间能够经得起那些应力；另一方面，重要的是把结构的重量保持极小，以便使有效负载和燃料容量尽可能地大。

事实上，当力超过欧拉力时，梁未必就完全坍缩下来。当位移变大时，力会大于上面所求得的力，因为我们曾略去了式（38.38）有关 $1/R$ 中的一些项。为要求得梁严重弯曲时的力，就必须回到准确的方程式（38.44）上去，它是在我们采用有关 R 与 y 间的近似关系前就已

经得到的。式（38.44）具有一种相当简单的几何性质^[3]，要把它算出来稍微有点复杂，但却是相当重要的。不用 x 和 y 来描述该曲线，我们可以用两个新的变数： S ，即沿曲线的距离； θ ，即该曲线的切线的倾角。参阅图38-17。曲率就是该角随距离的变化率：

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}.$$

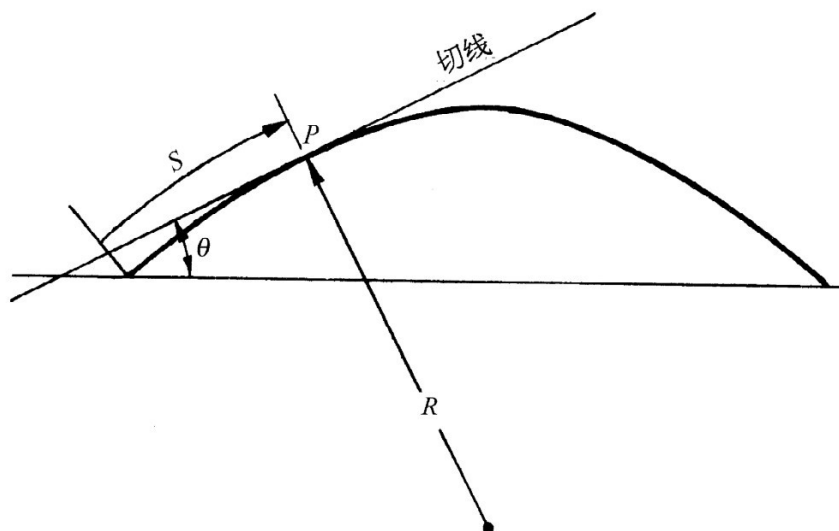


图38-17 关于一根弯曲梁的曲线坐标 S 和 θ

因此，我们能够将那个准确的方程（38.44）写成

$$\frac{d\theta}{dS} = -\frac{F}{YI}y.$$

如果取上式对于 S 的微商并用 $\sin\theta$ 代替 dy/dS ，则我们得

$$\frac{d^2 \theta}{dS^2} = -\frac{F}{YI} \sin \theta \quad (38.47)$$

[如果 θ 很小，便会回到式(38.45)。一切都行了]。

现在，当你知道式(38.47)刚好就是你所获得的关于摆作大幅度振动的方程式时——当然，其中 $F/(YI)$ 要用另一个常数来代替，你或许会感到喜悦或者不高兴。我们早就在第1卷第9章中学习过如何通过数值计算来求解这样的方程^[4]。你所得到的解答就是某些令人神往的曲线——称为“弹性”曲线。图38-18显示对于不同 $F/(YI)$ 值的三条曲线。

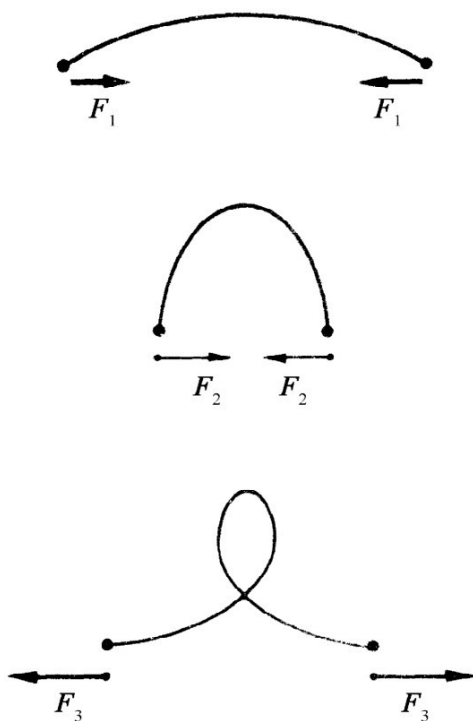


图38-18 一根弯曲棒的曲线

[1] 原图中箭头方向有误，已改正。

[2] 当然，那实际上就是单位面积具有单位质量的一个薄片的转动惯量。

[3] 偶尔，同一个方程也出现在其他的物理情况中——例如，在两块平行平面之间所包含液体的弯月面——而同样的几何解答可以通用。

[4] 这些解也可用称为“雅可比椭圆函数”的一些函数来表示，这些也已被某些人算出来了。

第39章 弹性材料

§39-1 应变张量

上一章我们曾谈到一些特殊弹性体的形变，本章我们将要考察弹性材料内部通常可能发生的情况。我们希望当用某种复杂方式把一大团果子冻扭转和压缩时，有可能描述其内部的应力和应变的情况。要完成此事，就需要能描写弹性体中每一点上的局域应变。对此，我们可以通过对每一点给出一组六个数——一个对称张量的分量——来做到。以前我们就曾谈及应力张量（第31章），现在却需要应变张量。

考虑从一块起初未发生任何应变的材料出发，并注意当其发生应变时埋在材料里的一个小“灰尘”斑点的运动。原来被放在 P 点、即 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处的斑点，移到如图39-1所示的 P' 点、即 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ 处。我们把从 P 至 P' 的矢量位移记作 $\mathbf{u}$ 。于是

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}. \quad (39.1)$$

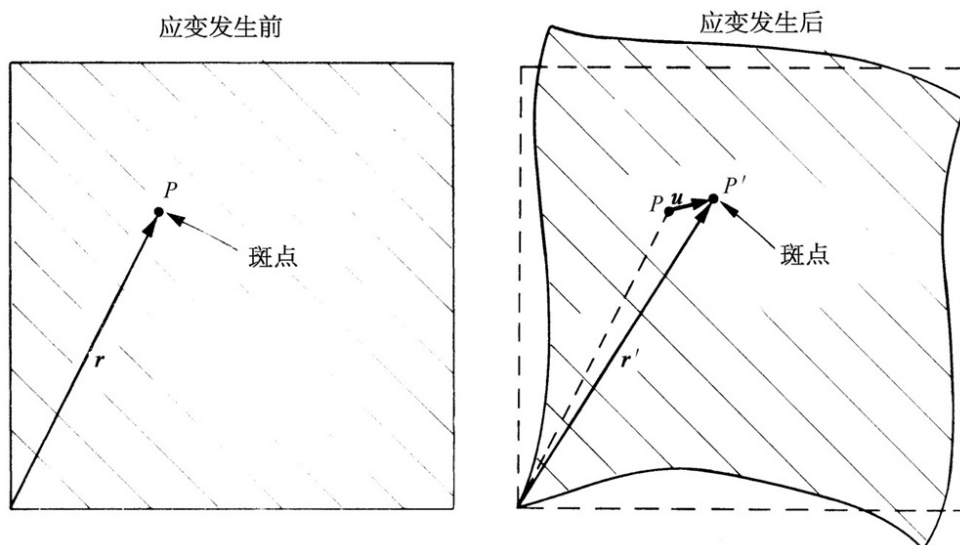


图39-1 在未发生应变的一块材料中位于 P 点处的斑点，当材料发生应变后移到 P' 点处

当然，这位移 $\mathbf{u}$ 依赖于我们出发的一点 P ，因而 $\mathbf{u}$ 就是 $\mathbf{r}$ 的一个矢量函数——或者，如果你喜欢的话，也即是 (x, y, z) 的函数。

让我们首先来考察应变在整块材料中是常数的那种简单情况——因而我们就有所谓均匀应变。例如，假设有一块材料，将其均匀拉伸，仅仅在一个方向——比如在 x 方向——上均匀地改变它的长度，如图39-2所示。位于 x 处斑点的位移 u_x 与 x 成正比。实际上，

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta l}{l}.$$

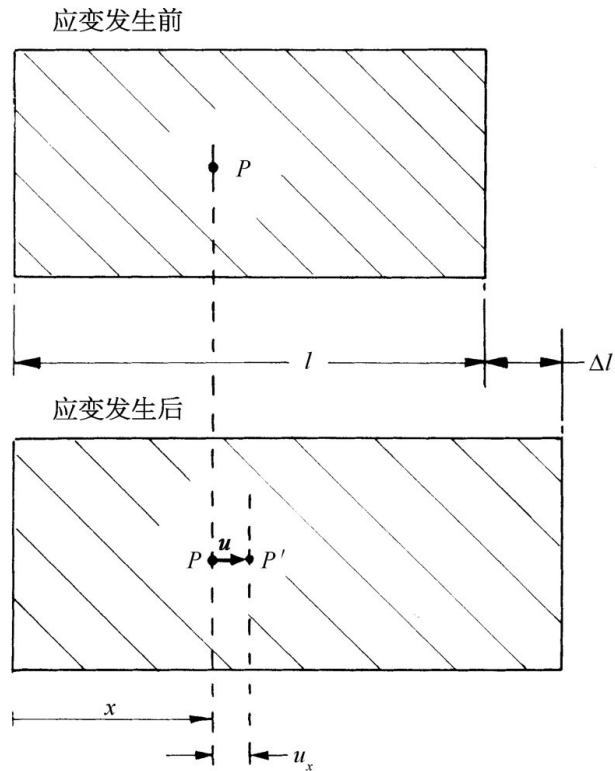


图 39-2 均匀拉伸型应变

我们将 u_x 写成这样：

$$u_x = e_{xx} x .$$

当然，比例常数 e_{xx} 与 $\Delta l / l$ 是同一件事（你不久就会看到为什么我们要用一个双重脚标）。

如果应变不均匀，则 u_x 与 x 的关系将在材料里逐点改变。对于一般的情况来说，就要用一种局域的 $\Delta l / l$ ，即用下式来定义 e_{xx} ：

$$e_{xx} = \partial u_x / \partial x . \quad (39.2)$$

这个数——它现在是 x ， y 和 z 的函数——描述整块果子冻中 x 方向的伸长量。当然，此外还可以有沿 y 向和 z 向的伸长，我们用下列两个数值来描述：

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (39.3)$$

我们也需要能描述剪切型的应变。假设我们想象在起初未发生形变的果子冻中标示出一个小立方体。当这团果子冻被推压而变形时，立方体的一个面可能变成一个平行四边形，如图39-3所示意的那样^[1]。在这种应变中，每个质点在 x 方向的移动与 y 坐标成正比，

$$u_x = \frac{\theta}{2} y, \quad (39.4)$$

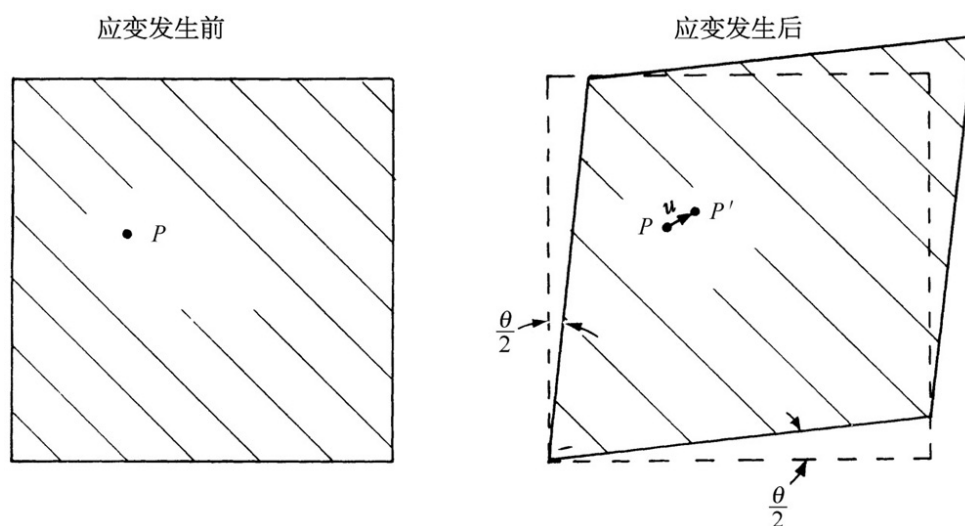


图 39-3 均匀剪切应变

还有一个正比于 x 的 y 方向的位移，

$$u_y = \frac{\theta}{2}x. \quad (39.5)$$

因此，我们就能够通过写出

$$u_x = e_{xy}y, \quad u_y = e_{yx}x,$$

其中

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\theta}{2}$$

来描述这种剪切型应变。

现在你也许会想到，当应变不均匀时，我们可以用下面对 e_{xy} 和 e_{yx} 这两个量所下的定义来描述普遍的剪切应变：

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (39.6)$$

不过这里有一点困难。假定位移 u_x 和 u_y 分别由下式给出：

$$u_x = \frac{\theta}{2}y, \quad u_y = -\frac{\theta}{2}x.$$

除了 u_y 的符号相反之外它们就很像式（39.4）和（39.5）。对于这些位移来说，果子冻中一个小立方体将仅仅转过一个角度 $\theta/2$ ，如图39-4所示。完全没有什么应变——只不过在空间中的转动，材料没有变形，所有原子的相对位置都根本没有改变。所以应当想办法使纯转动

不包括在我们对剪切应变的定义之中。关键点在于：若 $\partial u_y / \partial x$ 和 $\partial u_x / \partial y$ 相等而相反，则没有应变，因此，我们可用下列定义解决问题：

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}(\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y).$$

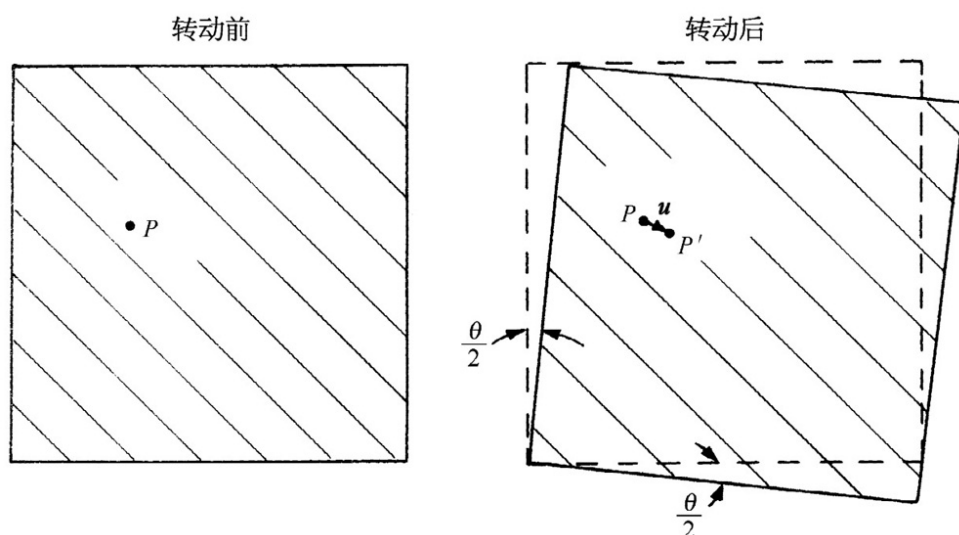


图 39-4 均匀转动——没有应变

对于纯转动来说，两者均等于零，但对于纯剪切则会得到 e_{xy} 等于 e_{yx} ，这正是我们想要的那种关系。

在最普遍的形变中——可以包括伸长或收缩以及切变在内——我们可通过给出九个数值来定义应变态：

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
&\vdots \\
e_{xy} &= \frac{1}{2}(\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{39.7}$$

这些就是应变张量的各项。由于它是一个对称张量——我们的定义总是使得 $e_{xy}=e_{yx}$ ——实际上，它只有六个不同的数。你会记得（见第31章），张量的普遍特征是：那些项都会像两个矢量的分量之积那样变换（若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是矢量，则 $C_{ij}=A_i B_j$ 便是一个张量）。 e_{ij} 的每一项都是矢量 $\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)$ 和算符 $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 的各分量之积（或这种积之和），我们知道后者如同一个矢量那样变换。让我们令 x_1, x_2, x_3 各代表 x, y, z ，而 u_1, u_2, u_3 各代表 u_x, u_y, u_z ，则可以将这个应变张量的普遍项 e_{ij} 写成

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j), \tag{39.8}$$

式中， i 和 j 各可以是1, 2或3。

当有一均匀应变——可以包括拉伸和剪切——时，则所有的 e_{ij} 都是常数，因而可以写出

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z \tag{39.9}$$

（我们选取 $\mathbf{u}$ 为零的那一点作为 x, y, z 坐标系的原点）。在这种情况下，应变张量 e_{ij} 会给出坐标矢量 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ 和位移矢量 $\mathbf{u}$

$= (u_x, u_y, u_z)$ 之间的关系。

当应变不均匀时，果子冻的任一部分也可能受到一些扭转——会存在局域转动。若形变都很小，则应该有

$$\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} - \omega_{ij}) \Delta x_j, \quad (39.10)$$

式中 ω_{ij} 是一个反对称 张量，

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_j / \partial x_i - \partial u_i / \partial x_j), \quad (39.11)$$

上式能够描述转动。可是，我们将不再为转动操心，而仅关心由对称张量 e_{ij} 描述的应变。

§39-2 弹性张量

我们已描述了应变，现在要把这些应变与内力——材料中的应力——联系起来。对于材料中每一小部分，假定胡克定律都成立，因而将应力写成正比于应变。在第31章中，我们曾把应力张量 S_{ij} 定义为在整个垂直于 j 轴的单位面积上的力的第 i 个分量。胡克定律讲， S_{ij} 的每一分量与每一个 应变分量都为线性关系。由于 S 或 e 每个有9个分量，因此会有 $9 \times 9 = 81$ 个可能的系数被用来描述材料的弹性。如果材料本身是均匀的，则它们都是常数。现在把这些系数写成 C_{ijkl} ，并由下式定义：

$$S_{ij} = \sum_{k, l} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (39.12)$$

其中 i, j, k, l 都可取1, 2或3的值。既然这些系数 C_{ijkl} 把一个张量与另一个张量联系起来, 所以它们本身也就形成一个张量——一个四阶张量, 可以称它为弹性张量。

假定所有的 C 均为已知, 而你将一个复杂的力作用于某一特殊形状的物体之上。将会有各式各样的形变, 而该物体就将形成某种被扭转过的形状。位移将会怎样呢? 你可以看出那是一个复杂的问题。假如你知道了应变, 你便能够由式(39.12)求出应力——或者相反。但在任一点上, 你所获得的应力和应变都将取决于材料的所有其余部分发生的情况。

解决这一问题的最易途径就是考虑能量。当有力 F 正比于位移 x 时, 比如说 $F=kx$, 则对于任意位移 x 所需之功为 $kx^2/2$ 。同理, 可以证明进入单位体积形变材料内的功 w 为

$$w = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (39.13)$$

在使物体形变过程中所作的总功 W 为 w 对整个体积的积分:

$$W = \int \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV. \quad (39.14)$$

于是, 这就是储藏于材料内应力中的势能。现在当物体处于平衡态时, 其内能必然处在极小。因此, 求物体中应变的问题, 就可以通过求出整个物体的一组位移 u ——将使得 W 为极小——而得到解决。我们曾在第19章中提供过处理像这一类极小值问题时使用到的变分法的某些普遍概念。这里不能对这一问题进行更详尽的深入讨论。

现在我们主要感兴趣的是，关于弹性张量的一般性质我们能够说些什么。首先，很明显，实际上在 C_{ijkl} 中并没有81个不同项。由于 S_{ij} 和 e_{ij} 两者都是对称张量，所以每个张量就只有六个不同项，因而在 C_{ijkl} 中至多也只能有36个不同项。然而，存在的项往往比这还少得多。

让我们考察立方晶体的特殊情况。在其中，能量密度 w 像下式这样开始写起：

$$w = \frac{1}{2} \{ C_{xxxx} e_{xx}^2 + C_{xxxy} e_{xx} e_{xy} + C_{xxxz} e_{xx} e_{xz} + C_{xxyx} e_{xx} e_{xy} + C_{xxyy} e_{xx} e_{yy} + \cdots + C_{yyyy} e_{yy}^2 + \cdots \}, \quad (39.15)$$

共有81项！但是立方晶体具有某些对称性。特别是，如果晶体被转过 90° ，则它具有相同的物理性质。对于在 y 方向的拉伸与对于在 x 方向的拉伸来说具有相同的刚度。因此，如果我们改变式(39.15)中关于 x 和 y 两坐标方向的定义，则能量就不会改变。对于立方晶体来说，必然有

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz}. \quad (39.16)$$

其次，我们还能够证明，像 C_{xxxy} 那些项一定会等于零。立方晶体具有这么一种性质，即在与轴正交的任何平面的反射之下它是对称的。若我们用 $-y$ 代替 y ，不会有什么差别。但当由 y 变至 $-y$ 时 e_{xy} 会变成 $-e_{xy}$ ——以前朝向 $+y$ 的位移现在朝向 $-y$ 了。如果能量不会改变，则当我们做反射时， C_{xxxy} 就必然变成 $-C_{xxxy}$ 。但反射后的晶体与以前的

相同，因此 C_{xxxy} 就必须与 $-C_{xxxy}$ 相等。这只有当两者均等于零时才能实现。

你会说：“但同样的论证也将使 $C_{yyyy}=0$ 啊！”不对，因为这里共有四个 y 。对于每个 y ，符号都要改变一次，而四个负号就会造成一个正号。因此，若有两个或四个 y ，则该项的确不必为零。只有当出现二或三个 y 时，它才是零。所以，对于立方晶体来说， C 的任何不等于零的项将只有偶数个相同的脚标（上面我们对于 y 所做的论证，显然对于 x 和 z 也都有效）。于是，也许会有像 C_{xxyy} ， C_{xyxy} ， C_{xyyx} ，等等的项。然而已经证明，若把所有的 x 都改成 y ，以及相反（或把所有的 z 和所有的 x 对换，等等），则我们必定获得——对于立方晶体来说——相同的数值。这意味着只有三种不同的非零可能性：

$$\begin{aligned} C_{xxxx} & (=C_{yyyy}=C_{zzzz}) , \\ C_{xxyy} & (=C_{yyxx}=C_{xxzz} , \text{ 等等}) , \\ C_{xyxy} & (=C_{yxyx}=C_{xzxz} , \text{ 等等}) . \end{aligned} \quad (39.17)$$

于是，就立方晶体来说，能量密度看来会像这样：

$$w = \frac{1}{2} \{ C_{xxxx} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2C_{xxyy} (e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) + 4C_{xyxy} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) \} . \quad (39.18)$$

就各向同性——也就是非晶的——材料而言，对称性还会更高。那些 C 项应该对于坐标系的任何选取都相同。于是结果是，在那些 C 项中还存在另一个关系式，即

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + 2C_{xyxy} . \quad (39.19)$$

通过下面的一般论证可以看出的确是这样。应力张量 S_{ij} 与 e_{ij} 必须与坐标方向完全无关的方式相联系，即必须只由标量来联系。你会说：“那很容易。”“从 e_{ij} 得到 S_{ij} 的唯一途径，就是由一个标量常数相乘，它正好就是胡克定律，所以它必定是 $S_{ij} = (\text{常数}) e_{ij}$ ”，但这并不完全对，因为也可能存在由单位张量 δ_{ij} 乘上与 e_{ij} 成线性关系的某个标量。你能够用 e 线性地构成的唯一不变量是 $\sum e_{ii}$ （它如同标量 $x^2 + y^2 + z^2$ 那样变换）。因此，把 S_{ij} 与 e_{ij} 联系起来的方程的最普遍形式——对于各向同性材料来说——为

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \left(\sum_k e_{kk} \right) \delta_{ij} \quad (39.20)$$

（第一个常数往往被写成2乘以 μ ，这样该系数 μ 才会等于我们在上一章中曾定义过的剪切模量）。 μ 和 λ 这两常数称为拉梅弹性常数。将式（39.20）和（39.12）两相比较，你就会看出

$$\begin{aligned} C_{xxyy} &= \lambda , \\ C_{xyxy} &= \mu , \end{aligned} \quad (39.21)$$

$$C_{xxxx} = 2\mu + \lambda .$$

因此，我们已经证明了式（39.19）的确是正确的。你也会看到，各向同性材料的弹性可由两个常数完全给出，正如我们曾在上一章中说过的的那样。

这些 C 项可用以前曾经用过的任意两个弹性常数——例如杨氏模量 Y 和泊松比 σ ——来表示。我们愿意把下列各式留给你们去证明：

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \frac{Y}{1+\sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \right), \\ C_{xxyy} &= \frac{Y}{1+\sigma} \left(\frac{\sigma}{1-2\sigma} \right), \\ C_{xyxy} &= \frac{Y}{2(1+\sigma)}. \end{aligned} \tag{39.22}$$

§39-3 在弹性体中的运动

我们已经指出，处于平衡中的弹性体其内应力自身会做调整，以使其能量极小。现在来做一番考察，当内力不平衡时会发生什么情况。让我们假设，在某个表面 A 内有一小块材料，参见图39-5。如果这一块处于平衡之中，则作用于其上的总力 $\mathbf{F}$ 就必然为零。可以设想，这一个力是由两部分组成的。一部分可能是由像重力那样的“外”力引起的，它是从远处作用于该块材料而产生的单位体积的力 $\mathbf{f}_{\text{外}}$ 。而总外力 $\mathbf{F}_{\text{外}}$ 就是这 $\mathbf{f}_{\text{外}}$ 对整块材料体积的积分：

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = \int \mathbf{f}_{\text{外}} dV. \tag{39.23}$$

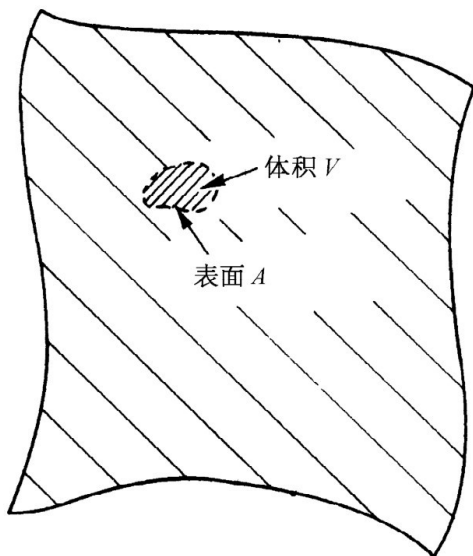


图39-5 由表面 A 所包围的一个小体积元 V

平衡时，这个力会被来自附近材料对整个表面 A 作用的总力 $\mathbf{F}_{\text{内}}$ 所抵消。当这块材料不是处于平衡中时——如果它在运动——则这个内力与外力之和就应等于质量乘以加速度。我们应有

$$\mathbf{F}_{\text{外}} + \mathbf{F}_{\text{内}} = \int \rho \ddot{\mathbf{r}} dV, \quad (39.24)$$

其中 ρ 为材料密度，而 $\ddot{\mathbf{r}}$ 为其加速度。现在我们可以把式(39.23)和(39.24)两者结合起来，从而写成

$$\mathbf{F}_{\text{内}} = \int_V (-f_{\text{外}} + \rho \ddot{\mathbf{r}}) dV. \quad (39.25)$$

将通过

$$\mathbf{f} = -f_{\text{外}} + \rho \ddot{\mathbf{r}} \quad (39.26)$$

这一定义来简化我们的写法。于是，式(39.25)可以写成

$$\mathbf{F}_{\text{内}} = \int_V \mathbf{f} dV. \quad (39.27)$$

被称为 $\mathbf{F}_{\text{内}}$ 的这个积分与材料内的应力有关。该应力张量 S_{ij} 曾（在第31章中）被这样定义，使得跨越单位法线为 $\mathbf{n}$ 的一个表面元 da 的力 $d\mathbf{F}$ 的 x 分量由下式给出：

$$dF_x = (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) da. \quad (39.28)$$

于是作用于那一小块材料上的 $\mathbf{F}_{\text{内}}$ 的 x 分量，就是 dF_x 对整个表面的积分。将此式代入式（39.27）中的 x 分量中，得

$$\int (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) da = \int_V f_x dV. \quad (39.29)$$

我们已有面积分与体积分的关系——而这就使我们想起曾在电学中学过的某种东西。注意，如果忽略式（39.29）左边每个 S 的第一个下脚标 x ，那么它看来就恰好像量“ $\mathbf{S}$ ”· $\mathbf{n}$ ——即一个矢量的法向分量——对整个表面的积分。它应该是从该体积流出去的“ $\mathbf{S}$ ”的通量。而倘若利用高斯定律，则可以写成“ $\mathbf{S}$ ”的散度的体积分。事实上，无论该 x 脚标存在与否，它总是正确的——它仅是你可以通过分部积分而得到的一个数学定理。换句话说，我们可将式（39.29）改写成

$$\int_V \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int_V f_x dV. \quad (39.30)$$

现在就可以去掉那些体积分，而把 $\mathbf{f}$ 一般分量的微分方程写成：

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (39.31)$$

上式告诉我们单位体积的力如何同应力张量 S_{ij} 联系起来。

关于固体内部运动的理论就是这样做出来的。如果从认识初位移——比如说，由 $\mathbf{u}$ 所给出——着手，则可以算出 e_{ij} 。从这些应变又可以根据式(39.12)而得到应力。从这些应力可以得到式(39.31)中的力密度 $\mathbf{f}$ 。一旦知道了 $\mathbf{f}$ ，就可以根据式(39.26)获得材料的加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ ，这会告诉我们位移将如何变化。把所有结果都聚集在一起，便会得到关于弹性固体的可怕的运动方程。我们只写出对各向同性材料所得到的结果。如果你用式(39.20)表示 S_{ij} ，并将 e_{ij} 写成 $\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ ，则你最后会得到这样一个矢量方程：

$$\mathbf{f} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.32)$$

事实上，你能够看出 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{u}$ 相联系的方程必然会具有这种形式。力必然取决于位移 $\mathbf{u}$ 的二次微商。由 $\mathbf{u}$ 的二次微商构成矢量的到底有哪些呢？其一是 $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$ ，那是一个真正的矢量，仅有的另一个矢量是 $\nabla^2 \mathbf{u}$ ，因此最普遍的形式为

$$\mathbf{f} = a \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + b \nabla^2 \mathbf{u},$$

它就是式(39.32)，只是常数的定义不同而已。你可能会觉得奇怪，为什么我们没有用到 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ 作为第三项，因为它也是一个矢量。但要记住， $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ 同 $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ 是同一件事，因而它就是我們所有的两项的一个线性组合。把它加进去不会增加任何新东西。我们再一次证明了各向同性材料只会有两个弹性常数。

对于这种材料的运动方程，可以令式（39.32）等于 $\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ ——目前略去任何像重力那样的彻体力——并得到

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.33)$$

它看来有点像我们以前在电磁学中曾有过的波动方程式，只不过有一个附加的复杂项。对于弹性处处相同的材料，按下述办法可以弄清楚其一般解的表现形式。你会记得，任何矢量场都可以写成两矢量之和：一个矢量的散度为零；另一个矢量的旋度为零。换句话说，我们可令

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (39.34)$$

其中

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0. \quad (39.35)$$

用 $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ 代替式（39.33）中的 $\mathbf{u}$ ，我们得

$$\rho \partial^2 / \partial t^2 [\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2] = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \mu \nabla^2 (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2). \quad (39.36)$$

可以通过取这一方程的散度而消去 $\mathbf{u}_1$ ，

$$\rho \partial^2 / \partial t^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) = (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \mu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_2.$$

由于算符 (∇^2) 和 $(\nabla \cdot)$ 可以相互交换，所以我们将散度作为一个公因子提取出来，从而得

$$\nabla \cdot \{\rho \partial^2 \mathbf{u}_2 / \partial t^2 - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_2\} = 0. \quad (39.37)$$

由于根据定义 $\nabla \times \mathbf{u}_2 = 0$ ，所以整个括号 $\{\}$ 的旋度也等于零，因而该括号本身就恒等于零，即

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_2 / \partial t^2 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_2. \quad (39.38)$$

这是以速率 $c_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 运动的波满足的矢量波动方程。由于 $\mathbf{u}_2$ 的旋度为零，所以就没有任何剪切与这种波有联系。这种波正好是上一章中曾经讨论过的那种压缩——声音型的——波，而其速度就恰恰是我们曾求得的 $c_{\text{纵波}}$ 。

同样地——通过取式 (39.36) 的旋度——我们能够证明 $\mathbf{u}_1$ 会满足方程

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_1 / \partial t^2 = \mu \nabla^2 \mathbf{u}_1. \quad (39.39)$$

这又是具有速率 $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ 的波之矢量波动方程。由于 $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$ 为零，所以 $\mathbf{u}_1$ 不会产生密度变化，这个矢量 $\mathbf{u}_1$ 相当于上一章中我们曾见过的那种横波或剪切型波，而 $c_2 = c_{\text{切变波}}$ 。

要是我们希望知道各向同性材料中的静应力，原则上可以通过令 $\mathbf{f}$ 等于零——或等于像来自重力 $\rho \mathbf{g}$ 的那种静彻体力——在与施于该大块材料的表面上的力有关的一些条件下，求解方程式 (39.32) 而找到。这比电磁学中的相应问题更困难一些。之所以较难，首先由于方程的处理稍微困难；而其次，则由于我们很可能感兴趣的弹性体的形

状通常更加复杂。在电磁学中，我们所感兴趣的常常是环绕像柱体、球体等相对简单的几何形状来求解麦克斯韦方程组，因为这些都是电学设备的合适形状。在弹性学中，我们希望分析的东西却可能具有十分复杂的形状——像曲柄钩、汽车里的曲轴或汽轮机的转子。应用我们以前曾提及的最小能量原理，这样的问题有时可以通过数值计算法近似地算出。另一种办法是采用物体模型，利用偏振光在实验上测量内部的应变。

工作是这样进行的：当一种透明的各向同性材料——例如，一种像留西特那样的透明塑料——被置于应力之下时，它就变成双折射。如果你使偏振光穿过它，则偏振面会被旋转一个与应力有关的角度。通过测量这个旋转角度，你就能测出该应力了。这样的装置看起来会如图39-6所示的样子。图39-7则是处于受力状态下的复杂形状的光弹模型的照片。

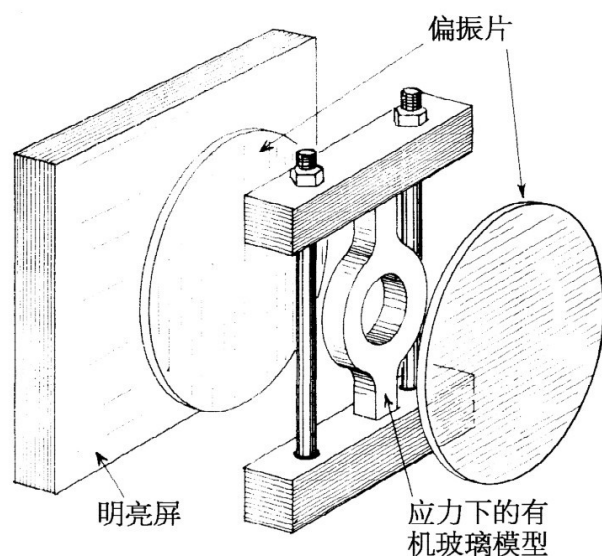


图39-6 用偏振光测量内应力

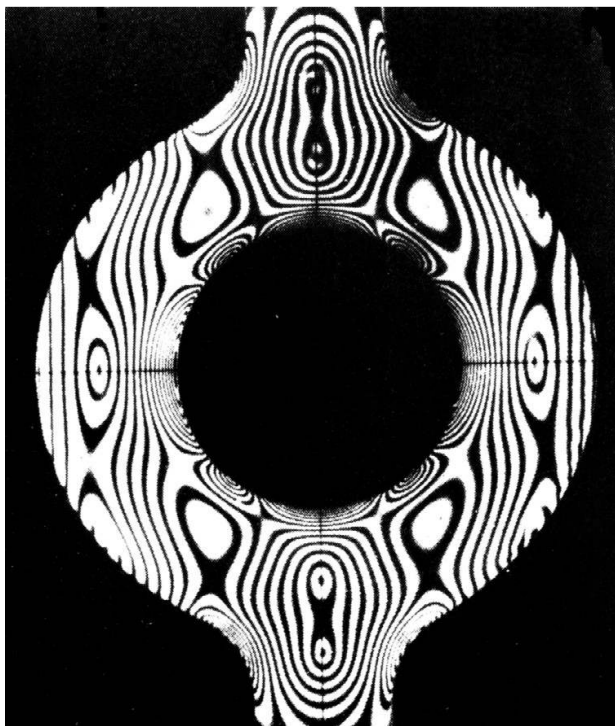


图39-7 从两块互相交叉的偏振片间所看到的处在受力状态的一件塑料模型 [转载自 Sears FW . *Optics* , 1949]

§39-4 非弹性行为

迄今在我们所谈及的一切情况中都曾假定应力正比于应变；一般说来，这是不正确的。图39-8显示一种可延性材料的典型应力-应变曲线。对于小应变来说，应力与应变的确成正比。可是，最后当越过了某一点之后，应力与应变的关系就开始与直线有所偏离了。就许多种——我们总称之为“脆性”的——材料来说，只要应变稍微超过该曲线开始弯下去的一点，物体就会破裂。一般说来，在该应力应变关系中还有其他复杂性。例如，若你使一物体变形，则应力最初可能会很高，但随着时间推移应力会慢慢降低。而且，如果已达到了高的应力，但还未达到“破裂”点，则当你减少应变时，应力将会沿另一条曲

线返回。即有一个小小的滞后效应（类似我们在磁性材料中见到的 B 和 H 间的关系曲线）。

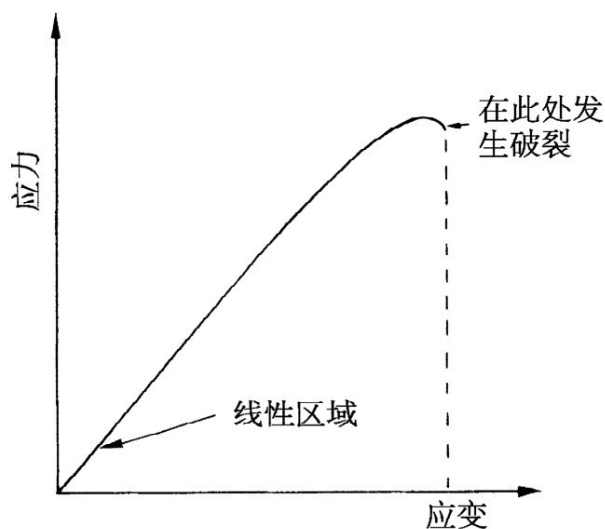


图 39-8 大应变的一个典型应力-应变关系

材料将会断裂的那个应力，一种材料与另一种材料的差异很大。有些材料在最大拉伸 应力达到某一定值时发生断裂，另一些材料则会在最大剪切 应力达到某一个值时断裂。粉笔是一种张力比剪切力弱得多的材料的例子。如果你拉一支粉笔的两端，粉笔将在垂直于所加应力的方向上断裂，如图39-9（a）所示。之所以在垂直于外加力的方向上断裂，是由于粉笔不过是一群易于拉开的粒子被紧压在一起而已。然而，这一材料却难于发生切变，因为其中粒子会彼此互相妨碍。现在你会记起，当有一根棒处于扭转中时，则环绕着它各点都存在剪切力。并且，也曾经证明过，剪切应力等效于拉伸应力与压力在 45° 角上的组合。由于这些原因，如果你扭转 一支黑板上用的粉笔，它将沿着与轴成 45° 角开始的一个复杂的面断裂。一支这样破裂了的粉笔的照片如图39-9（b）所示，粉笔是在拉伸应力最大的地方破裂的。

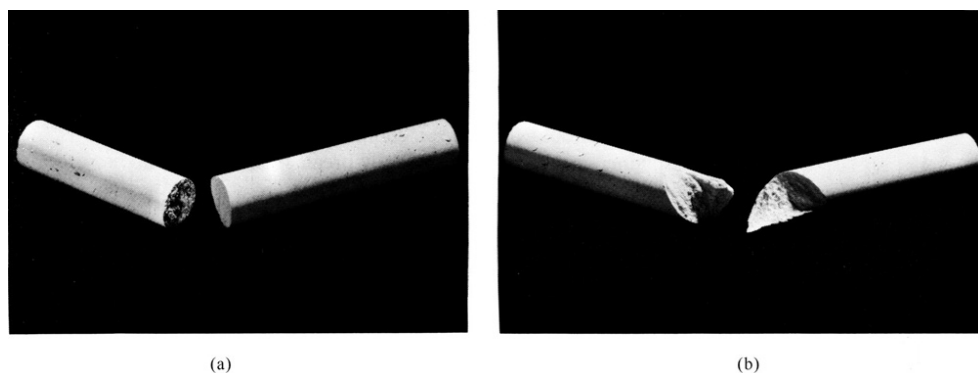


图39-9 (a) 两端受拉力而断裂的一支粉笔；(b) 因扭转而断裂的粉笔

别的材料表现出奇特而复杂的行为。材料越复杂，其行为就越发有趣。如果取一条莎纶头巾，把它揉皱成一团，并将其投掷到桌面上，则它将会缓慢地自己舒展开来从而恢复它原来的平坦形式。乍看起来，我们也许总会以为是惯性在阻碍着它回复原来的形状。然而，简单的计算表明，惯性对于解释该效应小了好几个数量级。似乎存在两种重要的互相对抗的效应：材料内部“某种东西”会“记得”它原先有过的形状，并“力图”恢复原样；但另外某种东西“更喜欢”新的形状，而“阻止”回到原先的形状上去。

我们将不尝试去描写莎纶塑料中起作用的那种机制，但你可从下述模型中获得关于这种效应怎么可能发生的一些概念。假设你想象一种材料，它由长而柔顺但却坚韧的纤维与充满着黏滞性液体的某些小孔互相混合在一起而构成。也想象从一个孔到邻近的孔存在一些狭窄的通道使得液体能够从一个孔缓慢地渗入邻近的孔。当我们揉皱一片这样的材料时，使那些长纤维变了形，把在一处小孔里的液体挤压出来而逼进到那些正被拉伸着的其他小孔中去，在我们把那片材料释放后，长纤维会试图恢复它们原来的形状。但这样做时，必须迫使液体回到原先的位置上去——由于黏滞性的缘故这将进行得相当慢。在我们将该片东西揉皱时所加之力，比起由那些纤维所施之力要大得多。

我们能够迅速地将其揉皱，但恢复的过程就较为缓慢了。这无疑是那些大而强硬的分子与一些较小而易移动的分子在莎纶头巾中的组合是造成它行为的主要原因。这一概念也符合下列事实：材料在温暖时会比寒冷时更迅速地恢复到它原来的形状——热量增加了较小分子的可动性（降低了黏滞性）。

虽然我们刚才正在讨论胡克定律为何会失灵，但引人注目之处或许不是胡克定律对于大的应变会发生失灵，而是它总是很普遍地成立。我们通过考察材料中的应变能量可以获得这事情为什么会这样的某些概念。提出应力正比于应变，同提出应变能量随应变的平方而变化，是同一回事。假设把一根棒扭转了小角度 θ ，如果胡克定律正确，则应变能量应当与 θ 的平方成正比。如果我们假定这个能量为旋转角度的任意函数，那就可以把它写成关于零角度的泰勒展开式：

$$U(\theta) = U(0) + U'(0)\theta + \frac{1}{2}U''(0)\theta^2 + \frac{1}{6}U'''(0)\theta^3 + \dots \quad (39.40)$$

转矩 τ 等于 U 对角度的微商，我们应有

$$\tau(\theta) = U'(0) + U''(0)\theta + \frac{1}{2}U'''(0)\theta^2 + \dots \quad (39.41)$$

现在，若从那平衡位置度量我们的角度，则第一项为零，因而第一个留下的项是与 θ 成正比的。而对于足够小的角度，它将比含 θ^2 的项占有明显优势〔事实上，材料内部是足够对称的，以致 $\tau(\theta) = -\tau(-\theta)$ 〕，于是这个含 θ^2 的项便将为零，因而与线性的偏离就只会来自那 θ^3 的项了。然而，为什么这对于压缩和伸张都应该正确，就找不出理由来了〕。我们还未加以解释的事情在于，为什么材料往往会在那些高阶项变得重要之后就立即断裂。

§39-5 计算弹性常量

作为有关弹性学的最后一个论题，我们想要指明，从构成材料原子的性质的某些知识着手，人们如何才能试图算出材料的弹性常量来。我们将仅仅考虑像氯化钠那样的离子立方晶体的简单情况。当一晶体被变形时，它的体积和形状都会发生变化。这种变化导致晶体中势能的增加。要算出这应变能量的变化，得先弄清楚每个原子的去处。在一些复杂晶体中，原子将按十分复杂的方式把它们自己安排在晶格中，以便使其总能量尽可能地小，这使得对应变能量的计算相当困难。然而，在简立方晶体的情况下，不难看到将会发生的情况。晶体内部的形变在几何上将与晶体外部边界的形变相似。

我们能够用下述方法算出立方晶体的弹性常量。首先，我们设想在晶体中每一对原子之间的某个力学定律。然后，计算出当晶体离开其平衡状态而发生形变时其中内能的变化。这向我们提供了一个能量与包含所有应变的平方之间的关系。将用这种方法得到的能量与式(39.13)相比较，就能够把每一项的系数看作是弹性常量 C_{ijkl} 。

在我们的例子中，将设想一个简单的力的定律：两相邻原子之间的力是中心力，意指力的作用沿着两原子间的连线。应该预期，离子晶体中的力与此相类似，因为它们基本上都只是库仑力（共价键力往往较为复杂，因为它们能够对相邻原子作用一个侧向的推力，我们将不考虑这种复杂性）。我们也将仅仅包括每个原子与其最近邻及次近邻原子之间的作用力。换句话说，我们将做一种近似，即略去所有超过次近邻的力。在 xy 平面上将计入的力如图39-10(a)所示。当然，在 yz 和 zx 两平面上的相应的力也得包括进去。

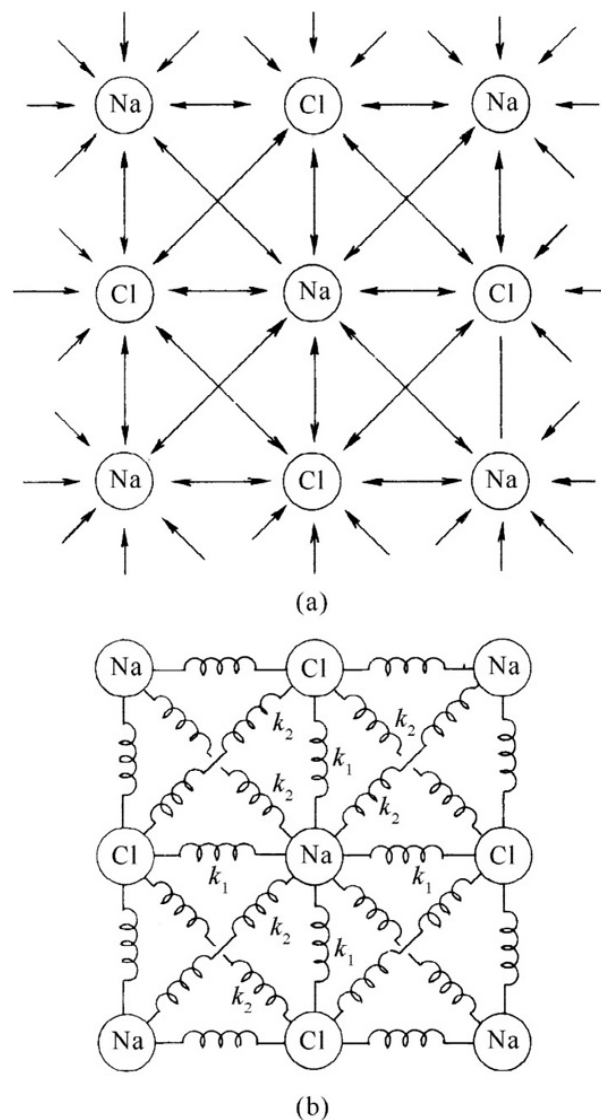


图39-10 (a) 我们正考虑的原子间的相互作用力；(b) 各原子由弹簧联系起来的模型

由于我们只对适用于小应变的弹性常量感兴趣，因而就只需要在能量中随应变的平方变化的项，所以就可以想象每一对原子之间的作用力是随位移线性地变化的。于是，我们还可以设想，每一对原子由一条线性弹簧联系着，如图39-10 (b) 所示。所有连接钠原子与氯原子间的弹簧都应具有相同的弹性常量，比方说 k_1 。在两个钠原子间和两个氯原子间的弹簧可能具有不同的常量，但将通过把它们取作相等

而使讨论较简单，我们将统称之为 k_2 （在知道了计算如何进行之后，就可以在以后的计算中取不同的 k 值）。

现在假定晶体的形变是由应变张量 e_{ij} 描述的均匀应变产生的。在一般情况下，它将具有与 x ， y 和 z 有关的各种分量，但现在我们将仅仅考虑具有 e_{xx} ， e_{xy} 和 e_{yy} 这三个分量的应变，以便易于对它进行想象。如果我们挑出一个原子作为原点，则其他每个原子的位移都可由像式（39.9）那样的方程来给出：

$$\begin{aligned}u_x &= e_{xx}x + e_{xy}y, \\u_y &= e_{xy}x + e_{yy}y.\end{aligned}\tag{39.42}$$

假设把那个在 $x=y=0$ 处的原子叫作“1号原子”，并如图39-11所示的那样对它在 xy 平面上的一些近邻也加上号码。又把晶格常数称为 a ，我们便得到列于表39-1中的那些 x 方向和 y 方向的位移 u_x 和 u_y 。

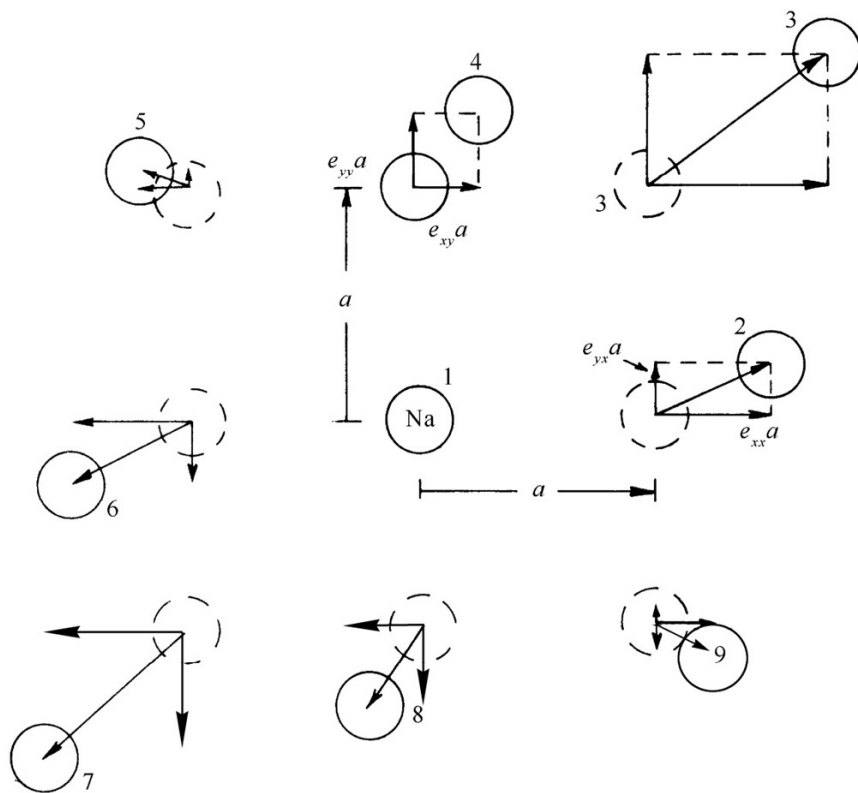


图39-11 1号原子的最近邻及次近邻原子的位移（被夸大了的）

表 39-1

原 子	位置 x, y	u_x	u_y	k
1	0, 0	0	0	—
2	$a, 0$	$e_{xx}a$	$e_{yx}a$	k_1
3	a, a	$(e_{xx} + e_{xy})a$	$(e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
4	$0, a$	$e_{xy}a$	$e_{yy}a$	k_1
5	$-a, a$	$(-e_{xx} + e_{xy})a$	$(-e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
6	$-a, 0$	$-e_{xx}a$	$-e_{yx}a$	k_1
7	$-a, -a$	$-(e_{xx} + e_{xy})a$	$-(e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
8	$0, -a$	$-e_{xy}a$	$-e_{yy}a$	k_1
9	$a, -a$	$(e_{xx} - e_{xy})a$	$(e_{yx} - e_{yy})a$	k_2

现在可以计算储藏于那些弹簧中的势能，即 $k/2$ 乘以每一条弹簧的伸长的平方。例如，在原子1与原子2间的水平弹簧中的能量为

$$\frac{k_1 (e_{xx}a)^2}{2}. \quad (39.43)$$

注意作为一级近似，原子2的y方向位移并不改变连接原子1与原子2间弹簧的长度。然而，要获得一条像连接到原子3的那种对角线弹簧的应变能量，就必须算出由于水平方向和垂直方向两个位移所引起的长度改变。对于偏离原来的立方体的微小位移来说，我们可以把到达原子3距离的改变写成 u_x 和 u_y 在对角线方向上的分量之和，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y).$$

利用从表上得到的 u_x 和 u_y 值，便可获得能量

$$\frac{k_2}{2} \left(\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{k_2 a^2}{4} (e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2. \quad (39.44)$$

对于在xy平面上的所有弹簧的总能量，我们需要像式（39.43）和（39.44）那样的八个项之和，称这一能量为 U_0 ，则有

$$U_0 = \frac{a^2}{2} \left\{ k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 + k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 \right\}. \quad (39.45)$$

为了获得与原子1连接的所有弹簧的总能量，还必须对式（39.45）中的能量再添加一项。虽然我们只有应变的x方向和y方向分量，但仍然有在xy平面以外的、与次近邻相联系的某些能量，这附加的能量就是

$$k_2 (e_{xx}^2 a^2 + e_{yy}^2 a^2). \quad (39.46)$$

弹性常量与能量密度 w 由式(39.13)相联系。我们已计算出来的能量是与一个原子联系着的能量，更确切地说，是每个原子能量的两倍，因为每条弹簧能量的一半必须分配给连接着的两个原子中的每一个。由于单位体积里共有 $1/a^3$ 个原子，所以 w 与 U_0 的关系为

$$w = \frac{U_0}{2a^3}.$$

要求出弹性常量 C_{ijkl} ，只需完全写出式(39.45)中的那些平方项——再加上式(39.46)的那些项——并把 $e_{ij}e_{kl}$ 的系数同式(39.13)中的相应系数做比较。例如，把含有 e_{xx}^2 和 e_{yy}^2 项都搜集起来，我们得到因子

$$(k_1 + 2k_2) a^2,$$

因而

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}.$$

对于剩下来的项，就有一点儿复杂了。由于我们不能够把如 $e_{xx}e_{yy}$ 这样的两项之积与 $e_{yy}e_{xx}$ 区别开来，所以在这里的能量表式中这种项的系数就等于式(39.13)中这两项之和。在式(39.45)中 $e_{xx}e_{yy}$ 的系数为 $2k_2$ ，因而我们有

$$(C_{xxyy} + C_{yyxx}) = \frac{2k_2}{a}.$$

但由于在我们的晶体中的对称性， $C_{xxyy}=C_{yyxx}$ ，因而就有

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} = \frac{k_2}{a}.$$

按照相似步骤，也可以得到

$$C_{xyxy} = C_{yxxy} = \frac{k_2}{a}.$$

最后你们将注意到，任何包含x或y只有一次的项都为零——和上面根据对称性的论证得出的结论相同。把上述结果综合如下：

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}, \\ C_{xyxy} &= C_{yxxy} = \frac{k_2}{a}, \\ C_{xxyy} &= C_{yyxx} = C_{xyyx} = C_{yxyx} = \frac{k_2}{a}, \\ C_{xxxy} &= C_{xyyy} = \cdots = 0. \end{aligned} \tag{39.47}$$

我们已能够把大块材料的弹性常量与由常量 k_1 和 k_2 表现出来的那些原子性质联系了起来。在我们的特殊情况中， $C_{xyxy}=C_{xxyy}$ 。结果是——正如你也许会从计算所要的方法中看到的——对于立方晶体来说，这些项始终相等，不管被计及的力项共有多少，只要力的作用沿着每对原子间的连线——这就是说，只要存在于原子之间的力是像

弹簧那样的力，而不是你也许会从一根悬梁那里得到的（以及你在共价键中所确实得到的）那种具有侧向部分的力。

我们可以用测定弹性常量的实验结果来核对这个结论。在表39-2中所给出的是若干种立方晶体的三个弹性系数的观测值^[2]。你将会注意到， C_{xxyy} 与 C_{xyxy} 一般不相等。原因是，在像钠和钾那些金属中原子间的力，并不如同我们在上述模型中所假定的那样沿连接原子的直线。金刚石也不服从该定律，因为在金刚石内的力是共价力，具有某种方向性——那些键会更喜欢处在四面体角内。像氟化锂、氯化钠那样的离子晶体，的确几乎具有我们在模型中所假定的全部物理性质，因而 C_{xxyy} 和 C_{xyxy} 就几乎相等。但不清楚为什么氯化银会不满足 $C_{xxyy}=C_{xyxy}$ 这一条件。

表 39-2* 立方晶体的弹性模量（以 $10^{12} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2$ 为单位）

	C_{xxxx}	C_{xxyy}	C_{xyxy}
Na	0.055	0.042	0.049
K	0.046	0.037	0.026
Fe	2.37	1.41	1.16
金刚石	10.76	1.25	5.76
Al	1.08	0.62	0.28
LiF	1.19	0.54	0.53
NaCl	0.486	0.127	0.128
KCl	0.40	0.062	0.062
NaBr	0.33	0.13	0.13
KI	0.27	0.043	0.042
AgCl	0.60	0.36	0.062

*转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics* , 2nd ed. , 1956: 93.

[1] 我们暂时选择把总剪切角 θ 分成两个相等部分，并使该应变相对于 x 和 y 是对称的。

[2] 在文献中你将常常发现使用不同符号的表示方法。比如，人们往往写成 $C_{xxxx}=C_{11}$ ， $C_{xxyy}=C_{12}$ 和 $C_{xyxy}=C_{44}$ 。

第40章 干水的流动

§40-1 流体静力学

流体，特别是水的流动这一课题使每个人都着迷。我们均能记起自己小时候，在澡盆里或在泥浆水坑里与那种奇怪的东西玩耍。当我们逐渐长大时，便会注视着河流、瀑布以及旋涡水塘，因而被这种相对于固体来说似乎像是活生生的物质所迷住。流体的行为在许多方面都很出人意料并且十分有趣——它是本章和下一章的课题。在街上一个小孩企图阻塞一股小水流的努力，以及他对水确定它的道路的那种奇特方式所感到的惊异，与我们多年来为理解流体流动所做的努力很类似。我们试图依靠获得的描述流动的那些定律和方程式——以我们的理解——来筑坝拦水。我们将在这一章中描述这些尝试。而在下一章中，将描述水如何会冲出水坝以及使我们理解它的努力落空的那种独特方式。

假定你们都已熟悉了水的基本性质。区别流体与固体的一个主要性质就是流体不能维持任意长的时间切应力。如果我们对流体作用一剪切力，则它将在这剪切力作用下运动。像蜂蜜那样较稠的液体，比起像空气或水的流体来就不那么容易流动。对一流体量度其屈服的难易程度的乃是它的黏滞性。在本章中，我们将只考虑其中黏滞效应可以忽略的那些情况，黏滞效应将在下一章中考虑。

我们将从考虑流体静力学，即静止时的流体理论开始。当流体静止时，就没有任何剪切力（甚至对于黏滞性液体亦然）。因此，流体静力学的定律是：应力总是垂直于流体内的任何一个面。单位面积的这个法向力叫作压强。从静止流体中不存在剪切力这一事实出发，就可以推断出压应力在所有方向都相等（图40-1）。我们将让你们自己娱乐一下，即证明若在流体中的任一个面上都没有剪切力，则压强在任何方向必然相同。

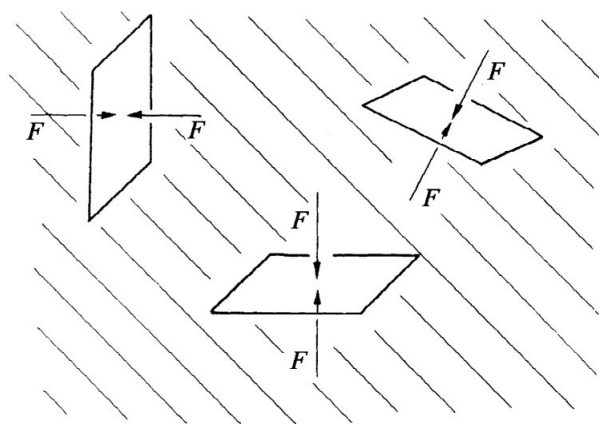


图40-1 在一静止流体中，作用于任何截面上的单位面积的力与该面垂直，并且对于面的所有取向都相同

流体中的压强可以逐处变化。例如，在地球表面的静流体中，压强将由于流体的重量而随高度变化。如果该流体的密度被认为不变，并且如果把某个任意零水平面处的压强称为 p_0 （图40-2），则在水平面以上高度为 h 处的压强就是 $p = p_0 - \rho gh$ ，其中 g 为单位质量的重力。因此，组合

$$p + \rho gh$$

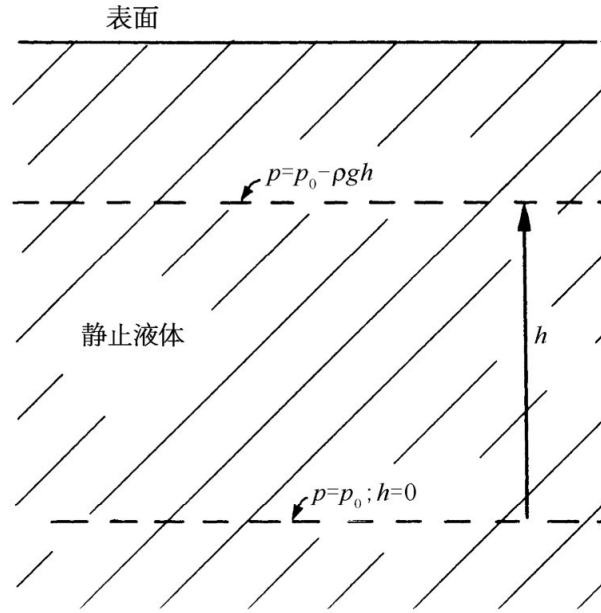


图40-2 在一静止液体中的压强

在静止流体中是一恒量。这个关系式是你们熟悉的，但现在要来导出一个把上式作为一种特殊情况的、更为普遍的结果。

如果考虑水的一个小立方体，那么作用于其上的来自压强方面的净力是什么呢？因为在任何地方压强在各个方向都相同，所以仅由于压强的逐点变化就能够产生单位体积中的净力。假设压强在 x 方向上是变化的——而我们所选取的各坐标轴方向都平行于该立方体的各边。这样作用于 x 处面上的压强就会提供 $p \Delta y \Delta z$ 的力（图40-3），而在 $x + \Delta x$ 处面上的压强则提供 $- [p + (\partial p / \partial x) \Delta x] \Delta y \Delta z$ 的力，因而净力为 $- (\partial p / \partial x) \Delta x \Delta y \Delta z$ 。如果我们考虑这一立方体的其余各对表面，则不难看出，单位体积的压力为 $-\nabla p$ 。若除此之外还有别种力——诸如重力——则该压力就必须抵消它们才能得到平衡。

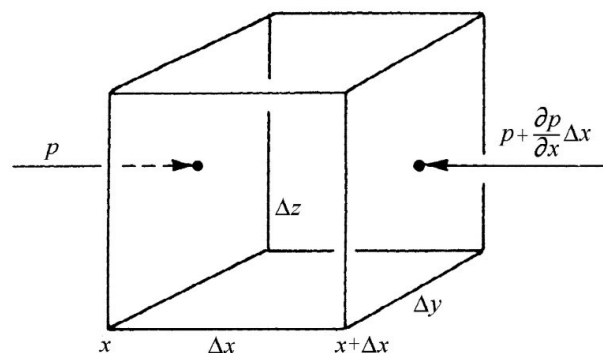


图40-3 作用于立方体上的净压力为单位体积的 $-\nabla p$

让我们考虑这种附加力可以由一势能来加以描述的情况，就像在重力情况下它应该是正确的那样，我们将令 ϕ 代表单位质量的势能（比如，对于重力， ϕ 就恰好是 gz 。）单位质量的力通过 $-\nabla \phi$ 用势表出，因而若 ρ 为流体密度，则单位体积中的力就是 $-\rho \nabla \phi$ 。对于平衡的情况来说，单位体积的这种力加上单位体积压强方面的力就必然为零：

$$-\nabla p - \rho \nabla \phi = 0. \quad (40.1)$$

式(40.1)就是流体静力学的方程。在一般情况下，它没有解。若密度在空间中按任意方式变化，就没有办法使得这些力互相抵消，因而该流体就不可能处于静平衡之中。此时对流将开始出现。我们从这一方程就可以清楚地看出，因为压强项是一纯粹梯度，而对于可变的 ρ 那里的另一项并不是梯度。只有当 ρ 是常数时，该势能项才是纯粹梯度。此时方程就有解

$$p + \rho \phi = \text{常数}。$$

另一种容许流体静力平衡的可能性是， ρ 仅为 p 的函数。然而，我们将放下流体静力学这一课题，因为它与流体运动时相比远不是那么有趣。

§40-2 运动方程

首先，我们按照一种纯抽象的、理论的方式来讨论流体的运动，然后才考虑一些特殊例子。要描述流体的运动，我们必须给出它在每一点上的性质。比方，在不同地方，水（让我们称该流体为“水”吧）以不同的速度在运动。因此，要确定流动的特性，就必须给出任何时刻处于每一点的速度的三个分量。如果能够找到确定速度的方程式，那么我们就可能知道流体在所有时刻是怎样运动的了。然而，速度并非流体所具有的逐点变化的唯一性质。我们刚才已讨论过压强的逐点变化，此外还有其他各种变量，可能也存在密度的逐点变化。并且，该流体可能是一导体，其中载有在大小和方向上都逐点变化的密度为 j 的电流，还可能存在着逐点变化着的温度或磁场，等等。因此，用以描述整个情况所需的场的数目就将取决于问题到底有多复杂。当其中的电流和磁场对于确定流体行为起主要作用时就会出现一些有趣的现象，这个学科称为磁流体动力学，目前正受到极大注意。然而，我们将不讨论这些较复杂的情况，因为在复杂性较低的水平上就已经有一些有趣的现象，而即使在这种较初级的水平也将是足够复杂的。

我们将考虑其中既没有磁场也没有导电性的那种情况，并且不必对温度操心，因为我们将假定密度和压强会按照唯一的方式确定任何一点的温度。事实上，我们将通过做出密度不变的假定——设想该流体基本上是不可压缩的——以减少工作的复杂性。换句话说，我们是在假定压强变化是这样的小，以致由其产生的密度变化可以忽略不计。如果情况不是这样，则将遇到超出这里即将要加以讨论的范围之外的一些现象——比如说，声音或冲击波的传播。我们已在某种程度上讨论过声波和冲击波的传播，因而现在将通过做出密度 ρ 是一恒量

的近似，把我们关于流体动力学的考虑与这些其他现象隔离开来。不难判定， ρ 不变的近似何时才是一个好的近似。我们可以说，若流动速度比流体中的声波的速率小得多，则无须担心密度的变化。水在我们尝试理解它的过程中所做的逃避与密度恒定的近似无关。那些的确容许逃避的复杂性将在下一章中讨论。

在有关流体的普遍理论中，人们必须从联系压强和密度的物态方程出发。在我们的近似中，这个物态方程仅是

$$\rho = \text{常数}.$$

于是，这就是关于各变量的第一个关系式。下一个关系式表示物质守恒——若物质从某一点流出，则所遗留下来的量中就一定有所减少。设流体的速度为 $\mathbf{v}$ ，则单位时间流经单位表面积的质量就是 $\rho \mathbf{v}$ 垂直于该面的分量。在电学中我们曾有过一个相似的关系式。从电学中也已知道，这个量的散度会给出单位时间内密度的减少率。同样，方程

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (40.2)$$

表示流体质量的守恒，它是流体动力学中的连续性方程。在我们的近似、即在不可压缩流体的近似下， ρ 是恒量，因而连续性方程就简单地为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (40.3)$$

流体速度 $\mathbf{v}$ ——像磁场 $\mathbf{B}$ 那样——具有零散度（流体动力学方程往往酷似电动力学方程，这就是为什么我们要先学习电动力学的缘故。有些人却从相反方面论证，认为人们应先学习流体动力学，以便此后能更易于理解电学。可是电动力学实际上要比流体动力学容易得多）。

我们将从牛顿定律得到下一个方程，而牛顿定律告诉我们速度是如何由于力的作用而发生变化的。流体中一个体积元的质量乘以其加速度必定等于作用在此体积元上的力。取一个单位体积元，并将单位体积所受的力写成 $\mathbf{f}$ ，便有

$$\rho \times (\text{加速度}) = \mathbf{f}.$$

我们将把这个力密度写成下述三项之和。曾经讨论过作用于单位体积上的压力为 $-\nabla p$ 。此外，还有从远处作用着——像重力或电力那样——的一些“外”力。当它们是具有单位质量势 ϕ 的保守力时，它们就会给出力密度 $-\rho \nabla \phi$ （若这些外力并非保守力，则必须把单位体积的外力写成 $\mathbf{f}_{\text{外}}$ ）。因此，存在另一种单位体积的“内”力，它是由于在流动的流体中也可能存在剪切应力的事实引起的。这被称为黏滞力，我们将把它写成 $\mathbf{f}_{\text{黏滞}}$ 。于是，流体的运动方程就是

$$\rho \times (\text{加速度}) = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \mathbf{f}_{\text{黏滞}}. \quad (40.4)$$

在本章中，我们将假定液体是“稀薄”的，这是在黏滞性不重要的意义上说的，从而将略去 $\mathbf{f}_{\text{黏滞}}$ 。当去掉这一黏滞项时，我们就正在做出这样一种近似，即所描写的乃是某种理想材料而并非真正的水。冯·诺伊曼就曾深切地意识到当没有这一黏滞项与有这一项时所发生的巨大差别，而他也意识到，在直到约1900年时流体动力学的大部分发展中，几乎主要的兴趣都集中在求解具有这个近似、而几乎与实际流体毫无关系的那些漂亮的数学问题上。他把从事这种分析的理论家标志为研究“干水”的人们。这样的分析不考虑流体的基本性质。正是因为我们在本章的计算中都要忽略这一性质，所以才给它“干水的流动”这么一个标题。我们把对真实的水的讨论推迟到下一章去。

如果不考虑 $f_{\text{黏滯}}$ ，则在式 (40.4) 中除了关于加速度的表示式以外，我们就有了所需的一切。你或许会认为，关于流体质点的加速度公式会十分简单，因为似乎很明显，若 $\mathbf{v}$ 是流体中一个质点在某处的速度，则加速度该不过是 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 罢了。但这并不对——而且是由于某一相当微妙的原因。微商 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 是在空间一个固定点 的速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 的变化率。我们所需要的却是关于流体一个特定部分 的速度变化有多快。试想象对其中一滴水用有色斑点来标明，以便能够对它进行观察。在一个小的时间间隔 Δt 内，这一滴水将移动至一个不同的位置。如果该滴水正在沿某一如图40-4所示意的路径运动，则它可能在 Δt 内从 P_1 移动至 P_2 。事实上，它将在 x 方向移动量 $v_x \Delta t$ ，在 y 方向移动量 $v_y \Delta t$ ，并在 z 方向移动量 $v_z \Delta t$ 。我们看到，若 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 为时刻 t 在 (x, y, z) 处的流体质点的速度，则这同一 质点在 $t + \Delta t$ 时刻的速度由 $\mathbf{v}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$ 给出，其中

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t.$$

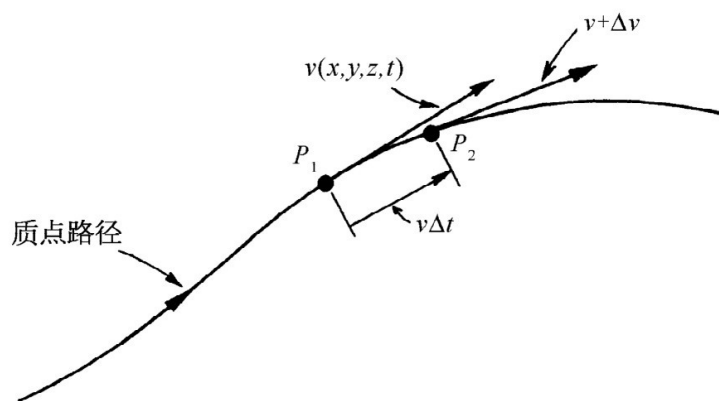


图40-4 一流体质点的加速度

根据偏微商的定义——回顾式 (2.7)——我们对它展开至第一级，有

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) \\ &= \mathbf{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t. \end{aligned}$$

因而加速度 $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 为

$$v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

可以用算符形式将这个式——把 ∇ 当成一个矢量看待——写成

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (40.5)$$

注意，即使 $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ，以致在给定点的速度不再变化，但仍可能有加速度。作为一个例子，以恒定速率沿一圆周流动着的水正在作加速运动，尽管在一给定点的速度并不发生变化。当然，原因在于，起初在圆周某点的特定部位的水，一会儿之后其速度已经有了不同的方向，这表明存在一个向心加速度。

上述理论的其余部分就只是数学方面的了——先将式（40.5）中的加速度代入式（40.4）而得到运动方程，然后求运动方程的解。我们得到

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (40.6)$$

在此式中黏滞性已被略去。利用从矢量分析得来的下列恒等式：

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

可以把上述方程重新整理。如果现在定义一个新的矢量场 $\boldsymbol{\Omega}$ ，例如 $\mathbf{v}$ 的旋度，

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (40.7)$$

则上面的矢量恒等式还可以写成

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2,$$

而我们的运动方程式 (40.6) 就变成

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi. \quad (40.8)$$

你可以利用式 (40.7) 通过核对方程中两边的各分量都彼此相等，而证实式 (40.6) 和 (40.8) 两方程是等效的。

矢量场 $\boldsymbol{\Omega}$ 被称为涡度。如果涡度处处为零，则我们就说流动是无旋的。我们曾在§3-5中定义过一个称为矢量场的环流的东西。在给定时刻，在流体中环绕任一闭合回路的环流等于流体速度环绕该回路的线积分：

$$(\text{环流}) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}.$$

于是对于一个无限小的回路来说，单位面积的环流——利用斯托克斯定理——就等于 $\nabla \times \mathbf{v}$ 。因此，涡度 $\boldsymbol{\Omega}$ 就是围绕一单位面积（垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向）的环流。由此也可推断出：如果你将一小片灰尘——不是无限小的点——放进该液体中任何地方，它就会以角速度 $\boldsymbol{\Omega}/2$ 旋转。试

试看你能否证明这个结论。你也可以对放在一个转台上的一桶水加以核对，这时 $\boldsymbol{\Omega}$ 等于水的局部角速度的两倍。

如果我们仅对于速度场感兴趣，则可将压强从各式中消去。取式（40.8）两边的旋度，记住 ρ 是恒量，而任一梯度的旋度都为零，并利用式（40.3），便得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (40.9)$$

上述方程，结合下列两式

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (40.10)$$

和

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (40.11)$$

就完整地描述了速度场 $\mathbf{v}$ 。从数学方面讲，如果在某一时刻知道了 $\boldsymbol{\Omega}$ ，那么我们会知道速度矢量的旋度，而同时也明白速度的散度为零，因而若给定该物理情况，我们便具有确定每一处 $\mathbf{v}$ 所需的一切了（这刚好与磁学中的情况相似，在那里曾经有 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \epsilon_0 c^2$ ）。于是，一个给定的 $\boldsymbol{\Omega}$ 会确定 $\mathbf{v}$ ，就正如一个给定的 $\mathbf{j}$ 会确定 $\mathbf{B}$ 一样。因此，一旦知道了 $\mathbf{v}$ ，方程式（40.9）便告诉我们关于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的变化率，由此可以获得下一时刻的新 $\boldsymbol{\Omega}$ 。利用式（40.10），我们又求出一个新的 $\mathbf{v}$ 来，如此等等。我现在必须告诉你这些方程怎么会包含为计算流动所需的一切机制。然而，要注意这种方法只会给出速度场，我们已经失去了有关压强方面的一切信息。

我们指出该方程的一个特殊后果。若在任何时刻 t 各处 $\boldsymbol{\Omega}=0$ ，则 $\partial \boldsymbol{\Omega} / \partial t$ 也为零，以致在 $t+\Delta t$ 时刻 $\boldsymbol{\Omega}$ 仍然处处为零。我们得到了方程的一个解，流动永远是无旋的。假如流动从零转动开始，就永远不会有旋转。此时，待解的方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{v}=0, \quad \nabla \times \mathbf{v}=0.$$

它们恰好像自由空间中的静电场或静磁场方程组。对此我们以后将回来再做讨论，并考察其中某些特殊问题。

§40-3 定常流——伯努利定理

现在要回到运动方程式（40.8）上来，但将限于讨论“定常”流动的情况。所谓定常流动我们指的是，在流体中任何地方的速度永远不会发生变化的流动。在任何地点的液体，总是被新的流体以完全相同的方式所代替。速度图看起来总是相同的—— $\mathbf{v}$ 是一个静止的矢量场。用我们在静磁学中画出“场线”一样的方法，现在也可以把那些始终与流体速度相切的线画出来，如图40-5所示。这些线称为流线。对于定常流来说，它们显然就是流体微粒的实际路径（在非定常流中，这个流线图样会随时改变，因而在任何时刻的流线图样就并不代表流体微粒的路径）。

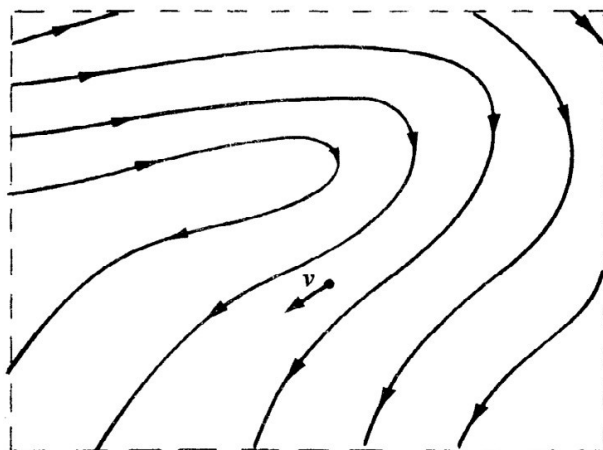


图40-5 流体定常流动中的流线

定常流并不意味没有什么情况发生，流体中的原子正在运动和改变其速度。它仅仅意味着 $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ 。因此，若我们以 $\mathbf{v}$ 点乘该运动方程，则项 $\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})$ 就会消失，而仅留下

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right\} = 0. \quad (40.12)$$

上述方程表明，对于沿流体速度方向的一个小位移来说，括号内的量不会改变。这时，在定常流中的所有位移都沿着流线，因而式（40.12）告诉我们：对于沿流线的所有点，我们能够写出

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{常数(沿着流线)}. \quad (40.13)$$

这就是伯努利定理。一般来说，右边那个常数，对于不同流线可以有所不同，尽我们所知就是：式（40.13）左边沿一给定流线是完全相同的。顺便说说，我们不妨注意，对于 $\boldsymbol{\Omega} = 0$ 的那种定常无旋运动，运动方程式（40.8）会向我们提供下面的关系

$$\nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right\} = 0,$$

使得

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \phi = \text{常数(处处)}. \quad (40.14)$$

除了现在 该常数对于整个流体都具有相同值 之外，该式与式（40.13）完全相同。

事实上，伯努利定理只不过是关于能量守恒的一种表述。像这样的一个守恒定理会提供关于流动的大量信息，而不必实际去解那些详尽的方程。伯努利定理竟是那么重要而又那么简单，使得我们愿意向你们表明，如何才能用一种与刚才所用的正规运算不同的方式将其推导出来。设想如图40-6所示的、由一束相邻流线所形成的一个流管。由于这个管的壁是由流线构成的，所以就不会有流体穿越管壁流出来。让我们把这个流管一端的截面叫作 A_1 ，那里的流速为 v_1 ，密度为 ρ_1 ，而势能为 ϕ_1 。在管的另一端，这些对应的量则分别为 A_2 ， v_2 ， ρ_2 和 ϕ_2 。现在，在经历了一个短短的时间间隔 Δt 之后，在 A_1 处的流体已经移动一小段距离 $v_1 \Delta t$ ，而在 A_2 处的流体则移动另一段距离 $v_2 \Delta t$ [图40-6 (b)]。质量守恒要求凡通过 A_1 而进入的质量必须等于通过 A_2 而离开的质量。在管两端这两质量必定相同：

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t .$$

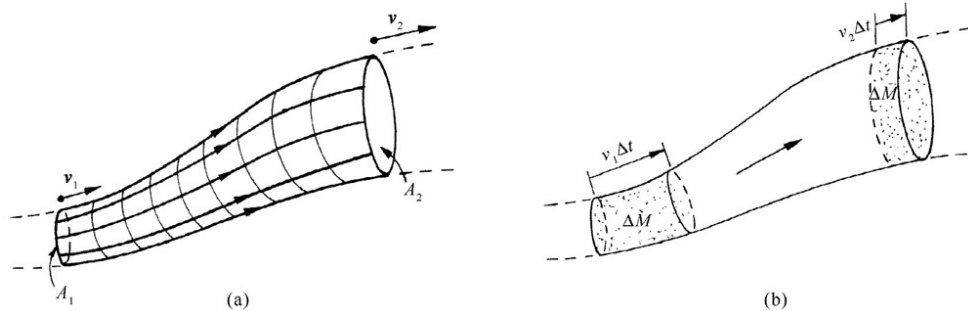


图40-6 流体在流管里的运动

因此，就有等式

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \quad (40.15)$$

这个方程告诉我们：若 ρ 是一恒量，则速度与流管的截面积成反比。

现在要来计算由流体压强所做的功。对 A_1 处进入的流体所做的功为 $p_1 A_1 v_1 \Delta t$ ，而在 A_2 处流体对外所做的功则为 $p_2 A_2 v_2 \Delta t$ 。因此，对 A_1 与 A_2 之间流体所做净功为

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t,$$

它必定等于质量为 ΔM 的流体在从 A_1 至 A_2 的运动过程中能量的增加，换句话说，

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \Delta M (E_2 - E_1), \quad (40.16)$$

其中 E_1 为在 A_1 处单位质量的流体能量，而 E_2 则为在 A_2 处单位质量的能量。流体的单位质量能量可以写成

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi + U,$$

其中 $\frac{1}{2}v^2$ 为单位质量的动能， ϕ 为单位质量的势能，而 U 则代表流体单位质量的内能的一个附加项。例如，内能也许相当于可压缩流体中的热能或化学能。所有这些量都可以逐点变化。把这种能量的形式应用到式（40.16）中，则有

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2}v_2^2 + \phi_2 + U_2 - \frac{1}{2}v_1^2 - \phi_1 - U_1.$$

但我们已经知道 $\Delta M = \rho A v \Delta t$ ，所以得到

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 + \phi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 + \phi_2 + U_2, \quad (40.17)$$

这是带有内能附加项的伯努利方程。若流体是不可压缩的，则该内能项在两边相等，而我们再一次得到：方程式（40.14）沿任何流线成立。

现在考虑某些简单例子，其中伯努利积分给我们提供了对流动的描述。假设有水从靠近桶底的一个小孔流出来，如图40-7所示。我们考虑这种情况，即其中小孔处的流速 $v_{\text{出口}}$ 比靠近桶顶处的流速要大得多，换句话说，设想桶的直径大到我们可略去液面的下落（只要愿意我们可以做更精确的计算）。在桶顶处压强为 p_0 ，即大气压，而在出口旁的压强也是 p_0 。现在就对诸如图上所画出来的那条流线写出伯努利方程。在桶顶，我们取 v 等于零，同时也取重力势 ϕ 为零。在出口处速率为 $v_{\text{出口}}$ ，而 $\phi = -gh$ ，因而

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_{\text{出口}}^2 - \rho gh,$$

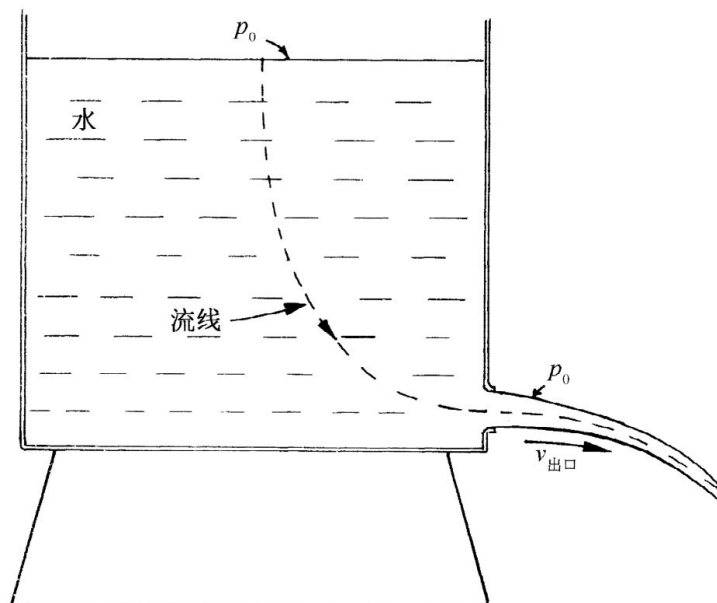


图 40-7 从水桶喷出的水流

也即

$$v_{\text{出口}} = \sqrt{2gh}. \quad (40.18)$$

这一速度恰好就是某一物体下落了距离 h 应该得到的速度。这不会太令人惊异，因为水在出口处获得的动能是以在桶顶的势能作为代价的。然而，一定不要由此得出这样的概念，即可以用这一速度乘该小孔面积而算出流体从该桶流出的流量。流体喷离小孔时，其速度并非完全互相平行，而是带有向内朝着流线中心的分量——水流在收缩。在经过了一小段路程后，这水流的收缩便停止，而速度的确变成平行。因此，总流量乃是速度乘以该点所在处的面积。事实上，若我们有一个排水口恰好是圆形而有锐利边缘的小孔，则水流将缩小至小孔

面积的62%。对于不同形状的排水管，这缩小后的有效排水面积是不相同的，而实验上的收缩率可以从射流系数表查得。

如果排水管属于凹入式的，如图40-8所示，则人们可用最漂亮的方式证明这射流系数恰为50%。下面将仅仅给出如何做这一证明的一点提示。我们已用能量守恒获得了速度，即式（40.18），但动量守恒也值得加以考虑。既然在排出水流中有动量流出，就一定有一个力作用于排水管的横截面上。这力是从哪里来的呢？力必须来自桶壁上的压强。只要该射流孔细小并远离桶壁，则靠近桶壁的流体速度将很小。因此，作用于每个面上的压强就与在静止流体中的静压强——从式（40.14）中得出的——几乎完全一样。于是，在桶的侧壁上任一点处的静压强就必定与对面壁上一点处的相等压强相对应，除了排出管对面壁上的那些点以外。如果我们算出由这一压强所引起的通过出口而流出的动量，则就能够证明射流系数为1/2。然而，对于像图40-7所示的那种排水孔我们就不能应用这一方法，因为沿桶壁一直到接近排水孔的区域速度增大所产生的压强降，是我们无法算出的。

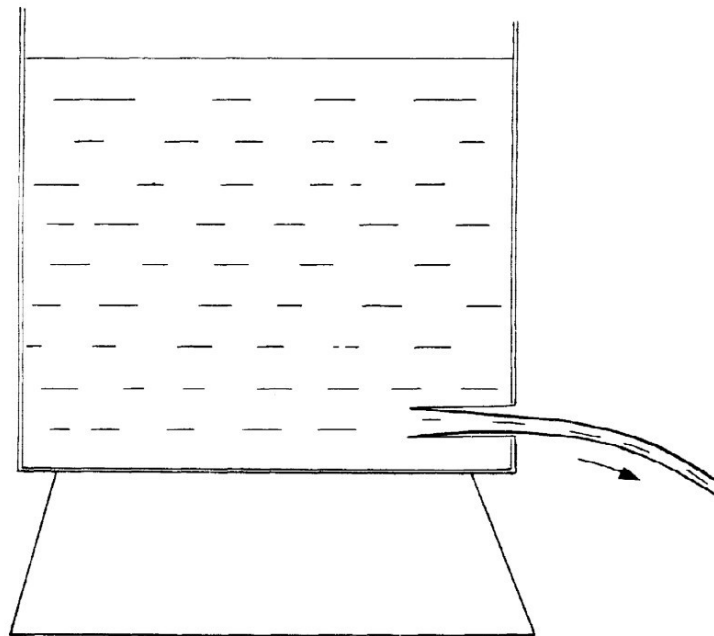


图40-8 若用一条凹入式排水管，则水流将缩小至出口面积的一半

让我们来看另一例子——一根截面变化的水平管，如图40-9所示，水从一端流入，而由另一端流出。能量守恒、亦即伯努利公式表明：在速度较高的那个颈缩区压强比较低。我们可以通过下述办法轻易地演示这一效应，即利用在流管的不同截面处接上一些竖直的小口径管子——小到不会影响流动——来量度各处的压强。这时，压强是由这些竖直管中的水柱高度来量度的。在颈缩处所求得的压强小于两侧的压强。如果在经过颈缩区之后，面积又恢复到颈缩区前相同的值，则压强又会再升高。伯努利公式会预言，在颈缩区下游的压强应与上游的一样，但实际上显著地较低。我们的预言所以有误，是由于忽略了那些摩擦、黏滞力之故，这些力会引起压强沿着管道下降。尽管存在这种压强降，但在颈缩处的压强（由于增大了的速率）仍明显地低于其两侧的压强——正如伯努利所预言的那样，速率 v_2 肯定应当超过 v_1 才能使相同的水量流经较窄的管道。因此，水在从宽处流经窄的部分时是被加速的。产生这一加速度的力则来自压强降。

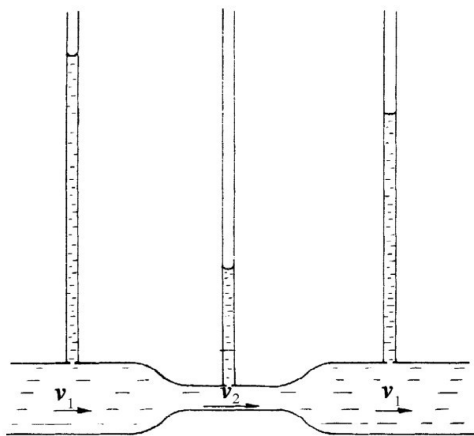


图40-9 在速度最大处压强最低

还可用另一个简单的演示来核对我们的结果。假设有一个接于桶旁而会向上喷射的排水管，如图40-10所示。要是射流速度恰好等于 $\sqrt{2gh}$ ，则这排出的水就应当上升至与桶内水面相平的高度。实验表明，它稍微低了一点。我们的预言大致正确，但在能量守恒公式中那还未被包括进去的黏滞阻力又一次引起了能量损耗。

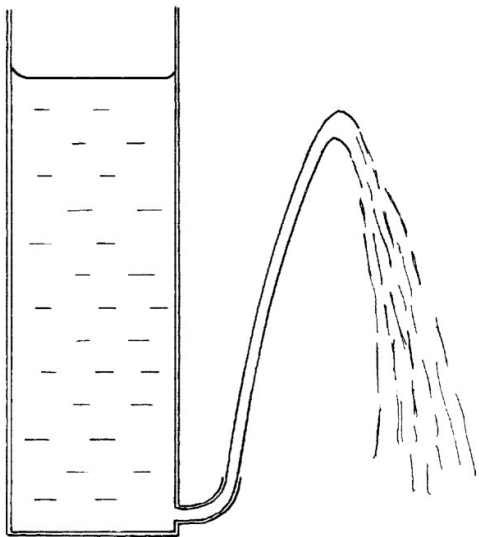


图40-10 v 不等于 $\sqrt{2gh}$ 的证明

你有没有拿着两张互相靠近的纸片而试图把它们吹开？试试看。它们会互相靠紧。当然，原因是，空气流经两张纸片中间狭窄的空间时，比起流经外面来具有较高速率。两纸片之间的压强比大气压低，因而它们就互相靠近而不是互相离开。

§40-4 环流

在上一节的开头我们曾经看到，若不可压缩流体中不存在环流，则流动满足下列两个方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (40.19)$$

它们与自由空间中的静电或静磁方程组相同。当没有电荷时，电场的散度为零，而电场的旋度则总是等于零的。若没有电流，磁场的旋度为零，而磁场的散度则永远等于零。因此，方程组（40.19）与静电学中关于 $\mathbf{E}$ 或静磁学中关于 $\mathbf{B}$ 的方程组具有相同的解。事实上，在§12-5中，作为对静电学的类比，我们曾解过流体流经一个球体的那种流动问题。该电学模拟就是一匀强电场加上一偶极子场。这偶极子场被调整到使得垂直于球面上的流速为零。对经由一根柱体的同样的流动问题，可以按相似的办法即利用一个适当的线型偶极子场和一均匀流场来算出。对于在远处的流速——包括大小和方向——为恒量的那种情况，这一种解答是正确的。这个解的示意图为图40-11（a）。

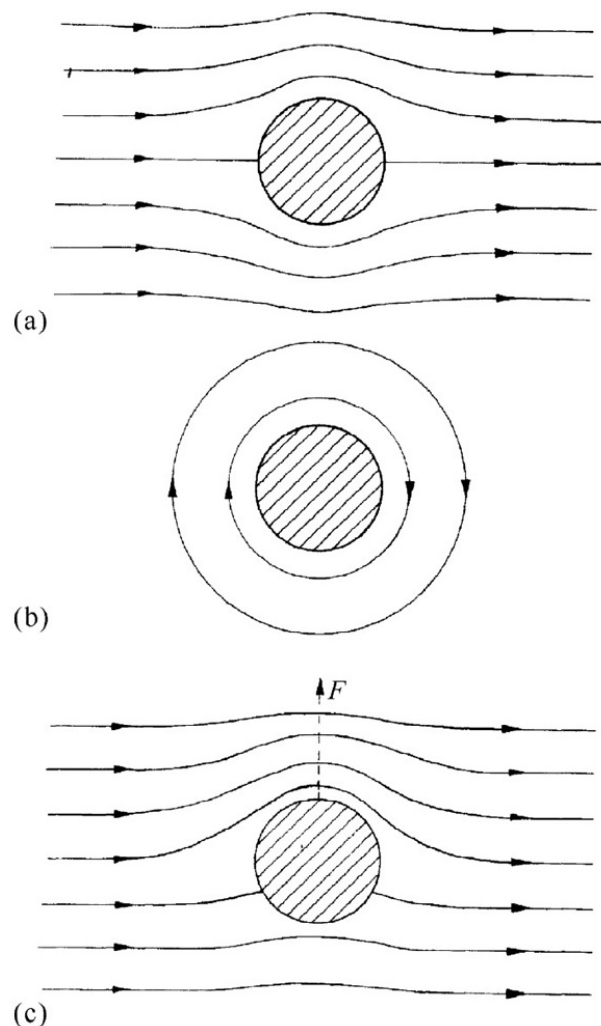


图40-11 (a) 理想流体正流经一根柱体；(b) 围绕柱体的环流；(c) 是(a)和(b)两者的叠加

当条件使得在远处的流体沿着围绕该柱体的圆周运动时，对于围绕柱体的流动就有另一个解。于是，流动处处都是圆周，如图40-11 (b) 所示。这样的流动有一个围绕着该柱体的环流，尽管此时在流体中 $\nabla \times \mathbf{v}$ 仍为零。怎样才能有环流而没有旋度呢？围绕该柱体有环流是因为环绕任一包围柱体在内的回路 $\mathbf{v}$ 的线积分不等于零。同时， $\mathbf{v}$ 围绕任一不包含该柱体在内的闭合路径的线积分都是零。当我们过去求围绕一根导线的磁场时，也曾见过这相同的事情。在导线外

$\mathbf{B}$ 的旋度为零，虽然围绕一条包围该导线在内的路径 $\mathbf{B}$ 的线积分却不为零。在围绕柱体的无旋环流中的速度场，与围绕一根导线的磁场恰好相同。对于以柱体的轴心为中心的一条圆周路径来说，速度的线积分为

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r v.$$

在无旋流动中这一积分必然与 r 无关，让我们把这一常数值称作 c ，那么便有

$$v = \frac{c}{2\pi r}, \quad (40.20)$$

式中 v 是切向速度，而 r 是距轴的距离。

关于围绕一小孔的流体环流可以做一个精彩的演示。你取一个在底面中心处开有一个排水孔的透明柱形桶。把这个桶装满了水，用一根棍子在其中搅起一些环流，然后拉开孔塞，你便会获得如图40-12所示的那种漂亮的效应（你在浴盆中也曾多次见过与此相类似的东西）。虽然你在开始时加入某个 ω ，但由于黏滞性的缘故它不久就会消失而流动变成无旋的了——尽管此时还有围绕着该排水孔的环流。

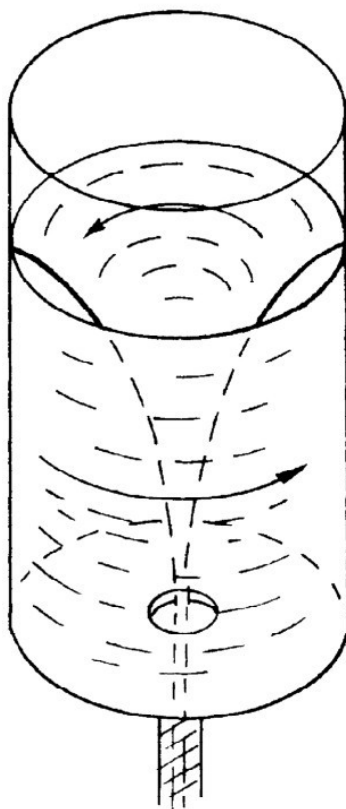


图40-12 带有环流的水从桶中排出

根据理论，我们能够算出水的内表面形状。当一个水的质点向中心流入时，它会获得速率。根据式（40.20），该切向速度与 $1/r$ 成正比——这恰好出自角动量守恒——像溜冰者缩回两只手臂一样，并且径向速度也表现为 $1/r$ 的形式。若略去切向运动，就有水沿着径向朝中心流进孔里，根据 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，可以推断出径向速度会正比于 $1/r$ 。因此，总速度也与 $1/r$ 成正比，从而水将沿着阿基米德螺线流动。空气与水间的界面全都处于大气压强下，因而根据式（40.14）它必须具有这么一种性质：

$$gz + \frac{1}{2}v^2 = \text{常数}.$$

但由于 v 与 $1/r$ 成正比，从而该表面形状为：

$$(z - z_0) = \frac{k}{r^2}.$$

一个有趣的地方——这一般来说是不正确的，但对于不可压缩的无旋流动则是正确的——乃是：若我们有两个解，则它们之和也是一个解。这所以正确，是因为方程组（40.19）是线性的。流体动力学的完整方程组（40.8）、（40.9）和（40.10）都不是线性的，这就造成巨大的差别。然而，对于围绕柱体的无旋流动来说，我们可以将图40-11（a）的流动叠加于图40-11（b）的流动之上，而获得一个如图40-11（c）所示的那种新型流动图样。这种流动特别有趣，在柱体上面的流速比在其下面的要高。因此，在上面的压强就比在下面的低。这样，当一个围绕着柱体的环流与一个纯水平方向的流动相结合时，就会有一个净的垂直方向的力作用于该柱体上——这个力被称为升力。当然，按照我们关于“干”水的理论，若没有环流，则就不会有净力作用于任何物体上。

§40-5 涡线

对于可能有涡旋的不可压缩流体，其流动的一般方程式为

$$\text{I.} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\text{II.} \quad \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v},$$

$$\text{III.} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0.$$

这些方程的物理内容曾由亥姆霍兹通过三个定理用语言描述过。首先，设想在流体中我们应该画出涡线而不是流线。所谓涡线，指的是具有 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向、并在任何区域里都具有与 $\boldsymbol{\Omega}$ 的大小成正比的密度的那种场线。根据上列方程II， $\boldsymbol{\Omega}$ 的散度始终等于零（回忆起§3-7中旋度的散度总是零）。因此，涡线就像 $\mathbf{B}$ 线，它们从来既没有始点也没有终点，因而往往会形成闭合回路。现在亥姆霍兹通过下述这一句话来描述III：涡线随流体一起在运动。这意思是：假如你对沿某些涡线的流体质点加以标志——比如用墨水给它们着色——那么当流体带着那些质点一起运动时，它们将始终标志着那些涡线的新位置。无论流体中的原子怎样运动，涡线总是跟着它们一起前行。这是描述那些定律的一种方法。

它也提供了求解任何问题的一种方法。给出最初的流动图样——比如，各处的 $\mathbf{v}$ 值——那么你便可以算出 $\boldsymbol{\Omega}$ 来。根据 $\mathbf{v}$ 你也可以讲出在一会儿之后那些涡线将会跑到哪里——它们以速率 $\mathbf{v}$ 运动。用新的 $\boldsymbol{\Omega}$ ，你便可以应用方程I和II求出新的 $\mathbf{v}$ （这很像给定电流后求 $\mathbf{B}$ 的问题）。如果我们得到了某一时刻的流动图像，则在原则上就可以算出后来一切时刻的图像。因此我们就得到关于非黏滞流动的一般解。

现在要来说明：亥姆霍兹的表述——因而也就是III——如何才能够至少部分地加以理解。实际上它仅仅是应用于流体的角动量守恒定律。试设想一个其轴平行于涡线的液态小柱体，如图40-13（a）所示。在此后某一时刻，这同一块流体将移至别处。一般说来，它将占据一个直径不同的柱体并将位于不同的地方。它也可以有不同取向，比如图40-13（b）所示的那样。但是，若直径已经变小，则长度就会增长，以保持其体积不变（因为我们假定的是一种不可压缩的流体）。并且，由于涡线离不开材料，所以其密度就会随截面的缩小而

增大。涡度 Ω 与该柱体的截面积 A 两者之积将保持不变，因而按照亥姆霍兹表述，应有

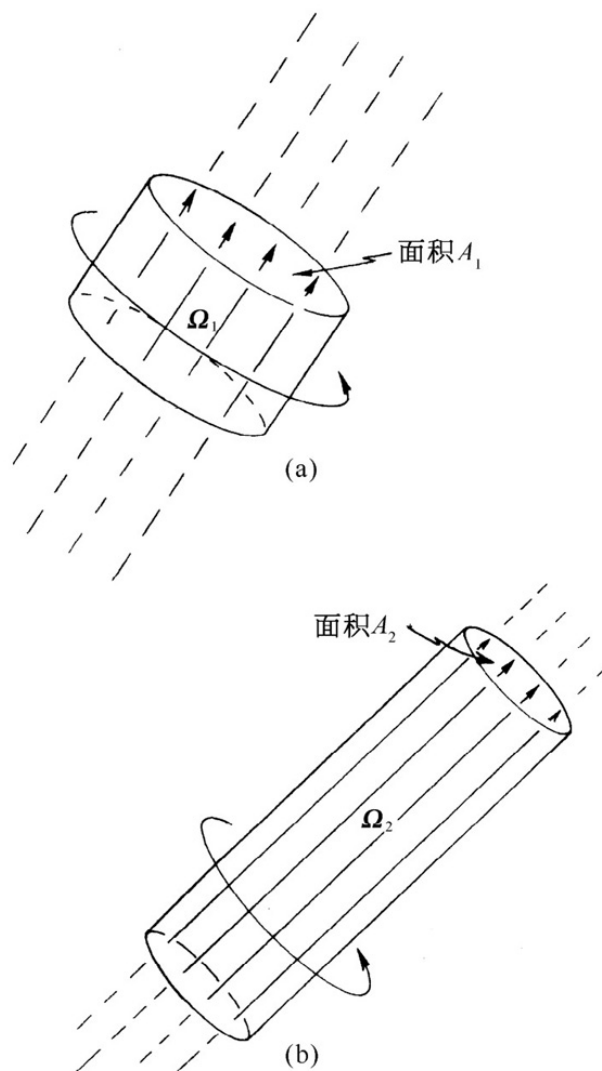


图40-13 (a) 在 t 时刻的一群涡线；(b) 同一群线在较迟的 t' 时刻

$$\Omega_2 A_2 = \Omega_1 A_1. \quad (40.21)$$

现在要注意：由于黏滞性为零，因而所有作用于该柱体（就那事来说，或任何体积）的表面上的力就都垂直于该表面，这种压力能够导致该体积从一处移至另一处，也能使它改变形状，但由于没有切向

力，所以材料内部的角动量的大小就不可能改变。该小柱体内液体的角动量等于其转动惯量 I 乘以液体的角速度，它正比于涡度 $\boldsymbol{\Omega}$ 。对于柱体来说，转动惯量正比于 mr^2 。因此根据角动量守恒，我们就应该断定

$$(M_1 R_1^2) \boldsymbol{\Omega}_1 = (M_2 R_2^2) \boldsymbol{\Omega}_2.$$

可是质量彼此相同，即 $M_1 = M_2$ ，而截面积则正比于 R^2 ，因而我们又一次得到方程式（40.21）。亥姆霍兹的表述——与III等效——正好是在没有黏滞性的条件下流体元的角动量不可能发生改变这一事实的推论。

有一个用图40-14所示的简单设备形成运动涡旋的精彩演示。用一张绷紧的厚橡胶膜覆盖在一个柱形箱的开端上构成一个“鼓”，鼓的直径2 ft，深也是2 ft。鼓“底”——这个鼓被翻倒而靠它的侧壁支持着——除了有一个直径3 in的孔外，周围都密闭。如果你用手在橡胶膜上猛击一下，一个涡环就被从孔中投射出来。尽管涡旋看不见，但你却能说出它在那儿，因为它会吹熄放在10~20 ft远处的一支蜡烛。根据这一效应的迟延时间，你可以说出“某种东西”正在以一有限的速率行进着。如果你先将一些烟雾吹进箱子里，则还能对发生的情况看得更清楚。这时你会把涡旋看成一个美丽的圆“烟环”。

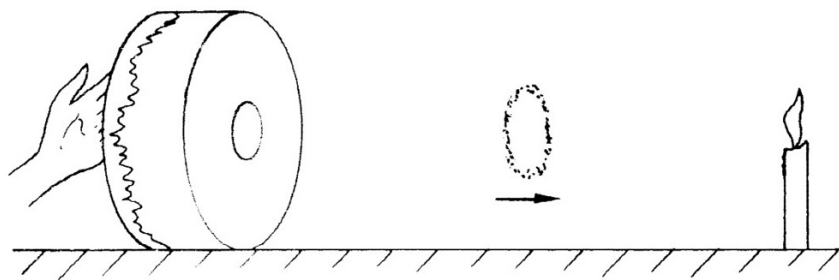


图40-14 造成一个正在移动的涡环

烟环是环状的涡线群，如图40-15（a）所示。由于 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ ，这些涡线也代表图（b）中的 $\mathbf{v}$ 的环流。我们可以按照下述办法来理解烟环的前进运动：环底附近的环流速度会延伸到环顶，而那里就有一个前进运动了。由于 $\boldsymbol{\Omega}$ 线同流体一起运动，这些线也就以速度 $\mathbf{v}$ 向前运动（当然，环顶部附近的 $\mathbf{v}$ 的环流导致底部的涡线的向前运动）。

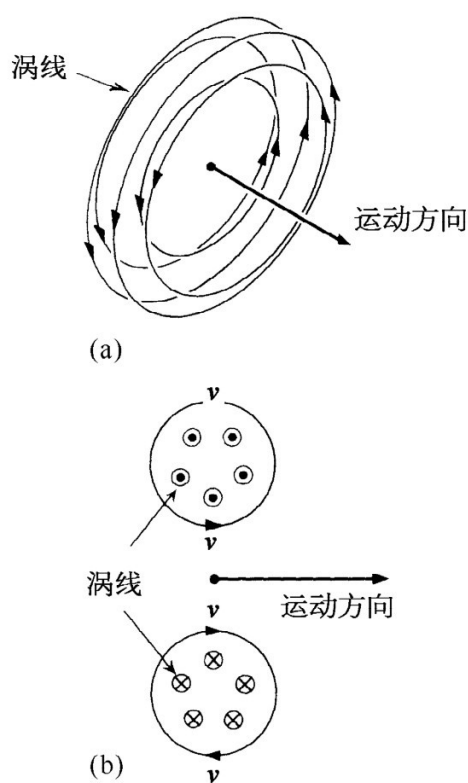


图40-15 一个运动着的涡环（烟环）。（a）涡线；（b）涡环的截面

现在必须提到一个严重的困难。我们已经注意到式（40.9）表明：若 $\boldsymbol{\Omega}$ 起初为零，则它将永远为零。这个结果表明“干”水理论的大失败，因为它意味着，一旦 $\boldsymbol{\Omega}$ 为零，则它将永远为零——在任何场合下都不能产生任何涡度。可是，在我们利用那个鼓的简单演示中，却能够从原来是静止的空气里产生出涡环来（肯定在我们击鼓以前，鼓

箱里处处都是 $\mathbf{v}=0$, $\boldsymbol{\Omega}=0$)。并且, 我们全都知道, 可以在湖水中用一柄桨来发生一些涡旋。显然, 必须研究“湿”水的理论才能对流体的行为得到充分理解。

干水理论的另一不正确之处在于, 在考虑流体与固体表面之间边界处的流动时我们所做的那种假设。过去当讨论经过柱体的流动——例如在图40-11中的那种流动——时, 我们曾容许流体能沿固体表面滑动。在我们的理论中, 在固体表面处的速度可以有任何值, 这取决于该流动是怎样开始的, 而我们就从未考虑过流体与固体之间的任何“摩擦”。然而, 实验事实是, 实际流体的速度在一固态物体的表面总是趋于零的。因此, 我们关于柱体的解, 不管有无环流, 都是错误的——正如有关产生涡度的那种结果一样。我们将在下一章中告诉你们较为正确的理论。

第41章 湿水的流动

§41-1 黏性

在上一章我们曾在忽略黏性现象的情况下讨论过水的行为，现在想要讨论包括黏性效应在内的流体流动。我们希望考察流体的实际行为，定性地讨论在各种不同场合下流体的实际行为，使得你对这一课题将会有某些感触。虽然你将看到某些复杂方程，并听到某些复杂的事情，但这并非我们要求你必须学习所有这些东西的目的。在某种意义上，这是一章“文化课”，它将给予你这个世界存在方式的某些概念，其中只有一项是值得学习的，那就是我们立即将加以讨论的有关黏性的简单定义，其余的就只是为了向你们提供乐趣。

上一章中我们曾经发现，流体运动的规律全都包含在下述方程中，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi + \frac{\mathbf{f}_{\text{黏}}}{\rho}. \quad (41.1)$$

在我们的“干”水近似中曾去掉了末项，从而忽略了所有的黏性效应。并且，有时还由于考虑到流体是不可压缩的而做出一个附加近似，这时我们就有过一个补充方程

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

这最后一种近似往往很有效——特别是当流速比声速小得多的时候。但在实际流体中，认为可以略去我们所称之为黏性的那种内摩擦力几乎是绝对不正确的，而发生的大部分有趣的事情总是来自这种黏性。例如，我们曾见到在“干”水中环流永不会改变——如果开始时没有一个环流，往后也永不会有。可是，流体内的环流却是每天都要发生的事情。我们必须修补我们的理论。

我们从一个重要的实验事实着手。当我们过去算出“干”水环绕或经过一根柱体而流动——即所谓“有势流动”——时，我们没有理由不容许水具有与表面相切的速度，只有法向分量才必须等于零。我们并未把液体与固体之间或许会存在剪切力的那种可能性考虑进去。结果是——虽然并不是完全不言而喻的——在为实验所证实的一切场合下，在固体表面流体速度恰好为零。无疑，你已注意到风扇叶片会积聚一薄层灰尘——而当风扇已经把空气搅动后灰尘仍然留在那里。甚至在风洞中的大型风扇上，你也可以看到同样的效应。为什么灰尘不会给空气吹跑了呢？虽然事实是扇叶正以高速穿越空气而运动，但空气相对于扇叶的速率在叶面上恰好趋向于零。因此，那些最小的尘埃粒子才没有被扰动^[1]。所以我们必须对理论作出修正，以便能够与这个实验事实相符，即在一切通常的流体中，那些靠近固体表面的分子都会有零速度（相对于表面而言）^[2]。

我们原来是由这个事实来标志液体的，即如果你对它作用一个切应力——不管多么小——它就会放弃抵抗。它流动了。在静止情况下，不会有剪切应力。但在达到平衡之前——只要你仍然推动它——就可能存在剪切力。黏性描述了存在于运动流体中的剪切力。为得到流体运动时剪切力的量度，我们考虑下述实验。假设有两块其间夹有水的固体平面，如图41-1所示，保持其中一块固定，而另一块则以低

速率 v_0 对其作平行运动。如果你对保持上板运动所需要的力进行测量，你会发现这力与板的面积和 v_0/d 都成正比，其中 d 为两板间的距离。因此，剪切应力 F/A 正比于 v_0/d ：

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}.$$

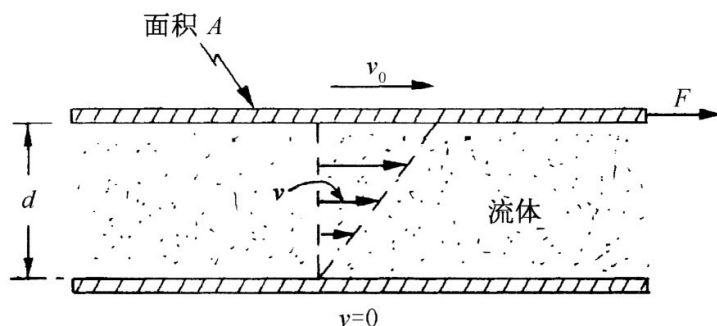


图41-1 在两平行板之间的黏性阻力

比例常数 η 称为黏性系数。

如果我们有一较复杂情况，则总可以考虑水中一个小而平坦的矩形单元，其上下两面都平行于水流，如图41-2所示。整个这单元上的剪切力由下式给出：

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (41.2)$$

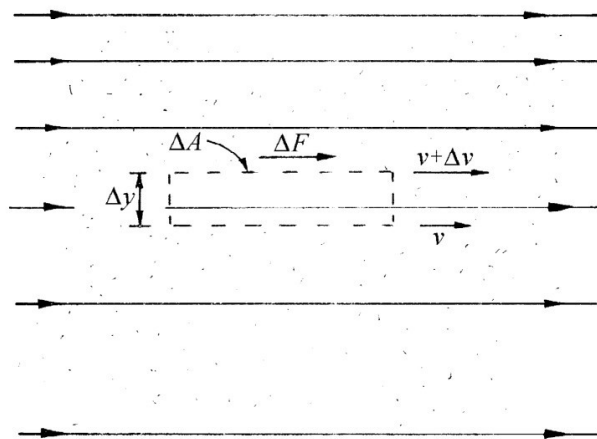


图41-2 在一黏性流体中的剪切应力

此时， $\partial v_x / \partial y$ 就是我们曾在第38章中定义过的剪切应变的变化率，因而对于液体来说，剪切应力与剪切应变的变化率 成正比。

在一般情况下，我们写成

$$S_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (41.3)$$

如果流体有一匀速转动，则 $\partial v_x / \partial y$ 是 $\partial v_y / \partial x$ 的负值，因而 S_{xy} 为零——正应该如此，因为在匀速转动的流体中不存在应力（我们在第39章中对 e_{xy} 下定义时做过类似的事情）。当然，还有关于 S_{yz} 和 S_{zx} 的相应表示式。

作为应用这些概念的一个例子，我们考虑在两个同轴圆筒间流体的运动。设内筒半径为 a ，圆周线速度为 v_a ，而令外筒具有半径 b 和圆周线速度 v_b ，参见图41-3。我们也许会问，在两筒之间的速度分布如何？为回答这一问题，我们从找出流体中距轴心为 r 处的黏性剪切力公式开始。根据问题的对称性，我们可以假定流动总是沿着切向

的，而其大小仅取决于 r ， $v=v(r)$ 。如果注视水里半径为 r 处的一
 个小斑点，它的坐标作为时间的函数为

$$x=r \cos \omega t, \quad y=r \sin \omega t,$$

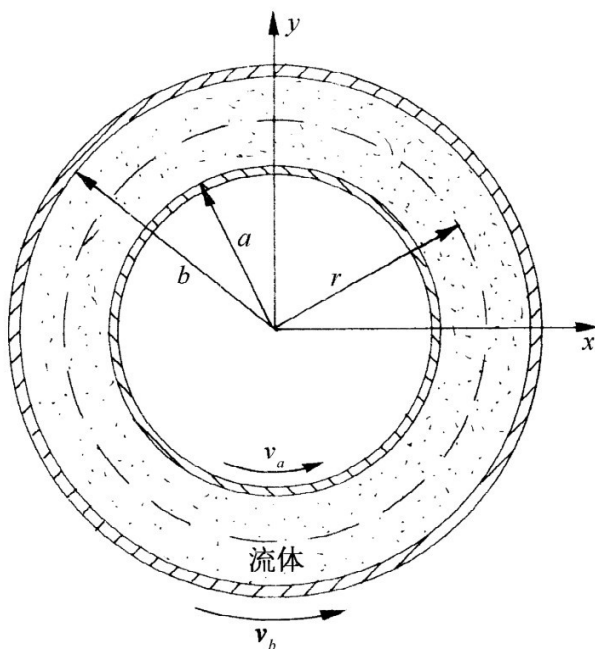


图41-3 在以不同角速度旋转着的两个同心筒之间流体的流动

其中 $\omega=v/r$ 。于是速度的 x 和 y 分量就是

$$v_x=-r\omega \sin \omega t=-\omega y$$

和

$$v_y=r\omega \cos \omega t=\omega x . \quad (41.4)$$

根据式(41.3)，我们有

$$S_{xy} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\omega) - \frac{\partial}{\partial y}(y\omega) \right] = \eta \left[x \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]. \quad (41.5)$$

对于 $y=0$ 的一点， $\partial \omega / \partial y = 0$ ，而 $x \partial \omega / \partial x$ 与 $r d\omega / dr$ 相同。因此在该点上，

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r \frac{d\omega}{dr} \quad (41.6)$$

（ S 应依赖于 $\partial \omega / \partial r$ 是合理的，当 ω 不随 r 变化时，流体就处匀速转动之中因而不会有应力存在）。

我们已算出来的应力是切线方向剪切应力，围绕着整个柱面它们都相同。通过把剪切应力乘以矩臂 r 和面积 $2\pi r l$ ，就可以获得作用于半径 r 处的整个柱形面上的转矩。我们得到

$$\tau = 2\pi r^2 l (S_{xy})_{y=0} = 2\pi \eta l r^3 \frac{d\omega}{dr}. \quad (41.7)$$

由于水的运动是定常的——没有角加速度——因而作用于 r 与 $r+dr$ 间水的柱壳上净转矩必然为零，这就是说，在 r 处的转矩势必被在 $r+dr$ 处的一个相等而相反的转矩所抵消，使得 τ 必须与 r 无关。换句话说， $r^3 d\omega / dr$ 等于某个恒量，比方说 A ，因而

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3}. \quad (41.8)$$

积分后，我们求出 ω 随 r 的变化关系为：

$$\omega = -\frac{A}{2r^2} + B. \quad (41.9)$$

A 和 B 两常数，它们由满足在 $r=a$ 处 $\omega = \omega_a$ 和在 $r=b$ 处 $\omega = \omega_b$ 的条件而被确定下来。结果得到

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_b - \omega_a), \\ B &= \frac{b^2\omega_b - a^2\omega_a}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (41.10)$$

所以我们就知道作为 r 的函数的 ω ，从而也知道 $v = \omega r$ 。

如果希望得到转矩，则可由（41.7）和（41.8）两式得到：

$$\tau = 2\pi\eta lA$$

或

$$\tau = \frac{4\pi\eta la^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_b - \omega_a), \quad (41.11)$$

它与两筒的相对角速度成正比。测量黏性系数用的一种标准仪器就是这样制成的。其中一个圆筒——比方说外筒——安装在一个支枢上，但由测量作用于筒上转矩的弹簧秤来保持其稳定，而内筒则以恒定角速度旋转着。于是，黏性系数由式（41.11）确定。

根据 η 的定义，你可以看出它的单位是 Nsm^{-2} 。对于 20°C 的水来说，

$$\eta = 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}.$$

通常更方便的是采用比黏性，即 η 除以 ρ ，此时水与空气之值就可以进行比较：

$$\begin{aligned} \text{在 } 20^\circ\text{C 的水,} \quad & \eta/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}; \\ \text{在 } 20^\circ\text{C 的空气,} \quad & \eta/\rho = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (41.12)$$

黏性通常强烈地依赖于温度。例如，对于刚好在凝固点时的水，其 η/ρ 比在 20°C 时的要大1.8倍。

§41-2 黏性流动

现在我们研究黏性流动的最普遍理论——至少是人类已经知道的最普遍形式。我们已经了解到剪切应力分量与各种速度分量的空间微商（诸如 $\partial v_x/\partial y$ 或 $\partial v_y/\partial x$ ）成正比。然而，在可压缩流体的普遍情况下，应力中还存在取决于速度其他微商的另外的项。普遍的表示式为

$$S_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (41.13)$$

式中 x_i 是直角坐标 x ， y 或 z 中的任一个，而 v_i 则是速度的直角坐标中的任一个（ δ_{ij} 是克罗内克符号，当 $i=j$ 时为1，而当 $i \neq j$ 时为零）。该附加项对于应力张量的所有对角元 S_{ii} 都增添了 $\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}$ 。如果流体是不可压缩的，则 $\nabla \cdot \mathbf{v}=0$ ，而这一附加项就不见了。所以它与受压缩时的内力有关。因此要描述流体就需要两个常数，正如我们过去在描述均匀弹性固体时曾有过两个常数一样。系数 η 即我们曾遇到的“普通”

黏性系数。它也被称为第一黏性系数或“剪切黏性系数”，而新的系数 η' 被称为第二黏性系数。

现在要确定单位体积里的黏性力 $f_{\text{黏}}$ ，以便能将其代入式（41.1）中而获得实际流体的运动方程。作用于流体中一小立方体上的力，等于作用在所有六个面上之力的合力。每次取其中两个面，将获得其差值，该值决定于应力的微商、亦即速度的二次微商。这很好，因为将会使我们回到矢量方程式上来。每单位体积的黏性力在直角坐标 x_i 方向的分量为

$$(f_{\text{黏}})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.14)$$

通常，黏性系数随位置的变化并不重要，因而可以忽略，这样，单位体积的黏性力就仅含有速度的二次微商。在第39章中，我们看到在一个矢量方程中可能存在的二次微商的最普遍形式为，含拉普拉斯符号（ $\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}$ ）的项与含散度的梯度项（ $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$ ）两者之和。式（41.14）恰好就是具有系数 η 和（ $\eta + \eta'$ ）的这样一个和。我们得到

$$\mathbf{f}_{\text{黏}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.15)$$

在不可压缩的情况下， $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，因而单位体积的黏性力正好是 $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ 。那就是许多人所用到的全部内容。然而，如果你要计算流体中声波的吸收，那你就需要第二项了。

现在可以完成实际流体运动的普遍方程方面的工作了。把式（41.15）代入（41.1）中，得

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

它是一个复杂的方程，但大自然就是这个样子。

如果像以往一样引进涡度 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ ，那么就可将上述方程写成

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.16)$$

我们再次假定唯一起作用的彻体力是像重力那样的保守力。为弄清楚新项意味着什么，让我们考察不可压缩流体的情况。于是，如果取式（41.16）的旋度，则得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}. \quad (41.17)$$

这个式子除了在其右边有一新项外就很像式（40.9）了。当右边为零时，我们曾有过涡度随流体一起运动的亥姆霍兹定理。现在，虽然在右边已有相当复杂的非零项，然而，它却具有简单明了的物理意义。如果暂时略去项 $\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})$ ，则得到一个扩散方程。该新项意味着涡度 $\boldsymbol{\Omega}$ 经由流体而扩散。如果在涡度方面存在一个大的梯度，则它将会扩散到其邻近的流体中去。

这就是引起烟环在前进时会变得较厚的那一项。同样，如果你把一个“洁净”的涡环（由上一章所描述的那台仪器造成的“无烟”环）送过烟雾，则它就可以漂亮地被显示出来。当它跑出烟雾时，它已很好地吸取了某些烟雾，所以你会看到一个空心的烟环壳。有些 $\boldsymbol{\Omega}$ 向外扩散进烟雾之中，但仍能保持与涡旋一起向前运动。

§41-3 雷诺数

现在我们要来描述因新的黏性项在流体流动特性方面所造成的一些变化。我们将相当详细地探讨两个问题。第一个是流体经过柱体的流动——那是我们在上一章就曾试图用非黏性流动的理论进行计算的问题。事实证明，今天人们只能对几种特殊情况求得黏性方程组的解。因此将要告诉你们的某些东西是建立在实验测量基础上的——假定实验模型满足方程式（41.17）。

数学上的问题是：我们很想对不可压缩的黏性流体流经一根直径为 D 的长柱体的流动进行求解。这种流动应该由式（41.17）及

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (41.18)$$

给出，同时满足下述条件：在远处速度是某个恒定值，比方说 V （平行于 x 轴），在柱体的表面处速度为零，即对于表面

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4},$$

会有

$$v_x = v_y = v_z = 0. \quad (41.19)$$

那就完全规定了该数学问题。

如果你考察那些方程式，你会明白对于该问题有四个不同常数： η ， ρ ， D 和 V 。你也许会想到应该对于不同的 V 、不同的 D 等等给出一

整系列的情况。然而，实际情况却并非如此，所有这些不同的可能解答均相应于一个参数的不同数值，这就是我们关于黏性流动所能说的最重要的普遍的东西。要知道其所以然，首先应当注意黏性和密度只出现在比率 η/ρ ——即比黏性中。这就把独立参数的数目减少到三个。现在假定我们采用出现于这个问题中的唯一长度、即柱体的直径 D 来量度所有距离，那就是说，用按照下列关系的新变量 x' ， y' ， z' 来代替 x ， y ， z ：

$$x = x' D, \quad y = y' D, \quad z = z' D,$$

这样 D 就从式(41.19)中消失了。同样地，若我们用 V 来量度所有的速度——即是令 $\mathbf{v} = \mathbf{v}' V$ ——则可以消去 V ，而在大距离上 $\mathbf{v}'$ 正好等于1。由于已确定了长度和速度的单位，所以现在我们的时间单位就是 D/V 。因而应该令

$$t = t' \frac{D}{V}. \quad (41.20)$$

采用这一套新的变量，式(41.18)中的那些微商就得从 $\partial/\partial \mathbf{x}$ 改成 $(1/D) \partial/\partial \mathbf{x}'$ ，其余依次类推，因而式(41.18)就变成

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{V}{D} \nabla' \times \mathbf{v}' = \frac{V}{D} \boldsymbol{\Omega}'. \quad (41.21)$$

于是我们的主方程式(41.17)可以看作

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t'} + \nabla' \times (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{v}') = \frac{\eta}{\rho V D} \nabla'^2 \boldsymbol{\Omega}'.$$

所有常数都精简成一个因子，根据传统我们将其写成 $1/R$ ：

$$\mathbf{R} = \frac{\rho}{\eta} V D. \quad (41.22)$$

如果真正记住全部方程式都是以这些新单位的量写出的，则可以省略一切带撇号。于是上面关于流动的方程组为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{R} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (41.23)$$

和

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

所附条件为：对于

$$x^2 + y^2 = 1/4, \quad (41.24)$$

$$v = 0;$$

以及对于

$$x^2 + y^2 + z^2 \gg 1,$$

$$v_x = 1, \quad v_y = v_z = 0.$$

这在物理上所包含的全部意义十分有趣。比如，它意味着：若我们解决了关于某速度 V_1 和某个柱体直径 D_1 的流动问题，然后又问起关于不同的 D_2 及另一种流体的流动问题，则对于给出相同雷诺数的速度 V_2 ——也就是说，当

$$R_1 = \frac{\rho_1}{\eta_1} V_1 D_1 = R_2 = \frac{\rho_2}{\eta_2} V_2 D_2 \quad (41.25)$$

时，流动将是相同的。对于雷诺数相同的任何两种情况，流动“看起来”将是一样的——用适当标度 x' ， y' ， z' 和 t' 的话。这是一个重要定理，因为它意味着我们不需制成一架飞机来做试验，就可以确定空气流经机翼时的行为。作为代替，可以制造一个模型并利用提供相同雷诺数的速度来进行测量。这是一个原理，它容许我们把小型飞机所作的“风洞”测量结果或把按比例缩小了的模型船在“模型池”中的试验结果应用于实际尺寸的物体。然而应当记住，只有假定流体的压缩性可以忽略时，我们才能这样做。要不然，就会进入一个新的量——声速。而只有在 V 对声速的比值也相同时，不同的情况才会真正互相对应。这后一比值称为马赫数。因此，对于接近声速或超过声速的速度，若两种情况的两个马赫数及两个雷诺数都相同，则在这两种情况下的流动才会彼此相同。

§41-4 经过一圆柱体的流动

让我们回到低速（几乎是不可压缩的）流经柱体的流动问题上来，将对实际流体的流动给予定性描述。有许多关于这类流动的情况我们很想知道——例如作用于柱体上的曳引力是什么？作用于柱体上的曳引力作为 R 的函数被画成图41-4中的曲线。若其他一切都保持固定的话，则 R 与空气的速度 V 成正比。实际上所画出来的乃是所谓曳引系数 C_D ，它是一个无量纲的数值，等于力除以 $\frac{1}{2}\rho V^2 D l$ ，其中 D 和 l 分别代表柱体的直径和长度，而 ρ 则是流体的密度：

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 D l}.$$

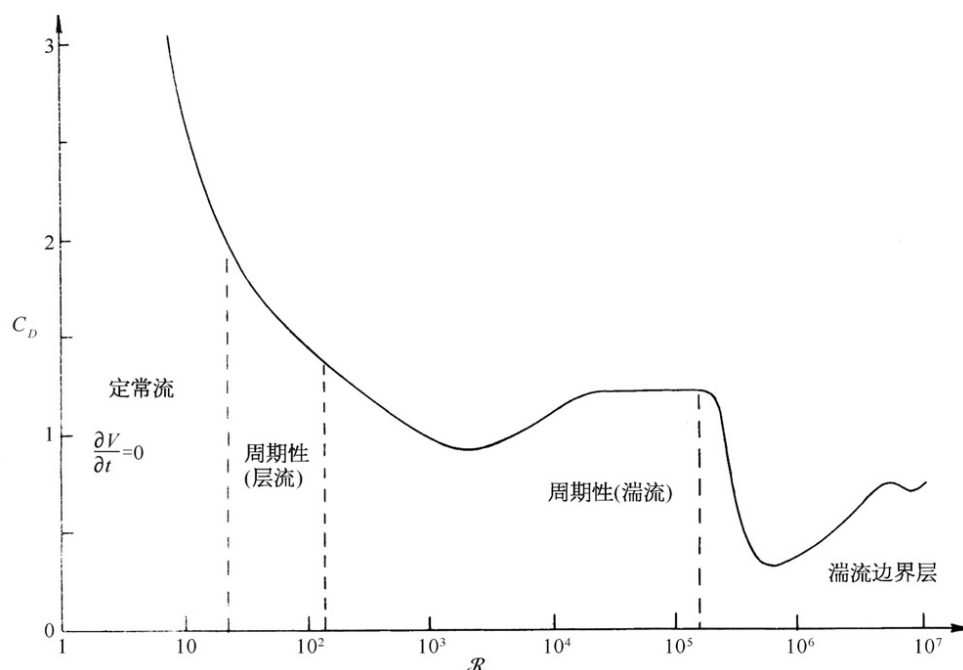


图41-4 一根圆柱体的曳引系数 C_D 作为雷诺数的函数

这曳引系数按相当复杂的方式变化，并为我们提供一种预示，即在流动中正发生着某些相当有趣而又复杂的事情。我们现在将对不同的雷诺数范围的流动性质进行描述。首先，当雷诺数十分小时，流动完全是定常的，这就是说，在任何地方速度都恒定，流动绕柱体而过。可是，流线的实际分布却不像在有势流动中那样，它们是稍微不同的方程之解。当速度十分低，或等效地说，当黏性十分高以致该物质像蜂蜜那样时，则那些惯性项都可以忽略，而流动便可由下式描写：

$$\nabla^2 \Omega = 0.$$

这个方程首先由斯托克斯求解。他也会解过关于球体的同样问题。若你有一个小球在这种低雷诺数的条件下运动，则曳引它所需之力等于 $6\pi\eta aV$ ，其中 a 为球体半径而 V 为其速度。这是一个十分有用的公式，因为它决定尘埃微粒（或可近似地视作球体的其他粒子）在一给定力的作用下穿过一流体——诸如在一离心机中，或在淀积或扩散过程中——的运动速率。在低雷诺数区域——对于 R 小于1的情况，围绕一根柱体的 ν 线如图41-5所示。

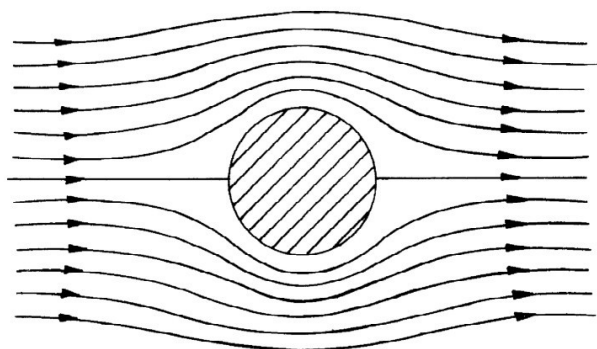


图41-5 围绕一根圆柱体的黏性流动（低速流动）

如果现在为了获得比1大一些的雷诺数而增大流体速率，则我们发现流动情况不同了。在该柱体后面存在环流，如图41-6（b）所示。关于是否即使在雷诺数最小时也总会有环流存在，或要在某一定雷诺数时情况才突然发生变化，这仍然是个未解决的问题。人们过去常常认为环流是连续不断地生长的，但现在却认为环流是突然出现的，并肯定它随 R 而增加。无论如何，对于 R 在10~30范围内的流动来说存在不同的特性。在该柱体后面就有一对涡旋。

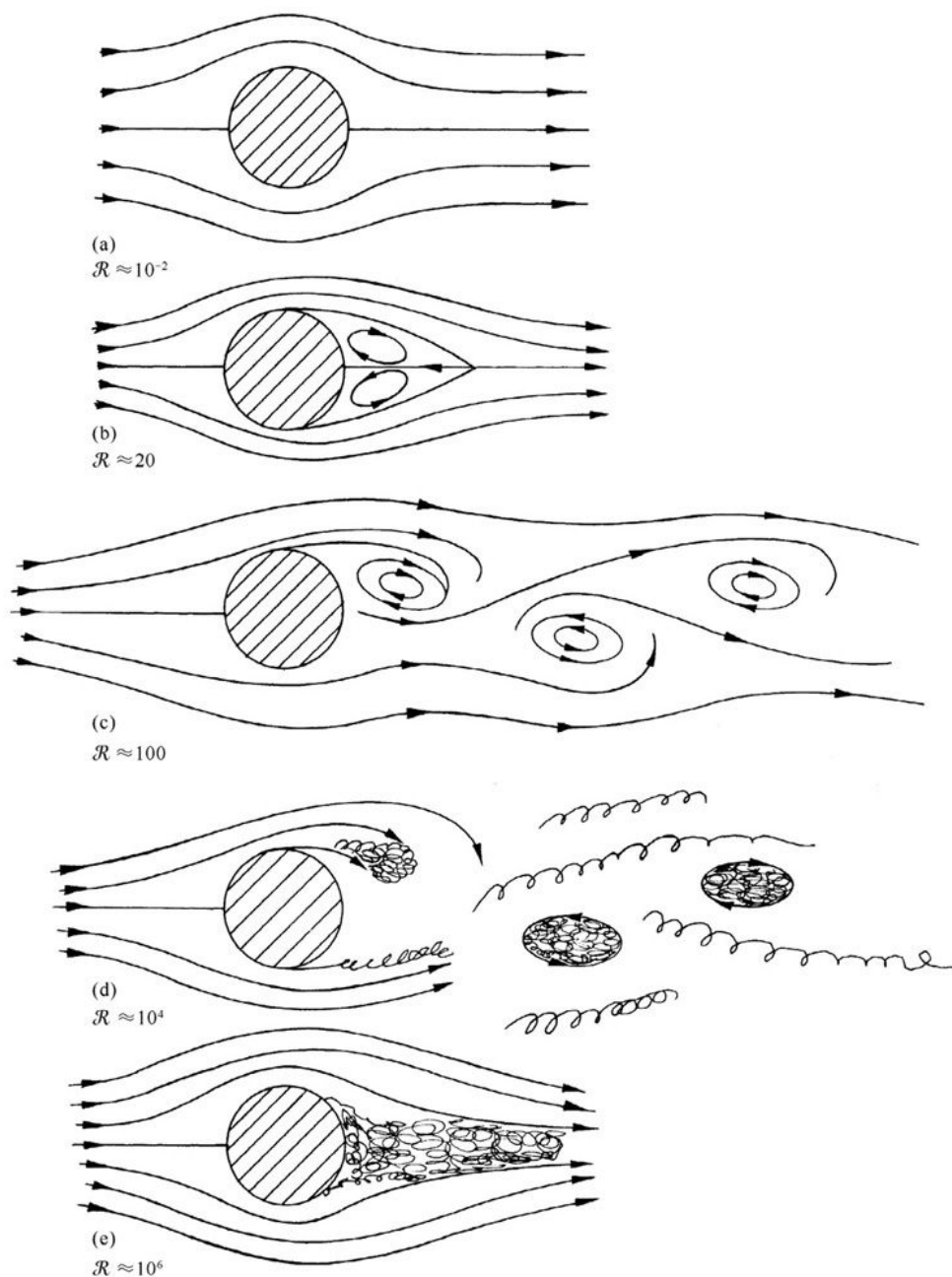


图41-6 流经一柱体的、不同雷诺数的流动

当 R 达到40左右的数目时，流动已经再次发生变化。在运动的特性方面突然有一个完全的改变。所发生的情况是，在该柱体后面有一个涡旋竟变得那么长，以致分裂开来并随液体顺流而行。这时在柱体后面附近的流体又会卷起来并形成新的涡旋。这些涡旋在每一边交替散裂，因而流动的瞬时图看来大致像示意图41-6（c）所画的那样，这

些涡旋的流称为“卡门涡街”，它们总是在 $R > 40$ 时出现，这种流动的照片如图41-7所示。

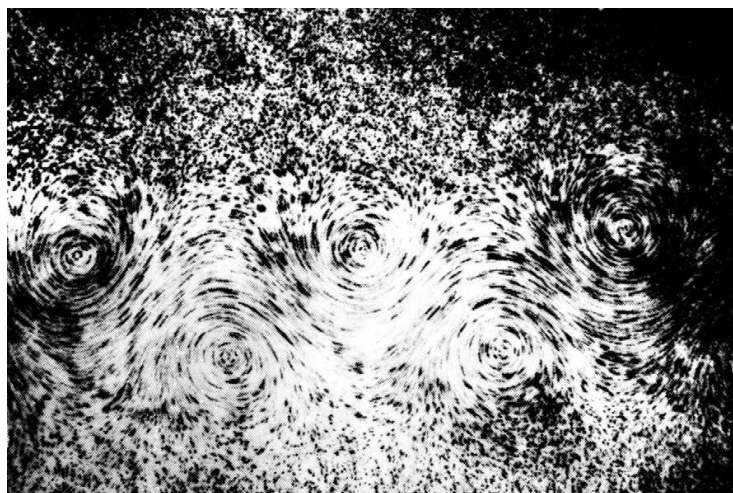


图41-7 由潘德耳 (L. Prandtl) 拍摄的在柱体后面的流动中出现的“涡街”照片

在图41-6中，(a) 与 (b) 或与 (c) 这两种流动间的差别在状态方面几乎已完全不同。在图 (a) 或 (b) 中，速度是恒定的，而在 (c) 中，则在任一点的速度都随时间变化。超过 $R = 40$ 时就不会有定常解了。对于这些较高的雷诺数，流动会随时间变化，但还是以有规则的周期性方式进行的。

关于这些涡旋如何产生，我们可得到一个物理概念。我们知道，流体速度在柱体表面处必须为零，也知道在离开表面后速度便迅速增长。涡性就是由流体速度方面的这种巨大的局域变化产生的。现在，当主流的速度足够低时，对涡性来说便会有充分时间从靠近柱面产生它的那个薄薄的区域扩散开来并生长成一个大涡旋区。这一物理图像应该会帮助我们对主流速度或 R 再度增大时在流动性质方面的下一次变化做好思想准备。

当速度变得越来越高时，涡性扩散至较大的流体区域中的时间就越来越少了。当雷诺数达到几百时，涡性已开始充满一条薄薄的带，如图41-6（d）所示。在这一薄层中，流动是混沌和无规的，这一个区域叫作边界层。而当 R 增大时这个无规流动区会克服困难越来越往上游伸展。在这一湍流区中，速度非常无规，而又“受到干扰”，流动也不再是二维的，而是在整个三维中都出现扭转和转动。但仍然有一规则的交替运动叠加于这种湍流之上。

当雷诺数进一步增大——对稍高于 $R=10^5$ 的那种流动——这湍流区会克服困难向前直到它抵达流线刚离开柱体的地点。这种流动如图41-6（e）所示，因而我们就有了所谓“湍流边界层”。并且，在曳引力方面存在猛烈变化，它下降了很多倍，如图41-4中所示。在这一个速率范围中，曳引力的确会随速度的增加而降低，周期性的迹象似乎很少。

对于更大的雷诺数将会发生什么呢？当我们进一步提高速率时，那尾流的尺寸会再度增大，而曳引力又复增加。最近的实验——达到 $R=10^7$ 左右——指出：有一种新的周期性出现在尾流之中，这或者是由于整个尾流以整体运动的方式发生了来回振动，或者是由于某种新类型的涡旋正伴随那不规则的嘈杂运动而产生。详细的情况迄今还不完全清楚，人们仍在用实验方法进行研究。

§41-5 零黏性极限

我们愿意指出，上面所描述的那些流动，没有一种与上一章所求得的那种有势流动解有任何相像的地方。乍一看来，这似乎很奇怪。

R 毕竟与 $1/\eta$ 成正比，因而 η 趋于零与 R 趋于无限大是等效的。若在式 (41.23) 中取大 R 的极限，则会把右边去掉，而正好得到上一章的那些方程。可是，你该会发现，在 $R=10^7$ 的那种高度湍流竟会趋向于从“干”水方程组所算出来的平滑流动，真是难以置信。当 $R=\infty$ 时，由方程式 (41.23) 所描述的流动会完全不同于我们从取 $\eta=0$ 开始着手获得的解，这怎么可能呢？答案十分有趣。应当注意式 (41.23) 右边存在 $1/R$ 乘一个二次微商，它是方程中比任何其他微商都高次的微商。发生的情况是：虽然系数 $1/R$ 是小量，但在表面附近的空间内却存在着 Ω 的十分迅速的变化。这些迅速变化补偿了那个小的系数，因而两者之积就不会 随 R 的增大而趋于零。解答就不会趋于当 $\nabla^2 \Omega$ 的系数变成零时的那种极限情况。

你可能会觉得奇怪，细粒湍流是什么，而它又是怎样维持它本身的呢？在柱体边缘某处所造成的涡度如何能在背景中产生那么多的噪声呢？答案又是很有趣的。原来涡性有扩大自身的倾向。如果我们暂时忘却那种会引起涡度损失的涡旋扩散现象，则流动的规律表明（正如我们以前见过的）：涡线会以速度 $\mathbf{v}$ 随同流体一起运动。可以想象，有一定数目的 Ω 线正被 $\mathbf{v}$ 的复杂流动花样所扭转和变形，这会将那些线紧密地吸引在一起并彻底混合。原先那些简单的涡线将会纠缠成结而且紧密地吸引在一起。涡度强度将会增加，而其无规性——包括正的和负的——一般也将增加。因此，当流体到处被旋转时，在三维中涡度的量值就增大。

你也许正好要问：“什么时候那种有势流动才是真正满意的理论呢？”首先，在湍流区以外，即在涡度还未通过扩散而明显进入的地区，它是令人满意的。通过制造特殊的流线型物体，我们就能使得湍

流区尽可能小。机翼——那是经过精心设计的——周围的那种流动就几乎完全是真正的有势流动。

§41-6 库埃特流动

流经一柱体那种流动的复杂而易变的特性并不特殊，而各种各样的流动可能性却会普遍地发生，这是有可能加以演示的。在第一节中我们曾经对两个圆筒间的黏性流动算出了一个解，并能够把这一结果与实际发生的情况进行比较。若取两个同心的圆筒，在它们之间的空隙里装进油，并放进一些铝粉以作为油中的悬浮物，这样流动就可容易观察到。现在，若缓慢地转动外筒，并不会有什么意料之外的事情发生，这可从图41-8（a）上看到。相反，若慢慢转动内筒，也不会有十分显著的事情发生。然而，若以较高速率转动内筒，则我们会感到惊奇，流体已破裂成一些水平带，如图41-8（b）所指出来的那样。当外筒以一相似速率转动而保持内筒静止不动时，却没有这种效应发生。怎么可能在转动内筒或转动外筒之间存在这种差别呢？毕竟，我们在第一节中导出的那种流动图样只依赖于 $\omega_b - \omega_a$ 。我们可以通过对图41-9所示截面的考察而得到答案。当内层流体比外层流体运动得快时，它们趋向于向外运动——离心力大于把它们固定在适当位置上的压强。因为外层的阻塞，所以整层流体不可能均匀地向外移动，因此就必然会破裂成小格并做环流，如图41-9（b）所示。就像房间里底部空气较热时所发生的对流。当内筒不动而外筒高速转动时，离心力会建立起把一切都保持在平衡状态的压强梯度——见图41-9（c）（正如在一间顶部空气较热的房子里那样）。

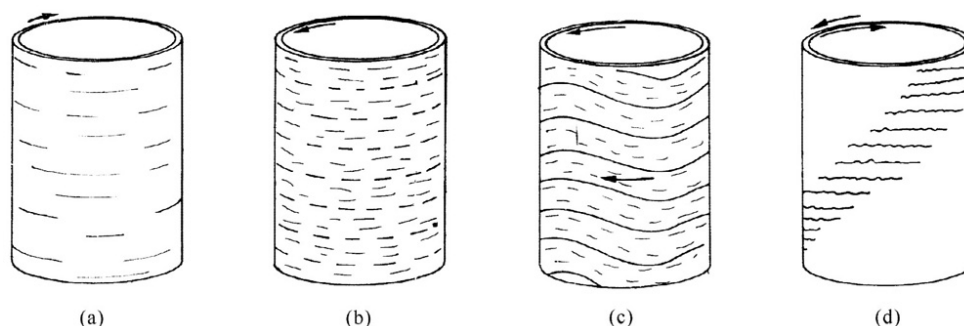


图41-8 在两个透明的旋转圆筒间液体流动的花样

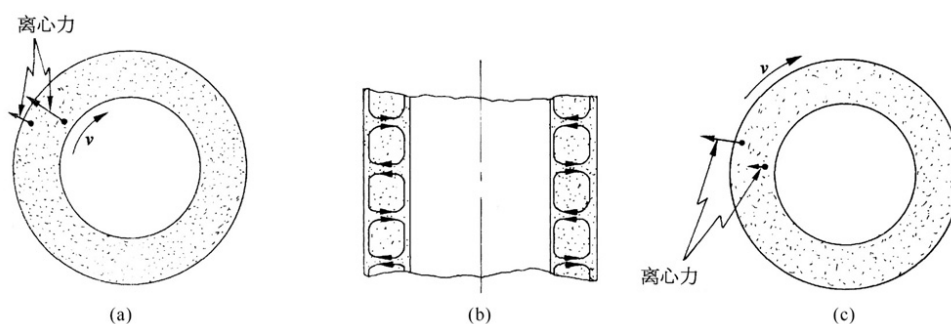


图41-9 为什么流动会破裂成带状

现在让我们提高内筒的转速。起初，带的数目增加。然后突然你会看到那些带变成波浪形状，如图41-8（c）所示，而这些波正在环绕着筒行进。波的速率很容易测量出来。对于相当高的转速来说，这波速会接近于内筒速率的三分之一。但没有谁能知其所以然！这就存在一种挑战，一个像 $1/3$ 的简单数目，还得不到任何解释。事实上，这种波形成的整个机制并未得到很好地理解，而它却是一种定常层流。

如果我们现在也开始转动外筒——但是沿相反方向——则该流动花样开始破裂，所获得的乃是波浪形状区域与表面上静止的区域相互交替的一种情形，如图41-8（d）所示意的那样，构成一种螺旋式的花样。然而，在这些“静止”区中，我们能够看到流动实在是很不规则的，它实际上完全是湍流，而那些波浪形状区也开始表现出无规的湍

流了。如果内外筒继而转得更快，则整个流动便会变成混沌的湍流了。

在这个简单的实验中，我们看到了许多有趣的、完全不同的流动状态，但它们却全都包含在一个参数 R 取不同数值的简单方程中。利用上面的旋转圆筒，能看到发生于流经柱体的流动中的许多效应：首先，有一种定常流动；其次，开始出现一种随时间变化的、但仍以有规则而又平滑的方式进行的流动；最后，流动就变成完全无规的了。你们大家都曾在平静空气里，从点燃着的一支纸烟升起的一股烟柱中看到相同的效应。有一股平滑而稳定的烟柱，接着当这股烟流开始破裂时就有一系列的扭转和弯曲，最后才形成一股无规的涡流烟云。

从所有这些实验中我们能够学到的主要经验是，一大堆不同的行为都隐藏在式(41.23)那组简单的方程中。所有的解都属于同样的方程组，仅有不同的 R 值。我们并没有理由认为在这些方程式中会有任何遗漏的项。唯一的困难在于，今天除了十分小的雷诺数——即完全黏性的那种情况——以外，我们仍然缺乏数学本领对各种情况进行分析。我们虽然写下了一个方程，但这并不会从流体的流动中除掉它的魅力、它的神秘或它的令人惊异之处。

若在只有一个参数的简单方程中这样的变化是可能的话，那么对于更加复杂的方程可能性是多么多啊！也许用以描述旋涡星云以及那些正在凝结、旋转、爆炸的众星球和众银河的基本方程，正好就是关于几乎为纯氢气的流体动力学行为的简单方程。经常有某些对物理学怀着毫无根据的恐惧心理的人会说，你不可能写出关于生命的一个方程。噢，也许我们能够。事实上，当我们写出量子力学的方程

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

时，我们就很可能已经有了足够近似的方程。刚才已经看到，事情的复杂性能够那么容易而又戏剧性地被用来描写它们的那些方程的简单性所忘记。人们往往还未认识到一些简单方程的适用范围，就得出结论，解释世界的复杂性所需要的除非上帝，而仅仅有方程是不行的。

我们已写出了关于水流动的方程组。从实验方面来说，也找到了一组用来讨论其解的概念和近似方法——涡街、湍性尾流、边界层等等。当我们在一种不那么熟悉的、而同时又还未能做出实验的情况下拥有相似的方程组时，就企图按照一种原始、不完全和混乱的方式求解那些方程，希望确定有什么新的定性特点可能会出现，或有什么新的定性形式是那些方程的结果。例如，当我们把太阳作为一个氢气球看待时，方程式把太阳描绘成没有太阳黑子、表面没有谷粒状结构，也没有太阳红焰和日冕。可是，所有这些，实际上都存在于该方程之中，只是我们还未找到借以获得它们的方法罢了。

还有一些人对于在其他行星上尚未找到生物而感到失望。我却不是那种人——我希望能通过行星际探索，以及从这么简单的原理就能产生出那种变化无穷而又新奇的各种现象，再次受到启发、受到鼓舞，并感到惊异。科学的检验标准乃是其预言的本领。假如你从未探望过地球，难道你能预言雷电、火山、海啸、极光以及五彩缤纷的晚霞吗？当我们获悉在那些死寂的行星——八个或十个球体——上每一个所发生的一切事情时，即每个都由同一种尘埃云所凝聚而成，而且每个又都遵循着完全相同的物理规律，那将是有益的一课。

下一个人类智慧的伟大启蒙期，很可能会产生出一种理解方程的定性内容的方法。目前我们还不能够。今天不能看出那个水的流动方程会含有人们在两个转动圆筒间所见得到的、像理发店门前的旋转招牌那样的湍流结构。今天还不能看出薛定谔方程是否包含青蛙、音乐作曲家或者伦理道德——也许它不会。对于超越事情本身范围的、像上帝那样的某些事情，我们不可能说需要还是不需要，因而我们都可以就这两种情况保持自己的坚定信念。

[1] 你能够 将大 的尘埃粒子从桌面上吹掉，但不能 吹去十分微细的灰尘，那些大的才会掉进到微风里去。

[2] 若情况不真实，你可以想象：虽然在理论上玻璃是一种“液体”，但肯定能够把它制造得沿钢面滑动。因此，我们的说法必然会在某处失效。

第42章 弯曲空间

§42-1 二维弯曲空间

按照牛顿理论，所有物体都吸引其他物体，吸引力与它们之间距离的平方成反比；物体受力后就产生与力成正比的加速度。这些就是牛顿的万有引力定律和运动定律。如你所知，它们说明了球、行星、人造卫星、星系等等运动的原因。

对于引力定律，爱因斯坦有不同的解释。按照他的理论，空间和时间——必须放在一起称为时空——在重质量物体附近是弯曲的。物体总是力图沿着弯曲时空中的“直线”行进，它们的这种运动方式是弯曲时空造成的。这是一个复杂的概念——非常复杂。这就是本章我们要阐明的概念。

我们的题目含有三个部分。一部分涉及引力效应；另一部分涉及我们已经学过的时空概念；第三部分与弯曲时空概念有关。开始时我们把题目简化，先不考虑引力，且撇开时间——只讨论弯曲空间。稍后，我们会谈到其他部分，但现在我们将把注意力集中在弯曲空间的概念——弯曲空间的含意是什么，更确切地说，爱因斯坦应用弯曲空间的含意是什么。结果发现，即使如此，在三维情况下仍相当困难。所以我们一开始还得把问题做进一步的简化，只讨论二维情况下“弯曲空间”一词的意思是什么。

为了理解二维情况下弯曲空间的概念，你真应该去体验一下生活在这种空间中的角色的特别的观点。假定我们设想一只昆虫，它没有眼睛，生活在一个平面上，如图42-1所示。它只能在平面上行动，而且无法知道有什么发现任何“外部世界”的方法（它没有你们的想象力）。当然，我们将用类推法进行讨论。我们生活在一个三维的世界，因而不会有任何离开我们的三维世界、在一个新的方向上的想象能力，所以我们只得通过类推的方法把事情想清楚。这如同我们就是一只生活在平面上的昆虫，而在另一方向上存在着空间。这就是为什么我们首先将和昆虫打交道，并记住它必须生活在它的表面上而不能离开的原因。

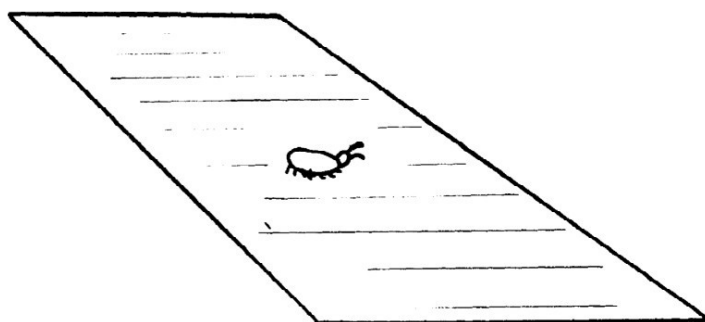


图42-1 平面上的一只昆虫

作为生活在二维空间中昆虫的另一例子，我们设想有一只昆虫生活在球面上。我们可以想象它在球的表面上到处爬行，如图42-2所示，但它不能“仰视”、“俯视”或“朝外面”观看。

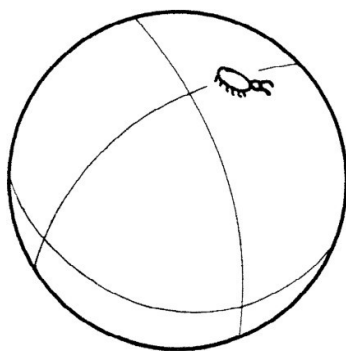


图42-2 球面上的一只昆虫

现在我们还要考虑第三种生物。它也和前面两个例子一样是一只昆虫，和第一只昆虫那样生活在一个平面上，但这个平面很独特，在不同的地方具有不同的温度。同时，昆虫和它使用的尺全是由相同的材料做成的，当材料被加热时就膨胀。每当它拿一把尺放在某处去测量某物体时，尺就立即膨胀至与该处温度相当的长度。无论它把什么物体——它自身、尺、矩形或任何东西——放在何处，该物体总会因热膨胀而伸展自己。任何物体在热的地方比在冷的地方要长，而任何物体都具有相同的膨胀系数。我们把第三种昆虫的住处称为“热板”，不过，我们特别将它设想为一种特殊类型的热板，它的中心较冷，越走向边缘越热（参见图42-3）。

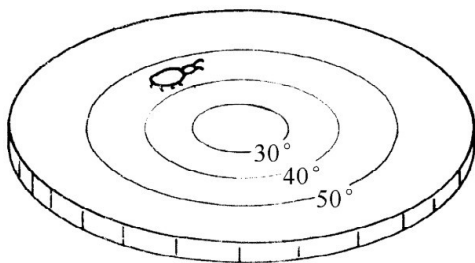


图42-3 热板上的一只昆虫

现在我们将想象那些昆虫开始研究几何学。虽然我们设想它们是瞎子，不能看见任何外部世界，但它们还能用腿及感觉器官做很多事

情。它们可以画出线条，能够制造尺并测量长度。首先，假定它们从最简单的几何概念着手。它们学习如何做一条直线——定义为两点之间最短的连线。第一只昆虫——参见图42-4——学会了做非常好的线。但对于球面上的昆虫来说会发生什么情况呢？它把直线画成两点之间（对它来说）的最短距离，如图42-5所示。对我们来说，它看起来像一条曲线，但是它无法离开球面找出“真正”更短的线。它仅知道，如果在自己的世界中 尝试做别的路径，则这些路径总是比它的直线要长。所以我们将允许它把直线作成两点之间最短的圆弧（当然是大圆的圆弧）。

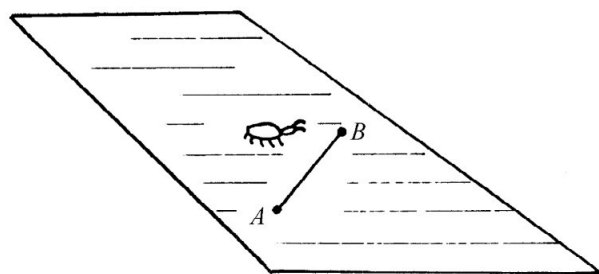


图42-4 在平面上做直线

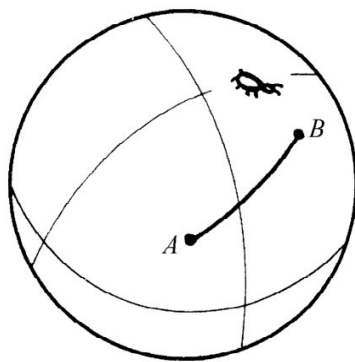


图42-5 在球面上做直线

最后，第三只昆虫——图42-3中的那只昆虫——也会画出“直线”，虽然对我们来说它看起来像曲线。例如，图42-6中A和B之间的

最短距离应该沿着像图中所示的曲线。为什么呢？因为当线弯向热板的较暖部分时，尺会变得较长（从我们无所不晓的观点来看），因而从A到B不断丈量所取得的“码尺”的次数就较少。所以对它来说该线是直的——它无法知道在陌生的三维世界中还会有人把别的线称为“直线”。

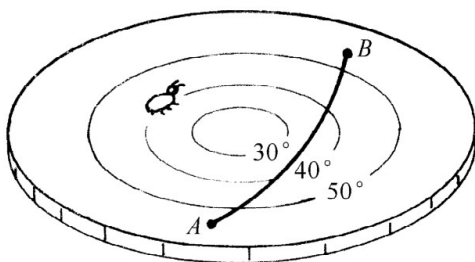


图42-6 在热板上做直线

我们认为你已经得到这样的概念，即其他一切分析将始终是从位于特殊表面上的生物的观点出发，而不是从我们的观点出发的。考虑到这点，我们来看看它们的其他几何图形像什么样子。我们假定昆虫们都已学会如何使得两条线相交成直角（你可以想象出它们如何才能做到这一点）。因此第一只（在正常平面上的）昆虫发现一个有趣的事实。如果它从A点出发做一条长100 in的线，然后作一个直角并标出另一条100 in的线，接着做另一个直角，并做另一条100 in的直线，然后做第三个直角和第四条100 in长的线，最后恰好在出发点结束，如图42-7（a）所示。这个图形成为它所在世界的一个特征——它的“几何学”中的一个事实。

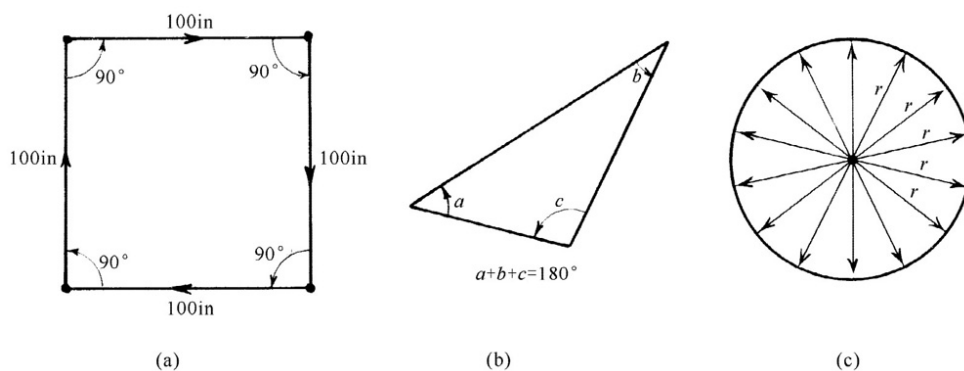


图42-7 平直空间中的正方形、三角形和圆

然后，它发现另一件重要的事情，如果它做一个三角形——用三条直线画出的图形，则三个内角之和等于 180° ，即等于两直角之和，参见图42-7（b）。

接着，它发明了圆。圆是什么？圆是用这样的方法做成的：你从一点出发，沿着许许多多方向画直线，并将所有到出发点具有相同距离的大量的点连成线，参见图42-7（c）（如何给这些事物下定义，我们应小心从事，因为我们必须能够去为其他伙伴做类似的东西）。当然，通过围绕该点转动一把尺，你也能够做出与此等价的曲线。反正上述昆虫已学会如何去做圆，因此，有一天它想去测量圆周的距離。它测量几个圆周后发现了一个简洁的关系：周长恒等于同一个数目乘以半径 r （当然， r 是从中心到外面曲线的距离）。周长和半径总是具有相同的比例——近似为6.283——与圆的大小无关。

现在，我们来看看其他昆虫对于它们的几何学发现了些什么。首先，当球面上的昆虫试图做一个“正方形”时会发生些什么呢？如果按照我们上面给出的规定，它大概会认为所得结果很不值得忧虑。它得到了像图42-8中所示的图形。它的结束点 B 并不在出发点 A 上，它根本没有做成一个闭合的图形。你可以弄一个球来试试看，对于热板上的昆虫朋友来说也会出现类似的情况。如果它画出了四根等长的直线

——用它膨胀的尺测量的——用直角连接后，它会得到一幅如图42-9所示的图形。

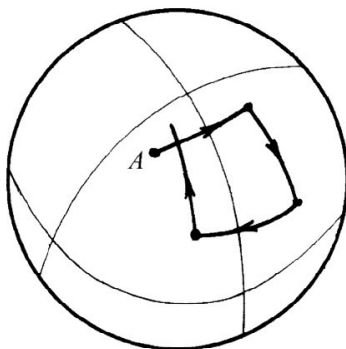


图42-8 在球面上试做“正方形”

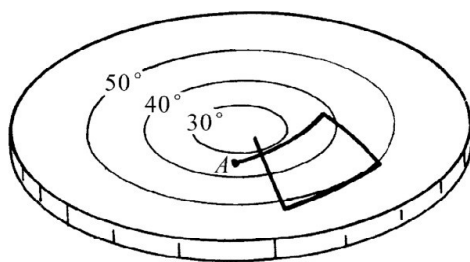


图42-9 在热板上试做“正方形”

现在假定每只昆虫都有它们自己的欧几里得，他曾告诉它们几何图形“应该”像什么样子，而且它们已经通过小尺度范围所做的粗糙测量对之进行了初步的检验。然后当它们试图在大尺度范围做一个精确的正方形时，就发现有点不对。要害在于，仅通过几何学的测量就会发现它们的空间有些问题。我们定义的弯曲空间，就是其中的几何图形不是我们在平面情况下所期望的形状的那种空间。昆虫在球面或热板上所做的几何图形就是弯曲空间的几何图形。那里欧几里得几何学的规则失效了。为了查明你所生活的世界是弯曲的，没有必要得使自己离开这个平面；为了弄清楚你生活的面是一个球面，没有必要去环绕这个球飞行。通过丈量一个正方形，你就可以发现你生活在一个球

上面。如果正方形很小，则将需要很高的精度；若正方形很大，那测量工作可以做得粗一点。

让我们考虑平面上的三角形，内角之和等于 180° 。我们在球面上的朋友可能发现一些很特殊的三角形。例如它可能发现具有三个直角的三角形。的确是！其中之一如图42-10所示。假定昆虫从北极出发，做一条直线直达赤道，然后做一个直角以及同样长度的另一条直线。接着它再做一遍。根据它所选取的很特殊的长度，它正好回到出发点，和第一条直线相遇，并与其构成直角。所以，对它来讲，毫无疑问这个三角形具有三个直角，即它们之和为 270° 。结果表明，对它而言，三角形三内角之和恒大于 180° 。事实上，超过部分（对于上述特殊情况，超过 90° ）正比于三角形有多大的面积。如果球面上的一个三角形很小，则它的角相加就非常接近 180° ，仅稍微超过一点。当三角形变得较大时，这种差异就会上升。在热板上的昆虫会发现它们的三角形具有类似的困难。

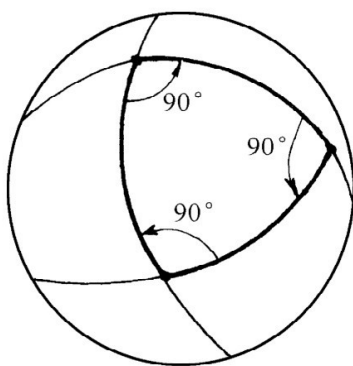


图42-10 在球面上一个“三角形”可以具有三个 90° 的角

接下来我们考察关于圆其他昆虫发现了什么。它们做一些圆并测量它们的周长。例如，在球面上的昆虫或许会做出如图42-11所示的那个圆，而且它会发现该圆的周长小于 2π 乘以半径（你可能知道，从我们的三维观点来看，这是很明显的，即它所谓的“半径”是弯曲的，比

该圆的真实半径要长)。假定球面上的昆虫已经学过欧几里得几何，并决定预言半径等于周长除以 2π ，取作

$$r_{\text{预}} = \frac{C}{2\pi}. \quad (42.1)$$

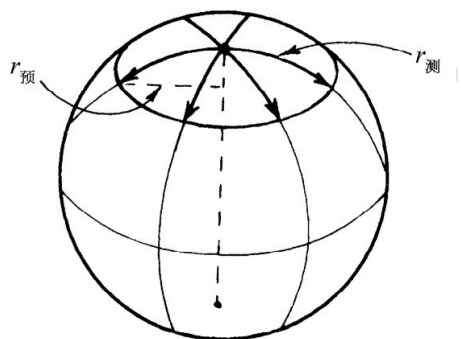


图42-11 在球面上做圆

因此它会发现所测得的半径比预言的半径要大。若继续讨论这个题目，那它或许会把这个差定义为“逾半径”，并写成

$$r_{\text{测}} - r_{\text{预}} = r_{\text{逾}}, \quad (42.2)$$

并且研究逾半径效应如何取决于圆的大小。

在热板上的昆虫会发现类似的现象。假定它以板上的冷点为圆心画圆，如图42-12所示。要是我们看着它做圆，则会注意到它的尺在靠近圆心时较短，而当尺移动到外面时就变长——虽然昆虫并不知道，这也是显然的事。当它测量周长时，尺始终是长的，所以它也发现测得的半径较预期半径 $C/2\pi$ 要长。因此，热板上的昆虫也发现了“逾半径效应”，该效应的大小又决定于圆的半径。

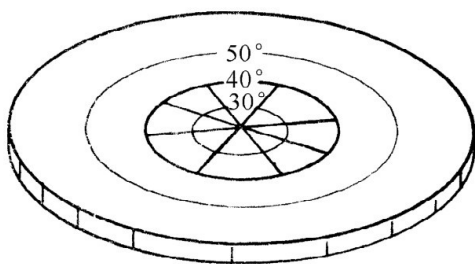


图42-12 在热板上做圆

我们将把“弯曲空间”定义为其中会发生下述类型几何偏差的空间：三角形三内角之和不等于 180° ；圆的周长除以 2π 不等于半径；制作正方形的规则不会给出闭合的曲线。你可能还会想到一些别的偏差。

我们已经给出了两个关于弯曲空间的不同例子：球面和热板。但有趣的是，如果选取正确的温度随热板上距离变化的函数，则这两种几何将是完全相同的。这事相当有趣，我们可以使得热板上的昆虫和球面上的昆虫获得完全相同的答案。对于那些爱好几何学和几何学习题的人，我们将告诉你们如何才能做到这一点。如果设想尺的长度（由温度确定）与1加上某个常数乘上距原点距离的平方成正比，那么你将发现热板上的几何在所有细节上^[1]均与球面上的几何完全相同。

当然，还有其他类型的几何学。你们可能会问，那生活在梨上面的昆虫，也就是生活在有的地方弯曲得比较厉害、有的地方弯曲得比较平坦的曲面上的昆虫，其几何将如何。这时，昆虫在它的世界中的一部分所做的小三角形，其角的逾量比在另一部分所做的小三角形要大。换句话说，空间的曲率是可以逐处变化的，这就是对上述概念的概括。这种情况也可以通过热板上适当的温度分布来进行模仿。

我们也不妨指出，上述结果可以从类似矛盾的、相反的东西中得出来。例如，你们可能会发现，当把三角形做得太大时三内角之和小于 180° 。这话也许听起来不大可能，但一点也不假。首先，我们该有一块热板，它的温度随距中心的距离而降低，于是所有的效应都会反转过来。但是我们也可以通过考虑二维的鞍面几何图形而纯粹从几何学上做到这点。想象如图42-13所示意的马鞍型曲面，现在在该曲面上画一个“圆”，把它定义为距中心相同距离的所有点的轨迹。这个圆是一条像扇贝壳那样上、下波动的曲线，所以它的周长比根据 $2\pi r$ 所预期的值要长。这时的 $C/(2\pi)$ 就大于 $r_{\text{平均}}$ ，“逾半径”应为负值。

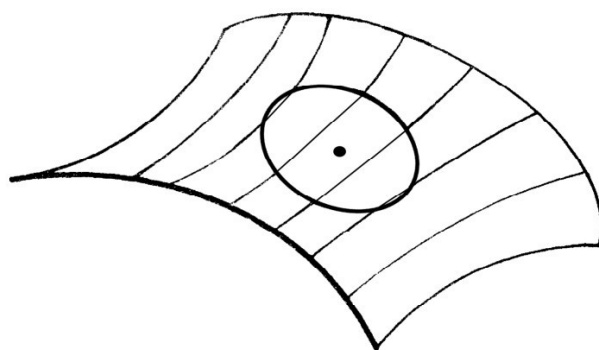


图42-13 马鞍型曲面上的圆

球、梨等这类物体全都具有正曲率的表面；另一类物体则称为具有负曲率的表面。一般说来，一个二维世界的曲率将是逐处变化的，在某个地方为正，而在另一个地方为负。通常，我们所谓的弯曲空间，仅是指其中欧几里得几何规则因一个偏差符号或其他原因而失效的空间，曲率的量值——比如说由逾半径所定义——可以逐处变化。

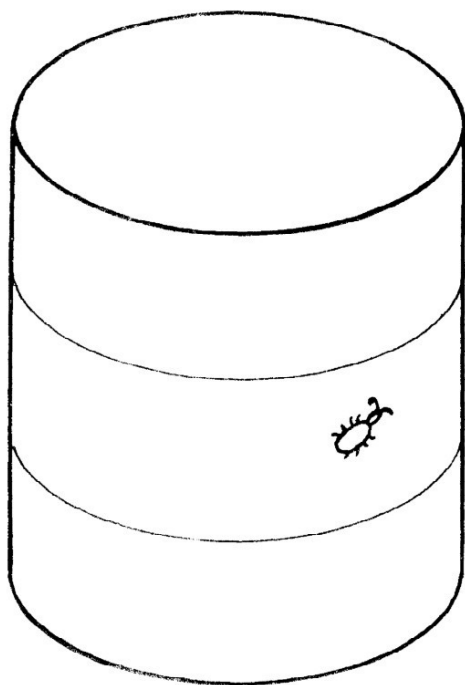


图42-14 具有零内曲率的二维空间

我们应该指出，根据上面对曲率的定义，圆柱面是不弯曲的，这令人相当奇怪。如果一只昆虫生活在一个圆柱面上，如图所示，则它会发现三角形、正方形以及圆所具有的一切特征，与它们在平面上所具有的特征完全相同。只要设想一下，如果将圆柱面展开成一个平面，那么所有这些图形看起来将是什么样子，就不难明白这一点。因此，所有的几何图形都能够画得与它们在平面上的图形完全对应起来。所以对生活在圆柱面上的昆虫来说（设想它不会绕圆柱兜一圈，而只会做局部测量），它一点也发现不了它所在空间是弯曲的。从我们的学术意义上来说，我们认为它的空间并不是弯曲的。我们要谈的曲率，更精确地应称为内（禀）曲率，这是一种只能通过局部区域的测量而得出的曲率〔圆柱面没有内（禀）曲率〕。这是爱因斯坦所指定的意思，每当他说我们的空间是弯曲的时候，指的就是这个意思。但到目前为止，我们只定义了二维情况下的弯曲空间，我们必须继续去弄清楚在三维情况下这个概念会意味着什么。

§42-2 三维空间的曲率

我们生活在三维空间中，所以我们要讨论三维空间弯曲的概念。你们会问：“然而你们如何才能把它想象为在任何方向都是弯曲的呢？”好吧，我们所以不能把空间想象为在任何方向都是弯曲的，那是因为我们的想象力还不够好（或许也正因为我们不能想象得太多，所以我们不能完全摆脱真实世界）。但仍可以定义三维世界的曲率，而用不到脱离这个三维的世界。我们曾谈论过的关于二维世界中的一切仅仅是一个练习，目的是为了说明如何才能获得曲率的定义，而不需要我们具有从外部“观望”的能力。

我们可以用生活在球面上或热板上的先生们曾使用的、完全相似的方法，来确定我们的世界是否是弯曲的。或许我们不能区分这两种情况之间的差别，但的确可以把这些情况与平直空间或平板区分开来。如何区分？相当容易：设置一个三角形并测量其内角；或做一个大圆并测量其周长和半径；或者尝试设置一些精确的正方形；或者试做一个立方体。检测在每种情况下几何定律是否成立。如果它们不成立，我们就说该空间是弯曲的。若设置一个大三角形，而且其内角之和大于 180° ，则我们可以称该空间是弯曲的。或者，若测得一圆的半径不等于其周长除以 2π ，则我们也可以说该空间是弯曲的。

你会注意到，情况在三维中可能比在二维中复杂得多。在二维中的任何一个地方都有确定大小的曲率，但在三维中的每个地方可能存在有关曲率的几个分量。如果在某个平面内安置一个三角形，则只要三角形的平面有不同的取向就可能得出不同的答案。或举一个圆的例子。假定我们画了一个圆并测量它的半径，结果并不与 $C/2\pi$ 相符，以致存在某个逾半径。此时我们画出另一个与其垂直的圆，如图42-15所

示。对于这两个圆，不一定有完全相同的逾半径。事实上，对某一个平面上的圆来说可能存在正的逾，而对另一个平面上的圆来讲可能存在亏损（负逾）。

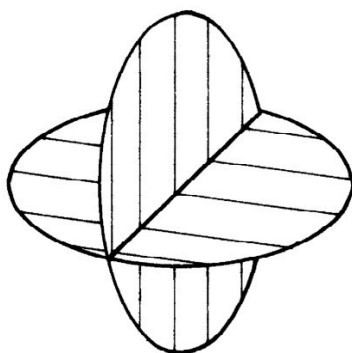


图42-15 不同取向的圆可以有不同的逾半径

或许你们正在想一个好主意：我们不是可以用三维的球来获得各处所有的分量吗？我们可以取所有与空间给定点等距离点以确定一个球。然后在球面上设置一个精密的正交网格，并把这些小区域加起来，这样我们就可以测得球的表面面积。按照欧几里得几何学，总面积 A 被认为是半径平方的 4π 倍，所以我们可以定义“预期半径”为 $\sqrt{A/4\pi}$ 。我们也可以挖一个洞通到中心并测量其距离，从而直接测得半径。我们可以再次将测量半径减去预期半径，并把其差称为半径的逾，即

$$r_{\text{逾}} = r_{\text{测}} - \left(\frac{\text{测量面积}}{4\pi} \right)^{1/2},$$

它应该是完全令人满意的曲率测量，它的巨大优点在于它与三角形或圆的取向无关。

但是球面的逾半径也有缺点，它并不完全表示空间的特征。由于存在各种曲率的平均效应，所以它给出的是所谓三维世界的平均曲率

。然而，既然是一种平均，它就不能完全解决关于确定几何图形的问题。如果你只知道这个数值，则不可能预言空间的全部几何性质，因为你不可能知道对于不同取向的圆会发生什么情况。完整的定义需要在每一点规定六个“曲率数”。当然，数学家知道如何写出所有这些数。总有一天你可能会在数学书中看到怎样用高级而精巧的形式把它们写出来，但是，起初用粗略的方法弄清楚你试图写出些什么，这不失为一个好主意。对于大多数目标来说，平均曲率可能就足够了。[\[2\]](#)

§42-3 我们的空间是弯曲的

现在来讨论主要问题。它是真的吗？我们生活的现实的物理三维空间是弯曲的吗？一旦我们具有了足够的想象力去认识空间是不是被弯曲了的可能性，那么人类的脑子自然就对现实世界是否弯曲变得好奇起来。为了尝试得出解答，人们已经进行了直接的几何测量，但没有发现任何差异。但从另一方面来说，根据有关引力的论证，爱因斯坦发现空间是弯曲的，而我们想要告诉你们关于曲率大小的爱因斯坦定律是什么，也希望对你们讲一点关于他是如何发现这个定律的情况。

爱因斯坦曾说，空间是弯曲的，而物质是曲率之源（物质也是引力之源，所以重力与曲率有关——但这种关系将在本章的后期涉及）。为了使事情稍微容易些，我们假定物质以某种密度连续地分布，然而，密度可以按你想要的大小逐处变化[\[3\]](#)。对于曲率，爱因斯坦给出的规则如下：如果有一个空间区域内部存有物质，而我们取一个足够小的球，其内部的物质密度 ρ 实际上为常数，那么该球半径的逾正比球内的质量。利用逾半径的定义，得

$$\text{半径的逾} = r_{\text{测}} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{G}{3c^2}M. \quad (42.3)$$

式中 G 为（牛顿理论的）引力常数， c 为光速， $M=4\pi\rho r^3/3$ 是球内物质的质量。这就是空间平均曲率的爱因斯坦定律。

假定以地球为例，且不考虑密度的逐点变化——所以不必做任何积分。假定我们非常仔细地测量地球的表面，然后挖一个洞通到中心并测得其半径。根据球的面积等于 $4\pi r^2$ 的假设，由所测面积可以计算出预期半径。当把预期半径与实际半径进行比较时，会发现实际半径超过预期半径，其值由式（42.3）给出。常数 $G/(3c^2)$ 约为 $2.5\times 10^{-29} \text{ cm g}^{-1}$ ，所以对每一克物质来说，其测量半径就要多出 $2.5\times 10^{-29} \text{ cm}$ 。代入约为 $6\times 10^{27} \text{ g}$ 的地球质量，结果是地球具有的半径比根据其面积计算应得的半径大 1.5 mm ^[4]。对太阳做相同的计算，你会发现太阳的半径比预期值超出半公里。

你会注意到该定律说，地球表面区域的上方平均曲率为零。但这并不意味着曲率的所有分量为零。地球上方可能仍然存在——而事实上是存在——某种曲率。就平面上的一个圆来说，对于某些取向将有一种符号的逾半径，而对于另外一些取向则逾半径的符号相反。结果正好证明当球内的质量为零时曲率对整个球面的平均为零。顺便说说，结果表明曲率的各个分量与平均曲率的逐处变化之间存在着联系。所以如果你知道了各处的平均曲率，你就能计算出每个地方曲率分量的细节。地球内部的平均曲率是随深度变化的，这就意味着地球内部和外部的某些曲率分量都不为零。正是这种曲率，我们把它看作为引力。

假定在平面上有一只昆虫，而且假定这个“平面”的表面有些小突起。凡是有小突起的地方，昆虫会得出结论说：它的空间具有小的局部弯曲的区域。在三维中也有同样的情况，凡是物质堆积的地方，三维空间就有局部弯曲——一种三维突起。

如果在平面上造成许多隆起，则除了所有的突起以外，可能存在总体的弯曲——表面或许变得像一个球。搞清楚我们的空间是否由于像地球和太阳那样的物质堆积而形成局部的突起，从而具有净的平均曲率，这应该是有意义的。天体物理学家一直试图通过对非常遥远的星系的测量来回答这个问题。例如，若我们在很远距离处的球壳内所观测到的星系数目，与根据我们所知的球壳半径应该预期到的数目不同，则我们就会得到关于非常大的球的逾半径的量度。根据这种测量，希望找出我们的整个宇宙就平均而言究竟是平坦的，抑或是球形的——是像一个球那样是“闭合”的，还是像一个平面那样是“开放”的。你们可能听说过有关这个问题的争论，这个争论还将继续下去。争论所以会存在，是因为天文学测量仍然完全没有确定的结果；实验数据又不够精确，不能给出确切的答案。可惜，我们在大尺度方面还没有关于宇宙整体曲率的丝毫概念。

§42-4 时空中的几何学

现在我们得谈谈关于时间的问题。从狭义相对论知道，空间的测量和时间的测量是互相联系的。在空间发生某件事，而同一件事中又不包含时间，这可是一种古怪的想法。你可能记得时间的测量值与你的运动速率有关。例如，如果我们看见飞船中一个人从旁边经过，则我们知道，对他来说发生的事情比对我们而言要慢。我们说，根据我

们的表，他出去旅行恰好经过100 s返回，但按照他的表或许只用去了95 s。与我们的表相比，他的表——以及所有其他过程，像他的心脏跳动——都进行得较慢。

现在我们来考虑一个有趣的问题。假定你位于一飞船中，我们要求你在发出某个信号时出发，而当你返回到你的出发点时恰巧赶上第二个信号——比如说按照我们的钟正好过了100 s。另外，要求你用这样的方式做往返运动，使在这过程中你的表显示所用去的时间尽可能最长。试问你应该如何运动？你应该站着不动。如果你稍微有点运动，则返回时你表的读数肯定少于100 s。

然而，假定我们把问题做一点变动。假定要求你在某个信号时从点A出发走向点B（这两点对我们而言是固定的），而后以同样的方法返回，恰好在第二个信号（比如说按我们固定的钟为100 s后）时回到原地。仍要你用这样的方法做往返运动，使得你表上的读数尽可能大。你应该怎么做？要用什么样的路径和什么样的程序你的表才会显示出你到达时耗费的时间最多？答案是：如果你以匀速沿直线往返，则从你的观点来看将耗费最多的时间。理由在于：任何额外的运动和任何超高速运动都将使你的钟变慢（既然时间差决定于速度的平方，那么你在一处走得过快而失去的时间，永远也不能通过在另一处走得过慢而得到补偿）。

总之，这就是我们在时空中定义“直线”所能够使用的概念。时空中沿恒定方向的匀速运动与空间中的直线相类似。

空间中最短距离的曲线与时空中相对应的并不是最短时间的路径，而是最长时间的路径，这是由于相对论中 t^2 项符号所引起的怪事。于是，“直线”运动——类似于“沿直线的匀速运动”——就是以这

种方式进行的运动，它使表在某个时刻从某个地方出发，在另一时刻到达另一地方的运动中给出最大的时间读数。这就是时空中类似于直线的定义。

§42-5 引力与等效原理

现在我们可以讨论引力定律了。爱因斯坦曾试图推广引力理论，使其与他先期发展起来的相对论相适应。为此，他坚持奋斗，直到他抓住一条重要原理，该原理引导他获得了正确的定律。那原理是建立在这样一个概念基础上的，即当一个物体自由下落时，其内部的一切东西似乎都没有了重量。例如，一人造卫星在地球重力场中沿轨道自由下落，其中的宇航员会感到失重。说得更正确些，这个概念称为爱因斯坦等效原理。它依赖于下列事实：所有物体，不管它们的质量如何，或者说不管它们是由什么构成的，都以完全相同的加速度下落。如果有一艘飞船正在做惯性下滑——所以它处在自由下落的状态——而且里面有人，则支配飞船和人下落的规律是相同的。所以如果他把自己安置在飞船的中部，则他将待在那儿不动，他并不相对飞船下落。我们说他“失重”时就是指这个意思。

现在假定你正处在加速的火箭飞船中，试问相对什么东西在加速？我们只能说它的发动机开着并正产生推力，使得它不是处在自由下落的滑行状态。也可想象你在真空中向外远去，以致实际上并没有引力作用在飞船上。如果飞船正以“ $1g$ ”加速，则你将可能站在“地板”上并会感觉到你的正常体重。也就是说，如果抛出一个球，它将“落”向地板。为什么？因为飞船正“向上”加速，但球身上并不受到力作

用，所以球不会被加速，它将落在后面。在飞船内部球似乎具有“ $1g$ ”的向下加速度。

现在让我们把这艘飞船中的情况与静止在地球表面的宇宙飞船内的情况做一比较。每件事情都相同！你会被压向地板，球会以“ $1g$ ”的加速度下落，等等。事实上，在飞船内你怎么能够知道你是静止在地球表面还是正在真空中加速运动？按照爱因斯坦的等效原理，如果你只对飞船内部发生的事情进行测量，则无法知道这个问题的答案。

严格正确地说，那上述讲法只对飞船内某一点才成立。由于地球的引力场不是严格均匀的，所以自由下落的球在不同的地方具有稍微不同的加速度——方向和大小都会改变。但是如果我们设想引力场是严格均匀的，那么它在各方面都与一个具有恒定加速度的系统完全相仿，这就是等效原理的基础。

§42-6 在引力场中钟的快慢

现在我们想利用等效原理来解决发生在引力场中的一件奇怪的事情。我们将向你说明在火箭飞船中发生的某些事情，这些事情你大概没有预料到会发生在引力场中。如果把一只钟放在火箭飞船的“前面”——即“前端”——把另一只完全相同的钟放在“尾部”，如图42-16所示。把这两只钟分别称为 A 和 B 。如果在飞船加速时比较这两只钟，则位于前面的钟比位于尾部的钟跑得快些。为搞清楚这一点，设想前面的钟每秒发一次闪光，而坐在船尾的你将到达的光信号与钟 B 的指针进行比较。比如说，当钟 A 发出闪光时火箭处在图42-17所示的位置 a ，而当闪光到达钟 B 处时，火箭处在位置 b 。后来，当钟 A 发出下一

次闪光时，飞船将处在位置 c ，而当你看到闪光到达钟 B 处时，它处在位置 d 。

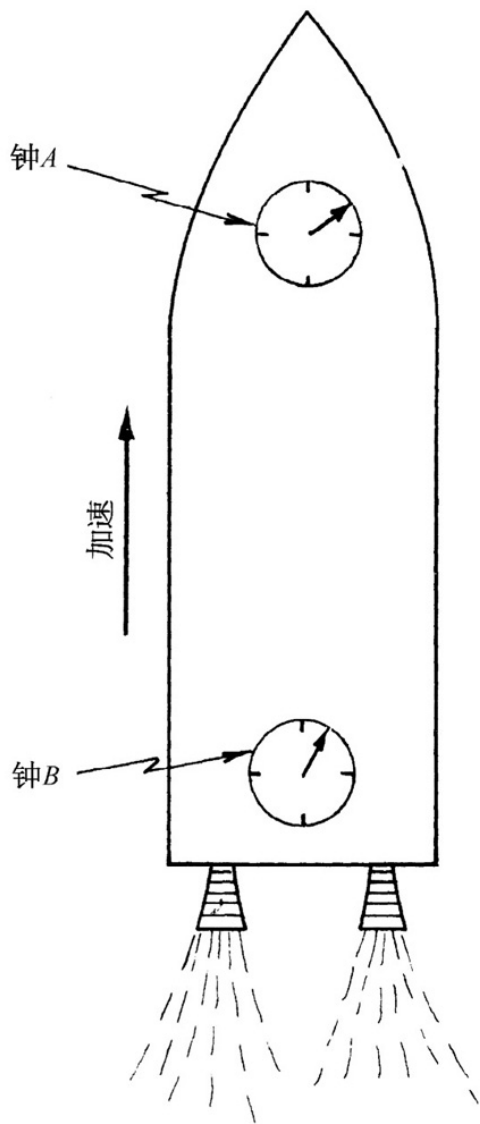


图42-16 携带两只钟的正在加速的火箭飞船

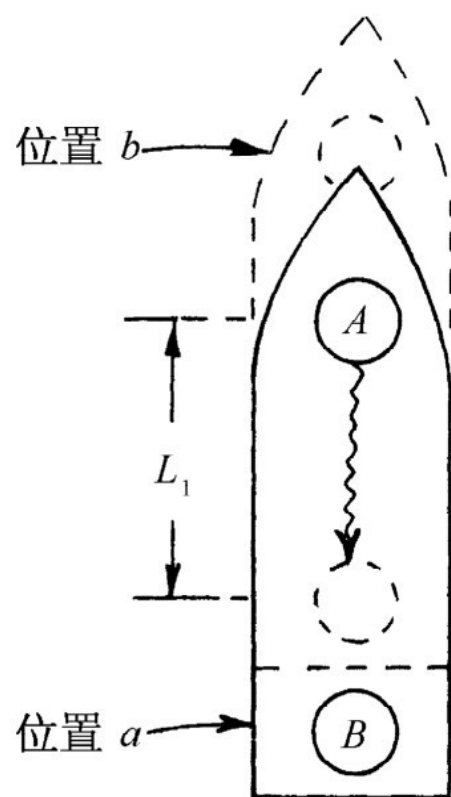
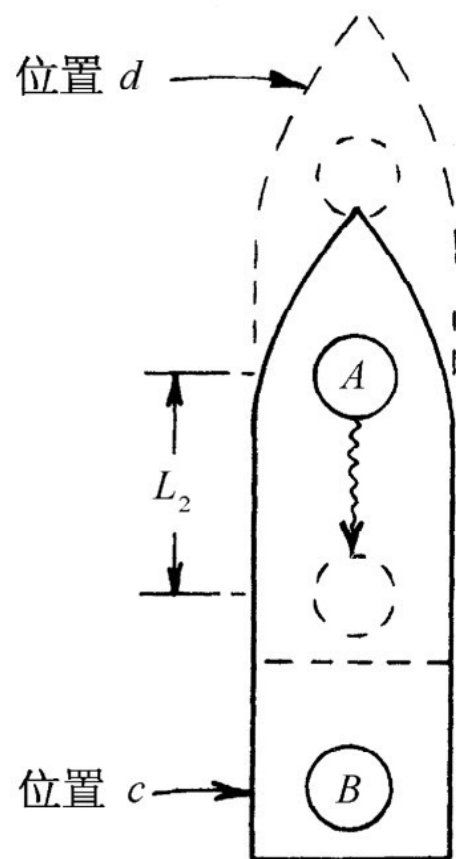


图42-17 位于加速火箭飞船前面的钟似乎比位于尾部的钟跑得快

第一次闪光传播的距离为 L_1 ，第二次闪光传播的距离较短为 L_2 。后者距离所以较短是因为飞船正在加速，因而在发出第二次闪光的时刻它已经具有了较大的速率。于是你可以明白，如果从钟A发出的两次闪光的间隔为1s，则它们到达钟B的间隔要比1s稍微短一点，因为第二次闪光在路上并不要耗费像第一次闪光那么多时间。对所有以后发出的闪光来说，也会发生同样的情况。所以要是你坐在船尾，就会得出结论：钟A比钟B跑得快。如果你打算反过来做同样的事情——使钟B发射光而在钟A处接收——则你会得出结论：B比A跑得快。一切都互相符合，一点也不神秘。

但现在我们来考察静止在地球重力场中的火箭飞船。同样的事情发生了。如果你带着一只钟坐在地板上，并看着放在高处书架上的另一只钟，它将显得比地板上的一只跑得快！你说：“但这是错误的。时间应该是相同的。既然没有加速度，钟就没有理由显得步调不一致。”但是如果等效原理是对的，那两只钟就必然不会同步。爱因斯坦坚持认为该原理是正确的，并且勇敢而正确地继续进行研究。他提出在引力场中不同地点的钟必然表现出以不同的快慢走动。但是，如果一只钟相对其他的钟始终显得快慢不同，那么就第一只而论，其他钟正以不同的速率走动。

然而我们现在看到，这里的钟与早先我们谈到过的热板上昆虫的热尺相类似。我们曾想象尺、昆虫及一切东西在不同温度处都以相同的方式改变其长度，所以昆虫们永远也不可能知道它们测量用的尺正随它们在热板上到处移动而改变。这种情况与引力场中的钟相同。放

在较高水平面上的每只钟看上去走得比较快，心搏也跳得较快，所有的过程都进行得较快。

如果事情不是这样，则你就有可能知道引力场与加速参考系之间的差别。时间能够逐处变化的概念虽是一个困难的概念，但它是爱因斯坦曾使用过的概念，它是正确的——不管你信不信。

应用等效原理，可以计算出引力场中钟的快慢随高度改变了多少。我们只要算出加速的火箭飞船中两只钟之间的表现偏差即可。做这件事最容易的办法，就是应用我们在第1卷34章所得到的关于多普勒效应的结果。在那里我们得到——参见式（34.14）——如果 v 是源和接收机之间的相对速率，则接收到的频率 ω 与发射频率 ω_0 的关系为

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (42.4)$$

现在，如果考虑图42-17中加速着的火箭飞船，则在任何一个瞬间发射机和接收机都以相等的速度运动。但是，在光信号从钟 A 传送到钟 B 所需的时间内，飞船已经加速了。实际上它已获得了额外的速度 gt ，这里 g 是加速度， t 是光从 A 到 B 传播距离 H 所需的时间。这个时间非常接近于 H/c ，所以当光信号到达 B 时，飞船已增加了速度 gH/c 。接收机相对信号离开时刻的发射机始终具有这个速度。所以这就是在多普勒公式（42.4）中应该使用的速度。设想船的长度和加速度足够小，因而这个速度比光速 c 小得多，就可把项 v^2/c^2 略去。从而得

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \quad (42.5)$$

因而对宇宙飞船中的两只钟来说，得到如下关系：

$$(\text{接收机处钟的速率}) = (\text{发射速率}) \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right), \quad (42.6)$$

式中 H 是发射机高出接收机的高度。

根据等效原理，对于在自由落体加速度为 g 的引力场中高度相隔 H 的两只钟来说，相同的结果必然成立。

这是一个十分重要的概念，我们希望它也能从另一个物理定律——能量守恒定律得出。我们知道，作用在一个物体上的引力与该物质的质量 M 成正比，而 M 与总内能 E 的关系为 $M = E/c^2$ 。例如，由一个原子核嬗变成另一个原子核的核反应能量所确定的原子核质量，与根据原子的重量所得到的质量相符。

现在考虑一个原子，它具有总能量为 E_0 的最低能量状态和总能量为 E_1 的较高能量状态，它可以通过发光而从状态 E_1 跃迁到状态 E_0 。光的频率 ω 由下式给出

$$\hbar \omega = E_1 - E_0. \quad (42.7)$$

现在假定有这样一个原子，它位于地板上，处在 E_1 态，我们把它从地板上带到高度为 H 的地方。为此，在携带质量为 $m_1 = E_1/c^2$ 的原子上升的过程中，必定要克服引力做某些功，所做功的大小为

$$\frac{E_1}{c^2} gH. \quad (42.8)$$

然后让原子发射一个光子而跃迁到较低的能量状态 E_0 。接着我们把原子带回到地板上，在返回的过程中原子的质量为 E_0/c^2 ，回来后得到

的能量为

$$\frac{E_0}{c^2} gH, \quad (42.9)$$

所以我们所做功的净值等于

$$\Delta U = \frac{E_1 - E_0}{c^2} gH. \quad (42.10)$$

原子发射光子时失去了能量 $E_1 - E_0$ 。假定光子恰巧向下运动到达地板，并被原子吸收。试问在这里光子递交给原子多少能量？一开始你或许会想到它正好释放出能量 $E_1 - E_0$ ，但是，根据下面的论证可以明白，要是能量守恒的话，那你们的想法就不可能是正确的。开始时我们位于地板处带有的能量为 E_1 ，结束时我们位于地板平面上，能量为处于最低能量状态的原子能量 E_0 加上从光子接收到的能量 E_{PH} 。在此期间，我们不得不提供了式（42.10）的附加能量 ΔU 。如果能量守恒，则最后我们在地板处所具有的能量必定大于出发时具有的能量，其差正好是我们所做的功。换句话说，必然有

$$E_{PH} + E_0 = E_1 + \Delta U \quad (42.11)$$

或

$$E_{PH} = (E_1 - E_0) + \Delta U.$$

情况必然是：光子到达地板时并不只带有它出发时的能量 $E_1 - E_0$ ，而是具有稍许多一点的能量，否则有些能量就损失掉了。若将式

(42.10) 中所得的 ΔU 代入式 (42.11)，就得到光子到达地板时的能量为

$$E_{PH} = (E_1 - E_0) \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right). \quad (42.12)$$

然而，能量为 E_{PH} 的光子具有频率 $\omega = E_{PH} / \hbar$ 。将发射光子的频率称为 ω_0 ——根据式 (42.7) 它等于 $(E_1 - E_0) / \hbar$ ——式 (42.12) 中的结果又一次给出了光子在地板上被吸收时的频率与它被发射时的频率间的关系式 (42.5)。

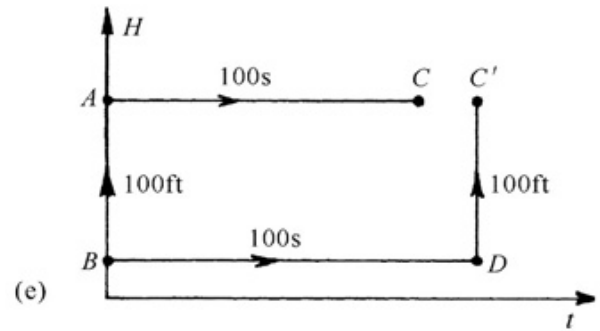
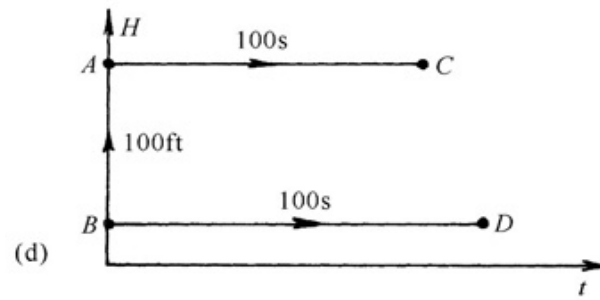
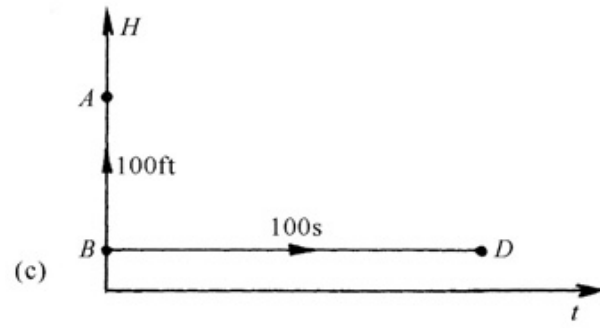
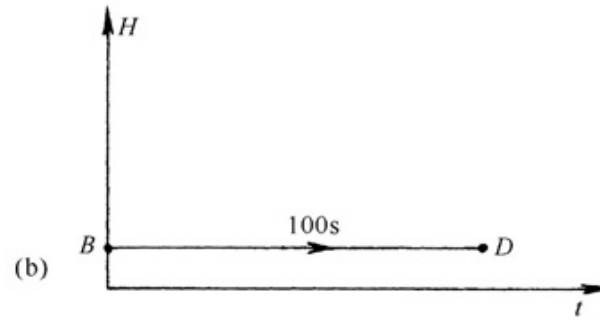
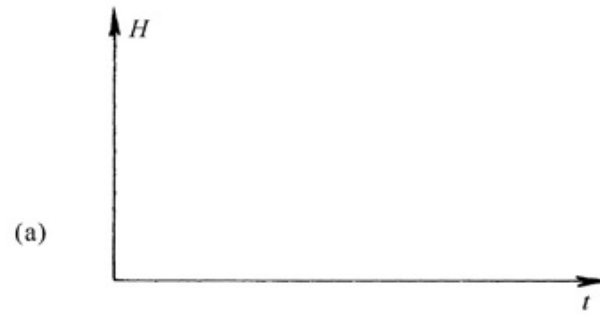
相同的结果还可以用别的办法得到。频率为 ω_0 的光子具有能量 $E_0 = \hbar \omega_0$ 。既然能量 E_0 含有引力质量 E_0/c^2 ，所以光子具有质量（不是静质量） $\hbar \omega_0/c^2$ ，因而它受到地球的“吸引”。在下落距离 H 的过程中，它将增加附加能量 $(\hbar \omega_0/c^2)gH$ ，所以它到达地板时带有能量

$$E = \hbar \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right).$$

但它在下落后的频率为 $E/\hbar$ ，这样再次给出式 (42.5) 中的结果。只有当爱因斯坦关于引力场中钟的预言正确时，我们关于相对论、量子物理及能量守恒的概念才全部配合得起来。上面所谈到的频率的改变一般也是非常小的。例如，对于地球表面20 m的高度差来说，频率差仅约为 $2/10^{15}$ 。然而，正是这个改变量，最近已经在实验上利用穆斯堡尔效应被发现了[\[5\]](#)。爱因斯坦是完全正确的。

§42-7 时空的曲率

现在我们要把刚才所讲的情况与弯曲的时空概念联系起来。已经指出，如果时间在不同的地方以不同的快慢进行，则这种情况就与热板的弯曲空间相类似。但它不只是类似，还意味着时空是弯曲的。让我们尝试在时空中做某种几何图形。这种事初听起来可能觉得奇怪，但我们经常用沿一根轴表示距离及沿另一根轴表示时间做时空图。假定我们尝试在时空图中做一个矩形。我们先画一个高 H 与 t 的关系图，如图42-18（c）所示。为了做矩形的底边，可以取一个静止在高 H_1 处的物体，并跟着它的世界线走100 s，就得到图（b）中的 BD 线，它平行于 t 轴。现在选取另一个物体，在 $t=0$ 的时刻它位于第一个物体上面100ft处，它从图42-18（c）中的 A 点出发，现在沿着它的世界线前行100s，这由位于 A 点的钟测得。物体从 A 运动到 C ，如图中（d）所示。但注意，由于时间在两个高度——假定存在引力场——以不同的快慢进行——所以 C 和 D 两点不是同时的。如果试图通过画一条线到达处于相同时刻、位于 D 上面100ft的点 C' 而完成一个矩形，如图42-18（e）所示，则几条线无法闭合。当我们说时空是弯曲的时候，就是这个意思。



§42-8 在弯曲时空中的运动

我们来考虑一个有趣的小谜。有两只相同的钟 A 和 B ，如图42-19所示，一起放在地球的表面上。现在把钟 A 举到某个高度 H ，在那里待一会儿，再返回地面，使它刚好在钟 B 走了100s时到达地面。这样钟 A 会读出像107s这种数目，这是由于它在空中上升时走得较快。此时就产生了一个谜。我们应该如何移动钟 A 才能使得它读出尽可能长的时间——始终假定它返回时 B 钟读数为100s？你说：“这容易。只要你把 A 举得尽可能高，那么它将走得尽可能地快，因而在返回时读出的时间最长。”错！你忘记了一件事——我们只有100s供上升和返回。要是我们升得很高，则我们就得很快到达那儿以便在100s内返回。你务必不能忘了狭义相对论的效应，它会导致运动的钟减慢一个因子 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。相对论效应在这方面起的作用使钟 A 的读出时间比钟 B 的小。你们看看这类游戏。如果我们带着钟 A 一直站着，就能得到100s读数；要是我们缓慢上升一个很小的高度并缓缓下降，则就能得到稍微大于100s的读数。如果我们升得稍高一些，得到的时间读数可能稍长一些。但要是升得太高，则为到达那儿就必须运动得很快，这就必须使钟下降得足够慢，以至使结束时得到的时间少于100s。该用什么样的高度与时间关系程序——达到多高及以什么速率到达那儿、如何仔细调节使得我们回到钟 B 时它的读数增加了100s——才会使钟 A 给我们读出尽可能最长的时间？

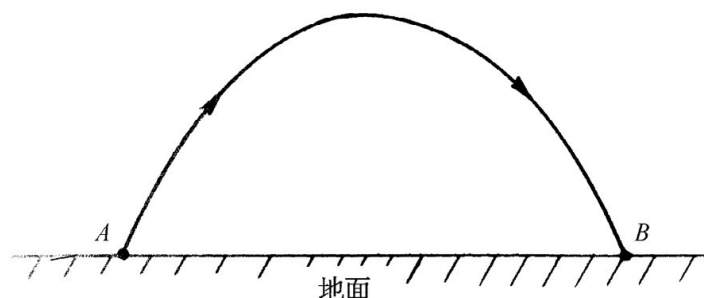


图42-19 在均匀引力场中，对于固定的飞行时间来说，固有时最长的轨迹是抛物线

试回答：求出你必须用多大的速率把一个球向上抛入空中，使得它正好在100s内落回至地球。而该球的运动——快速上升、慢下来、停止再返回——这正是使得固定于球上的手表的时间为最大的、正确的运动。

现在考虑稍微不同的游戏。设 A 和 B 两点同在地球表面且相隔某段距离。我们玩一个与早先做过的相同游戏，即求所谓的直线。试问应该如何从 A 移动到 B ，才能使得运动手表上的时间最长——假定我们一得到给定信号就从 A 点出发，而在 B 一有另一个信号时就到达 B 点——该后一信号按固定钟比前一信号迟100s。现在你们会说：“唔，我们前已求出，要做的事情就是以适当的均匀速率沿直线滑行，使得恰好在100s后到达 B 点。如果我们不沿直线运动，则要用更大的速率，这样我们的表就会慢下来。”但是等一下，那是以前考虑重力的情况。向上弯曲一点然后下降不是更好吗？这样，在升得较高的时间阶段中我们的表不是会跑得稍快一点吗？情况确是这样。如果你们求解调节运动曲线的数学问题，使得运动手表经过的时间尽可能长，则你将发现运动轨迹是一条抛物线——就是引力场中沿自由弹道路径运动的物体所遵循的同一条曲线，如图42-19所示。所以引力场中的运动定律也可表述为：一个物体从一个地方运动到另一个地方，它总是使得其所携带的钟给出的时间比之在其他任何可能的轨道上运动所用的时间要

长——当然，开始和结束的条件应相同。运动的钟测得的时间常常称为“固有时”。在自由落体运动中，运动轨道使得物体的固有时最大。

我们来看看这一切是如何算出来的。从式（42.5）开始，它说明运动手表的逾速率为

$$\frac{\omega_0 g H}{c^2}, \quad (42.13)$$

除此之外，我们得记住，对速率来说还存在相反符号的修正。关于这个效应，已知

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

虽然该原理对任何速率都适用，但在我们所举的例子中速率总要比 c 小得多，因此可以把这个方程写成

$$\omega = \omega_0 [1 - v^2/(2c^2)],$$

而以我们的钟的速率来看，亏损为

$$- \omega_0 \frac{v^2}{2c^2}. \quad (42.14)$$

把式（42.13）和（42.14）中的两项结合起来，得

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c^2} \left(gH - \frac{v^2}{2} \right). \quad (42.15)$$

运动钟的这种频移意味着：如果在固定的钟上测得时间 dt ，则运动钟所记录的时间为

$$dt \left[1 + \left(\frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) \right], \quad (42.16)$$

整个轨道的总的时间逾为附加项对时间的积分，即

$$\frac{1}{c^2} \int \left(gH - \frac{v^2}{2} \right) dt, \quad (42.17)$$

它应为极大。

项 gH 正好就是引力势 ϕ 。假定用常数因子 $-mc^2$ 乘以整个式子，这里 m 为物体的质量，这个常数虽不改变极大的条件，但负号将把极大正好改变为极小。于是式（42.16）指出，物体的运动将使得

$$\int \left(\frac{mv^2}{2} - m\phi \right) dt = \text{极小}. \quad (42.18)$$

但现在的被积函数正好是动能和势能的差。如果你们顺便看一下第2卷第19章，就会知道在我们讨论最小作用量原理时就已证明，对于任何势场中的一个物体来说，牛顿定律正好可以写成方程式（42.18）的形式。

§42-9 爱因斯坦的引力理论

运动方程的爱因斯坦形式——在弯曲的时空中固有时应为极大——在低速情况下给出的结果与牛顿定律给出的相同。当库珀（G.Cooper）绕地球做圆周运动时，他的表指示的时间比沿任何其他、你们对他的人造卫星可能想象到的路径指示的时间都要长^[6]。

所以引力定律可以用这种非凡的方法、利用时空的几何概念来表述。粒子总是取最长的固有时——在时空中与“最短距离”这个量相似。这是引力场中的运动定律。用这种方法表述的最大优点在于：定律不依赖任何坐标或任何别的定义位置的方法。

现在把上面所做的事情作一小结。我们已经给了你们关于重力的两个定律：

(1) 当存在物质时，时空的几何学如何变化——即，利用逾半径表示的曲率正比于球内部的质量，方程式(42.3)。

(2) 在仅存在引力的条件下，物体如何运动——即物体的运动总是使得在两个边界条件之间的固有时为极大。这两个定律与我们早先知道的相似的一对定律相对应。原来，我们用牛顿的平方反比的引力定律及他的运动定律来描述引力场中物体的运动，现在，定律(1)和(2)代替了它们。新的一对定律也与我们在电动力学中知道的定律相对应。那里的定律——麦克斯韦方程组——决定电荷产生的场。它告诉我们“空间”的特征如何因带电物质的存在而改变，对于重力的情况，这种变化是由定律(1)完成的。另外，还有一个关于粒子如何在给定场中运动的定律—— $\mathbf{d}(m\mathbf{v})/\mathbf{d}t = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 。对于重力来说，这是由定律(2)处理的。

在定律(1)和(2)中包含了关于爱因斯坦引力理论的精确表述——虽然你们通常会发现它被表述为更复杂的数学形式。然而，我们应该做进一步的补充。正如引力场中的时间标度逐处变化一样，长度标度也会做同样的变化。当你们到处运动时尺会改变其长度。由于空间和时间如此密切地混合在一起，因此随时间发生的某些事情，要是不以某种方式在空间中反映出来是不可能的。举一个更加简单的例

子：设你们正在空中飞过地球，从你们的观点来看所谓时间，在我们看来部分是空间，所以也必定存在空间方面的变化。因物质存在而引起的是整个时空的弯曲，这比仅仅在时间范围内的变化更加复杂。然而，只要清楚知道关于空间弯曲的这个规则不仅从一个人的观点来看是适用的，而且对每个人来说也是正确的，那么在式（42.3）中给出的规则足以完全确定所有的引力定律。当某人从一个质量较大的物质旁飞过，他会看到不同的质量值，这是由于他对从旁边通过他的该物质计算动能引起的，而他必须把与该能量相对应的质量包括进去。必须把理论安排得使每个人——不论他如何运动——当他接近一个星球时，会发现逾半径等于 $G/(3c^2)$ 乘上星球包含的总质量〔或者，更好地讲是 $G/(3c^4)$ 乘星球包含的总能量值〕。这个定律——定律（1）——在任何运动系统内都应该是正确的，这是伟大的引力定律之一，称为爱因斯坦场方程。另一个伟大定律是定律（2）——物体必须这样运动，使得固有时为极大——这被称为爱因斯坦运动方程。

把这两个定律写成一个完整的代数式，把它们与牛顿定律进行比较，或者把它们与电动力学联系起来，在数学上是很困难的。但它是今天我们所看到的关于引力物理方面最完整的定律的样式。

虽然对于所考虑的简单例子，它们给出与牛顿力学相一致的结果，但它们并不始终相符。首先由爱因斯坦导出的三个差异已经在实验上得到了证实：水星轨道并不是固定的椭圆；光通过太阳附近时发生的偏折是我们原来认为的大小的两倍；钟的快慢取决于它们在引力场中的位置。每当爱因斯坦的预言与牛顿力学的概念不同时，大自然选择的总是爱因斯坦。

让我们把已说过的每件事以下述方式做一小结。首先，时间和距离的量值决定于你测量它时在空间的位置和时间，这与时空是弯曲的表述等价。根据测得的一个球体的表面积就可以确定预期半径，即 $\sqrt{A/(4\pi)}$ ，但实际的测量半径将有一个超过这半径的逾，逾半径正比于（比例常数为 G/c^2 ）球内部所包含的总质量。这个逾半径确定了时空曲率的恰当度数。不论谁在观察物质，也不论物质在如何运动，曲率必定是相同的。第二，在这种弯曲的时空中，粒子沿“直线”（最大固有时轨道）运动。这就是引力定律的爱因斯坦公式的内容。

[1] 无限远点除外。

[2] 为了完整起见，我们应该再补充一点。如果你想把弯曲空间的热板模型应用到三维的情况，你必须想象尺的长度不仅取决于你把它放在何处，而且也取决于尺在安置时的取向。这是一种简单情况的推广，在这种简单情况下，尺的长度决定于它所处的位置而不管它取南北方向还是东西方向，或上下方向，其长度都是相同的。如果你想用这种模型的任意几何图形来表示三维空间，那么这种推广是必要的，虽然它对于二维情况很可能是不必要的。

[3] 没有人知道，即使爱因斯坦也不知道，如果质量变得集中到点上该怎么处理。

[4] 这是近似，因为密度并不是像我们假设的那样与半径无关。

[5] R.V.Pound and G.A.Rebka, Jr., *Physical Review Letters* Vol .4, p.337 (1960) .

[6] 严格地说，它仅仅是一种局域极大。应该说固有时比任何相邻路径上的固有时要长。例如，在绕地球的椭圆轨道上的固有时，与一个被发射得很高而下落物体的弹道路径上的固有时相比，前者不一定更长。

索引

二画

二维场	two-dimensional field
-----	-----------------------

三画

三角晶格	trigonal lattice
------	------------------

三维波	three-dimensional waves
-----	-------------------------

三斜晶格	triclinic lattice
------	-------------------

“干”水	“dry”water
------	------------

大气中的电流	electric current in the atmosphere
--------	------------------------------------

大气的电势梯度	potential gradient of the atmosphere
---------	--------------------------------------

马斯登	Marsden
-----	---------

马赫数	Mach number
-----	-------------

四画

六角单胞	hexagonal cell
不确定性原理	uncertainty principle
水滴破裂理论	breaking-drop theory
比热	specific heat
介电常数	dielectric constant
内反射	internal reflection
非极性分子	nonpolar molecule
无旋运动	irrotational motion
无源元件	passive element
互容 [系数]	mutual capacitance
互感 [系数]	mutual inductance
分子偶极子	molecular dipole
分子晶体	molecular crystal
中子扩散	diffusion of neutrons
中子扩散方程	neutron diffusion equation
牛顿, I.	Newton, I.
牛顿定律	Newton's laws

反射波	reflected waves
反铁磁性材料	antiferromagnetic material
巴克豪森效应	Barkhausen effect
韦伯	Weber
贝尔, A.G.	Bell, A.G.
贝塞尔函数	Bessel function

五画

立方晶胞	cubic cell
石榴石	garnet
正方晶胞	tetragonal cell
四极子势	quadrupole potential
四极透镜	quadrupole lens
四维矢量	four-vectors
永电体（驻极体）	electret
冯·诺伊曼, J.	Von Neumann, J.
兰姆	Lamb
发电机	generator

发射率	emissivity
正交晶胞	orthorhombic cell
平（行）板电容器	parallel-plate capacitor (condenser)
平面晶格	plane lattice
平面波	plane waves
卡门涡街	Kármán vortex street
布拉格, L.	Bragg, L.
布拉格-奈晶体模型	Bragg-Nye crystal model
加速器中的导向场	accelerator guide field
矢（叉）积	cross product
矢量代数	vector algebra
矢量分析	vector analysis
矢量场	vector field
矢量场的通量	flux of a vector field
矢量积分	vector integrals
矢量算符	vector operator
矢势	vector potential
边界层	boundary layer

边值问题	boundary-value problems
卢瑟福	Rutherford
卢瑟福-玻尔原子模型	Rutherford-Bohr atomic model
电力	electrical forces
电子极化强度	electronic polarization
电子显微镜	electron microscope
电子感应加速器	betatron
电介质	dielectric
电导率	conductivity
电动力学	electrodynamics
电动机	electric generator
电动势	electromotive force
电场	electric field
电场的相对性	relativity of electric field
电阻器	resistor
电抗	reactance
电势	electric potential
电流	electric current
电流计	galvanometer

电流密度	current density
电容	capacitance
电容器	capacitor (condenser)
电容器的电容	capacity of a condenser
电容器的能量	energy of a condenser
电荷分离	charge separation
电荷守恒	conservation of charge
电荷的运动	motion of charge
电荷的静电能	electrostatic energy of charges
电荷密度	electric charge density
电离层	ionosphere
电通量	electric flux
电偶极子	electric dipole
电路	circuits
电路元件	circuit elements
电感	inductance
电磁波	electromagnetic wave
电磁学	electromagnetism
电磁学定律	laws of electromagnetism

电磁质量	electromagnetic mass
------	----------------------

电磁体	electromagnet
-----	---------------

六画

因费尔德	Infeld
------	--------

共振电路	resonant circuits
------	-------------------

共振〔波〕膜	resonant mode
--------	---------------

共振腔	resonant cavity
-----	-----------------

共振器	resonator
-----	-----------

多普勒效应	Doppler effect
-------	----------------

达朗贝尔算符	D'Alembertian
--------	---------------

亥姆霍兹, H.	Helmholtz, H.
----------	---------------

毕奥-萨伐尔定律	Biot-Savart law
----------	-----------------

阶式指引数	step leader
-------	-------------

曳引系数	drag coefficient
------	------------------

伏特计	voltmeter
-----	-----------

机械能	mechanical energy
-----	-------------------

共价键	covalent bond
-----	---------------

全内反射	total internal reflection
安培, A.	Ampere, A.
安培电流	Amperian current
安培定律	Ampere's law
同步加速器	synchrotron
同(共)轴线	coaxial line
行移场	travelling field
极化矢量	polarization vector
极化电荷	polarization charges
极化(极化度)	polarization
吸收系数	absorption coefficient
传输线	transmission line
传播因数	propagation factor
自由空间中的麦克斯韦方程组	Maxwell's equations in free space
自旋轨道	spin orbit
自感[系数]	self-inductance
交换力	exchange force
交流电路	alternating-current circuits

交流发电机	alternating-current generator
动量谱	momentum spectrum
汤川秀树	Yukawa, H.
汤川势	Yukawa potential
汤姆孙	Thompson, J.J.
汤姆孙原子模型	Thompson atomic model
压电	piezoelectricity
宇宙线	cosmic rays
光的反射	reflection of light
光的折射	refraction of light
尖晶石	spinel
有电流和电荷时的麦克斯韦方程组	currents and charges Maxwell's equations
有源电路元件	active circuit element
导体的场	fields of a conductor
场动量	field momentum
场线	field lines
场的洛伦兹变换	Lorentz transformation of fields
场（的）能量	field energy

场指数	field index
场离子显微镜	field-ion microscope
轨道运动	orbital motion

七画

劳顿	Laughton
位错	dislocation
伯努利定理	Bernoulli's theorem
作用于电流上的磁力	magnetic force on a current
极化率	electric susceptibility
扭转（的）棒	torsion bar
李纳-维谢尔势	Liénard-Wiechert potentials
时空	space-time
进动角	angle of precession
阻抗	impedance
阿伏伽德罗常量	Avogadro's number
阿哈罗诺夫	Aharanov
抗磁性	diamagnetism

折射率	index of refraction
克劳修斯-莫索提方程	Clausius-Mossotti equation
克罗内克 δ [符号]	Kronecker delta
库仑定律	Coulomb's law
库埃特流动	Couette flow
麦卡洛	McCullough
麦克斯韦, J.C.	Maxwell, J.C.
麦克斯韦方程组	Maxwell's equations
体应变	volume strain
体应力	volume stress
体积弹性模量	bulk modulus
杨氏模量	Young's modulus
张量场	tensor field
运动方程	equation of motion
运动电荷的场动量	field momentum of moving charge
狄拉克, P.	Dirac, P.
闵可夫斯基空间	Minkowski space
应变	strain
应变张量	strain tensor

应力

stress

应力张量

stress tensor

八画

环流

circulation

范德格拉夫起电机

van de Graaff generator

奈, J.F.

Nye, J.F.

坡印亭, J.

Poynting, J.

泊松比

Poisson's ratio

庞加莱应力

Poincaré's stress

刷形放电

brush discharge

表面张力

surface tension

取向极化

orientation polarization

取向磁矩

oriented magnetic moment

变分学 (法)

calculus of variations

定常流

steady flow

经典电子半径

classical electron radius

单胞

unit cell

单斜晶胞	monoclinic cell
“奇异”粒子	“strange”particles
拉梅弹性常数	Laméelastic constants
拉莫尔频率	Larmor frequency
拉莫尔定理	Larmor's theorem
拉普拉斯方程	Laplace equation
拉普拉斯算符	Laplace operator
拉比分子束法	Rabi molecular-beam method
波包	wave packet
波导	waveguides
波（动）方程	wave equation
坡莫合金（高导磁合金）	Permalloy
法拉第，M.	Faraday, M.
法拉第感应定律	Faraday's law of induction
空腔共振器	cavity resonator
线电荷	line charge
线积分	line integral
质子自旋	proton spin
	solid-state physics

固体物理学

居里-外斯定律

居里定律

居里温度

欧拉力

Curie-Weiss law

Curie law

Curie temperature

Euler force

九画

面电荷

威耳逊, C.T.R.

胡克定律

顺磁性

栅极的静电场

点电荷

点电荷的（电）场能量

点电荷的静电能

洛伦兹力

洛伦兹公式

sheet of charge

Wilson, C.T.R.

Hooke's law

paramagnetism

electrostatic field of a grid

point charge

field energy of point charge

electrostatic energy of a point charge

Lorentz force

Lorentz formula

洛伦兹规范	Lorentz gauge
洛伦兹变换	Lorentz transformation
洛伦兹条件	Lorentz condition
派因斯	Pines
玻尔, N.	Bohr, N.
玻尔磁子	Bohr magneton
玻恩	Born, M.
带电导体	charged conductor
带电面	charged sheet
带电球体 (壳)	sphere of charge
标 (点) 积	dot product
标积	scalar product
标量场	scalar field
用相对论符号表示的电动力学	relativistic notation electrodynamics
相对磁导率	relative permeability
复变函数	complex variable
费曼, R.	Feynman, R.
施特恩-格拉赫实验	Stern-Gerlach experiment

恒定电流的磁场	magnetic field of steady currents
绝热退磁	adiabatic demagnetization
绝缘体	insulator
哈密顿第一主函数	Hamilton's first principal function
退磁	demagnetization

十画

莱索福	Retherford
泰勒展开	Taylor expansion
格拉赫	Gerlach
胶态粒子	colloidal particles
朗德g因子	Landé-g-factor
被动（性电路）元件	passive circuit element
涡（电）流	eddy current
涡线	vortex lines
涡度	vorticity
流体动力学	hydrodynamics
流体流动	fluid flow

流体静力学	hydrostatics
流线	streamlines
通量	flux
通量法则	flux rule
透射波	transmitted waves
速度势	velocity potential
高电压击穿	high-voltage breakdown
高斯面	Gaussian surface
高斯, K.	Gauss, K.
高斯定律	Gauss'law
高斯定理	Gauss'theorem
热力学	thermodynamics
热释电	pyroelectricity
热传导	heat conduction
热导率	thermal conductivity
热扩散方程	heat diffusion equation
热流	heat flow
原子电流	atomic currents
原子轨道	atomic orbits

原子极化率	atomic polarizability
原子磁体的进动	precession of atomic magnets
铁电性	ferroelectricity
铁氧体、铁素体	ferrite
铁磁性	ferromagnetism
铁磁绝缘体	ferromagnetic insulators
核g因子	nuclear g-factor
核（内）的静电能	electrostatic energy in nuclei
核的相互作用	nuclear interaction
核磁共振	nuclear magnetic resonance
能流	energy flux
能量	energy
能量守恒	conservation of energy
能量密度	energy density
离子极化率	ionic polarizability
离子晶体的静电能	electrostatic energy of ionic crystal
离子键	ionic bond

十一画

铝镍钴V	alnico V
球面波	spherical waves
偶极子	dipole
偶极子势	dipole potential
偶极矩	dipole moment
剪切波	shear wave
基尔霍夫法则	Kirchhoff's laws
基态	ground state
盖革	Geiger
弹性	elastica
弹性材料	elastic materials
弹性张量	tensor of elasticity
弹性	elasticity
弹性常量（数）	elastic constants
悬（臂）梁	cantilever beam

十二画

“湿”水

“wet”water

富兰克林, B.

Franklin, B.

琥珀

amber

趋肤深度

skin depth

滑移位错

slip dislocation

量子化磁态

quantized magnetic states

晶体

crystal

晶体的内禀几何

geometry of crystal

晶格

crystal lattice

等势面

equipotential surface

等离子体振荡

plasma oscillations

等离子体频率

plasma frequency

等效电流, 等效电路

equivalent circuits

等温线

isotherm

等温面

isothermal surface

傅里叶定理

Fourier theorem

博姆

Bohm

博普

Bopp

惠勒

Wheeler

超透视合金	supermalloy
超脱性	unworldliness
普里斯特利, J.	Priestly, J.
普林顿	Plimpton
斯托克斯定理	Stokes' theorem
斯涅耳定律	Snell's law
最小作用量原理	principle of least action
散度	divergence
散度运算	divergence operator

十三画

楞次法则	Lenz's rule
照明	illumination
滤波器	filter
解理面	cleavage plane
零旋度	zero curl
零散度	zero divergence

感生电流	induced currents
感应	induction
感应定律	laws of induction
瑞利波	Rayleigh waves
像电荷	image charge
叠加	superposition
叠加原理	principle of superposition
雷诺数	Reynolds'number

十四画

截止频率	cutoff frequency
赫斯	Hess
静电	statics
静电方程组	electrostatic equations
静电场	electrostatic field
静电场中的能量	energy in electrostatic field
静电学	electrostatics
静电势	electrostatic potential

静电势方程组	equations of electrostatic potential
静电能	electrostatic energy
静电透镜	electrostatic lens
静磁	magnetostatics
磁力	magnetic force
磁化电流	magnetization currents
磁化场	magnetizing fields
磁化率	magnetic susceptibility
磁石	lodestone
磁场	magnetic field
磁场的相对性	relativity of magnetic field
磁导率	permeability
磁共振	magnetic resonance
磁性材料	magnetic materials
磁滞回线	hysteresis curve
磁滞回线（路）	hysteresis loop
磁矩	magnetic moments
磁能	magnetic energy
磁致伸缩	magnetostriction

磁透镜	magnetic lens
磁偶极子	magnetic dipole
磁偶极矩	magnetic dipole moment
磁畴	domain

十五画

耦合	coupling
耦合系数	coefficient of coupling
德拜长度	Debye length

十六画

激发态	excited state
薛定谔方程	Schrödinger equation
整流器	rectifier
壁能	wall energy

十七画

螺线管

solenoid

螺旋位错

screw dislocation

黏性，黏度

viscosity

黏性系数

coefficient of viscosity

黏性流动

viscous flow

X射线衍射

X ray diffraction

附录

本书涉及的非法定计量单位换算关系表

单位符号	单位名称	物理量名称	换算系数
bar	巴	压强，压力	1 bar=10 ⁵ Pa
Cal	大卡	热量	1 Cal=1 kcal
cal	卡 [路里]	热量	1 cal=4.186 8 J
dyn	达因	力	1 dyn=10 ⁻⁵ N
f, fa, fathom	英寻	长度	1 f=2 yd=1.8288 m
fermi (fm)	费米	(核距离) 长度	1 fermi=1 fm=10 ⁻¹⁵ m
ft	英尺	长度	1 ft=3.048×10 ⁻¹ m
G, Gs	高斯	磁通量密度， 磁感应强度	1 Gs=10 ⁻⁴ T
gal	加仑	容积	1 gal (UK) =3.785 43 L
in	英寸	长度	1 in=2.54 cm
lb	磅	质量	1 lb=0.453 592 kg

l.y.	光年	长度	1 l.y.=9.460 53×10 ¹⁵ m
mi	英里	长度	1 mi=1.609 34 km
Mx	麦克斯韦	磁通量	1 Mx=10 ⁻⁸ Wb
Oe	奥斯特	磁场强度	1 Oe=1 Gb/cm= (1 000/4π) A/m =79.577 5 A/m
oz	盎司	质量	1 oz=28.349 523 g
qt	夸脱	容积	1 qt (UK) =1.136 52 dm ³

第3卷

THE
Feynman
LECTURES ON PHYSICS

Volume III

The New Millennium Edition

费曼

物理学讲义

· 新千年版 ·

[美] 费曼 (Richard Feynman) [美] 莱顿 (Robert Leighton) [美] 桑兹 (Matthew Sands) 著
潘笃武 李洪芳 译



上海科学技术出版社

The Feynman Lectures on Physics (The New Millennium Edition, Volume III)

费曼物理学讲义

(新千年版)

第 3 卷

[美] 费曼 (Richard Feynman)
莱顿 (Robert Leighton) 著
桑兹 (Matthew Sands)
潘笃武 李洪芳 译

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

费曼物理学讲义：新千年版．第3卷 / （美）费曼（Richard Feynman），（美）莱顿（Robert Leighton），（美）桑兹（Matthew Sands）著；潘笃武，李洪芳译．—上海：上海科学技术出版社，2020.3

ISBN 978-7-5478-4719-0

I. ①费... II. ①费...②莱...③桑...④潘...⑤李... III. ①物理学—教材②量子论—教材 IV. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2020）第032331号

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS: The New Millennium Edition, Volume III By Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands

© 1965, 2006, 2010 by California Institute of Technology, Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

Simplified Chinese translation copyright © 2013 by Shanghai Scientific & Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books , a Member of
Perseus Books Group

Through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司

ALL RIGHTS RESERVED

费曼物理学讲义（新千年版）第3卷

[美] 费 曼 (Richard Feynman) 莱 顿 (Robert
Leighton) 桑兹 (Matthew Sands) 著

潘笃武 李洪芳 译

上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行

(上海钦州南路71号 邮政编码200235 www.sstp.cn)

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16

印张 23.75

字数 490千字

2020年3月第1版 2020年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-4719-0/O·85

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，
请向工厂联系调换

译者序

20世纪60年代初，美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应，纷纷试行教学改革，加利福尼亚理工学院就是其中之一。该校于1961年9月至1963年5月特请著名物理学家费曼主讲一二年级的基础物理课，事后又根据讲课录音编辑出版了《费曼物理学讲义》。本讲义共分3卷，第1卷包括力学、相对论、光学、气体分子运动论、热力学、波等，第2卷主要是电磁学，第3卷是量子力学。全书内容十分丰富，在深度和广度上都超过了传统的普通物理教材。

当时美国大学物理教学改革试图解决的一个主要问题是基础物理教学应尽可能反映近代物理的巨大成就。《费曼物理学讲义》在基础物理的水平上对20世纪物理学的两大重要成就——相对论和量子力学——作了系统的介绍，对于量子力学，费曼教授还特地准备了一套适合大学二年级水平的讲法。教学改革试图解决的另一个问题是按照当前物理学工作者在各个前沿研究领域所使用的方式来介绍物理学的内容。在《费曼物理学讲义》一书中对一些问题的分析和处理方法，反映了费曼自己以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。全书对基本概念、定理和定律的讲解不仅生动清晰、通俗易懂，而且特别注重从物理上作出深刻的叙述。为了扩大学生的知识面，全书还列举了许多基本物理原理在各个方面（诸如天体物理、地球物理、生物物理等）的应用，以及物理学的一些最新成就。由于全书是根据课堂讲授的录音整理编辑的，它在一定程度保留了费曼讲课的生动活泼、引人入胜的独特风格。

《费曼物理学讲义》从普通物理水平出发，注重物理分析，深入浅出，避免运用高深繁琐的数学方程，因此具有高中以上物理水平和初等微积分知识的读者阅读起来不会感到十分困难。至于大学物理系的师生和物理工作者更能从此书中获得教益。

1989年，为纪念费曼逝世一周年，原书编者重新出版本书，并增加了介绍费曼生平的短文和新的序言。2010年，编者根据50多年来世界各国在阅读和使用本书过程中提出的意见，对全书（3卷）存在的错误和不当之处（885处）进行了订正，并使用新的电子版语言和现代作图软件对全书语言文字、符号、方程及插图进行重新编辑出版，称为新千年版。本书就是根据新千年版翻译的。

本书中译本1987年版本卷第1章至第15章由潘笃武翻译，其中第6章至第11章是在吴子仪译稿基础上重译，第12章在李洪芳译稿基础上重译，第15章在潘笃武、李洪芳合译的基础上重译。第16章至第21章、索引由李洪芳翻译。郑广垣、郑永令曾参与了本书译稿的校阅工作。本卷这一版由潘笃武（1—15章）、李洪芳（16—21章，索引）重新校勘。

由于译者水平所限，错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

译者

2012年10月

关于费曼

理查德·费曼（R.P. Feynman）1918年生于纽约市，1942年在普林斯顿大学获得博士学位。第二次世界大战期间，尽管当时他还很年轻，就已经在洛斯阿拉莫斯的曼哈顿计划中发挥了重要作用。以后，他在康奈尔大学和加利福尼亚理工学院任教。1965年，因在量子电动力学方面的工作和朝永振一郎（Sin-Itiro Tomonaga）及施温格尔（J. Schwinger）同获诺贝尔物理学奖。

费曼博士获得诺贝尔奖是由于成功地解决了量子电动力学的理论问题。他也创立了说明液氦中超流动性现象的数学理论。此后，他和盖尔曼（M. Gell-Mann）一起在 β 衰变等弱相互作用领域内做出了奠基性的工作。在以后的几年里，他在夸克理论的发展中起了关键性的作用，提出了高能质子碰撞过程的部分子模型。

除了这些成就之外，费曼博士将新的基本计算技术及记号法引进物理学，首先是无处不在的费曼图，在近代科学历史中，它比其他任何数学形式描述都更大地改变了对基本物理过程形成概念及进行计算的方法。

费曼是一位卓越的教育家。在他获得的所有奖项中，他对1972年获得的奥斯特教学奖章特别感到自豪。在1963年第一次出版的《费曼物理学讲义》被《科学美国人》杂志的一位评论员描写为“难啃的但却富于营养并且津津有味。25年后它仍是教师和最优秀的初学学生的指导书”。为了使外行的公众增加对物理学的了解，费曼博士写了《物理

定律和量子电动力学的性质：光和物质的奇特理论》。他还是许多高级出版物的作者，这些都成为研究人员和学生的经典参考书和教科书。

费曼是一个活跃的公众人物。他在挑战者号失事调查委员会里的工作是众所周知的，特别是他的著名的O型环对寒冷的敏感性的演示，这是一个优美的实验，除了一杯冰水和C形钳以外其他什么也不需要。费曼博士1960年在加利福尼亚州课程促进会中的工作却很少为人所知，他在会上指责教科书的平庸。

仅仅罗列费曼的科学和教育成就还没有充分抓住这个人物的本质。即使是他的最最技术性的出版物的读者都知道，费曼活跃的多面的人格在他所有的工作中都闪闪发光。除了作为物理学家，他还是无线电修理工，是锁具收藏家、艺术家、舞蹈家、邦戈（bongo）鼓手，甚至玛雅象形文字的破译者。他的世界永远充满了好奇，他是一个典型的经验主义者。

费曼于1988年2月15日在洛杉矶逝世。

新千年版前言

自理查德·费曼在加利福尼亚理工学院讲授物理学导论课程以来，已经过去快50年了。这次讲课产生了这3卷《费曼物理学讲义》。在这50年中，我们对物理世界的认识已经大大改变了，但是《费曼物理学讲义》的价值仍旧存在。由于费曼对物理学独到的领悟和教学方法，费曼的讲义今天仍像第一次出版时那样具有权威性。这些教本已在全世界范围内被初学者，也被成熟的物理学家研读；它们已被翻译成至少12种语言，仅仅英语的印刷就有150万册以上。或许至今为止还没有其他物理学书籍有这样广泛的影响。

新千年版迎来了《费曼物理学讲义（FLP）》的新时代：21世纪的电子出版物时代。FLP改变为eFLP，本文和方程式用 $\text{\LaTeX}$ 电子排字语言表示，所有的插图用现代绘图软件重画。

这一版的印刷本的效果并没有什么特别之处，它看上去几乎完全和学物理的学生都已熟悉并热爱的最初的红色书一样。主要的差别在于扩大并改进了的索引，以前的版本第一次印刷以来的50年内读者们发现的885处错误的改正，以及更方便改正未来的读者可能发现的错误。关于这一点我以后还要谈到。

这一版的电子书版本以及加强电子版不同于20世纪的大多数技术书籍的电子书，如果把这种书籍的方程式、插图、有时甚至包括课文，放大以后都成为多个像素。新千年版的 $\text{\LaTeX}$ 稿本有可能得到最高质量的电子书，书页上的所有的面貌特征（除了照片）都可以无

限制地放大而始终保持其精确的形状和细锐度。带有费曼原始讲课的声音和黑板照相，还带有和其他资源的联接的电子版本是新事物，（假如费曼还在世的话）这一定会使他极其高兴。^[1]

费曼讲义的回忆

这3卷书是一套完备的教科书。它们也是费曼在1961—1964年给本科生上物理学课的历史记录，这是加利福尼亚理工学院的一年级和二年级学生，无论他们主修什么课程，都必须上的一门课。

读者们可能和我一样很想知道，费曼的讲课对听课的学生的影响如何。费曼在这几本书的前言中提供了多少有些负面的看法。他写道：“我不认为我对学生做得很好。”马修·桑兹（Matthew Sands）在他的《费曼物理学讲义补编》的回忆文章中给出了完全正面的观点。出于好奇，2005年春天，我和从费曼1961—1964班级（大约150个学生）中半随机地挑选一组17位学生通过电子邮件或面谈联系——这些学生中有些在课堂上有很大的困难，而有一些很容易掌握课程；他们主修生物学，化学，工程，地理学，数学及天文学，还包括物理学。

经过了这些年，可能已经在他们的记忆中抹上了欣快的色彩，但大约有80%回忆起费曼的讲课觉得是他们大学时光中精彩的事件。“就像上教堂。”听课是“一个变形改造的经历”，“一生的重要阅历，或许是我从加利福尼亚理工学院得到的最重要的东西。”“我是一个主修生物学的学生，但费曼的讲课在我的本科生经历中就像在最高点一样突出……虽然我必须承认当时我不会做家庭作业并且总是交不出作业。”“我当时是课堂上最没有希望的学生之一，但我从不缺一堂课……我记

得并仍旧感觉到费曼对于发现的快乐.....他的讲课具有一种.....感情上的冲击效果，这在印刷的讲义中可能失去了。”

相反，好些学生，主要由于以下两方面问题，而具有负面的记忆。（i）“你无法通过上课学会做家庭作业。费曼太灵活了——他熟知解题技巧和可作哪些近似，他还具有基于经验和天赋的直觉，这是初学的学生所不具备的。”费曼和同事们在讲课过程中知道这一缺陷，做了一些工作，部分材料已编入《费曼物理学讲义补编》：费曼的3次习题课以及罗伯特·莱顿（Robert Leighton）和罗各斯·沃格特（Rochus Vogt）选编的一组习题和答案。（ii）由于不知道下一节课可能会讨论什么内容而产生一种不安全感，缺少与讲课内容有任何关系的教科书或参考书，其结果是我们无法预习，这是十分令人沮丧的.....我发现在课堂上的演讲是令人激动但却是很难懂，但（当我重建这些细节的时候发现）它们只是外表上像梵文一样难懂。当然，有了这3本《费曼物理学讲义》，这些问题已经得到了解决。从那以后的许多年，它们就成了加州理工学院学生学习的教科书，直到今天它们作为费曼的伟大遗产还保持着活力。

改错的历史

《费曼物理学讲义》是费曼和他的合作者罗伯特·莱顿及马修·桑兹非常仓促之中创作出来的，根据费曼的讲课的录音带和黑板照相（这些都编入这新千年版的增强电子版）加工扩充而成^[2]。由于要求费曼、莱顿和桑兹高速度工作，不可避免地有许多错误隐藏在第一版中。在以后几年中，费曼收集了加州理工学院的学生和同事以及世界各地的读者发现的、长长的、确定的错误列表。在20世纪60年代和70

年代早期，费曼在他的紧张的生活中抽出时间来核实第1卷和第2卷中确认的大多数，不是全部错误，并在以后的印刷中加入了勘误表。但是费曼的责任感从来没有高到超过发现新事物的激情而促使他处理第3卷中的错误。^[3]在1988年他过早的逝世后，所有3卷的勘误表都存放到加州理工学院档案馆，它们躺在那里被遗忘了。

2002年，拉尔夫·莱顿（Ralph Leighton）（已故罗伯特·莱顿的儿子，费曼的同胞）告诉我，拉尔夫的朋友迈克尔·戈特里勃（Michael Gottlieb）汇编了老的和长长的新的勘误表。莱顿建议加州理工学院编纂一个改正所有错误的《费曼物理学讲义》的新版本，并将他和戈特里勃当时正在编写的新的辅助材料——《费曼物理学讲义补编》一同出版。

费曼是我心目中的英雄，也是亲密的朋友。当我看到勘误表和提交的新的一卷的内容时，我很快就代表加州理工学院（这是费曼长时期的学术之家，他、莱顿和桑兹已将《费曼物理学讲义》所有的出版权利和责任都委托给她了）同意了。一年半以后，经过戈特里勃细微工作和迈克尔·哈特尔（Michael Hartl）（一位优秀的加州理工学院博士后工作者，他审校了加上新的一卷的所有的错误）仔细的校阅，《费曼物理学讲义》的2005限定版诞生了，其中包括大约200处勘误。同时发行了费曼、戈特里勃和莱顿的《费曼物理学讲义补编》。

我原来以为这一版是“定本”了。出乎我意料的是全世界读者热情响应。戈特里勃呼吁大家鉴别出更多错误，并通过创建的费曼讲义网站 www.feynmanlectures.info 提交给他。从那时起的五年内，又提交了965处新发现的错误，这些都是从戈特里勃、哈特尔和纳特·博德（Nate Bode）（一位优秀的加州理工学院研究生，他是继哈特尔之后

的加州理工学院的错误检查员) 的仔细校对中遗漏的。这些965处被检查出来的错误中80处在《定本》的第四次印刷(2006年8月)中改正了, 余下的885处在这一个新千年版的第一次印刷中被改正(第1卷中332处, 第2卷中263处, 第3卷200处) [\[4\]](#), 这些错误的详情可参看 www.feynmanlectures.info。

显然, 使《费曼物理学讲义》没有错误已成为全世界的共同事业。我代表加州理工学院感谢2005年以来作了贡献的50位读者以及更多的在以后的年代里会作出贡献的读者。所有贡献者的名字都公示在 www.feynmanlectures.info/flp-errata.html 上。

几乎所有的错误都可分为三种类型: (i) 文字中的印刷错误; (ii) 公式和图表中的印刷和数学错误——符号错误, 错误的数字(例如, 应该是4的写成5), 缺失下标、求和符号、括号和方程式中一些项; (iii) 不正确的章节、表格和图的参见条目。这几种类型的错误虽然对成熟的物理学家来说并不特别严重, 但对于初识费曼的学生, 就可能造成困惑和混淆。

值得注意的是, 在我主持下改正的1 165处错误中只有不多几处我确实认为是真正物理上的错误。一个例子是第2卷, 5—9页上一句话, 现在是“.....接地 的封闭导体内部没有稳定的电荷分布不会在外部产生[电]场”(在以前的版本中漏掉了接地一词)。这一错误是好些读者都曾向费曼指出过的, 其中包括威廉和玛丽学院(The College of William and Mary) 学生比尤拉·伊丽莎白·柯克斯(Beulah Elizabeth Cox), 她在一次考试中依据的是费曼的错误的段落。费曼在1975年给柯克斯女士的信中写道: “你的导师不给你分数是对的, 因为正像他用高斯定律证明的那样, 你的答案错了。在科学中你应当相信逻辑和

论据、仔细推理而不是权威。你也正确阅读和理解了书本。我犯了一个错误，所以书错了。当时我或许正想着一个接地的导电球体，或别的；使电荷在（导体球）内部各处运动而不影响外部的物体。我不能确定当时是怎样做的。但我错了。你由于信任我也错了。”^[5]

这一新千年版是怎样产生的

2005年11月到2006年7月之间，340个错误被提交到费曼讲义网站 www.feynmanlectures.info。值得注意的是，其中大多数来自鲁道夫·普法伊弗（Rudolf Pfeiffer）博士一个人：当时是奥地利维也纳大学的物理学博士后工作者。出版商艾迪生·卫斯利（Addison Wesley），改正了80处错误，但由于费用的缘故而没有改正更多的错误：由于书是用照相胶印法印刷的，用1960年代版本书页的照相图出版印刷。改正一个错误就要将整个页面重新排字并要保证不产生新的错误，书页要两个不同的人分别各排一页，然后由另外几个人比较和校读——如果有几百个错误要改正，这确是一项花费巨大的工作。

戈特里勃、普法伊弗和拉尔夫·莱顿对此非常不满意，于是他们制定了一个计划，目的是便于改正所有错误，另一目的是做成电子书的《费曼物理学讲义》的加强电子版。2007年，他们将他们的计划向作为加州理工学院的代理人的我提出，我热心而又谨慎。当我知道了更多的细节，包括《加强电子版本》中一章的示范以后，我建议加州理工学院和戈特里勃、普法伊弗及莱顿合作来实现他们的计划。这个计划得到三位前后相继担任加州理工学院物理学、数学和天文学学部主任——汤姆·汤勃列罗（Tom Tomlrello）、安德鲁·兰格（Andrew Lange）和汤姆·索伊弗（Tom Saifer）——的支持；复杂的法律手续及

合同细节由加州理工学院的知识产权法律顾问亚当·柯奇伦（Adam Cochran）完成。《新千年版》的出版标示着该计划虽然很复杂但已成功地得到执行。尤其是：

普法伊弗和戈特里勃已将所有三卷《费曼物理学讲义》（以及来自费曼的课程并收入《费曼物理学讲义补编》的1 000多道习题）转换成 L^AT_EX 。《费曼物理学讲义》的图是在书的德文译者亨宁·海因策（Henning Heinze）的指导下，为用于德文版，在印度用现代的电子方法重画的。为了将海因策的插图的非独家使用于新千年英文版，戈特里勃和普法伊弗购买了德文版〔奥尔登博（Oldenbourg）出版〕的 L^AT_EX 方程式的非独家的使用权，普法伊弗和戈特里勃不厌其烦地校对了所有 L^AT_EX 文本和方程式以及所有重画的插图，并必要时作了改正。纳特·博德和我代表加州理工学院对课文、方程式和图曾作过抽样调查，值得注意的是，我们没有发现错误。普法伊勃和戈特里勃是惊人的细心和精确。戈特里勃和普法伊弗为约翰·沙利文（John Sullivan）在亨丁顿实验室安排了将费曼在1962—1964年黑板照相数字化，以及乔治·布卢迪·奥迪欧（George Blood Audio）将讲课录音磁带数字化——从加州理工学院教授卡弗·米德（Carver Mead）获得财政资助和鼓励，从加州理工学院档案保管员谢利·欧文（Shelly Erwin）处得到后勤支持，并从柯奇伦处得到法律支持。

法律问题是很严肃的。20世纪60年代，加州理工学院特许艾迪生·卫斯利发表印刷版的权利，20世纪90年代，给予分发费曼讲课录音和各种电子版的权利。在21世纪初，由于先后取得这些特许证，印刷物的权利转让给了培生（Pearson）出版集团，而录音和电子版转让给珀修斯（Perseus）出版集团。柯奇伦在一位专长于出版的律师艾克·威廉

姆斯（Ike Williams）的协助下，成功将所有这些权利和珀修斯结合在一起，使这一新千年版成为可能。

鸣谢

我代表加州理工学院感谢这许多使这一新千年版成为可能的人们。特别是，我感谢上面提到的关键人物：拉尔夫·莱顿、迈克尔·戈特里勃、汤姆·汤勃列罗、迈克尔·哈特尔、鲁道夫·普法伊弗、亨宁·海因策、亚当·柯奇伦、卡弗·米德、纳特·博德、谢利·欧文、安德鲁·兰格、汤姆·索伊弗、艾克·威廉姆斯以及提交错误的50位人士（在 www.feynmanlectures.info 中列出）。我也要感谢米歇尔·费曼（Michelle Feynman，理查德·费曼的女儿）始终不断的支持和建议，加州理工学院的艾伦·赖斯（Alan Rice）的幕后帮助和建议，斯蒂芬·普奇吉（Stephan Puchegger）和卡尔文·杰克逊（Calvin Jackson）给普法伊弗从《费曼物理学讲义》转为 L^AT_EX 的帮助和建议。迈克尔·菲格尔（Michael Figl）、曼弗雷德·斯莫利克（Manfred Smolik）和安德列斯·斯坦格尔（Andreas Stangl）关于改错的讨论，以及珀修斯的工作人员和（以前版本）艾迪生·卫斯利的工作人员。

基普·S·索恩（Kip S. Thorne）

荣休费曼理论物理教授

加州理工学院

2010年10月

[1] 原文“What would have given Feynman great pleasure”是虚拟式的句子，中文没有相当于英语虚拟式的句法，所以加上括号内的句子。——译者注

[2] 费曼的讲课和这3本书的起源的说法请参阅这3本书每一本都有的《费曼自序》和《前言》，也可参看《费曼物理学讲义补编》中马修·桑兹的回忆以及1989年戴维·古德斯坦（David Goodstein）和格里·诺格鲍尔（Gerry Neugebauer）撰写的《费曼物理学讲义纪念版》特刊前言，它也刊载在2005年限定版中。

[3] 1975年，他开始审核第3卷中的错误，但被其他事情所分心，因而没有完成这项工作，所以没有作出勘误。

[4] 原版如此。——译者注

[5] 《与习俗完全合理的背离，理查德·P·费曼的信件》288～289页，米歇尔·费曼（Michelle Feynman）编，Basic Books，纽约，2005。

费曼自序



这是我前年与去年在加利福尼亚理工学院对一二年级学生讲授物理学的讲义。当然，这本讲义并不是课堂讲授的逐字逐句记录，而是已经经过了编辑加工，有的地方多一些，有的地方少一些。我们的课堂讲授只是整个课程的一部分。全班180个学生每周两次聚集在大教室里听课，然后分成15到20人的小组在助教辅导下进行复习巩固。此外，每周还有一次实验课。

在这些讲授中，我们想要抓住的特殊问题是，要使充满热情而又相当聪明的中学毕业生进入加利福尼亚理工学院后仍旧保持他们的兴趣。他们在进入学院前就听说过不少关于物理学是如何有趣以及如何引人入胜——相对论、量子力学以及其他的新概念。但是，一旦他们学完两年我们以前的那种课程后，许多人就泄气了，因为教给他们意

义重大、新颖的现代的物理概念实在太少。他们被安排去学习像斜面、静电学以及诸如此类的内容，两年过去，没什么收获。问题在于，我们是否有可能设置一门课程能够顾全那些比较优秀的、兴致勃勃的学生，使其保持求知热情。

我们所讲授的课程丝毫也不意味着是一门概况性的课程，而是极其严肃的。我想这些课程是对班级中最聪明的学生而讲的，并且可以肯定，这可能是对的，甚至最聪明的学生也无法完全消化讲课中的所有内容——其中加入了除主要讨论的内容之外的有关思想和概念多方面应用的建议。不过，为了这个缘故，我力图使所有的陈述尽可能准确，并在每种场合都指明有关的方程式和概念在物理学的主体中占有什么地位，以及——随着他们学习深入——应怎样作出修正。我还感到，重要的是要向这样的学生指出，他们应能理解——如果他们够聪明的话——哪些是从已学过的内容中推演出来的，哪些是作为新的概念而引进的。当出现新的概念时，假若这些概念是可推演的，我就尽量把它们推演出来，否则就直接说明这是一个新的概念，它根本不能用已学过的东西来阐明，也不可能予以证明，因而是直接引进的。

在讲授开始时，我假定学生们在中学已学过一些内容，如几何光学、简单的化学概念，等等。我也看不出有任何理由要按一定的次序来讲授。就是说没有详细讨论某些内容之前，不可以提到这些内容。在讲授中，有许多当时还没有充分讨论过的内容出现。这些内容比较完整的讨论要到以后学生的预备知识更齐全时再进行。电感和能级的概念就是例子，起先，只是以非常定性的方式引入这些概念，后来再进行较全面的讨论。

在针对那些较积极的学生的同时，我也要照顾到另一些学生，对他们来说，这些外加的五彩缤纷的内容和不重要的应用只会使其感到

头痛，也根本不能要求他们掌握讲授中的大部分内容。对这些学生而言，我要求他们至少能学到中心内容或材料的脉络。即使他不理解一堂课中的所有内容，我希望他也不要紧张不安。我并不要求他理解所有的内容，只要求他理解核心的和最确切的面貌。当然，对他来说也应当具有一定的理解能力，来领会哪些是主要定理和主要概念，哪些则是更高深的枝节问题和应用，这些要过几年他才会理解。

在讲课过程中有一个严重困难：在课程的讲授过程中一点也没有学生给教师的反馈来指示讲授的效果究竟如何。这的确是一个很严重的困难，我不知道讲课的实际效果的好坏。整个事件实质上是一种实验。假如要再讲一次的话，我将不会按同样的方式去讲——我希望我不会再来一次！然而，我想就物理内容来说，第一年的情形看来还是十分满意的。

但在第二年，我就不那么满意了。课程的第一部分涉及电学和磁学，我想不出什么真正独特的或不同的处理方法，也想不出什么比通常的讲授方式格外引人入胜的方法。因此在讲授电磁学时，我并不认为自己做了很多事情。在第二年末，我原来打算在电磁学后再多讲一些物性方面的内容，主要讨论这样一些内容如基本模式、扩散方程的解、振动系统、正交函数等等，并且阐述通常称为“数学物理方法”的初等部分内容。回顾起来，我想假如再讲一次的话，我会回到原来的想法上去，但由于没有要我再讲这些课程的打算，有人就建议介绍一些量子力学——就是你们将在第3卷中见到的——或许是有益的。

显然，主修物理学的学生们可以等到第三年学量子力学。但是，另一方面，有一种说法认为许多听我们课的学生是把学习物理作为他们对其他领域的主要兴趣的背景；而通常处理量子力学的方式对大多数学生来说这些内容几乎是无用的，因为他们必须花费相当长的时间

来学习它。然而，在量子力学的实际应用中——特别是较复杂的应用中，如电机工程和化学领域内——微分方程处理方法的全部工具实际上是用不到的。所以，我试图这样来描述量子力学的原理，即不要求学生首先掌握有关偏微分方程的数学。我想，即使对一个物理学家来说，我想试着这样做——按照这种颠倒的方式来介绍量子力学——是一件有趣的事，由于种种理由，这从讲课本身或许会明白。不过我认为，在量子力学方面的尝试不是很成功，这主要是因为在最后我实际上已没有足够的时间（例如，我应该再多讲三四次来比较完整地讨论能带、概率幅的空间的依赖关系等这类问题）。而且，我过去从未以这种方式讲授过这部分课程，因此缺乏来自学生的反馈就尤其严重了。我现在相信，还是应当迟一些讲授量子力学。或许有一天我会有机会再来讲授这部分内容，到那时我将会讲好它。

在这本讲义中没有列入有关解题的内容，这是因为另有辅导课。虽然在第一年中，我的确讲授过三次关于怎样解题的内容，但没有将它们收在这里。此外，还讲过一次惯性导航，应该在转动系统后面，遗憾的是在这里也略去了。第五讲和第六讲实际上是桑兹讲授的，那时我正外出。

当然，问题在于我们这个尝试的效果究竟如何。我个人的看法是悲观的，虽然与学生接触的大部分教师似乎并不都有这种看法。我并不认为自己在对待学生方面做得很出色。当我看到大多数学生在考试中采取的处理问题的方法时，我认为这种方式是失败了。当然，朋友们提醒我，也有一二十个学生——非常出人意外地——几乎理解讲授的全部内容，并且非常积极地攻读有关材料，兴奋地、感兴趣地钻研许多问题。我相信，这些学生现在已具备了一流的物理基础，他们毕

竟是我想要培养的学生。但是，“教育之力量鲜见成效，除非施之于天资敏悟者，然若此又实为多余。”[吉本（Gibbon）^[1]]

但是，我并不想使任何一个学生完全落在后面，或许我曾经这样做的。我想，我们能够更好地帮助学生的一个办法是，多花一些精力去编纂一套能够阐明讲课中的某些概念的习题。习题能够充实课堂讲授，使讲过的概念更加实际，更加完整和更加易于牢记。

然而，我认为要解决这个教育问题就要认识到最佳的教学只有当学生和优秀的教师之间建立起个人的直接关系，在这种情况下，学生可以讨论概念、考虑问题、谈论问题，除此之外，别无他法。仅仅坐在课堂里听课或者只做指定的习题是不可能学到许多东西的。但是，现在我们有这么多学生要教育，因此我们必须尽量找出一种代替理想情况的办法。或许，我的讲义可以作出一些贡献；也许在某些小地方有个别教师和学生会从讲义中受到一些启示或获得某些观念，当他们彻底思考讲授内容，或者进一步发展其中的一些想法时，他们或许会得到乐趣。

理查德·费曼

1963年6月

[1] Edward Gibbon（1737—1794），英国历史学家。——译者注

前言

20世纪物理学的伟大成就，量子力学理论，现在已经近40岁了。我们到现在一般还一直在物理学课程中给我们的学生安排物理学引论的课程（对有些学生来说还是最后的物理课）。对我们物理世界知识的这一中心部分充其量只是简单地提一提。我们应当比这做得更好一些。我的意图是在这些讲课中希望以学生能理解的方式提供给他们量子力学的基本的和最重要的概念。你们将发现这里的方法是新型的，特别是对二年级学生课程的水平来说是新的，并且我们更多的是把它当作一次实验。然而，在看到一些学生是如何容易地接受它以后，我相信实验是成功的。当然，还有需要改进的地方，这将在有更多的课堂经验以后会得到。你们在这里看到的是这第一次实验的记录。

从1961年9月到1963年5月在加州理工学院作为物理学引论课程，连续两年的费曼物理教程中，正当需要靠它来理解所描写的现象的时候，量子物理学的概念就被引入了。此外，第二学年的最后12讲全部用来更有条理地介绍一些量子力学概念。然而，在讲座接近结束的时候，才搞清楚已没有足够的时间留给量子力学了。在准备材料的时候，不断地发现其他一些重要和有兴趣的题目可以用已经发展的基本工具来处理。也担心第12章中薛定谔函数的过分简单的处理不能为学生在可能会去研读的许多书籍中更加传统的处理方法间架起足够的桥梁。因此决定扩展另外一组7次讲座；他们是在1964年5月给二年级学生讲的。这些讲演进一步解释并扩展了在前几章中已有的某些材料。

在这一卷中，我们将两年中的演讲汇集在一起，并将次序作了一些调整。此外，原来是给一年级讲的两次介绍量子物理学的演讲全部从第1卷中（在那里是第37和38章）移过来放在本卷中作为第1、2章——使这一卷成为独立的单位，相对独立于前面两卷。几个关于角动量量子化的概念（包括施特恩-格拉赫实验的讨论）已经在第2卷的第34和35章中介绍过了，我们假定对它们已经熟悉了。

这一系列讲座从一开始就试图阐明量子力学的最基本、最普遍的特征。第一次讲课一上来就讨论概率振幅、振幅干涉、状态的抽象符号、叠加以及状态的分解等概念——并且从一开始就使用狄拉克符号。在每一情况中，概念是和对某些特定例子详细讨论一同引进的——为使物理概念尽可能地实在。接着讨论包括确定能量状态在内的状态对时间的依赖，这些概念立即被应用于研究双态系统。氦微波激光器的详细讨论提供了引进辐射吸收及感应跃迁的框架。讲演接着进一步考虑更复杂的系统，直到讨论电子在晶体中的传播，以及对更复杂的角动量的量子力学处理。我们对量子力学的介绍在第20章中讨论到薛定谔波函数、它的微分方程以及对氢原子的解为结束。

这一卷的最后一章并不打算作为“课程”的一部分。它是关于超导的“专题讨论”，是按照前两卷中某些兴趣性的讲演的精神作的，期望给学生开启有关他们正在学习的内容与普遍物理文化的关系的宽阔视野。“费曼的结束语”是这3卷书的句号。

正如在第1卷前言中所说的，这些演讲是在物理课程修订委员会[莱顿、内尔（V. Neher）和桑兹]指导下，加利福尼亚理工学院所做的发展新的引论课程计划的一个方面。在福特基金会的资助下计划得以进行。许多人帮助准备了这一卷的技术细节：克雷顿（M. Clayton）、库乔（J. Curcio）、哈特尔（J. Hartle）、哈尔维（T.

Harvey)、伊斯雷尔 (M. Israel)、普里乌斯 (P. Preuss)、沃伦 (F. Warren) 和齐莫曼 (B. Zimmerman)、诺伊格鲍尔 (G. Neugebauer) 教授和威尔兹 (C. Wilts) 仔细审阅了大部分手稿, 使材料更加准确和清楚。

不过, 你将在这里发现的量子力学故事是属于费曼的。费曼在现场讲课中所展现出的思想, 使我们感受到智力的激荡, 如果本书也能让读者感受到哪怕部分这种激荡, 我们的努力就没有白费。

M. 桑兹

1964年12月

目 录

[译者序](#)

[关于费曼](#)

[新千年版前言](#)

[费曼自序](#)

[前言](#)

[第1章 量子行为](#)

[§1-1 原子力学](#)

[§1-2 子弹的实验](#)

[§1-3 波的实验](#)

[§1-4 电子的实验](#)

[§1-5 电子波的干涉](#)

[§1-6 监视电子](#)

[§1-7 量子力学的第一原理](#)

[§1-8 不确定性原理](#)

[第2章 波动观点与粒子观点的关系](#)

[§2-1 概率波振幅](#)

[§2-2 位置与动量的测量](#)

[§2-3 晶体衍射](#)

[§2-4 原子的大小](#)

[§2-5 能级](#)

[§2-6 哲学含义](#)

[第3章 概率幅](#)

[§3-1 振幅组合定律](#)

[§3-2 双缝干涉图样](#)

[§3-3 在晶体上的散射](#)

[§3-4 全同粒子](#)

[第4章 全同粒子](#)

[§4-1 玻色子和费米子](#)

[§4-2 两个玻色子的状态](#)

[§4-3 \$n\$ 个玻色子的状态](#)

[§4-4 光子的发射和吸收](#)

[§4-5 黑体光谱](#)

[§4-6 液氦](#)

[§4-7 不相容原理](#)

[第5章 自旋1](#)

[§5-1 用施特恩-格拉赫装置过滤原子](#)

[§5-2 过滤原子的实验](#)

[§5-3 串联施特恩-格拉赫过滤器](#)

[§5-4 基础态](#)

[§5-5 干涉的振幅](#)

[§5-6 量子力学的处理方法](#)

[§5-7 变换到不同的基](#)

[§5-8 其他情况](#)

[第6章 自旋1/2](#)

[§6-1 变换振幅](#)

[§6-2 变换到转动坐标系](#)

[§6-3 绕 \$z\$ 轴的转动](#)

[§6-4 绕 \$y\$ 轴转动 \$180^\circ\$ 和 \$90^\circ\$](#)

[§6-5 绕 \$x\$ 轴的转动](#)

[§6-6 任意的旋转](#)

第7章 振幅对时间的依赖关系

§7-1 静止的原子；定态

§7-2 匀速运动

§7-3 势能；能量守恒

§7-4 力；经典极限

§7-5 自旋1/2粒子的“进动”

第8章 哈密顿矩阵

§8-1 振幅与矢量

§8-2 态矢量的分解

§8-3 世界的基础态是什么？

§8-4 状态怎样随时间而变

§8-5 哈密顿矩阵

§8-6 氨分子

第9章 氨微波激射器

§9-1 氨分子的状态

§9-2 静电场中的分子

§9-3 在随时间变化的场中的跃迁

§9-4 共振跃迁

§9-5 偏离共振的跃迁

§9-6 光的吸收

第10章 其他双态系统

§10-1 氢分子离子

§10-2 核力

§10-3 氢分子

§10-4 苯分子

§10-5 染料

§10-6 磁场中自旋1/2粒子的哈密顿

§10-7 磁场中自旋的电子

第11章 再论双态系统

§11-1 泡利自旋矩阵

§11-2 作为算符的自旋矩阵

§11-3 双态方程的解

§11-4 光子的偏振态

§11-5 中性K介子

§11-6 对N态系统的推广

第12章 氢的超精细分裂

§12-1 由两个自旋1/2粒子组成的系统的基础态

§12-2 氢原子基态的哈密顿

§12-3 能级

§12-4 塞曼分裂

§12-5 在磁场中的态

§12-6 自旋1粒子的投影矩阵

第13章 在晶格中的传播

§13-1 电子在一维晶格中的状态

§13-2 确定能量的状态

§13-3 与时间有关的状态

§13-4 三维晶格中的电子

§13-5 晶格中的其他状态

§13-6 在不完整的晶格上的散射

§13-7 被晶格的不完整性陷阱

§13-8 散射振幅和束缚态

第14章 半导体

§14-1 半导体中的电子和空穴

§14-2 掺杂的半导体

[§14-3 霍尔效应](#)

[§14-4 半导体结](#)

[§14-5 半导体结的整流](#)

[§14-6 晶体管](#)

[第15章 独立粒子近似](#)

[§15-1 自旋波](#)

[§15-2 双自旋波](#)

[§15-3 独立粒子](#)

[§15-4 苯分子](#)

[§15-5 其他有机化学分子](#)

[§15-6 近似方法的其他应用](#)

[第16章 振幅对位置的依赖关系](#)

[§16-1 一维情形的振幅](#)

[§16-2 波函数](#)

[§16-3 具有确定动量的态](#)

[§16-4 对x的态的归一化](#)

[§16-5 薛定谔方程](#)

[§16-6 量子化能级](#)

[第17章 对称性和守恒定律](#)

[§17-1 对称性](#)

[§17-2 对称与守恒](#)

[§17-3 守恒定律](#)

[§17-4 偏振光](#)

[§17-5 \$\Lambda^0\$ 的衰变](#)

[§17-6 转动矩阵概要](#)

[第18章 角动量](#)

[§18-1 电偶极辐射](#)

[§18-2 光散射](#)

[§18-3 电子偶素的湮没](#)

[§18-4 任意自旋的转动矩阵](#)

[§18-5 测量核自旋](#)

[§18-6 角动量的合成](#)

[§18-7 附注1：转动矩阵的推导](#)

[§18-8 附注2：光子发射中的宇称守恒](#)

[第19章 氢原子与周期表](#)

[§19-1 氢原子的薛定谔方程](#)

[§19-2 球对称解](#)

[§19-3 具有角度依赖关系的状态](#)

[§19-4 氢原子的一般解](#)

[§19-5 氢原子波函数](#)

[§19-6 周期表](#)

[第20章 算符](#)

[§20-1 操作与算符](#)

[§20-2 平均能量](#)

[§20-3 原子的平均能量](#)

[§20-4 位置算符](#)

[§20-5 动量算符](#)

[§20-6 角动量](#)

[§20-7 平均值随时间的变化](#)

[第21章 经典情况下的薛定谔方程：关于超导电性的讨论会](#)

[§21-1 磁场中的薛定谔方程](#)

[§21-2 概率的连续性方程](#)

[§21-3 两类动量](#)

[§21-4 波函数的意义](#)

[§21-5 超导电性](#)

[§21-6 迈斯纳效应](#)

[§21-7 通量的量子化](#)

[§21-8 超导动力学](#)

[§21-9 约瑟夫森结](#)

[费曼的结束语](#)

[索引](#)

[附录](#)

[返回总目录](#)

第1章 量子行为

§1-1 原子力学

“量子力学”描述物质和光的行为的各方面细节，特别是发生在原子尺度上的事件。在微小的尺度下事物的行为一点也不像我们有着直接经验的任何事物。它们的行为既不像波动，又不像粒子，也不像云雾，或弹子球，或悬挂在弹簧上的重物，总之不像我们曾经见过的任何东西。

牛顿认为，光是由微粒构成的，但是，之后发现光的行为像波动。然而，后来（在20世纪初叶）人们发现，光的行为有时确实又像粒子。又譬如，在历史上，电子起先被认为像粒子，后来发现它在许多方面的性质像波。所以，实际上它表现得两者都不像。现在 we 不再说它到底是什么，我们说：“它什么都不像。”

然而，运气总算还好：电子的行为很像光。原子客体（电子、质子、中子、光子等等）的量子行为都是相同的，它们都是“粒子波”，或者随便什么你愿意称呼的名称。所以，我们所学的关于电子（我们将用它作为例子）的性质也可应用到所有的“粒子”，包括光子上。

在20世纪的前四分之一，有关原子与其他小尺度粒子行为的知识逐渐积累起来，给出了微小物体是如何活动的一些线索，由此也引起了越来越多的混乱，到1926和1927年，薛定谔、海森伯与玻恩终于解

决了这些问题。他们最后对微小尺度物质的行为作出了协调一致的描述。本章中我们将开始研究这种描述的主要特点。

因为原子的行为与我们的日常经验不同，所以很难适应它，而且对每个人——不管是新手，还是有经验的物理学家——都显得奇特而神秘。甚至专家们也不能以他们所想要的方式去理解原子的行为，而且这是完全有道理的，因为一切人类的直接经验和所有的人类的直觉都只适用于大的物体。我们知道大物体的行为将是如何，但是在小尺度下事物的行为却并非如此。所以我们必须用一种抽象的或想象的方式，而不是把它与我们的直接经验联系起来的方式来学习它。

在本章中，我们将直接讨论以最陌生的方式出现的神秘行为的基本特征。我们选择用来考察的现象不可能，绝对不可能，以任何经典方式来解释，但它却包含了量子力学的核心。事实上，它包含着独一无二的奥秘。我们不能通过“说明”它如何作用来消除这个奥秘。我们只是告诉你，它是怎样起作用的。在告诉你它怎样起作用的同时，我们也将告诉你所有量子力学的基本特色。

§1-2 子弹的实验

为了试图理解电子的量子行为，我们将在一个特殊的实验装置中，把它们的行为和我们较为熟悉的像子弹那样的粒子的行为以及如水波那样的波动的行为作一比较和对照。首先考虑子弹在图1-1中概略地画出的实验装置中表现的行为。我们有一挺机枪射出一连串子弹。但它不是一挺很好的机枪，因为它发射的子弹在相当大的角度内（随机地）散开，如图所示。在机枪的前方有一堵用铁甲板制成的墙，墙上开有两个孔，其大小正好能让一颗子弹穿过，墙的后面是一道后障

（譬如说一道厚木墙），它能“吸收”打上去的子弹。在后障前面，有一个可称为“探测器”的物体。它可以是一个装着沙的箱子。进入探测器的子弹都被留在那里聚集起来。如果我们愿意的话，可以出空箱子，清点射到箱子里面的子弹数。探测器可以（沿我们称为 x 的方向）来回移动。利用这个装置，我们可以通过实验找出以下问题的答案：“一子弹通过墙上的小孔后到达后障上离中心的距离为 x 处的概率是多少？”首先，你们应当体会我们所谈的应该是概率，因为不可能肯定地说出某一特定的子弹会打到什么地方。一颗碰巧打到一个小孔上的子弹可能从孔的边缘弹开，最终打到某个地方。所谓“概率”，我们指的是子弹到达探测器的机会，这可以用以下方式来量度，数一下在一定时间内到达探测器的子弹数，然后算出这个数与这段时间内打到后障上的子弹总数的比值。或者，如果假定在测量时间内机枪始终以同样的发射率发射子弹，那么我们所要求的概率就正比于在某个标准时间间隔内到达探测器的子弹数。

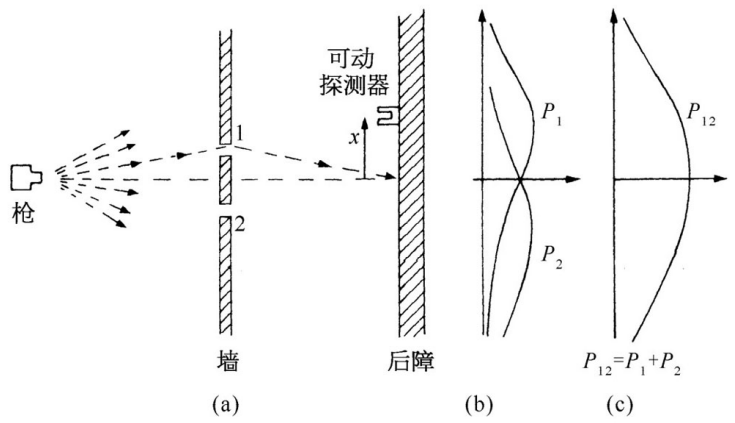


图1-1 子弹的干涉实验

为了我们现在的目的，设想一个多少有点理想化的实验，其中子弹不是真正的子弹，而是不会裂开的子弹，即它们不会分裂成两半。在实验中，我们发现子弹总是整颗整颗地到达，在探测器中找到的总

是一颗颗完整的子弹。如果将机枪射击的发射率弄得十分低，那么我们发现任何给定时刻，要么没有任何东西到达，要么有一颗，并且只有一颗——不折不扣的一颗——子弹打到后障上。而且，整颗的大小也必定与机枪射击的发射率无关。我们说：“子弹总是以同样的整颗到达。”我们的探测器中测得的是整颗子弹到达的概率。我们测量的是作为 x 的函数的概率。用这种仪器作这样的测量的结果画在图1-1(c)上（我们还从未曾做过这种实验，所以实际上是想象这种结果而已。），在图上，向右的水平轴表示概率的大小，垂直轴表示 x ，这样 x 的坐标就对应于探测器的位置。我们称这概率为 P_{12} ，因为子弹可能通过孔1，也可能通过孔2过来。你们不会感到奇怪， P_{12} 的值在接近图中心时大，而在 x 很大时则变小。然而，你们可能感到惊奇的是：为什么 $x=0$ 的地方 P_{12} 具有极大值。假如我们先遮住孔2作一次实验，再遮住孔1作一次实验的话，就可以理解这一点。当孔2被遮住时，子弹只能通过孔1，我们就得到(b)图上标有 P_1 的曲线。正如你们会预料的那样， P_1 的极大值出现在与枪口和孔1在一条直线上的 x 处。当孔1关闭时，我们得到图中所画出的对称的曲线 P_2 。 P_2 是通过孔2的子弹的概率分布。比较图1-1的(b)与(c)，我们发现一个重要的结果

$$P_{12} = P_1 + P_2. \quad (1.1)$$

概率正好相加。两个孔都开放时的效果是各个孔单独开放时的效果之和。我们称这个结果为“无干涉”的观测，其理由不久就会明白。关于子弹我们就讲这些，它们整颗地出现，到达的概率不显示干涉现象。

§1-3 波的实验

现在我们要来考虑一个水波实验。实验装置概略地画在如图1-2中。这里有一个浅水槽，一个标明为“波源”的小物体由马达带动作上下振动激起圆形波。在波源的后面也有一堵带两个孔的墙，墙以后又是另一堵墙。为了简单起见，设这后一堵墙是一个“吸收器”，因而波到达这里后不被反射。吸收器可以用逐渐倾斜的“沙滩”做成，在沙滩前，放置一个可以沿 x 方向前后移动的探测器，和先前的一样。不过现在这个探测器是一个测量波动“强度”的装置。你们可以设想一种能测量波动高度的装置，但其刻度则标成与实际高度的平方成比例，这样读数正比于波的强度。于是，我们的探测器的读数正比于波携带的能量，或者更确切地说，正比于被带至探测器能量的速率。

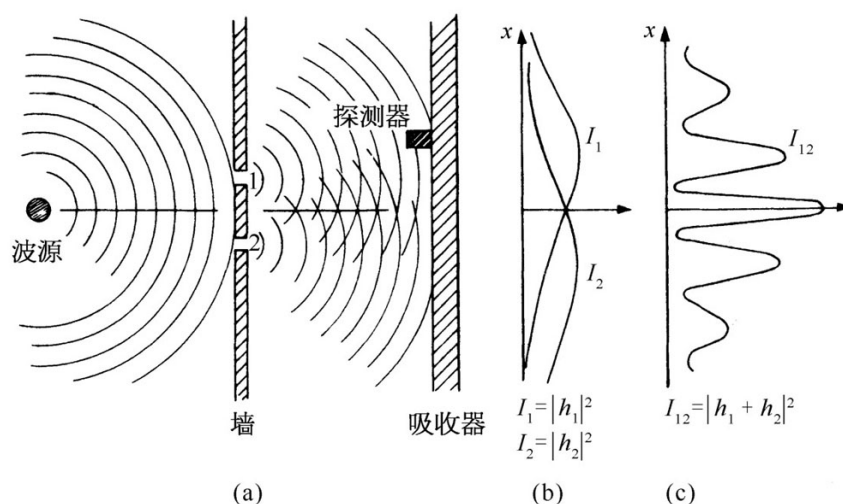


图1-2 水波干涉实验

在我们这个波动实验中，第一件值得注意的事是强度的大小可以是任意值，如果波源只作很小的运动，那么在探测器处就只有微弱的波动。当波源的振动较强时，在探测器处的强度就较大。无论如何，

波的强度可以为任意值。我们不会说在波的强度上能显示出任何“颗粒性”。

现在，我们来测量不同 x 处的波的强度（保持波源一直以同样的方式振动）。我们得到图1-2（c）上标有 I_{12} 有趣样式的曲线。

我们在第1卷中学习电磁波的干涉时，已经算出怎样会产生这种图样。在这种情况下，我们会观察到原始波在小孔处发生衍射，新的圆形波从各个小孔向外扩展。如果我们分别一次遮住一个小孔，并且测量吸收器处的强度分布，则得到如图1-2（b）所示的相当简单的强度曲线。 I_1 是来自孔1的波的强度（在孔2被遮住时测得）， I_2 是来自孔2的波的强度（在孔1被遮住时测得）。

当两个小孔都开放时所观察到的强度 I_{12} 显然不是 I_1 与 I_2 之和。我们说，两列波产生了“干涉”。在某些位置上（在那里曲线 I_{12} 有极大值）两列波“同相”，其波峰相加就得到一个大的振幅，因而得到大的强度。我们说，在这些地方，两列波之间发生“相长干涉”。凡是从探测器到一个小孔的距离比到另一个小孔的距离大（或小）了波长整数倍的那些地方，都会产生这种相长干涉。

在两列波抵达探测器时相位差为 π （称为“反相”）的那些地方，合成波的振幅是两列波的振幅之差。这两列波发生“相消干涉”，因而得到的波的强度低。我们预料这种低的强度值出现在探测器到小孔1的距离与到小孔2的距离之差为半波长的奇数倍的那些地方。图1-2中 I_{12} 的低值对应于两列波相消干涉的那些位置。

你们一定会记得 I_1 ， I_2 与 I_{12} 之间的定量关系可以用以下方式来表示：来自孔1的水波在探测器处的高度瞬时值可以写成 $h_1 e^{i\omega t}$ （的实部），这里“振幅” h_1 一般来说是复数。波动强度则正比于均方高度，当我们用复数表示时，则正比于 $|h_1|^2$ 。类似地，对来自孔2的波，高度为 $h_2 e^{i\omega t}$ ，强度正比于 $|h_2|^2$ 。当两个孔都开放时，由两列波的高度相加得到总高度 $(h_1 + h_2) e^{i\omega t}$ 以及强度 $|h_1 + h_2|^2$ 。就我们目前的要求来说，可略去比例常数，于是对相互干涉的波适用的关系就是：

$$I_1 = |h_1|^2, I_2 = |h_2|^2, I_{12} = |h_1 + h_2|^2. \quad (1.2)$$

你们会注意到，这个结果与在子弹的情况下所得到的结果（式1.1）完全不同。如果将 $|h_1 + h_2|^2$ 展开，就可以看到：

$$|h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2|h_1||h_2|\cos\delta. \quad (1.3)$$

这里 δ 是 h_1 与 h_2 之间的相位差。用强度来表示时，我们可以写成：

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (1.4)$$

式（1.4）中最后一项是“干涉项”。关于水波就讲这一些。波的强度可以有任何数值，这显示出干涉现象。

§1-4 电子的实验

现在我们想象一个用电子做的类似实验。图1-3中描绘了此实验的概略图。我们制造了一把电子枪，它包括一根用电流加热的钨丝，外面套有一个开有小孔的金属盒，如果钨丝相对金属盒处于负电位时，由钨丝发射出的电子将被加速飞往盒壁，其中有一些会穿过盒上的小孔。所有从电子枪出来的电子都带有（差不多）相同的能量。在枪的前方也有一堵墙（就是一块薄金属板），墙上有两个小孔。这道墙的后面有另一块作为“后障”的板。在后障的前面我们放置一个可移动的探测器。它可以是盖革计数器，或者更好一些，是一台与扩音器相连的电子倍增器。

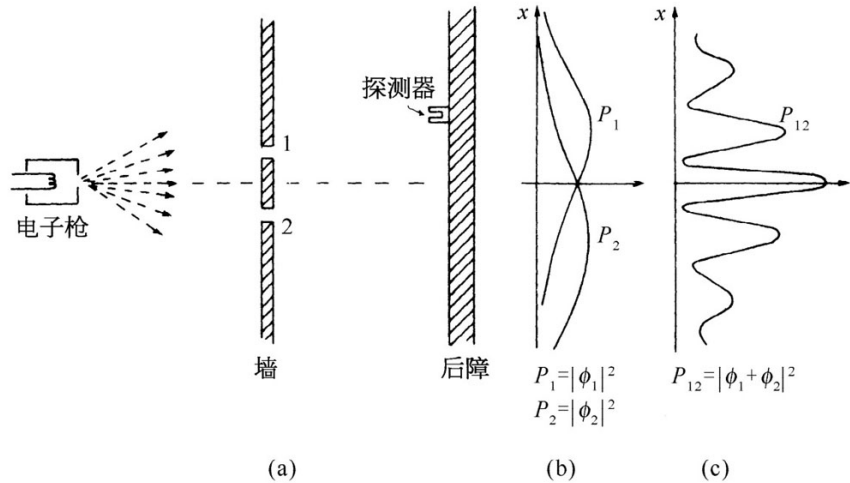


图1-3 电子的干涉实验

我们应当直接了当地告诉你不要试着去做这样一个实验（虽然你可能已做过我们所描述的前面两个实验）。这个实验从未以这样的方式做过。问题在于，为了显示我们所感兴趣的效应，仪器的尺寸必须小到制造不出来的程度。我们做的是个“理想实验”。之所以要选它，是因为它易于想象。我们知道这个实验会得到怎样的结果，因为有许多已经做过的实验，在那些实验中，已在选用的适当的尺度与比例上显示了我们将要描写的效应。

在这个电子的实验中，我们注意到的第一件事是听到探测器（即从扩音器）发出尖锐的“咔嗒”声。所有的“咔嗒”声全都相同，绝没有“半咔嗒”声。

我们还会注意到“咔嗒”声的出现很不规则。比如像：咔嗒.....咔嗒-咔嗒.....咔嗒.....咔嗒.....咔嗒-咔嗒.....咔嗒，等等，无疑，这就像人们听到盖革计数器工作时的声音一样。假如我们计数在足够长的时间内——譬如说在许多分钟内——听到的咔嗒声的数目，然后再在另一个相等的时间间隔内再进行一次计数，我们发现两个数值非常接近。所以，我们能够谈论“咔嗒”声出现的平均速率（平均每分钟多少次咔嗒声）。

在我们移动探测器时，声响出现的速率有快有慢，但是每次“咔嗒”声的大小（响度）总是相同的。假如我们降低枪内钨丝的温度，咔嗒声的速率就会减慢，但是每一声“咔嗒”仍然是同样响。我们还可以注意到，如果在后障前分别放置两个探测器，那么这一个或那一个将会“咔嗒”发声，但是决不会二者同时发声（除非偶尔两次“咔嗒”声在时间上非常靠近，以致我们的耳朵可能辨别不出它们是分开的响声）。因此，我们得出结论，任何到达后障的东西总是呈“颗粒”的形式。所有的“颗粒”都是同样大小：只有“整颗”到达，并且每一次只有一颗到达后障。我们说：“电子总是以完全相同的‘颗粒’到达。”

与子弹的实验一样，我们现在开始从实验上寻找下列问题的答案：“‘整颗’电子到达后障上离中心之距离为不同的 x 处的相对概率是多少？”像前面一样，在保持电子枪稳定工作的情况下，我们可以从观察“咔嗒”声出现的速率来得出相对概率。颗粒到达某个特定 x 位置的概率正比于该处的咔嗒声的平均速率。

我们这个实验的结果就是图1-3（c）所画出的标有 P_{12} 的一条有趣的曲线。不错！电子的行为就是这样。

§1-5 电子波的干涉

现在，我们来分析一下图1-3的曲线，看看是否能够理解电子的行为。我们要说的第一件事是，由于它们整颗整颗地出现，每一颗粒，就是所谓的电子，要么通过小孔1，要么通过小孔2。我们以“命题”的形式写下这一点：

命题A：每一个电子要么通过小孔1要么通过小孔2。

有了命题A，所有到达后障的电子就可分为两类：（1）通过小孔1的电子；（2）通过小孔2的电子。这样，我们所观察到的曲线必定是通过小孔1的电子所产生的效应与通过小孔2的电子所产生的效应之和。我们用实验来检验这个想法。首先，我们测量通过小孔1的那些电子。我们把小孔2遮住，数出探测器的“咔嗒”声，由响声出现的速率，我们得到 P_1 。测量的结果如图1-3（b）中标有 P_1 的曲线所示。这个结果看来是完全合理的。以类似的方式，可以测量通过小孔2的电子概率分布 P_2 。这个测量的结果也画在图上。

当两个小孔都打开时测得的结果 P_{12} 显然不是各个孔单独开放时的概率 P_1 与 P_2 之和。与水波实验类似，我们说：“这里发生了干涉。”

对于电子：

$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (1.5)$$

怎么会发生这样的干涉呢？或许我们应当说：“嗯，这大概意味着：整颗电子要么经过小孔1，要么经过小孔2这一命题是不正确的，如果是这样的话，概率就应当相加。或许它们以一种更复杂的方式运动。它们分裂为两半，然后……”但是，不对！不可能如此。它们总是整颗地到达……。“那么，或许其中有一些电子经过小孔1后又转回到小孔2，然后又转过几圈，或者按某个其他的复杂路径……于是，我们遮住小孔2后，就改变了从小孔1出发的电子最后落到后障上某处的机会……。”但是，请注意！当两个孔都开放时在某些点上只有很少电子到达，但是如果关闭一个孔时，则该处接收到许多电子，所以关闭一个孔就增加了通过另一个小孔后来到该点电子的数目。然而，必须注意在图形的中心， P_{12} 要比 $P_1 + P_2$ 还大两倍。这又像是关闭一个孔就减少了通过另一个孔到来的电子数。看来用电子以复杂方式运动这一假设是很难解释上述两种效应的。

所有这些都是极其神秘的。你考虑得越多，就越会感到神秘。人们曾经提出许多设想，试图用单个电子以复杂方式绕行通过小孔来解释 P_{12} 曲线。但是没有一个得到成功，没有一个人能由 P_1 与 P_2 得到 P_{12} 的正确曲线。

然而，足以令人惊奇的是，将 P_1 和 P_2 与 P_{12} 联系起来的数学 是极其简单的。因为 P_{12} 正好像图1-2中的曲线 I_{12} ，而那条曲线 是简单的。在后障上发生的情况可以用两个称为 ϕ_1 和 ϕ_2 的复数（当然它们是 x 的函数）来描述。 ϕ_1 的绝对值平方给出了小孔1单独开放时的效应。也就是说， $P_1 = |\phi_1|^2$ 。同样只有小孔2单独开放时的效应由 ϕ

$_2$ 给出，即 $P_2 = |\phi_2|^2$ 。两个孔的联合效应正是 $P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$ 。这里的数学与水波的情形是一样的！（很难看出从电子沿着某些奇特的轨道来回穿过洞孔这种复杂的游戏中能得出如此简单的结果。）

我们的结论是：电子作为粒子总是以完整颗粒的形式到达，这些颗粒到达概率的分布则像波的强度的分布。正是从这个意义来说，电子的行为“有时像粒子，有时像波”。

顺便指出，在处理经典波动时，我们定义强度为波的振幅平方对时间的平均值，并且使用复数作为简化分析的数学技巧。但是在量子力学中结果发现振幅必须用复数表示。仅有实部是不行的。目前，这是一个技术上的问题，因为公式看上去完全一样。

既然电子穿过两个小孔到达后障的概率分布虽然并不等于 $(P_1 + P_2)$ 但仍旧如此简单，要说的一切实际上都在这里了。但是在自然界以这种方式活动的事实中，还包括了大量的精妙之处。我们现在打算向你们说明其中一些精妙之所在。首先，到达某个特定点的电子数目并不等于通过小孔1后到达的数目加上通过小孔2后到达的数目，而从命题A得出的推论却与此相反。所以，毋庸置疑，我们应该作出结论说，命题A是不正确的。电子要么通过小孔1要么通过小孔2这是不正确的。但是这个结论可以用其他实验来检验。

§1-6 监视电子

现在来考虑如下的一个实验。在前述的电子仪器中我们加上一个很强的光源，放置在墙的后面，且在两个小孔之间，如图1-4所示。我

们知道，电荷会散射光。这样，当电子通过某一小孔一路来到探测器时，无论如何它肯定是沿着某一路径来到并会将一些光散射到我们的眼睛中，因而我们可以看见电子在哪里飞过。比方说，假如电子采取经过小孔2的路径，如图1-4上画出来的，我们应当看到来自图中标有A的位置附近出现闪光。如果电子经过小孔1，我们可以预料在上面的小孔附近将看到闪光。假如发生这样的情形，我们看到在两个位置上同时出现闪光，那是因为电子分成了两半……。让我们来做这个实验吧！

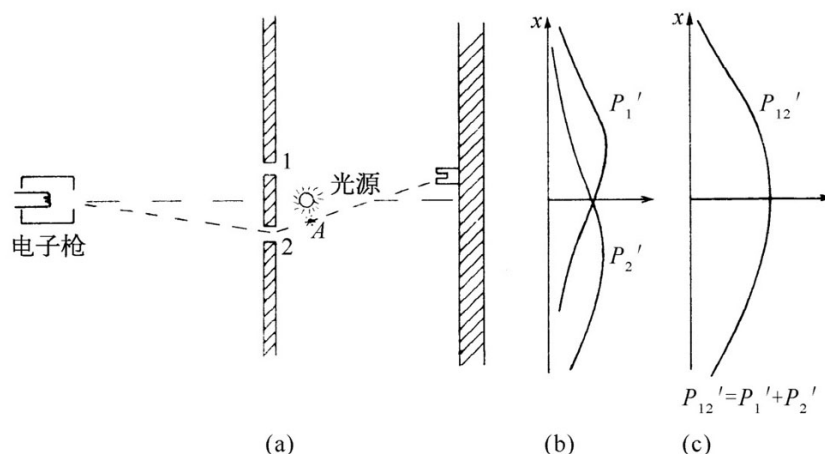


图1-4 另一个电子的实验

我们所看到的情况是：每当听到（后障处的）电子探测器发出一声“咔嗒”时，我们要么在靠近小孔1处要么在靠近小孔2处见到闪光。但是决不会同时在两处见到！无论探测器放在哪里，我们都观察到同样的结果。我们由这样的观察得出结论，在监看电子时，我们发现，电子不是通过这个孔就是通过另一个孔。在实验上，命题A必然是正确的。

那么，在我们否定命题A的论证中，有什么不对呢？为什么 P'_{12} 不正好等于 $(P'_1 + P'_2)$ ？我们还是回到实验上去！让我们跟踪电子，

看看它们究竟做些什么。对于探测器的每一个位置（ x 坐标），我们都对到达的电子计数，同时也通过对闪光的观察记录下它们经过的是哪一个孔。可以这样来跟踪发生的过程：每当我们听到一声“咔嗒”时，如果在小孔1附近见到闪光，那么就在第一列中作一个记录，如果在小孔2附近见到闪光，那么就在第二列中作一个记录。所有抵达的电子都可分别记录在这两列中，即经过小孔1的一列和经过小孔2的一列。由第一列的记录我们可以得到电子经由小孔1到达探测器的概率 P_1' ；而由第二列的记录则可得到电子经由小孔2到达探测器的概率 P_2' 。如果现在对许多 x 的值重复这样的测量，我们就得到图1-4（b）所画的 P_1' 与 P_2' 的曲线。

你们看，这里没有什么过分令人惊奇的事。所得到的 P_1' 与我们先前遮住小孔2而得到的 P_1 完全相似； P_2' 则与遮住小孔1所得到的 P_2 相似。所以，像两个小孔都通过这样的复杂情况是不存在的。当我们监看电子时，它们就像我们所预料的那样通过小孔。无论小孔2是开着还是关着，我们看到通过小孔1到来的电子分布都相同。

但是别忙！现在总概率，即电子以任何途径到达探测器的概率又是多少呢？我们已经有信息了。我们现在假装从未看到过闪光，而把先前分成两列的探测器“咔嗒”声次数归并在一起。我们只须把这些数加起来。对于电子经过随便哪一个孔到达后障的总概率，我们确实得出 $P_{12}' = P_1' + P_2'$ 。这就是说，虽然我们成功地观察到电子所经过的是哪个孔，但我们再也得不到原来的干涉曲线 P_{12} ，而是新的、不显示干涉现象的 P_{12}' 曲线！如果我们将灯熄灭， P_{12} 又出现了。

我们必须作出结论：当我们看着电子时，它们在屏上的分布与我们不看着它时的分布不同。也许这是由于打开光源而干扰了事态？想

必是由于电子本身非常精巧，因而光波受到电子散射时给电子一个反冲，因而改变了它们的运动。我们知道，光的电场作用在电荷上时会对它施加一个作用力。所以也许我们应当预期到运动要发生改变。不管怎样，光对电子有很大的影响。在试图“跟踪”电子时，我们改变了它的运动。也就是说，当光子被散射时电子所受到的撼动足以改变其运动，以致原来它可能跑到 P_{12} 为极大值的那些位置上，现在却反而落到 P_{12} 为极小值的那些位置上了；这就是为什么我们不再看到起伏的干涉效应的原因。

你们或许会想：“不要用这么强的光源！将亮度调低一些！光波变弱了，对电子的扰动就不会那么大。无疑，若使光越来越暗淡的话，最后光波一定会弱到它的影响可以忽略。”好，让我们来试一下。我们观察到的第一件事是电子经过时所散射出的闪光并没有变弱。它总是同样强的闪光。灯光暗淡后唯一发生的事情是，有时，我们听到探测器发出一声“咔嗒”，但根本看不到闪光。电子在没有“被看到”的情况下跑过去了。我们所观察到的是：光的行为也像电子，我们原来就知道它是波动，但是现在发现它也是“颗粒状”的。它总是以我们称为光子的整颗的形式到达或者被散射。当我们降低光源的强度时，我们并没有改变光子的大小，而只是改变了发射它们的速率。这就解释了为什么在灯光暗淡时有些电子没有被“看到”就跑过去了。当电子经过时，周围正好没有光子。

这件事使人多少有点泄气。如果真的是每当我们“见到”电子，我们看到的是同样大小的闪光，那么所看到的总是受到扰动的电子。不管怎样，我们用弱的灯光来做一下实验。现在，只要听到探测器中一声“咔嗒”，我们就在下述三列中的某一行记下一次：列（1）记的是在小孔1旁看到的电子；列（2）记的是小孔2旁看到的电子，根本没有看

到电子时，则记在列（3）中。当我们把数据整理出来（计算概率）后可以发现这些结果：“在小孔1旁看到”的电子具有类似于 P'_1 的分布；“在小孔2旁看到”的电子具有类似于 P'_2 的分布（所以无论“在小孔1或者小孔2旁看到”的电子共同具有类似于 P'_{12} 的分布）；而那些“根本没有看到”的电子则具有类似于图1-3的 P_{12} 那样的“起伏的”分布！假如电子没有被看到，我们就会得到干涉现象！

这是可以理解的，当我们没有看到电子时，就没有光子干扰它，而当我们看到它时，它已经受到了光子的扰动。由于光子产生的都是同样大小的效应，所以扰动的程度也总是相同的，而且光子被散射所引起的效应足以抹掉任何干涉效应。

难道没有某种可以不干扰电子而又使我们能看到它们的方法吗？在先前的一章中，我们知道，“光子”携带的动量反比于它的波长（ $p = h / \lambda$ ）。无疑当光子被散射到我们的眼中时，它给予电子的扰动取决于光子所携带的动量。啊哈！如果我们只想略微扰动一下电子的话，那么降低的不应当是光的强度，而是它的频率（这与增加波长一样）。我们使用比较红的光。甚至用红外光或无线电波（如雷达），并且借助于某种能“看到”这些较长波长的仪器来“观察”电子的行径。如果我们使用“较柔和”的光，那么或许可以不至于使电子扰动太大。

现在我们用波长较长的波来重复我们的实验。每次实验用波长越来越长的光。起先看不到什么变化。结果都是相同的。接着，可怕的事情发生了，你们会记得，当我们讨论显微镜时曾指出过，由于光的波动性质，仍旧可以分辨出是两个分离的点的两个靠近光点的距离有一个最小的极限。这个极限距离是光波波长的数量级。所以如果我们使波长大于两个小孔之间的距离，我们看到在光被电子散射时产生一

团很大的模糊不清的闪光。这样就不再能说出电子通过的是哪一个孔了！我们只知道它跑到某处去！正是对这种颜色的光，我们发现电子所受到的撼动已小到使 P'_{12} 看来开始像 P_{12} ——即开始出现某种干涉的效应。只有在波长远大于两个小孔之间的距离时（这时我们完全不可能说出电子经过什么地方），光所引起的扰动足够小，因而我们又得到图1-3所示的曲线 P_{12} 。

在我们的实验中，我们发现不可能这样安排光源，即使人们既可以说出电子穿过哪个小孔，同时又不扰动分布图样。海森伯提出，只有认为我们的实验能力有某种前所未有的基本极限，才能使当时发现的新的自然界的定律协调一致。他提出了作为普遍原理的不确定性原理，在我们的实验中，它可以这样表述：“要设计出一种装置来确定电子经过哪一个小孔，同时又不使电子受到足以破坏其干涉图样的扰动是不可能的”。如果一套装置能够确定电子穿过哪一个小孔，它就不能巧妙得使图样不受到实质性的扰动。还没有一个人找到（或者甚至想出）一条绕过不确定性原理的途径。所以我们必须假设它描述的是自然界的一个基本特征。

我们现在用来描写原子，事实上也描写所有物质的量子力学的全部理论都取决于不确定性原理的正确性。由于量子力学是这样一种成功的理论，我们对于不确定性原理的信任也就加强了。但是如果一旦发现了一种能够“推翻”不确定性原理的方法，量子力学就会得出自相矛盾的结果，因此也就不再是自然界的有效的理论，而应予以抛弃。

“很好”，你们会说：“那么命题A呢？电子要么通过小孔1，要么通过小孔2，这是正确的还是不正确的呢？”唯一可能作出的回答是，我们从实验上发现，为了使自己不致陷于自相矛盾，我们必须按一种

特殊方式思考问题。我们所必须说的（为了避免作出错误的预测）是：如果人们观察小孔，或者更确切地说，如果人们有一套装置能够确定电子究竟通过小孔1还是小孔2的话，那么他们就能够说出电子穿过小孔1，或者穿过小孔2。但是，当人们不想知道电子走的是哪条路，实验中没有干扰电子的因素时，那么他们可以不去说电子通过了小孔1还是通过了小孔2。如果某个人一定要这么说，并且由此作出任何推论的话，他就会在分析中造成错误。这是一条逻辑钢丝，假如我们希望成功地描写自然的话，我们就不得不走这一条钢丝。

如果所有物质——包括电子——的运动都必须用波来描写，那么我们第一个实验中的子弹又怎样呢？为什么在那里我们看不到干涉图样？我们发现：对于子弹来说，其波长是如此之短，因而干涉图样变得非常细密。事实上，图样细密到人们用任何有限尺寸的探测器都无法分辨出它的分立的极大值与极小值。我们所看到的只是一种平均，那就是经典曲线。在图1-5中，我们试图示意地表明对大尺度物体所发生的情况。其中图（a）表示应用量子力学对子弹所预期的概率分布。假设快速摆动的条纹表示对于波长极短的波所得到的干涉图案。然而，任何物理探测器都跨越了概率曲线的好几个摆动，所以通过测量给出的是图（b）中的光滑曲线。

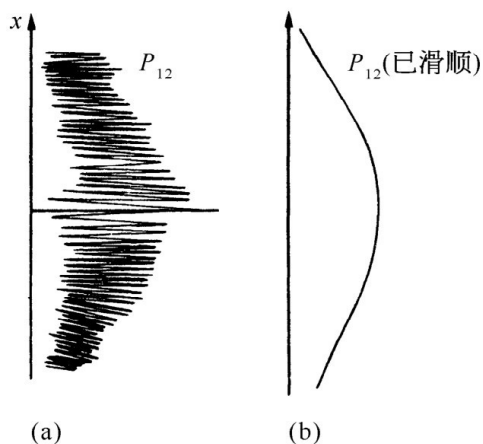


图1-5 子弹的干涉实验

(a) 实际的图样 (概图) ; (b) 观测到的图样

§1-7 量子力学的第一原理

我们现在来小结一下前面实验中得出的主要结论。不过，我们将把结果表示成对于这一类的实验普遍适用的形式。假如先定义“理想实验 (ideal experiment)”，那么这个小结就可以较为简单一些。在“理想实验”中没有任何不确定的外来影响，即没有不稳定或其他什么我们无法考虑的事情。更确切的说法是：“理想实验是所有的实验初始条件和最终条件都完全确定的实验。”我们说的“事件”，一般说来就是一组特定的初始与最终条件。（例如：“电子飞出电子枪，到达探测器，此外没有任何其他事情发生”。）下面就是我们的总结：

小结

(1) 在理想实验中事件的概率由一个复数 ϕ 的绝对值平方给出， ϕ 称为概率幅^[1]：

P = 概率，

ϕ = 概率幅， (1.6)

$$P = |\phi|^2.$$

(2) 当一个事件可以按几种不同的方式发生时，该事件的概率幅等于各种方式分别考虑时的概率幅之和。此时出现干涉：

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + \phi_2, \\ P = |\phi_1 + \phi_2|^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

(3) 如果完成一个实验，此实验能够确定实际上发生的是哪一种方式的话，则该事件的概率等于按各个不同方式发生的概率之和。此时不发生干涉：

$$P = P_1 + P_2. \quad (1.8)$$

人们也许还想问：“这是怎样起作用的？在这定律背后有什么机制？”还没有人发现定律背后的任何机制。也没有人能够“解释”得比我们勉强作出的“解释”更深入一些，更没有人会给你们对这种情况作更深刻的描述。我们没有能够推导出这些结果的更基本机制的概念。

我们要强调经典理论和量子力学之间的一个非常重要的差别。我们一直谈论在给定的情况下，电子到达的概率。我们曾暗示：在我们的实验安排中（即使是可能作出的最好的一种安排）不可能准确预言会发生什么事。我们只能预言可能性！如果这是正确的，那就意味着，物理学已放弃了要准确预言在确定的环境下会发生的事情。正是！物理学已放弃了这一点。我们不知道怎样去预言在给定的环境下会发生什么，而且我们现在相信，这是不可能的——唯一可以预言的是各种事件的概率。必须承认，这是我们早先认识自然界的理念的削弱。它或许是倒退了一步，但是还没有能看到避免这种倒退的方法。

现在，我们来评论一下人们有时提出的试图避免上述困难的一种见解。这种见解认为：“或许电子有某种我们目前还不知道的内部机理——某种内变量。或许这就是我们无法预言会发生什么事情的原因。如果我们能够更仔细地观察电子，我们就能说出它会到达哪里。”就我

们所知，这是不可能的。我们仍旧没有摆脱困境。假设在电子内部有某种机制能够确定电子的去向，那么这种机制也必定能够确定电子在途中将要通过哪一个孔。但是我们不要忘记，在电子内部的东西应当不依赖于我们所做的事情，特别是不依赖于我们打开或关闭哪一个孔。所以，如果电子在开始运动前已打定主意：（a）它要穿过哪一个孔，（b）它将到达哪里，我们会发现选择小孔1的那些电子会得出 P_1 ，选择小孔2的那些电子会得出 P_2 ，通过两个孔的许多电子得出的概率必定是求和 $P_1 + P_2$ 。看来没有别的解决方法了。但是我们从实验上已经证实情况并非如此。而现在还没有人能够解决这个难题。所以，在目前我们只能将我们自己局限于计算概率。我们说“在目前”，但是我们强烈地感觉到很可能永远如此——很可能永远无法解决这个难题——因为自然界实际上就是如此。

§1-8 不确定性原理

海森伯原来对不确定性原理的叙述是这样的：假如对任一客体进行测量，你能以不确定量 Δp 确定其动量的x分量，你就不可能同时测定其位置比 $\Delta x = \hbar / 2\Delta p$ 更准确，其中 $\hbar$ 是自然界给出的确定的数。它称作“约化普朗克常量”，近似地等于 $1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 。在任何时刻，位置的不确定量和动量的不确定量的乘积必定大于或等于约化普朗克常量的一半。上面所述的是较为一般的不确定性原理的特殊情况。比较普遍的表述是，人们不可能用任何方式设计出这样一种装置，可以用它来确定在两种可供选择的方式中采取的是哪一种方式，而同时又不破坏干涉图样。

现在我们举一种特殊情况来说明，为了不致陷于困境海森伯给出的这种关系必须成立。我们设想对图1-3中的实验作一些修改，其中带有小孔的墙是一块装上滚子的板，这样它可以在 x 方向上自由地上下滑动，如图1-6所示。仔细观察板的运动，我们可以试着说出电子通过的是哪个小孔。想象一下当探测器放在 $x=0$ 处时会出现什么情况。我们可以预期对经过小孔1的电子，板必定使它往下偏折到达探测器。由于电子动量的垂直分量被改变了，板必定会以相等的动量向相反的方向反冲。它将被推向上。如果电子通过下面的小孔，板就会受到一个向下推力。很清楚，对于探测器的每一个位置，电子经由小孔1与经由小孔2时板所得到的动量是不同的。这样！完全不必去扰动电子，只要盯着板看，我们就可以说出电子取的是哪一条路径。

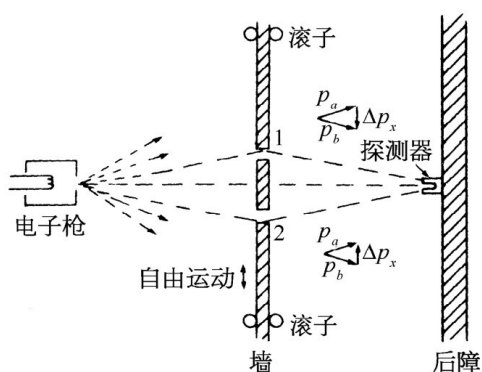


图1-6 测出墙的反冲的实验

现在，为了做到这一点，必须知道电子通过以前板的动量。测出电子经过后板的动量就能算出板的动量改变了多少。但是要记住，根据不确定性原理，我们不能同时以任意高的准确度知道板的位置。而如果我们不知道板的确切位置，就不能精确地说出两个孔在哪里。对于各个经过小孔的电子来说，小孔是在不同的位置上。这意味着对于每个电子来说，干涉图样的中心在不同的位置上。于是干涉图样中的起伏将被抹去。下一章我们将定量地说明，假如我们能足够准确地测

定板的动量从而由反冲动量的测量来确定电子经过的是哪一个孔，那么按不确定性原理，该板的 x 位置的不确定量足以使探测器观察到的干涉图样的 x 位置上下移动一定的距离，使得干涉极大移向最近的极小值的位置上。这种无规则的移动正好将干涉图样抹平，因而观察不到干涉现象。

不确定性原理“保护”了量子力学。海森伯认识到，假如有可能以更高的准确度同时测定动量与位置的话，量子力学就将坍塌。所以他认为这肯定不可能。于是人们试图找出一个能同时准确测量二者的方法，但是没有一个人找到一种方法能够以任何更高的精确度同时测出任何东西——屏障、电子、台球弹子等等——的位置与动量。量子力学一直担着风险，但仍旧是正确的。

[1] 概率幅的英文为probability amplitude，也可译作“概率振幅”。本书原文常简称为amplitude，译文也照译成“振幅”。——译者注

第2章 波动观点与粒子观点的关系

§2-1 概率波振幅

本章我们将讨论波动观点与粒子观点之间的关系。由上一章我们已经知道，波动观点和粒子观点都欠正确。通常，我们总是力图准确地描述事物，至少也要做到足够精确，当我们的学习更深入时无须改变这种描述——它可以扩充，但却不会改变！然而，当我们打算谈及波动图像或粒子图像时，两者都是近似的，并且都将改变。所以，从某种意义上来说，我们在这一章中所学习的东西并不是很精确的；这里的论证是半直觉的，我们将在以后使之更为精确，但是，当我们用量子力学作出正确解释时，有一些事情将会有一点改变。我们这样做是为了在深入到量子力学的数学细节之前使你得到一些量子现象的定性感觉。而且，我们所有的经验都是关于波的和关于粒子的，因此，在我们知道量子力学振幅的完整数学描述之前，先应用波动和粒子的概念来得到一定场合下所发生的事情的理解是颇为方便的。我们在这样做时将力图阐明那些最薄弱的环节，但是其中大多数还是相当接近于正确的——这只是解释的问题。

首先，我们知道量子力学中描述世界的新方法——新的框架——是给每个可能发生的事件一个振幅，而且如果此事件涉及接收一个粒子，那么就给出在不同位置与不同时间找到该粒子的振幅。于是，找

到该粒子的概率就正比于振幅绝对值的平方。一般地讲，在不同场所与不同时刻找到粒子的振幅是随着位置和时间而变化的。

在某些特殊情况下，振幅在空间与时间中像 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ 那样呈正弦式变化，其中 $\mathbf{r}$ 是从某个原点起算的矢量位置。（别忘了这些振幅是复数，不是实数。）这样的振幅按照确定的频率 ω 和波数 $\mathbf{k}$ 变化。结果发现这对应于一种经典的极限情况，我们可以认为在此情况中有一个粒子，它的能量 E 为已知，并且与频率之间的关系是

$$E = \hbar \omega, \quad (2.1)$$

而且粒子的动量 $\mathbf{p}$ 亦是已知的，它与波数 $\mathbf{k}$ 之间的关系是

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (2.2)$$

（符号 $\hbar$ 表示数 h 除以 2π ，即 $\hbar = h/2\pi$ 。）

这意味着粒子的概念受到了限制。我们如此经常使用的粒子的概念——它的位置，它的动量，等等。从某些方面说来已不再令人满意了。比如，假设在不同的位置上找到一个粒子的振幅由 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ 给出，则其绝对值的平方是常数。而这就意味着在所有的点上找到粒子的概率都相等。这就是说，我们不知道粒子究竟在何处——它可以在任何地方——粒子的位置是非常不确定的。

另一方面，如果一个粒子的位置比较确定，我们可以相当准确地预测到，那么在不同位置上找到它的概率必定限制在一定的区域内，我们令其长度为 Δx 。在此区域之外概率为零。由于这个概率是某个振幅的绝对值的平方，如果绝对值的平方为零，则振幅亦为零，于是我

们就有一个长度为 Δx 的波列（图2-1），此波列的波长（波列中波的相邻波峰或相邻波谷之间的距离）就对应于该粒子的动量。^[1]

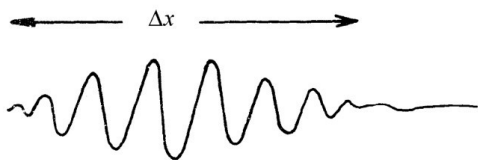


图2-1 长度为 Δx 的波包

这里我们遇到了有关波动的一件奇妙的事情：一件很简单的、严格说来与量子力学毫无关系的事情。任何人，即使完全不懂量子力学，只要他研究过波的话就会知道：对一个短的波列，我们不可能定义一个唯一的波长。这样的波列没有一个确定的波长；存在着与有限的波列长度相关联的波数的不确定性，从而在动量上也就存在着不确定性。

§2-2 位置与动量的测量

现在我们来考虑这一概念的两个例子——即看一下如果量子力学是正确的话，为什么存在着位置与（或）动量的不确定性的理由。在前面我们已经看到，如果事情不是这样——即如果有可能同时测定任何东西的位置与动量——我们就会遇到一个佯谬；幸而这样一种佯谬并不存在，由波动图像中可以自然地得出不确定性这一事实表明，一切都很协调。

这里有一个很容易理解的例子，表明某一情况中位置与动量之间的关系。假设我们有一个单缝，一些具有一定能量的粒子从很远的地方飞来——所以它们实际上全都水平地飞来（图2-2）。我们将集中注

意动量的垂直分量。从经典的意义上，所有这些粒子都具有一定的水平动量，譬如说 p_0 。所以，从经典意义上说，粒子穿过狭缝前的垂直动量 p_y 是确定知道的。图中粒子既不向上，也不朝下运动，因为它来自很远的地方——当然它的垂直动量就是零。现在我们假设这个粒子通过宽度为 B 的狭缝。当它从狭缝穿出后，我们就以一定的精确度，即 $\pm B$ [2]，知道它的垂直位置—— y 坐标数值。这就是说，在位置上的不确定量 Δy 为 B 的数量级。现在我们也许想说，由于已知动量是绝对水平的，因而 Δp_y 是零；但这是错的。我们曾原来知道动量是水平方向的，但是现在再也不知道了。在粒子穿过狭缝前，我们不知道它们的垂直位置。由于粒子穿过了狭缝，现在我们就发现它的垂直位置，但却失去了该粒子垂直动量的信息！为什么？按照波动理论，当波通过狭缝后就会散开或衍射，像光那样。因此有一定概率，粒子出狭缝后，不严格笔直地飞行。由于衍射效应，粒子出射的图样散开，其弥散角（我们可将它定义为是第一极小值的张角）就是对粒子出射的最后角度的不确定性的一种度量。

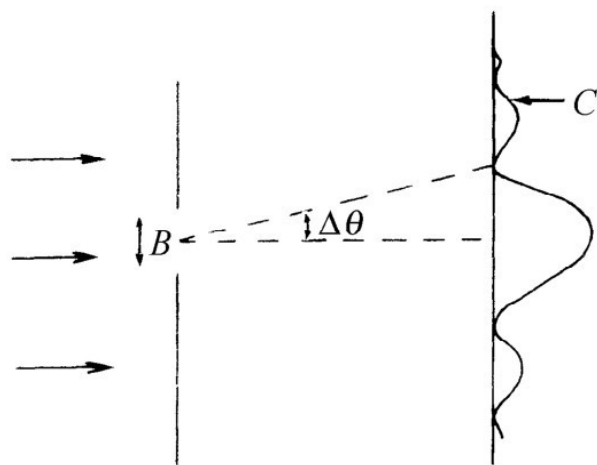


图2-2 穿过狭缝粒子的衍射

图样是怎样弥散开的呢？所谓弥散开就是说粒子有一定的往上或往下运动的机会，也就是说，其动量出现向上或向下的分量。我们说机会与粒子是因为可以用一个粒子计数器检测出这个衍射图样，而且当计数器在譬如说图2-2的C处接收到粒子时，接收到整个粒子，这样，从经典意义上来说，粒子要从狭缝射出往上偏至C处，就得具有垂直的动量。

为了对动量的弥散有一个大致的概念，垂直动量 p_y 的弥散等于 $p_0 \Delta\theta$ ，这里 p_0 是水平动量。那么在弥散开的图样中 $\Delta\theta$ 有多大？我们知道第一极小值出现在 $\Delta\theta$ 角上，这时，从狭缝的一个边缘处传出的波必定比从另一边缘传出的波多走过一个波长——我们以前已得出这个结论（第1卷第30章）。因此 $\Delta\theta$ 为 λ/B ，这样，此实验中的 Δp_y 就是 $p_0 \lambda/B$ 。注意：如果将 B 做得更小，亦即对粒子的位置做更为准确的测量，那么衍射图样就变宽。所以，狭缝做得越窄，衍射图样就越宽，而我们发现粒子具有侧向动量的可能性就越大。这样，垂直动量的不确定量就与 y 的不确定量成反比。事实上，我们看到两者的乘积为 $p_0 \lambda$ 。但是 λ 是波长， p_0 是动量，按照量子力学，波长乘以动量就是普朗克常量 h 。因此我们得到下列规则：垂直动量的不确定量与垂直位置的不确定量的乘积约为 h 的量级：

$$\Delta y \Delta p_y \geq h/2. \quad (2.3)$$

我们不可能造出这样一个系统，在其中既知道粒子的垂直位置，又能以比式（2.3）所表示的更大准确性来预知它的垂直运动。这就是说垂直动量的不确定量必须超过 $h/2\Delta y$ ，这里 Δy 是我们的位置的不确定量。

有时，人们说量子力学是完全错误的。当粒子从左边飞来时，它的垂直动量是零。现在它穿过了狭缝，它的位置也就知道了。位置与动量两者看来都能以任意高的精确度知道。完全正确，我们可以接收一个粒子，在接收时确定它的位置，以及确定为了到达那里原来应具有多少动量。这些都完全正确，但这并不是不确定关系式(2.3)所谈的事。式(2.3)所说的是对一种状况的可预知性，而不是对于过去的评述。“我知道粒子穿过狭缝前的动量是多少，现在又知道它的位置”这种说法没有什么意思，因为我们现在已失去了关于动量的知识。粒子通过了狭缝这一事实已使我们不再能预言垂直动量。我们所谈的是一种预言性的理论，而不只是一种事后的测量。所以我们必须谈论能够预料的事。

现在我们从另一个角度来看一下。我们更为定量地考虑同样现象的另一个例子。在上一个例子中，我们曾以经典方法测量了动量。那就是说，我们考虑了方向、速度和角度，等等，所以是用经典分析得出动量。然而，由于动量与波数有关，所以自然界中还有另一种测量粒子（光子或其他粒子）动量的方法，它没有经典的类比，因为它利用的是式(2.2)。我们测量波的波长。我们试用这种方式来测量动量。

假设有一个有大量刻线的光栅（图2-3），并且将一束粒子射向此光栅。我们已屡次讨论过这样一个问题：如果粒子具有确定的动量，那么，由于干涉，我们会在某个方向上得到一个十分锐细的图样。我们也讨论过在测量动量时可以精确到什么程度，也就是说，这样的光栅分辨率有多大。我们不拟再作一次推导，而只是参考第1卷第30章的结果，在那里已经得出用一个给定的光栅能够测出的波长的相对不确定量为 $1/Nm$ ，其中 N 是光栅刻线数， m 是衍射图样的级数，亦即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (2.4)$$

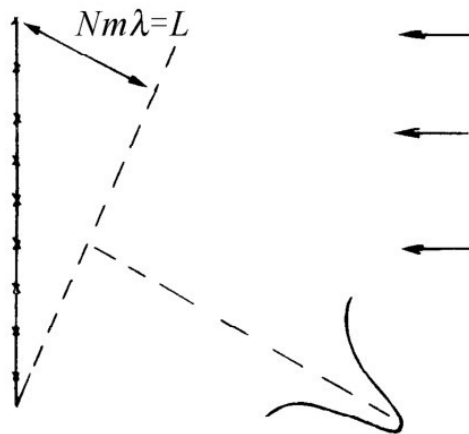


图2-3 利用衍射光栅确定动量

现在式（2.4）可以改写为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (2.5)$$

这里 L 是图2-3中所示的距离。这段距离是粒子或者波，不论它是什么，从光栅底端反射后必须跑过的总路程与它们从光栅顶端反射后必须跑过的总路程的路程差。也就是说，形成衍射图样的波来自光栅的不同部分。首先到达的波是来自光栅底端的波列的起始部分，该波列的其余部分依次通过。随着来自光栅不同部分的波列也先后到达。最后到达的是来自光栅顶端的波列，它的起始部分与最先到达的（来自光栅底端的）波列上距离其起始端长度为 L 处的波动相遇。[\[3\]](#)所以为了在我们的光谱中得到一条与一定的动量对应的锐细谱线，其不确定量由式（2.4）给出，我们必须有一列长度至少为 L 的波列。如果波列太短，我们就没有用到整个光栅。波列太短的话，形成光谱的波只是

从光栅的很小一块面积上反射的波，光栅的作用没有很好发挥——我们将得到很大的角宽度。为了得到较窄的光谱线，我们必须利用整个光栅，这样至少在某些时刻所有波列都是同时从光栅的所有部分散射出来。因此为了使波长的不确定量小于式（2.5）所给出的值，波列的长度必须为 L 。顺便说一下，

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta k}{2\pi}. \quad (2.6)$$

因此

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}. \quad (2.7)$$

这里 L 是波列的长度。

这意味着，如果有一长度小于 L 的波列，那么在波数上的不确定量必然超过 $2\pi/L$ 。或者说波数的不确定量乘以波列的长度——暂时我们称之为 Δx ——将大于 2π 。我们之所以称波列长度为 Δx 是因为这是粒子在位置上的不确定量。如果波列长度有限，那么，这就是说我们能在不确定的范围 Δx 以内找到粒子。波的这种性质，即波列的长度乘以相应波数的不确定量至少为 2π ，是每个研究波的人都知道的，这与量子力学毫无关系。这只是说，如果我们有一长度有限的波列的话，没有办法很精确地数出波的数目。

我们试从另一途径来看看其中的道理。假定我们有一有限长度为 L 的波列；那么，由于它在两端必定减弱（如图2-1所示），所以在长度 L 中波的数目是不确定的，可能相差 ± 1 。但在长度 L 中的波的数目是 $kL/2\pi$ 。可见 k 是不确定的，我们又重新得出式（2.7）的结果，它只

是波的一种性质。无论波是在空间传播， k 是每厘米的弧度数， L 是波列的长度，还是波在时间上展开， ω 是每秒的弧度数， T 是到达的波列持续的时间“长度”，都是同样的情况。这就是说：如果只是持续一定的有限时间 T 的波列，那么频率的不确定量则由下式确定：

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.8)$$

我们已经着重指出，这些都只是波的性质，例如，在声学理论中就已为人们所熟知了。

问题在于，在量子力学中，我们将波数解释为按照公式 $p = \hbar k$ 对粒子动量的一种量度，这样，式 (2.7) 就告诉我们 $\Delta p \approx \hbar / \Delta x$ 。因此，这就表明了经典动量概念的适用极限。（显然，如果我们想用波来表示粒子的话，动量的概念必定受到某种限制！）我们发现了一条规则，给了我们经典概念何时失效的一些观念，这是件很好的事情。

§2-3 晶体衍射

下面，我们考虑粒子波在晶体上的反射。晶体是一块厚厚的东西，它整个由排列成很整齐阵列的相同原子组成——我们将在后面讨论一些较复杂的情况。问题是对于一束给定的光（X射线）、电子、中子，或者别的东西，怎样安置原子阵列才能在某个给定方向上得到强的反射极大值。为了得到强的反射，来自所有原子的散射都必须同相位。同相波的数量和反相波的数量不能相等，不然波会相互抵消掉。正如我们已经说明过的那样，解决这个问题的方法是找出等相位

的区域；它们就是一些对入射方向和反射方向成相等角度的平面（图2-4）。

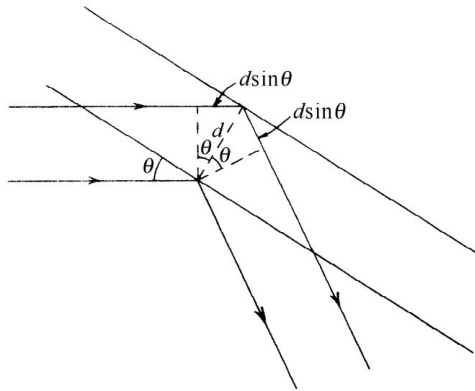


图2-4 晶面对波的衍射

考虑图2-4中两个平行平面，如果从这两个平面散射的波的波前传播距离之差为波长的整数倍，则散射波的相位相同。可以看出，距离差为 $2d \sin \theta$ ，这里 d 是两平面间的垂直距离。于是相干反射的条件是

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots) . \quad (2.9)$$

比方说，如果晶体中原子刚巧处在遵从式（2.9）中 $n=1$ 条件的平面上，那么就会出现强反射。然而，如果有性质相同（密度相同）的其他原子位于原来原子的中间，这些中间平面的散射也同样强，就会与其他的散射相互干涉，致使总效果为零。所以式（2.9）中的 d 必须指相邻平面的距离；我们不能对两个相距五层的平面来应用这个公式！

有趣的是，实际的晶体通常并不那么简单，即只是以一定方式重复排列的同一类原子。假如我们作一个二维类比的话，它们更像印满了重复某种图形的墙纸。对原子来说，所谓“图形”就是多个原子的某种排列，例如，碳酸钙的图形包含有一个钙原子、一个碳原子和三个

氧原子等等，也可能包含相当多的原子。但不管是什么，这些图形都按一定的形式重复构成图案。这种基本图形就称为晶胞。

重复的基本图形决定了我们所称的晶格类型；通过观察反射光束并找出它们的对称性，就能立即确定晶格类型。换句话说，只要找到各个反射点，就可确定晶格类型，但是为了确定晶格的每个单元的组成，就必须考虑各个方向上的散射强度。向哪个方向散射取决于晶格的类型，但每一束散射光有多强则由每个晶胞内有些什么来决定[4]。晶体的结构就是用这种方式得出的。

图2-5和图2-6是两幅X射线衍射图样的照片，它们分别是岩盐与肌红蛋白的散射的衍射图。

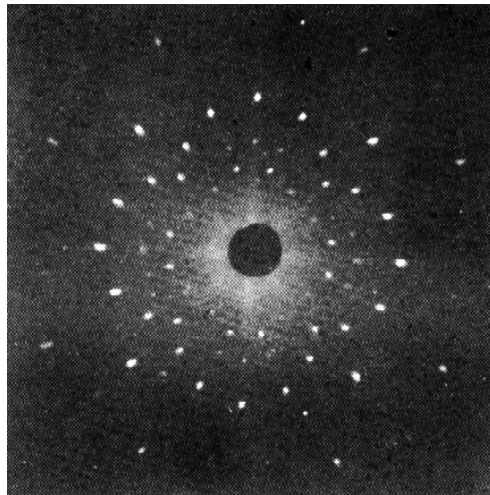


图2-5 由一束X射线射在氯化钠晶体上衍射得到的图样

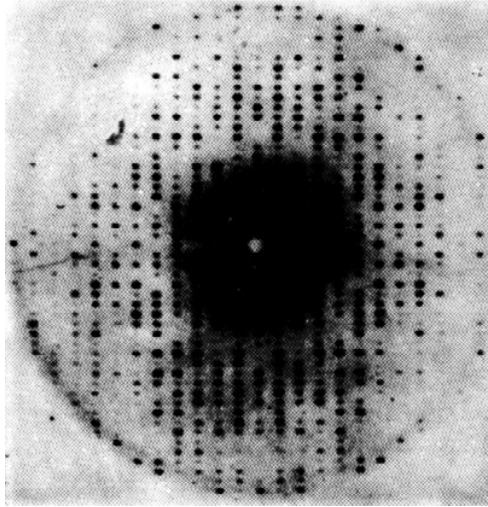


图2-6 肌红蛋白的X射线衍射图样

附带提一下，如果最靠近的两个平面间的距离小于 $\lambda/2$ ，就会发生一件有趣的事。在这种情况下，式（2.9）对 n 就没有解。因此，如果 λ 大于相邻平面之间距离的两倍，就没有侧向衍射图样，光——或者无论它是什么——将直接穿过材料，而不被弹开或损失。所以，对于（可见）光， λ 远大于间隔的情况下，它就直接通过，而不会出现从晶体中平面反射的图样。

这个事实在产生中子的核反应堆情况下也引起有趣的结果（中子显然是粒子，任何人都这样认为！）。假如我们引出这些中子使它们进入一厚石墨块，它们就会扩散，并且奋力地穿过石墨（图2-7）。它们之所以扩散是因为被原子弹开，但严格地说，按照波动理论，它们之所以被原子弹开是由于晶体内许多平面的衍射。结果表明，假如我们取一块厚石墨块的话，从远端跑出的中子都有长的波长！事实上，假如我们把中子强度作为波长的函数作图的话，除波长大于某个极小值外其余什么也没有（图2-8）。换句话说，我们可以用这种方法得到极慢的中子。只有最慢的中子才会通过；它们没有被石墨的晶格平面

所衍射或散射，而是像光通过玻璃一样径直穿过石墨而没有向两边散射开去。还有许多其他证据也说明中子波和别的粒子波是真实的。

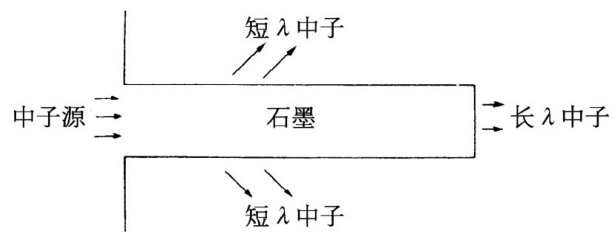


图2-7 反应堆中子通过石墨块的扩散

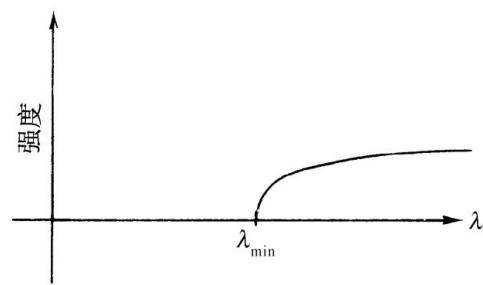


图2-8 从石墨棒出来的中子强度与波长的关系

§2-4 原子的大小

现在我们来看一下不确定性关系式（2.3）的另一个应用。在这里不用过分严密；概念是正确的，但所作的分析并不很精确。这个概念涉及确定原子的大小，以及按经典理论电子将不断辐射光并作螺旋运动直至最后落到原子核上这一事实。但是这在量子力学中就不是这样，假如是这样的话我们就可以同时知道每一个电子在什么地方以及它运动得有多快。

假定我们有一个氢原子，并且要测量电子的位置；我们肯定不能精确地预言电子的位置，不然动量将会扩展到无限大。每当我们观察

电子时，它是在某处，但它在各个不同地方都有一定的振幅，因而在不同地方都可能找到它。这些位置不可能全都在原子核附近，我们假定位置有一定的扩展，其数量级为 a 。这就是说，电子离原子核的距离通常大约为 a 。我们对原子的总能量取极小值来确定 a 。

由于不确定性原理，动量的弥散约为 $\hbar/a$ ，这样，如果我们打算用某种方式去测量电子的动量，譬如使它散射X射线，然后观察运动散射体引起的多普勒效应，那么可以预期并不会每次都得到零——电子并不是静止不动的——但它的动量一定为 $p \approx \hbar/a$ 的数量级，于是动能约为 $mv^2/2 = p^2/2m = \hbar^2/2ma^2$ 。（在某种意义上，这是一种量纲分析，用以找出动能是以何种方式依赖于约化普朗克常数，质量 m ，以及原子的大小 a 。我们毋需顾虑答案中2、 π 等这类因子上的出入。我们甚至还没有很精确地定义过 a 。）现在，势能为 $-e^2$ 除以离原子中心的距离，即 $-e^2/a$ 。按第1卷中的定义^[5]，这里的 e^2 是电子电荷的平方除以 $4\pi\epsilon_0$ 。要点就在于，如果 a 变小，势能就变小，但 a 越小，由于不确定性原理，要求动量增大，因而动能也增大。总能量是

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (2.10)$$

我们不知道 a 有多大，但我们却知道原子本身会进行调整以取得某种折衷办法使能量尽可能地小。为了得到 E 的极小值，我们求 E 对 a 的微商，令此微商等于零后解出 a 。 E 的微商是

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2},^{**} \quad (2.11)$$

** 计算(2.11)和(2.12)式时， e^2 要代入 $e^2/4\pi\epsilon_0 = (1.602 \times 10^{-19} \text{ 库仑})^2 \times 8.99 \times 10^9 \text{ 牛顿} \cdot \text{米}^2 / \text{库仑}^2$ 。——译者注

令 $\frac{dE}{da} = 0$ ，求得 a 值为

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.528 \text{ \AA} = 0.528 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (2.12)$$

这个特殊的距离称为玻尔半径。我们因此得知原子的大小约为埃的数量级，这完全正确。这是一件挺不错的事——实际上，是令人惊奇的，因为到现在为止，我们还没有理解原子大小的基础！从经典的观点来看，由于电子会螺旋式地运动终至落到原子核上，原子完全不可能存在。

现在，如果将式（2.12）的 a_0 值代入式（2.10）求能量，结果得出

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}. \quad (2.13)$$

负能量意味着什么？这意味着，当电子在原子中时的能量比自由状态下的能量小。这意味着它是受束缚的。也就是说，要把电子“踢出去”需要能量；要电离一个氢原子大约需要13.6 eV的能量。我们没有理由认为所需的能量不是这个值的2倍、3倍——或它的一半，或 $(1/\pi)$ ，因为我们这里所用的是十分粗略的论证。然而，我们作了弊，我们这样引进所有常数，使得正好得出正确的数字！13.6 eV这个数字称为一个里德伯（Rydberg）能量，它是氢原子的电离能。

所以，我们现在懂得了为什么不会穿过地板掉到下面去。当我们行走时，鞋子中的大量原子带着原子的质量挤压着地板中的原子。为了把原子挤得更靠近一些，电子就要被限制在一个更小的空间中，按照不确定性原理，平均而言它们的动量将变得更大些，这就意味着能

量变大；抵抗原子压缩的是一种量子力学效应，而不是经典效应。按照经典的观点，如果使所有电子与质子更为靠近，我们应预期能量会进一步降低，因此，在经典物理学中，正电荷与负电荷的最佳排列就是互相紧靠在一起。这些在经典物理学中是很清楚的，但是由于原子的存在又令人困惑。当然，早先的科学家发明过一些办法来摆脱这个困境——不过不必担心，我们现在找到了一种正确的方法！

顺便提一下，虽然眼下我们还不能理解它，我们发现在有许多电子的场合中，这些电子总是试图彼此离开。如果某个电子正占据着某一空间，那么另一个电子就不会占据同一空间。说得更精确一些，由于存在着两种自旋的情况，因此两个电子有可能紧靠在一起，一个电子沿一个方向自旋，而另一个电子则沿反方向自旋。但此后我们在该处再也不能放进更多的电子。我们必须把其他电子放到别的位置上，这就是物质具有强度的真正原因。假如我们有可能将所有电子放在同一个地方，那么它们将会比现在更为紧密。正是由于电子不可能全都紧靠在一起这个事实，才使得桌子和其他种种东西变得坚固。

十分明显，为了理解物质的性质，我们必须用量子力学，经典力学是不能满足的。

§2-5 能级

我们已讲过处在可能具有的最低能量状态下的原子，但是发现电子还可以做别的事，它能以更具活力的状态跳来跳去，因此原子可以有多种不同的运动状态。按照量子力学，在定态条件下，一个原子只可能有确定的能量。我们作一个图（图2-9），其中垂直方向标绘能量，每一个允许的能量值画一条水平线。当电子是自由的时候，这时

它的能量为正，能量可以具有任意值，并能以任何速度运动。但是束缚能不能取任意值。原子只能取图2-9所示的一系列允许值中的某一个能量值。

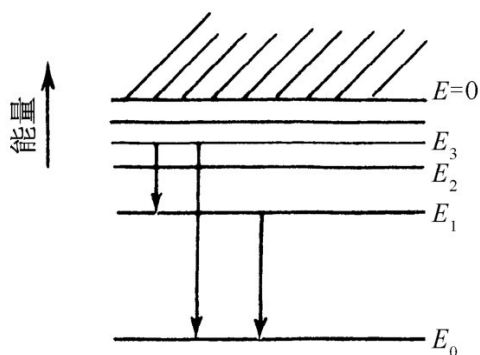


图2-9 原子的能级图（表示几种可能的跃迁）

现在我们称这些能量的允许值为 E_0 , E_1 , E_2 , E_3 。如果原子原来处于 E_1 , E_2 等“激发态”之一时，它不会永远停留在这状态中。它迟早会掉到较低的状态中并以光的形式辐射出能量。发射的光的频率由能量守恒加上量子力学的光的频率与光的能量之间的关系式（2.1）来确定。因此，譬如说从能量 E_3 到能量 E_1 的跃迁所辐射的光的频率为

$$\omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}. \quad (2.14)$$

这就是该原子的一个特征频率，它确定了一条发射光谱线。另一可能跃迁是从 E_3 至 E_0 ，这时就得到不同的频率

$$\omega_{30} = \frac{E_3 - E_0}{\hbar}. \quad (2.15)$$

另一个可能性是，如果原子已被激发到 E_1 态，它可能掉回到基态 E_0 ，发射光子的频率是

$$\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}. \quad (2.16)$$

我们举出三种跃迁的情况是为了指出一个有趣的关系。由式（2.14），（2.15）和（2.16）很容易看出

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (2.17)$$

一般来说，如果我们找到了两条谱线，可以预料在频率之和（或之差）处将找到另一条谱线，而且通过找到一系列能级，每条谱线都对应于其中的某一对能级的能量差，那么所有的谱线就能得到解释。在量子力学出现以前人们就已注意到这种在谱线频率惊人的对应，它称为里兹组合原则。从经典的观点来看，这又是不可思议的。不过，我们别再唠叨经典力学在原子领域中的失败，看来我们已讲得足够多了。

前面已经谈到量子力学可以用概率幅来描述，概率幅的行为像具有一定的频率和波数的波动。让我们看一下，从振幅的观点怎样会得出原子具有确定的能量状态。根据我们前面所说的那些是无法理解这一点的，但是我们都知被约束的波具有确定的频率。例如，若声音约束在一个风琴管或任何类似的东西中时，声波振动的方式不止一种，但每种方式都有一个确定的频率。这样，将波约束在其中的物体有某些确定的共振频率。所以这是被约束在有限空间中的波的一种性质——这个课题我们将在以后详细地用公式来讨论——只能存在某些

确定频率的波。由于振幅的频率与能量间存在着普遍关系，我们发现束缚在原子内的电子具有确定的能量就不足为奇了。

§2-6 哲学含义

我们简单地谈谈量子力学的某些哲学含义。通常这种问题总是有两个方面：一个是作为物理学的哲学的含义，另一个是把哲学问题外推到其他领域。在把和科学有关的哲学观念引申到其他领域中去时，它们往往完全被歪曲了。因此我们将尽可能把自己的评论限制于物理学本身。

首先，最有趣的问题是不确定性原理的概念，观察影响现象。人们向来都知道进行观察要影响现象，但是问题在于，这种效应不可能依靠重新安排仪器使其可以忽略，或减到最小或任意减小。当我们观察某一定的现象时，不可避免地要产生某种哪怕是最低限度的扰动，这种扰动是观测的自洽性所必需的。在前量子物理学中，观察者有时也是重要的，但这只是非本质的问题。曾经有人提出过这样一个问题：如果有一棵树在森林中倒了下来，而旁边没有人听到，那它真的发出了响声吗？在真实的森林中倒下的一棵真实的树当然会发出声音，即使没有任何人在那里。但即使没有人在那里听到声音，它也会留下其他的迹象。响声会使树叶振动，如果我们够仔细的话，可以发现在某个地方有一些荆棘擦伤了树叶，在树叶上留下细小的划痕，除非我们假定树叶曾经发生振动，否则对此划痕就无法解释。所以，在某种意义上我们必须承认曾经发出过声音。我们也许会问：是否有过声音的感觉呢？大概没有，感觉一定要意识到才有意义。蚂蚁是否

有意识以及森林中是否有蚂蚁，或者树木是否有意识，这一切我们都不知道。对这个问题我们就谈到这里吧！

量子力学发展以来人们所强调的另一件事情是这样一个观念：我们不当谈论那些我们不能够测量的事情（实际上相对论也这么说的）。如果一件事情不能通过测量来定义，它在理论上就没有地位。由于一个定域粒子的动量的精确值不能通过测量来确定，因此它在理论上就没有地位。但是，认为这是经典理论的问题是错误的。这是一种对情况所作的粗枝大叶的分析。只是因为我们不能同时精确地测量位置和动量并不是从先验的意义上说我们不能讨论它们。它的意思只是我们不需要讨论它们。在科学中情况是这样的：一个无法测量或无法直接与实验相联系的概念或观念可以是有用的，也可以是无用的。它们不必存在于理论之中。换句话说，假如我们比较世界的经典理论与世界的量子理论，并假设实验上确实只能不精确地测出位置与动量，那么问题就是一个粒子的精确位置与它的精确动量的概念是否仍然有效。经典理论承认这些概念；量子理论则不。这件事本身并不意味着经典物理是错误的。当新的量子力学刚发现时，经典物理学家——除去海森伯、薛定谔和玻恩以外所有的人——都说：“看吧，你们的理论一点也不好，因为你们不能回答这样一些问题：粒子的精确位置是什么？它穿过的是哪一个孔？以及一些别的问题。”海森伯的答复是：“我不用回答这样的问题，因为你们不能从实验上提出这个问题。”这就是说，我们不必要回答这种问题。考虑两种理论（a）与（b），（a）包括一个不能直接检验但在分析中用到的概念，而（b）则不包括这个概念。如果它们的预言不一致，我们不能声称：由于（b）不能解释（a）中的那个概念，因而它就是错的，因为这个概念是一个无法直接检验的东西。知道哪些观念不能直接检验总是好的，

但是没有必要将它们全部去掉。认为我们只利用那些能直接实验测定的概念才能真正算作科学的这种看法是不正确的。

量子力学本身就存在着概率幅、势以及其他许多不能直接测量的概念。科学的基础是它的预测能力。预测就是说出在一个从未做过的实验中会发生什么。我们怎么去做这件事呢？假定我们不是依靠实验要知道发生什么情况，我们只能将已有的实验外推到实验尚未达到的领域。我们必须依据我们的概念并将它们推广到这些概念还没有受到检验的领域中。如果我们不是这样做，就不会提出预测。所以，对经典物理学家来说恰当地按照这样的程序进行是完全合理的，从而假设位置——对垒球来说显然具有某种意义——对于电子来说也具有某种意义。这并不愚蠢。这是合理的步骤。今天我们说相对论定律对所有的能量都应该是正确的，但是或许有一天，有人会跑出来说是多么愚蠢呀！直到我们自己惹出麻烦之前，我们实在是不知道“蠢”在哪里的，所以整个思想都是自找麻烦。唯一能发现我们错误的方法是说出我们的预测是什么。这对于建立概念是绝对必要的。

我们已对量子力学的非决定性作过一些评论。那就是我们现在还不能预测在给定尽可能仔细安排好的物理条件下会发生什么物理事件。假如有一个处于受激态的原子，并且它将发射光子，那么我们无法说出它将在什么时候发射光子。它有在任何时刻发射光子的一定振幅，我们可以预测的只是发射的概率；我们不能精确地预测未来。这引起了关于意志自由的意义的种种问题和胡说八道，还引起了世界是不确定的种种观念。

当然，我们必须强调，在某种意义上经典物理也是非决定的。人们通常认为这种非决定性，即我们不能预言未来，是重要的量子力学的特色，而且据说这可用来解释精神的行为、自由意志的感觉等等。

但是假如世界真的是经典世界——假如力学定律是经典的——还是一点也不清楚精神是否也觉得多少有些相同。确实，在经典物理学中如果我们知道了世界上，或者在一盒气体中的每个粒子的位置与速度，那么就能精确地预言会发生什么。因此经典的世界是决定论的。然而，考虑到我们的精确度有限，而且不知道哪怕只是一个原子的精确位置到譬如十亿分之一。那么这个原子运动时会撞上另一个原子，由于我们知道的位置的精确度不超过十亿分之一，因此我们发现碰撞后，位置的误差还会更大。当然，在下一次碰撞时，误差又被放大，这样，如果起先只有一点点误差的话，后来就迅速放大而出现很大的不确定性。举个例子来说：比如一道水流从堤坝上泻下时，会飞溅开来。如果我们站得很近，时不时地有水滴溅到我们的鼻子上。这一切看来完全是无规则的，然而这样一种行为能够按纯粹的经典定律来预言。所有水滴的精确位置取决于水流流过堤坝以前的精确运动。结果怎样呢？在水流落下时，极微小的不规则性都被放大了；结果就出现了完全的随机性。很明显，如果我们不能绝对精确地知道水的运动，就不能真正预知水滴的位置。

说得更明确一些，给定任一精确度，无论多么精确，都能找到一个足够长的时间，以致我们无法使对这么长的时间作出的预言有效。问题在于这段时间并不很长。如果精确度为十亿分之一，这个时间并不是数百万年。事实上，这个时间随着误差呈对数式地变化，结果发现只在非常、非常短的时间里我们就丢失了所有的信息。如果精确度提高到亿亿亿分之一——那么不管我们想要多少个亿，最后总要停在某一位数上——我们就会得出一个时间，小于这个时间的事件都在已有测量的精度下是可预言的——此时间后发生的事件就再也不能预言了！由此看来，诸如以下的说法，什么由于人类精神表面上的自由与非决定性，我们应当认识到再也不能希望用经典的“决定论的”物理学

来理解它，并且欢迎量子力学将我们从“完全机械论的”宇宙下解放出来，等等，都是不公正的。因为，从实际的观点来说，在经典力学中早已存在着非决定性了。

[1] 原文为the distance between nodes of the waves in the train。其中用nodes不恰当，故略加修改。——译者注

[2] 更精确地说，我们所知的 y 坐标的误差是 $\pm B/2$ 。但是我们现在只对一般的概念感兴趣，所以不必为因子2操心。

[3] 原文这几句话表达含糊，曾经译者重新整理，补充。——译者注

[4] 光斑组成的整个衍射图的强度分布决定于每个晶胞的结构。——译者注

[5] 第1卷28章和第2卷第4章。——译者注

第3章 概率幅

§3-1 振幅组合定律

当薛定谔最初发现量子力学的正确定律时，他写出了方程，描述在不同地点找到粒子的振幅。这个方程非常像经典物理学家原来就知道的某些方程——这些方程曾被用来描述空气中声波的运动、光的传播以及其他一些现象。在量子力学建立的初期，大部分时间都花在解这个方程上。但在同一个时期，特别是玻恩和狄拉克，发展了对隐藏在量子力学方程式背后的、全新的物理概念的理解。随着量子力学的进一步发展，人们又发现还有许多东西没有直接包含在薛定谔方程里——如电子自旋以及各种相对论现象。传统上所有的量子力学课程都是以同一方式开始的，即顺着这一主题的历史发展顺序讲解。一个人首先得学习大量的经典力学，这样他就会懂得如何去解薛定谔方程。然后，他花很多时间去求各种情况下薛定谔方程的解，只有在详尽地研究了这个方程之后，才接触到电子自旋这个“高深”的课题。

我们原来也曾考虑过，结束这些物理课程的正确方式是给你们讲解怎样去解复杂情况下的经典物理学方程——例如在封闭区域内声波的描述，圆柱形空腔中电磁辐射的模式等等。这是本课程的最初计划。然而，我们还是决定抛弃这个计划而代之以量子力学的导论。我们得到这样的结论：通常认为量子力学的高深部分事实上是十分简单的，这里面所用的数学特别简单，只包含简单的代数运算而且没有微分方程，至多只有一些很简单的微分方程。唯一的问题是，我们必须

跃过一个裂隙，这个裂隙是我们不再能够详细描述粒子在空间的行为。所以，我们想要做的是：给你们讲解通常所谓的量子力学的“高深”部分。但是我们向你们保证，它们是极其简单的部分——从深刻意义上来说——并且也是最基本的部分。坦白地说，这是一个教学法的实验，据我们所知，以前还从来没有这样做过。

当然，在这个课题中，我们的困难是对物体的量子力学行为十分陌生，没有人曾在日常经验中有过有关物体量子力学行为的粗略的、直观的概念。有两种介绍这一课题的方法：我们可以用较为粗略的物理方式来描述可能发生的事件，多少告诉你们发生了一些什么而不给出每一事件的精确定律；或者从另一个角度，给出精确定律的抽象形式。但是，由于抽象，你们就完全不知道它们的物理意义。后一种方法不能令人满意，因为它完全是抽象的，而前一种方法给人不舒服的感觉，因为无法知道究竟哪些东西是真的，哪些是假的。怎样克服这个困难，我们尚无把握。事实上，你们会注意到，在第1和第2章里已经提出了这个问题，第1章是比较精确的，而第2章是对不同现象的特征的粗略描述。在这里，我们将尝试在这两个极端之间找到一种适当的描述方法。

在这一章里我们将首先处理一些普遍的量子力学概念。某些表述是十分精确的，另一些表述只是部分精确。当我们进行讲解的时候，很难向你们指明哪一些表述是十分精确的，哪一些是部分精确的。但是当你们学完这一本书的其余部分以后，再回过头来看一看就会知道哪些部分是严密的，哪些部分只是简略的解释。本章以后的各章将不像本章那样不够精确。事实上，在以后各章里，我们精心力求讲得更精确的理由之一是：要向你们指出量子力学中最美妙的东西之一——从很少的前提推导出很多的结论。

我们还是从讨论概率幅的叠加开始。我们将用第1章的实验作为例子，并把它重新画在图3-1上。有一个粒子（譬如说电子）源 s ：后面是一堵上面有两条狭缝的墙，在墙后面有一个探测器放在某一个位置 x 。我们要求在 x 处发现粒子的概率。量子力学的第一普适原理：粒子从源 s 发出到达 x 的概率能够用一个叫做概率幅的复数的绝对值的平方来定量地描述——在现在这个例子中，就是“从 s 来的粒子到达 x 的振幅”。量子力学中经常用到这个振幅，我们用一个速记符号——狄拉克发明并在量子力学中通用的——来描述这个概念。我们用这样的方式来表示概率幅。

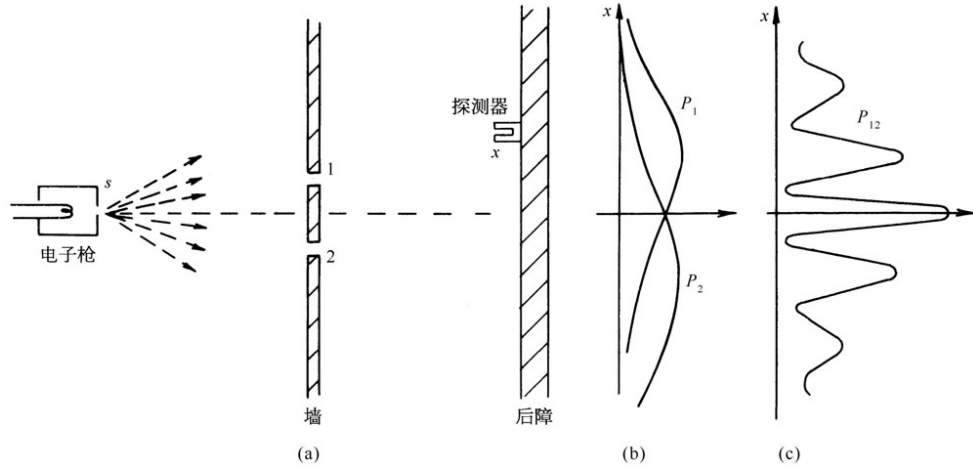


图3-1 电子的干涉实验

$$\langle \text{到达}x \text{ 的粒子} \mid \text{离开}s \text{ 的粒子} \rangle . \tag{3.1}$$

换言之，两个括号 $\langle \rangle$ 是与“振幅”相当的记号，竖线右边的表式总是表示初始状况，左边的表示终了状况，为了方便，有时候可以进一步缩写，各用一个字母分别表示初始状况和终了状况。例如，有时我们可以把振幅式（3.1）写成：

$$\langle x \mid s \rangle . \tag{3.2}$$

我们要强调一下，这个振幅当然只是一个单独的数字——一个复数。

在第1章的讨论中，我们已经看到，粒子到达探测器有两条可能的路径时，总的概率不是两个概率之和，而必须写成两个振幅之和的绝对值的平方。两条路径都畅通的时候，电子到达探测器的概率是：

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2. \quad (3.3)$$

我们把这个结果用新的符号来表示。不过我们先要讲一讲量子力学第二普适原理：当一个粒子可以通过两条可能的路径到达某一给定的状态时，这个过程的总振幅是，各自独立地考虑的两条路径的振幅之和，用新的符号表示：

$$\langle x | s \rangle_{\text{两个小孔都打开}} = \langle x | s \rangle_{\text{通过1}} + \langle x | s \rangle_{\text{通过2}}. \quad (3.4)$$

顺便提一下，我们必须假定小孔1和2是足够小，当我们谈及电子通过小孔的时候，我们不必讨论通过的是小孔的哪个部分。当然我们可以把每一个小孔分割成许多部分，而电子具有通过小孔的上部或通过小孔的底部或其他部分的一定振幅。我们假定小孔是足够小，从而就不必为这些细节操心。这就是所涉及的粗糙部分；我们可以使之更为精确，但是在现阶段还不需要那么做。

现在，我们要详细地写出我们对于电子通过小孔1到达位于 x 处的探测器这一过程的振幅能说些什么。在这里，我们要应用第三普适原理：如果粒子走的是某一特定的路径，对于这条路径的振幅可以写成走过部分路程的振幅以及走过其余部分路程的振幅之乘积。对于图3-1的装置，从 s 通过小孔1到达 x 的振幅等于从 s 到孔1的振幅乘以从孔1到 x 的振幅：

$$\langle x | s \rangle_{\text{通过}1} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle . \quad (3.5)$$

这个结果也不是完全精确的。我们还应当在振幅中包含一个关于电子通过小孔1的因子，但是，在目前的情况下，这只是一个简单的小孔，我们可令这个因子等于1。

你们要注意，式（3.5）是以相反的次序写的。它应当从右边读到左边。电子从 s 到1，然后从1到 x 。总结一下，如果事件是接连发生的——就是说，如果你们能够分析粒子所走的一条路线，说它先走这一段，然后走那一段，再走另一段——则将各相继事件的振幅相乘即可求出该路线的总振幅。运用这个定律，我们可以将式（3.4）重新写成：

$$\langle x | s \rangle_{\text{通过}1, 2} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle .$$

现在我们要证明，只要运用这几条原理，我们就能计算如图3-2所示那种更为复杂的问题。在该图中有两堵墙，一堵墙上有两个小孔1和2，另一堵墙上有三个小孔 a 、 b 和 c 。在第二堵墙后面有探测器，位于 x 处，我们要求粒子到达这一探测器的振幅。一个你们能求出振幅的方法是计算通过这许多小孔的波的叠加，或干涉；但是你们也可这样来求，认为有6条可能的路线，把走过各条路线的振幅叠加起来。电子可以先通过小孔1，然后通过小孔 a ，最后到达 x ；或者它可以先通过小孔1，然后通过小孔 b ，最后到达 x ，如此等等。按照上述第二原理，将各条可供选择的路线的振幅相加。所以我们可以把电子从 s 到 x 的振幅写成6个单独振幅之和。另一方面，应用第三原理，每一个单独的振幅都能写成三个振幅的乘积。例如，其中有一个是从 s 到1的振幅乘以1到 a 的振幅再乘以 a 到 x 的振幅。采用我们的速记符号，从 s 到 x 整个振幅可写成

$$\langle x | s \rangle = \langle x | a \rangle \langle a | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | b \rangle \langle b | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \dots + \langle x | c \rangle \langle c | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle .$$

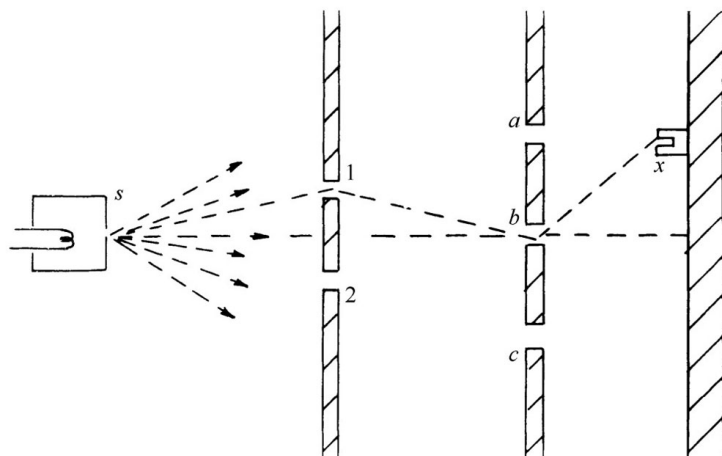


图3-2 一个比较复杂的干涉实验

可用求和符号来节省书写

$$\langle x | s \rangle = \sum_{\substack{i=1, 2 \\ a=a, b, c}} \langle x | \alpha \rangle \langle \alpha | i \rangle \langle i | s \rangle . \quad (3.6)$$

为了用这些方法进行各种计算，自然必须知道从一个地点到另一地点的振幅。我们将给出一个典型振幅的粗略概念，它不考虑像光的偏振和电子自旋之类的东西，但是，除了这些方面之外，它是十分准确的。有了这些概念，你们就能够解决包含多个狭缝的不同组合的问题。假设有一个具有一定能量的粒子，在真空中从位置 $\mathbf{r}_1$ 走到位置 $\mathbf{r}_2$ 。换言之，这是一个不受力作用的自由粒子。除了前面还要有一个常数因子外，从 $\mathbf{r}_1$ 到 $\mathbf{r}_2$ 的振幅是：

$$\langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_1 \rangle = \frac{e^{ip \cdot \mathbf{r}_{12} / \hbar}}{\mathbf{r}_{12}}, \quad (3.7)$$

其中 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ， $\mathbf{p}$ 是动量，它和能量 E 由相对论方程联系起来：

$$p^2 c^2 = E^2 - (m_0 \cdot c^2)^2,$$

或者由非相对论性方程式联系起来：

$$\frac{p^2}{2m} = \text{动能}.$$

方程式 (3.7) 实际上表示粒子具有像波一样的性质，振幅就像一个具有波数等于动量除以 $\hbar$ 的波那样传播。

在最一般的情况下，振幅和相应的概率也包含时间。对于大多数这些初步的计算，我们假设粒子源始终发射具有特定能量的粒子，所以我们不必考虑时间问题，但是在一般的情况下，我们可能对另外一些问题感兴趣。假设有一个粒子在某一时刻，在某一地点 P 被释放，而你们想要知道它在某个晚一些的时刻到达某个位置，譬如说在 $\mathbf{r}$ 的振幅。这可用符号表示成振幅 $\langle \mathbf{r}, t=t_1 | P, t=0 \rangle$ 。显然，这个振幅将依赖于 $\mathbf{r}$ 和 t 。如果你们把探测器放在不同的位置并在不同的时刻进行测量，你们就会得到不同的结果。一般地说，这个 $\mathbf{r}$ 和 t 的函数满足一微分方程，这微分方程是一个波动方程。例如在非相对论的情况下，它就是薛定谔方程。于是人们就得到一个与电磁波或者气体中声波的方程式相类似的波动方程。然而必须强调指出，满足这个方程式的波函数与空间的真实的波动并不相同，我们不能像对声波那样用一种实在的图像来描绘这种波动。

虽然人们在处理一个粒子的问题的时候，很想用“粒子波”这个概念来进行思考，但这并不是一个恰当的概念。因为，如果有两个粒

子，那么在 r_1 发现一个粒子并且在 r_2 发现另一个粒子的振幅并不是一个简单的三维空间的波，而是依赖于6个空间变量 r_1 和 r_2 。例如，如果我们处理两个（或者更多的）粒子，我们还需要有下面的附加原理：假如有两个不相互作用的粒子，一个粒子做一件事并且另一个粒子做另一件事的振幅是两个粒子分别做这两件事的两个振幅之乘积。例如，倘若 $\langle a | s_1 \rangle$ 是粒子1从 s_1 到 a 的振幅， $\langle b | s_2 \rangle$ 是粒子2从 s_2 到 b 的振幅，则两者一起都发生的振幅是：

$$\langle a | s_1 \rangle \langle b | s_2 \rangle .$$

还有一个问题要强调，假定在图3-2中，我们不知道粒子到达第一堵墙的小孔1和2之前是从什么地方来的，但是只要知道到达1的振幅和到达2的振幅这两个数据，我们仍旧可以对在墙的后面将会发生些什么（例如到达 x 的振幅）作出预言。换言之，由于接连发生的事件振幅相乘这一事实，如式（3.6）所示，你在继续分析时所必须知道的只是两个数字——对这里的特殊情形来说就是 $\langle 1 | s \rangle$ 和 $\langle 2 | s \rangle$ 。有了这两个复数，就足够预言未来的一切了。这就是真正使得量子力学容易的地方。结果在以后的几章里当我们用两个（或少数几个）数字详细地说明初始状态后，我们所要做的就是用它来预言未来。当然，这些数字取决于粒子源的位置，并且可能还取决于仪器的其他细节。但是，这两个数字给定后我们就不再需要知道这些细节。

§3-2 双缝干涉图样

现在我们要考虑一个在第1章中已经比较详细讨论过的问题。这一次我们将要运用振幅概念的全部光辉成就来向你们说明这些结果是怎样

样得出的。我们采用与图3-1所示相同的实验，但现在两个小孔后面加上一个光源，如图3-3所示。在第1章里，我们曾经得到下面的有趣结果，如果我们在狭缝^[1]1后面观察，并且看见光子从该处散射，那么在 x 处得到的与这些光子对应的电子的分布和狭缝2关闭着是相同的。曾经在狭缝1或在狭缝2处被“看到”的电子的总分布是单独打开狭缝1或2时的分布之和，并且和关掉小孔后面的光源时的分布完全不同。这个结果至少在我们采用足够短的波长的光线时是正确的。如果波长变长，以致我们无法确定散射过程发生在哪一个小孔附近，电子的分布就变得更像关掉小孔后面的光源时的分布了。

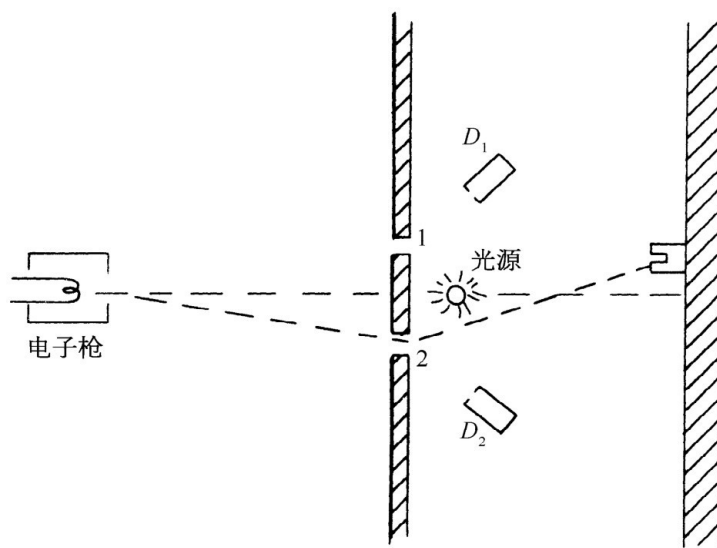


图3-3 确定电子走过哪一个小孔的实验

我们用新的符号和振幅组合原理来仔细考虑一下会出现些什么情形。为使书写简单，我们仍然令 ϕ_1 表示电子通过小孔1到达 x 的振幅，即

$$\phi_1 = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle .$$

同样，我们令 ϕ_2 表示电子经小孔2到达探测器的振幅，

$$\phi_2 = \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle .$$

这些是没有光源时通过两个小孔到达 x 的振幅。现在如果有了光源，我们要问这个问题：电子从 s 出发，光子从光源 L 发出，最后电子到达 x 而光子在狭缝1后面被观察到，这一个过程的振幅是什么？假定我们用一个探测器 D_1 来观察狭缝1后面的光子，如图3-3所示，并用一个同样的探测器 D_2 来对小孔2后面被散射的光子计数，对于一个光子到达 D_1 以及一个电子到达 x 的情形，将有一个振幅。对于一个光子到达 D_2 以及一个电子到达 x 的情形，也有一个振幅。让我们来计算这两个振幅。

虽然我们对计算中所遇到的所有因子还没有正确的数学公式，但通过下面的讨论，你们可以体会出它的精神。首先，电子从电子源跑到小孔1有一个振幅 $\langle 1 | s \rangle$ 。其次，我们可以假设电子在小孔1附近把一个光子散射到探测器 D_1 中也有一定的振幅。我们用 a 来表示这个振幅。再有，电子从狭缝1跑到位于 x 的电子探测器具有振幅 $\langle x | 1 \rangle$ 。于是，电子从 s 通过狭缝1跑到 x 并把一个光子散射到 D_1 里面的振幅是：

$$\langle x | 1 \rangle a \langle 1 | s \rangle .$$

或者用我们以前用过的符号来表示，它就是 $a\phi_1$ 。

通过狭缝2的电子将一个光子散射到 D_1 中去的情形也具有某个振幅。你们要说：“这是不可能的，如果探测器 D_1 只是观测小孔1，光子怎么会散射到 D_1 中去呢？”如果波长足够长，就有衍射效应，那就肯定可能。如果仪器做得很好，而且我们用的是短波长的光子，那么光子被通过小孔2的电子散射到探测器1中去的振幅是非常小的。但是为使讨论具有普遍性，我们应该考虑到总有一些这种振幅存在，我们称它为 b 。于是，一个电子通过狭缝2并且把一个光子散射到 D_1 中去的振幅是：

$$\langle x | 2 \rangle b \langle 2 | s \rangle = b\phi_2.$$

在 x 位置找到电子并在 D_1 中发现光子的振幅是上面两项之和，每一项分别对应于电子的一条可能的路线。每一项又由两个因子构成。第一，电子通过一个小孔，第二，光子被这个电子散射到探测器1中，我们有：

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{电子到 } x \\ \text{光子到 } D_1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{电子从 } s \text{ 发出} \\ \text{光子从 } L \text{ 发出} \end{array} \right\rangle = a\phi_1 + b\phi_2. \quad (3.8)$$

对于在另一个探测器 D_2 中发现光子的情况，我们可得到类似的表达式。为简单起见，假设系统是对称的，那么 a 也就是电子通过小孔2时把光子散射到 D_2 中的振幅， b 是电子通过小孔1时把光子散射到 D_2 中的振幅，相应的光子进入 D_2 而电子到 x 的总概率是：

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{电子到 } x \\ \text{光子到 } D_2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{电子从 } s \text{ 发出} \\ \text{光子从 } L \text{ 发出} \end{array} \right\rangle = a\phi_2 + b\phi_1. \quad (3.9)$$

现在我们完成了。我们可以容易地算出不同情况的概率。假定我们想知道在 D_1 中有一个计数而同时在 x 处收到一个电子的概率，这就是式(3.8)所给出的振幅的绝对值的平方，即 $|a\phi_1 + b\phi_2|^2$ 。让我们更仔细地研究一下这个表达式。首先，如果 b 等于零——这是我们设计仪器时想要做到的——答案就是 $|\phi_1|^2$ 乘以 $|a|^2$ ，即总振幅缩小了因子 $|a|^2$ 。这就是如果只有一个小孔时所应当得到的概率分布——如图3-4(a)的曲线所示。另一方面，如果波长很长，光子从小孔2后面散射到 D_1 中的振幅可能正好和从小孔1散射的情形相同。虽然在 a 和 b 中可能还分别包含某个相位因子，但是我们可以问一个简单的情况，即两者相位因子相等的情况。如果 a 实际上等于 b ，那么总概率就成为 $|\phi_1 + \phi_2|^2$ 乘以 $|a|^2$ ，因为公共因子 a 可以提出来。然而，这正好就是完全没有光子的情况下我们所得到的概率分布。所以，在波长很长的情况下——从而光子探测器无效——你们又重新得到原来的显示出干涉效应的分布曲线，如图3-4(b)所示。对于光子探测器部分有效的情况，在大量的 ϕ_1 和少量的 ϕ_2 之间存在着干涉，你将得到如图3-4(c)上所画的那种介于两者之间的分布。不用说，我们求进入 D_2 的光子和到达 x 的电子的符合计数，我们将会得到同样的结果，如果你们还记得第1章中的讨论，你们可以看出这些结果对第1章里所谈到的过程给出了定量的描述。

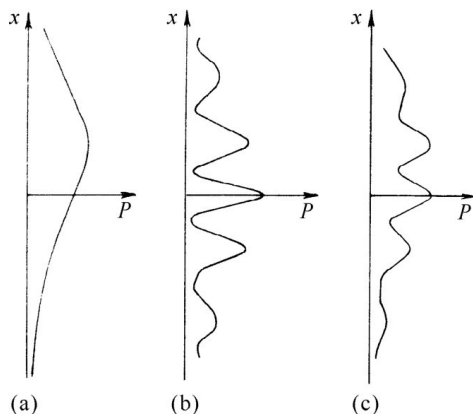


图3-4 在图3-3的实验中，对应于进入 D 的一个光子，有一个电子到达 x 的概率：

(a) 对于 $b=0$ ； (b) 对于 $b=a$ ； (c) 对于 $0 < b < a$

为使你们避免一个普遍的错误，我们现在要强调说明一个重要的问题。假定你只要知道电子到达 x 处的概率而不管光子是在 D_1 还是在 D_2 中计数，你们是否应把式(3.8)和(3.9)所表示的振幅相加起来呢？不！对于不同的、互相可以区别的终态的振幅，你们无论如何都不得把它们相加起来。光子一旦被某个光计数器所接收，只要我们愿意，不需要更多地去扰乱这个系统，我们总是能够确定到底是哪一种情况发生，每个情况的概率完全不依赖于另一情况。再重复一遍，不要把不同的最终情况的振幅相加，所谓“最终”，指的是我们当时希望知道的概率——就是当实验“结束”的时候。在整个过程结束以前，你们的确对实验中不能区别的各个不同的过程的振幅求和。在过程的终了，你们或许会说，“不想要观察光子”。要不要对光子进行观察是你们自己的事，但是你们仍然不可以把振幅相加。自然界并不知道你们正在观察什么。无论你们是否费心记录数据，自然界都按照它自身原有的方式发展变化着，所以我们不可以把振幅相加。我们应当先求出所有可能的终态的振幅的平方，然后再把它们加起来。对于一个电子

到达 x ，同时一个光子到达 D_1 或到达 D_2 的情形来说，正确的结果是：

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \begin{array}{c} \text{电子到 } x \\ \text{光子到 } D_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \text{电子从 } s \text{ 发出} \\ \text{光子从 } L \text{ 发出} \end{array} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle \begin{array}{c} \text{电子到 } x \\ \text{光子到 } D_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \text{电子从 } s \text{ 发出} \\ \text{光子从 } L \text{ 发出} \end{array} \right\rangle \right|^2 \\ &= |a\phi_1 + b\phi_2|^2 + |a\phi_2 + b\phi_1|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

§3-3 在晶体上的散射

下一个例子是这样一种现象，在此现象中我们要比较仔细地分析概率幅的干涉。我们观察中子在晶体上的散射过程。假定我们有一块晶体，它包含大量的原子，原子的中心是原子核。这些原子核作周期性的排列，一束中子从很远的地方射来。我们用指标 i 来标记晶体中不同的原子核， i 依次代表一系列的整数， $1, 2, 3, \dots, N$ ， N 等于原子的总数。问题是要计算在图3-5所示的装置中，计数器接收中子的概率。对于任意的一个特定的原子 i ，中子到达计数器 C 的振幅等于中子从源射到原子核 i 的振幅乘以在原子核 i 上受到散射的振幅 a ，再乘以中子从 i 到计数器的振幅。我们可将其写成：

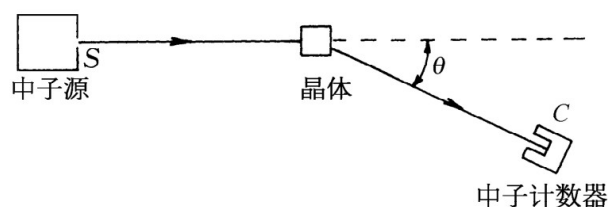


图3-5 中子在晶体上的散射

$$\langle \text{到达 } C \text{ 的中子} \mid \text{从 } S \text{ 来的中子} \rangle_{\text{通过 } i} = \langle C \mid i \rangle a \langle i \mid S \rangle. \quad (3.11)$$

在写这个方程式时，我们已经假定散射振幅 a 对于所有的原子都是一样的。这里有大量的、表观上不能区别的路线。这些路线之所以不能区别是因为低能中子从原子核散射的时候不会把原子撞离它在晶体中原来的位置——没有留下散射的“记录”。按照以前的讨论，中子到达 C 的振幅必须包括式（3.11）对所有原子求和：

$$\langle \text{到达 } C \text{ 的中子} \mid \text{从 } S \text{ 来的中子} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle C \mid i \rangle a \langle i \mid S \rangle. \quad (3.12)$$

因为我们对在不同空间位置的原子的散射振幅求和，这些振幅有不同的相位，从而得到和我们以前曾经分析过的光在光栅上散射的情况中同样具有特征的干涉图样。

在这样一个中子强度为角度函数的实验里面，确实常常发现中子强度显示出巨大的变化，具有若干尖锐的干涉峰，在这些峰之间则几乎什么也没有——如图3-6（a）所示。然而，对于某几种晶体情况就不是这样的了。伴随着上面所说的干涉峰一起的还有散射到所有方向上的普遍的本底，我们必须试图去理解这个看上去似乎难以理解的原因。原来我们没有考虑中子的一个重要的性质。它具有 $1/2$ 的自旋，因而它就有两个可能的状态：不是自旋“向上”（譬如说在图3-5中垂直于纸面）就是自旋“向下”。如果晶体中的原子核没有自旋，中子的自旋就没有任何效应。但是，如果晶体的原子核也具有自旋，譬如说自旋为 $1/2$ ，你们就会观察到上面所讲的模糊的散射本底。这个现象的解释如下。

如果中子的自旋在某一个方向上，并且原子核具有同样方向的自旋，在散射过程中不可能发生自旋方向的改变。如果中子和原子核具有相反的自旋，于是可能发生两种不同的散射过程，其中一个过程中

的自旋方向不变；而在另一种过程中自旋的方向互相交换。这个自旋的总和不变的定则和经典定律中的角动量守恒定律相似。如果我们假定所有散射中子的原子核的自旋都按同一方向排列，我们就开始能够理解这一现象。与原子核具有相同自旋的中子受到散射时就得到预期的锐细的干涉分布曲线。对于自旋相反的中子，情况又怎样呢？如果它在散射时不发生自旋方向翻转，那么情况与上述结果没有什么两样，但是如果两者的自旋在散射过程中都翻了一个身，原则上我们就可发现，是在哪一个原子核上进行了散射。因为这是唯一的自旋反转的原子核。既然我们可以说出是在哪一个原子核上发生了散射，其他的原子对此中子又有什么影响呢？当然没有，这一情况就和在单个原子上散射完全一样。

为计入这种效应，式（3.12）的数学表达式必须加以修正，因为在那样的分析过程中我们还没有对状态作完全的描述。让我们从下述条件出发：从中子源来的全部中子都具有向上的自旋，而晶体中的所有原子都具有向下的自旋。首先我们要求的是：到达计数器的中子的自旋都向上并且晶体中所有原子核的自旋仍旧向下的振幅。这和我们以前的讨论没有不同。我们令 a 为散射时自旋不翻转的振幅。那么，在第 i 个原子上散射的振幅是：

$$\langle C_{\text{向上}} \text{ 晶体都向下} | S_{\text{向上}} \text{ 晶体都向下} \rangle = \langle C | i \rangle a \langle i | S \rangle .$$

因为所有原子核的自旋仍旧向下，各个不同的原子核（不同的 i 值）无法区别。显然不可能说出是在哪一个原子上发生了散射。对于这样的过程，所有的振幅互相干涉。

然而还有另外的情况，在这种情况下，从 S 出发的中子的自旋虽然都是向上的，但探测到有一个中子自旋却是向下的，在晶体中有一

个原子核的自旋必定要改变成向上方向——我们说这是第 k 个原子。我们又假定对于自旋翻转的每一个原子都具有相同的散射振幅，称为 b 。（在实际的晶体中，存在着另一种可能性，就是相反方向的自旋会转移到另外某个原子上，但是让我们只讨论这种过程的概率非常小的晶体。）于是，散射振幅就是：

$$\langle C_{\text{向下}} \text{ 原子核 } k \text{ 向上} | S_{\text{向上}} \text{ 晶体都向下} \rangle = \langle C | k \rangle b \langle k | S \rangle . \quad (3.13)$$

假如我们要计算发现中子自旋向下以及第 k 个原子核自旋向上的概率，它等于这个振幅的绝对值的平方，就是 $|b|^2$ 乘上 $|\langle C | k \rangle \langle k | S \rangle|^2$ 。第二个因子几乎与第 k 个原子在晶体中的位置无关，并且在取这个绝对值的平方时，所有的相位都消失了。从晶体中任意的原子核上发生的自旋翻转的散射概率是：

$$|b|^2 \sum_{k=1}^N |\langle C | k \rangle \langle k | S \rangle|^2 ,$$

这就显示出图3-6（b）那样的光滑的分布曲线。

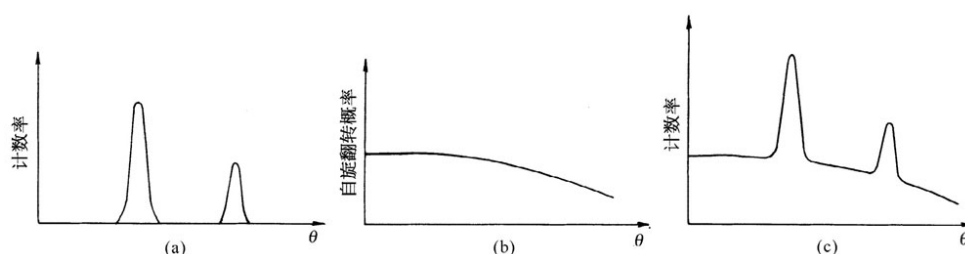


图3-6 中子计数率作为角度的函数

（a）对于自旋为零的原子核；（b）自旋翻转的散射概率；（c）对于自旋为 $1/2$ 的原子核所观察得到的计数率

你们或许会争辩：“我不在乎哪个原子向上。”也许你不在乎，但是自然界是知道的。实际上的概率就是我们上面所得出的——没有任何干涉效应。另一方面，如果我们要求进入探测器内的中子自旋向上而所有原子的自旋仍旧向下的概率，那么我们要取下式的绝对值的平方：

$$\sum_{i=1}^N \langle C | i \rangle a \langle i | S \rangle.$$

因为求和号下面的各项都包含相位因子，它们要互相干涉，于是我们得到锐细的干涉图样。如果我们做实验时，不去观察被检测到的中子的自旋，那么两种情况都可能发生，两种概率就要相加。作为角度的函数的总概率（或计数率）看上去就像图3-6（c）中的曲线那样。

我们来回顾一下这个实验的物理意义。如果你们原则上能够区别各个不同的终态（即使你们不愿费心去区别它们），要求出总的最终的概率。先要算出各个状态的概率（不是振幅），然后把它们相加即得。如果你们甚至在原则上都不能区别各个终态，在取绝对值的平方以求出实际的概率之前，必须先对概率幅求和。你们必须特别注意的是：假如仅仅用波动来描写中子的话，你们对向下自旋的中子和向上自旋的中子都会得到同样的散射分布。你们就要说：“波”来自所有的原子并且相互干涉，就像具有同样波长的向上自旋的中子那样。但是我们知道实际情况并不是这样的。所以正如我们以前所讲过的，我们必须小心，不要对空间的波动赋予过多的实在性。它们对于某些问题是有用的，但不是对所有的问题都有用。

§3-4 全同粒子

下面我们要描述显示量子力学的一个美妙结论的实验。这个实验再一次涉及这样的物理过程，一件事能以两种不能区别的方式发生，因此发生振幅的干涉——在这种情况下它总是正确的。我们将要讨论在比较低的能量下，一个原子核在另一个原子核上的散射。我们先考虑 α 粒子（即你们所知道的，氦原子核）轰击，譬如说，氧原子。为使我们对这个反应的分析较为容易起见，我们在质心坐标系中进行观察，在这个坐标系中氧原子核和 α 粒子的速度在碰撞以前具有相反方向，在碰撞以后也具有完全相反的方向。参看图3-7（a）。（因为质量不同，速度的大小当然是不同的。）我们还要假定能量是守恒的，并且碰撞的能量足够低，既不发生粒子碎裂，也不会使粒子跃迁到激发态，两个粒子之所以彼此发生偏转，其原因当然是由于两者都带有正电荷，按照经典的说法，当它们靠近擦过时，存在着静电斥力。散射以不同的概率在不同的角度发生。我们要讨论的是这种散射的角度依赖关系。（当然可以按照经典物理学来计算这个关系，因为量子力学对这个问题的解答和经典的结果完全一样。这是量子力学中最意外的巧合之一，对于这一点很难理解，因为除了平方反比定律以外对其他力的情况就不是这样——所以它确实是一种巧合。）

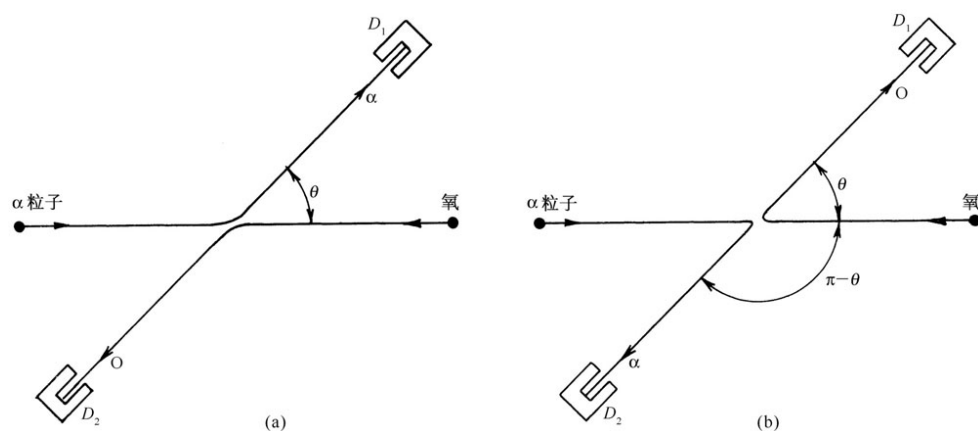


图3-7 在质心系中观察 α 粒子在氧原子核上的散射

不同方向的散射概率可以用图3-7（a）所示的实验来进行测量。在位置1的计数器可以设计成只检测 α 粒子，在位置2的计数器设计成只检测氧原子核——这第二个探测器仅仅用来作为核对。（在实验室系统中，探测器不会在相反的方向上，但在质心系中，它们在相反的方向上。）我们的实验是测量在不同方向上的散射概率。令 $f(\theta)$ 为 α 粒子散射到放在 θ 角度上的探测器中的振幅；那么， $|f(\theta)|^2$ 就是我们由实验测得的概率。

我们还可设计另一个实验，其中所用的探测器既能对 α 粒子作出反应，也能对氧原子核作出反应。这样我们就可得到在不需要区别所计数的是哪一种粒子的情况下所发生的过程。当然，假如我们在 θ 角的位置上接收到一个氧原子，在相反的位置角度为 $(\pi-\theta)$ 上必然会接收到一个 α 粒子，如图3-7（b）所示。所以，如果 $f(\theta)$ 是 α 粒子散射到 θ 角的振幅，则 $f(\pi-\theta)$ 是氧原子散射到 θ 角的振幅^[2]。于是，探测器在位置1接收到某种粒子的概率是：

$$\text{在 } D_1 \text{ 中接收到某种粒子的概率} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2. \quad (3.14)$$

注意，这两个状态原则上是可以区别的。即使在这个实验中我们不去区别这两种状态，但我们能够区别它们的。按照以前的讨论，我们必须把概率相加而不是把振幅相加。

上述结果对于许多种靶核都是正确的—— α 粒子在氧原子核上的散射，在碳、铍、氢等等原子核上的散射。但是对于 α 粒子在 α 粒子上的散射，这个结果就不对了。对于两个粒子完全相同的情况，实验得出的数据与式（3.14）所预言的不一致。例如在 90° 角的散射概率正好是上述理论所预言的两倍，并且问题不在于这些粒子是不是“氦”原子

核。如果靶是 He^3 ，而入射粒子是 α 粒子（ He^4 ），那么实验结果就和上述理论相符合了。只有当靶是 He^4 ——其原子核和入射的 α 粒子全同时，粒子的散射以其独特的方式随角度变化。

或许你们已能看出对这个现象的解释。使 α 粒子进入计数器有两种方式：使轰击的 α 粒子以 θ 角散射，或者使它散射到 $(\pi-\theta)$ 角度上。我们能不能够辨别进入计数器的粒子是轰击粒子还是靶粒子呢？回答是不能。在 α 粒子对 α 粒子的情况下，这是两个无法区分的粒子。这里我们必须把概率振幅相加发生干涉，在计数器中找到 α 粒子的概率是两个振幅和的平方：

$$\alpha\text{粒子进入}D_1\text{的概率} = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2. \quad (3.15)$$

这个结果和式（3.14）完全不同。我们可取角度 $\pi/2$ 作为一个例子，因为这很容易计算。对于 $\theta=\pi/2$ ，显然 $f(\theta)=f(\pi-\theta)$ ，所以式（3.15）的概率变为 $|f(\pi/2) + f(\pi/2)|^2 = 4|f(\pi/2)|^2$ 。

另一方面，如果它们不发生干涉，式（3.14）的结果只给出 $2|f(\pi/2)|^2$ 。所以 90° 角的散射是我们所预料的两倍。当然，在其他角度结果也是不同的，于是，你们得到了一个不寻常的结论：在粒子是全同的情况下，出现了粒子是可以区别的情况下未曾发生过的某种新的情况。在数学描述中，必须把可选择的各种过程的振幅相加，在这种过程中，粒子只是简单地交换它们扮演的角色，并且存在着干涉。

当我们用电子对电子散射，或者质子对质子散射进行同样类型的实验时，甚至会出现更为错综复杂的情况。此时以上两个结论都不正确！对于这些粒子，我们还必须引进一条新的法则，一个最为独特的

法则，这个法则是这样的：当来到某一点的电子的身份和另一个电子的身份互相交换时，在这种情况下新的振幅以相反的相位与旧的振幅相干涉。这确实确实是干涉，只是带有一个负号。就 α 粒子而言，当把 α 粒子交换进入计数器时，相干的振幅以正号相干涉。就电子而言，交换干涉的相干振幅以负号相干涉。除了下面将要谈到的另一细节外，在与图3-8所示相类似的实验中，适合电子的方程为：

$$\text{电子到达 } D_1 \text{ 的概率} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2. \quad (3.16)$$

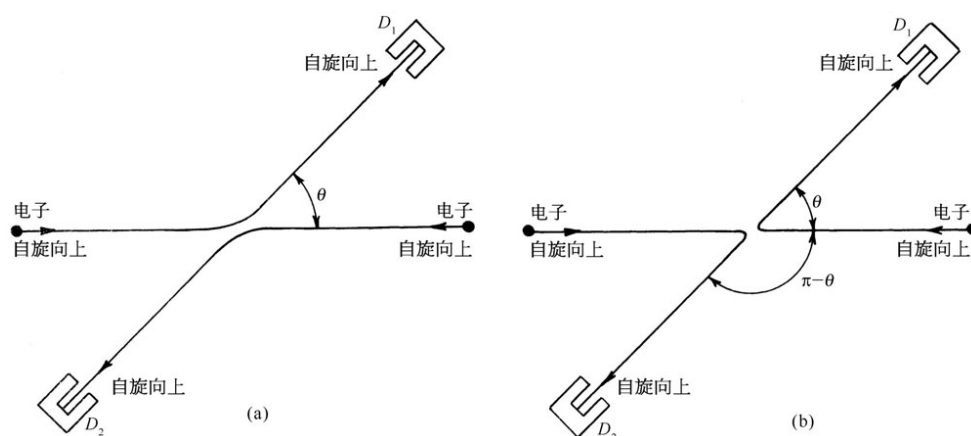


图3-8 电子对电子的散射。如果来到的这两个电子具有互相平行的自旋，过程（a）和（b）是不能区别的

对上面的陈述还必须加以限制，因为我们还没有考虑到电子的自旋（ α 粒子没有自旋）。可以认为，电子的自旋相对于散射平面来说，不是“向上”就是“向下”。如果实验的能量足够低，由于电荷运动所产生的磁力很小，因而自旋不受到影响。我们假定现在分析的就是这种情况，所以在碰撞的时候，自旋方向不会改变。不管电子具有什么方向的自旋，它总是不变的。你们可以看到，这里有几种可能性。轰击粒子和靶粒子的自旋都向上，或者都向下，或者它们的自旋方向相反。假定两者的自旋都向上，如图3-8所示（或者假定它们的自旋都向

下)。反冲粒子的自旋情况也同样，而且这个过程的振幅 等于图3-8 (a) 和 (b) 所表示的两种可能过程的振幅之差。于是在 D_1 中探测到电子的概率 由式 (3.16) 给出。

如果“轰击”粒子的自旋向上而“靶”粒子的自旋向下，进入计数器1的电子自旋可以向上也可以向下。通过对电子自旋的测量，我们就能够说出这个电子是来自轰击粒子束还是来自靶粒子了。这两种可能性表示在图3-9的 (a) 和 (b) 中，原则上它们是可以区别的，因而互不干涉——只不过是两者的概率相加。如果原来的自旋方向都反了过来——就是说，左边的自旋向下而右边的自旋向上——同样的论证仍然成立。

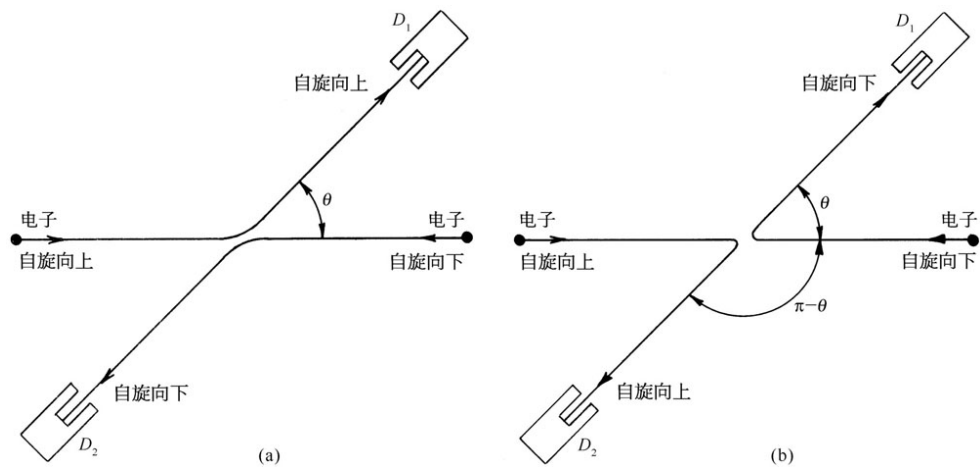


图 3-9 自旋反平行的两个电子的散射

现在如果我们随意选取电子——例如由钨丝发射的电子是完全非极化的——那么发射的任一特定电子的自旋向上还是向下的机会是50对50。如果我们在实验中不去测量在任何地点电子的自旋，这就是所谓的非极化的实验。这个实验的结果最好用这样的方法来计算：把所有的各种可能性都排列成表，就像我们在表3-1中所做的那样，对各个可以区别的不同情况分别求出它们的概率。总的概率就等于所有各个

概率的和。注意，对于非极化粒子束， $\theta=\pi/2$ 的结果是对互不依赖的粒子按经典理论求出的结果的一半。全同粒子的行为具有许多有趣的结论，我们将在下一章更为详细地讨论它们。

表3-1 非极化的自旋为1/2的粒子的散射

各种情况的比率	粒子1的自旋	粒子2的自旋	到达 D_1 中粒子的自旋	到达 D_2 中粒子的自旋	概 率
$\frac{1}{4}$	向上	向上	向上	向上	$ f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	向下	向下	向下	向下	$ f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	向上	向下	向上	向下	$ f(\theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	向下	向上	向下	向上	$ f(\pi - \theta) ^2$
			向上	向下	$ f(\pi - \theta) ^2$
			向下	向上	$ f(\theta) ^2$
总概率 = $\frac{1}{2} f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2 + \frac{1}{2} f(\theta) ^2 + \frac{1}{2} f(\pi - \theta) ^2$					

[1] 大约费曼在讲课时小孔（hole）和狭缝（slit）常常不分。原书中小孔和狭缝混用。译文照原文翻译，估计读者不会困惑。——译者注

[2] 一般地讲，散射方向当然应该用两个角度来描写，极角 ϕ 以及方位角 θ 。那么我们说氧原子核在 (θ, ϕ) 就是说 α 粒子在 $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ 。然而，对于库仑散射（以及对于其他许多情况），散射振幅不依赖于 ϕ 。于是在 θ 方向得到一个氧原子核的振幅和在 $(\pi - \theta)$ 方向得到一个 α 粒子的振幅是相同的。

第4章 全同粒子

§4-1 玻色子和费米子

在上一章里，我们开始考虑发生在两个全同粒子相互作用的过程中振幅干涉的特殊法则。所谓全同粒子是指像电子那样的无法将它们彼此区别开来的粒子。如果在某一个过程中包含两个全同的粒子，将到达计数器的粒子与另一粒子互相调换一下，这样调换后的状态与原来的状态是不能区别的，而且——像所有其他不能区别的情况一样——调换后的状态与原来的状态相干涉。于是事件的振幅就是两个相干振幅之和，但是，令人感到有趣的是，在某些情况下两个振幅以相同的相位相干涉，而在另一些情况下，振幅以相反的相位相干涉。

假设两个粒子 a 和 b 相互碰撞，其中 a 散射到方向1而 b 散射到方向2，如图4-1（a）所示。令 $f(\theta)$ 为这一过程的振幅，于是，观察到这个事件的概率 P_1 正比于 $|f(\theta)|^2$ 。当然也可能发生另一种过程，即粒子 b 散射到计数器1中而粒子 a 进入计数器2中，如图4-1（b）所示。假设不存在由自旋之类所定义的特殊方向，这一过程的概率就是 $|f(\pi-\theta)|^2$ ，因为这正好等于在第一过程中把计数器1移到 $\pi-\theta$ 角处。你们也许会想到，第二个过程的振幅正巧等于 $f(\pi-\theta)$ 。但它并不一定是这样，因为还可以有一个任意的相位因子。这就是说振幅可以是

$$e^{i\delta} f(\pi - \theta) .$$

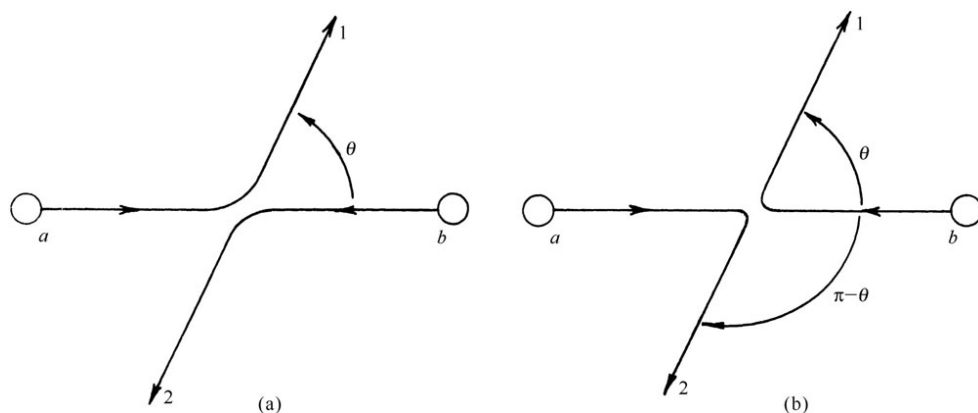


图4-1 在两个全同粒子的散射过程中，（a）和（b）两个过程不能区别

这个振幅仍旧给出概率 P_2 等于 $|f(\pi - \theta)|^2$ 。

现在让我们来看一看，如果 a 和 b 是全同粒子的话，将会出现些什么情况。这时我们就不能区别图4-1中的两个图所表示的不同过程。对于无论 a 还是 b 进入计数器1而同时另一个进入计数器2的情形，有一个振幅。这个过程的振幅是图4-1所示的两个过程的振幅之和。假使我们把第一个过程的振幅叫做 $f(\theta)$ ，那么第二个就是 $e^{i\delta} f(\pi - \theta)$ 。现在，相位因子就很重要了，因为我们要把两个振幅相加。假设当我们把这两个粒子的角色交换时，我们必须在振幅上乘以某个相位因子，如果我们把这两个粒子再交换一次，我们应该再次乘以同样的因子。可是这样一来，我们又回到了第一过程。相位因子应用两次必然回到原来的状态——相位因子的平方必定等于1。这只存在着两种可能性： $e^{i\delta}$ 等于+1或者等于-1。两个粒子交换前后的振幅要么是有相同的符号，要么具有相反的符号。这两种情况在自然界中都存在，它们分别对应于不同种类的粒子。以正号相干涉的粒子称为玻色子，以负号相干涉的粒子称为费米子。光子、介子和引力子都是玻色子，电

子、 μ 子、中微子、核子和重子都是费米子。于是，我们得到全同粒子的散射振幅是：

玻色子：

$$(\text{直接的振幅}) + (\text{交换后的振幅}), \quad (4.1)$$

费米子：

$$(\text{直接的振幅}) - (\text{交换后的振幅}). \quad (4.2)$$

对于具有自旋的粒子——如电子——还有一个另外的复杂情况。我们不仅要详细说明粒子的位置，还要说明它们自旋的方向。只对于是有相同自旋状态的全同粒子相互交换时振幅才相互干涉。如果考虑非极化射束——这是不同自旋状态的混合物——的散射，还有某些特别的计算。

当两个或更多的粒子紧紧地束缚在一起的时候，将出现一个有趣的问题。例如，一个 α 粒子里面有4个粒子——两个中子和两个质子。当两个 α 粒子相互散射时，有几种可能性。在散射过程中，可能有一个中子从一个 α 粒子跳到另一个 α 粒子中的一部分振幅，同时在另一个 α 粒子中有一个中子跳过来和它交换位置，于是散射以后的 α 粒子已经不是原来的粒子了——已经交换了一对中子。见图4-2。交换一对中子的散射振幅和没有这种交换的散射振幅相干涉，由于这里有一对费米子相互交换，干涉必定具有负号。另一方面，如果两个 α 粒子的相对能量是如此之低，使得它们保持相当的距离——譬如说由于库仑斥力——那么就不可能有交换任何内部粒子的概率。于是我们可以把 α 粒子当作结构单一的客体而不必去考虑它的内部细节。在这种情形下，只有两种情况对散射振幅有所贡献，在散射过程中要么没有粒子交换，要么4个粒

子都交换。因为 α 粒子中的质子和中子都是费米子，任意一对粒子的交换都要改变散射振幅的符号。只要在 α 粒子之间没有内部粒子的交换，交换两个 α 粒子和交换4对费米子是同样的。对于每一对费米子的交换都要改变符号，其结果是振幅以正号相组合。 α 粒子的行为像玻色子。

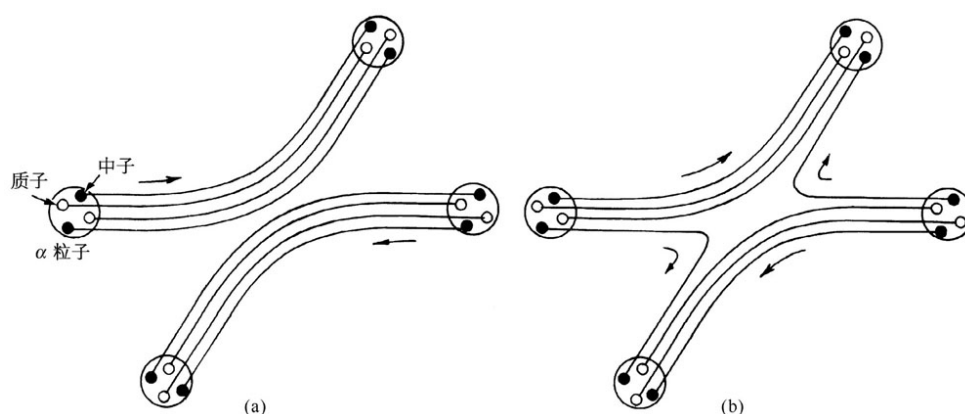


图4-2 两个 α 粒子的散射。在(a)中，两个 α 粒子保持原来的样子不变；在(b)中，碰撞时互相交换一个中子

因此，关于复合粒子的法则是这样的，在复合粒子可以看成单个粒子的情况下，复合粒子的行为像费米子还是像玻色子取决于它们包含的是奇数个费米子还是偶数个费米子。

所有我们提到过的基本费米子——例如电子、质子以及中子等等——具有自旋 $j=1/2$ 。如果将几个这样的费米子放在一起组成一个复合粒子，总的自旋不是整数就是半整数。例如，氦的普通同位素 He^4 ，它的原子核包含两个中子和两个质子，其自旋为零。而 Li^7 的原子核有3个质子和4个中子，具有 $3/2$ 的自旋。我们以后要学习角动量的合成规则，而现在只提一下，每一个具有半整数自旋的复合粒子就像一个费米子，而每一个具有整数自旋的复合粒子就像一个玻色子。

这就提出了一个有趣的问题：为什么具有半整数自旋的粒子是费米子，它们的振幅要以负号相加；而具有整数自旋的粒子是玻色子，它们的振幅以正号相加？很抱歉，对于这个问题我们不能给出一个简单的解释，泡利曾从量子场论和相对论的复杂的论证中作出过一个解释，他指出，量子场论和相对论必须一起应用。但是我们无法在初等的水平上找到一种方法来重复他的论证。看来这是物理学中不多的情形之一，在这些情形中具有能非常简明表述的法则，但是没有人能为它找到简单而又容易的解释。这种解释要深入到相对论量子力学中。这可能意味着我们还没有完全理解其中所包含的基本原理。目前，你们只好把它当作自然界的一个法则接受下来。

§4-2 两个玻色子的状态

现在我们来讨论关于玻色子相加法则的一个有趣的结果。这和有几个粒子出现时的行为有关。我们先考虑两个玻色子从另外两个粒子上散射的情形。我们不去关心散射机构的细节，我们只对被散射粒子发生些什么变化感兴趣。假设情况如图4-3所示。粒子 a 被散射到状态1。所谓状态系指一定的运动方向和能量，或者别的某种给定的条件。粒子 b 被散射到状态2。我们假设这两个状态1和2几乎相同。（事实上我们所要求的是两个粒子被散射到相同的方向或状态的振幅；但是最好我们先考虑一下如果两个状态几乎相同时会发生些什么，然后再解决当两个状态变为完全相同时，会发生些什么。）

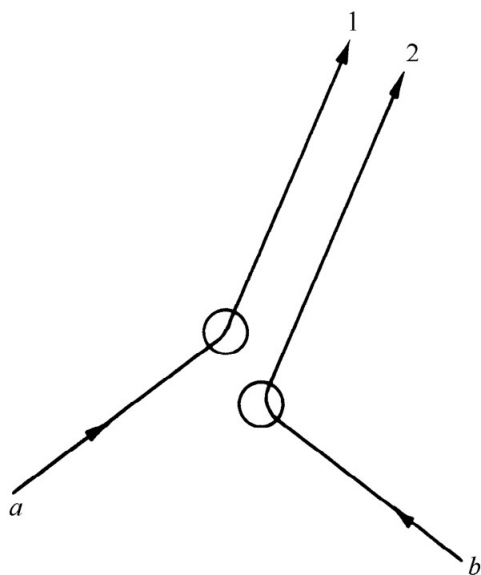


图4-3 一对粒子被散射到靠近的终态

假定我们只有粒子 a ，它具有一定的振幅被散射到方向1，写成 $\langle 1 | a \rangle$ 。而粒子 b 单独存在时，它被散射到方向2具有振幅 $\langle 2 | b \rangle$ 。如果两个粒子不相同，两次散射同时发生的振幅就是乘积

$$\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle .$$

于是发生这一事件的概率为

$$| \langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle |^2 ,$$

它也等于

$$| \langle 1 | a \rangle |^2 | \langle 2 | b \rangle |^2 .$$

在目前的论证中，为了使书写方便，有时我们令

$$\langle 1 | a \rangle = a_1 , \quad \langle 2 | b \rangle = b_2 .$$

于是，双散射的概率是

$$|a_1|^2 |b_2|^2.$$

也可能发生这样的情况：粒子 b 散射到方向1，而粒子 a 散射到方向2。这一过程的振幅是

$$\langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle.$$

这个事件的概率是

$$|\langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle|^2 = |a_2|^2 |b_1|^2.$$

现在，设想我们有一对小型计数器，可以用它们来检测这两个被散射的粒子。它们同时检测到两个粒子的概率 P_2 为

$$P_2 = |a_1|^2 |b_2|^2 + |a_2|^2 |b_1|^2. \quad (4.3)$$

现在让我们假设方向1和2非常靠近，我们期望 a 应随着方向连续地变化，所以当1和2互相靠近时， a_1 和 a_2 也必定彼此趋近。当方向1和2足够接近时，振幅 a_1 和 a_2 将相等。我们可以令 $a_1 = a_2$ ，并把它们都称为 a ，同样令 $b_1 = b_2 = b$ 。于是我们得到

$$P_2 = 2 |a|^2 |b|^2. \quad (4.4)$$

现在假设 a 和 b 是全同的玻色子。那么， a 进入1而 b 进入2的过程和相互交换后 a 进入2而 b 进入1的过程不能区别。假使这样，这两个不同过程的振幅 相互干涉。两个计数器各俘获一个粒子的总 振幅是

$$\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle + \langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle . \quad (4.5)$$

在计数器中得到一对粒子的概率就是这个振幅绝对值的平方，

$$P_2 = | a_1 b_2 + a_2 b_1 |^2 = 4 | a |^2 | b |^2 . \quad (4.6)$$

我们得到这样的结果：两个全同玻色子被散射到同一状态的概率是假设两个粒子不相同时所计算出的概率的两倍。

虽然我们刚才考虑两个粒子在不同的计数器中被观察到，我们在下面就会知道，这并不是实质性的。我们设想沿1和2两个方向的粒子都进入放在某一距离处的一个单独的小型计数器中。我们定义方向1为正对着计数器上面积元 dS_1 的方向，方向2正对着计数器的面积元 dS_2 。（我们设想计数器有一和散射线垂直的面。）现在我们不可能给出粒子将进入某一精确方向或到达空间某一特定点的概率。这种事是办不到的——进入任一精确方向的机会为零。如果我们希望说得非常具体的话，我们必须这样定义我们的振幅，它给出到达计数器上单位面积的概率。假定我们只有粒子 a ，它具有被散射到方向1的某个振幅。我们定义 $\langle 1 | a \rangle = a_1$ 是 a 被散射到在方向1的计数器单位面积上的振幅。换言之， a_1 的标度已选定了——我们说它已被“归一化”，于是粒子 a 被散射到面积元 dS_1 上的概率是

$$| \langle 1 | a \rangle |^2 dS_1 = | a_1 |^2 dS_1 . \quad (4.7)$$

如果我们的计数器的总面积是 ΔS ，我们使 dS_1 遍及这个面积的范围，粒子 a 被散射到计数器中的总概率是：

$$\int_{\Delta S} |a_1|^2 dS_1. \quad (4.8)$$

和以前一样，我们假设计数器足够小，以致振幅 a_1 在计数器的整个面上没有显著的变化，那么 a_1 是一个常数振幅，我们可称它为 a 。于是粒子 a 被散射到计数器中某处的概率是

$$p_a = |a|^2 \Delta S. \quad (4.9)$$

用同样的方法，我们得到粒子 b ——单独存在时——被散射到某面积元 dS_2 的概率是

$$|b_2|^2 dS_2.$$

（我们用 dS_2 代替 dS_1 ，因为下面我们要使 a 和 b 进入不同的方向。）我们再使 b_2 等于常数振幅 b ，于是粒子 b 在探测器中被计数的概率是：

$$p_b = |b|^2 \Delta S. \quad (4.10)$$

现在当两个粒子同时存在时， a 被散射到 dS_1 而 b 被散射到 dS_2 的概率是

$$|a_1 b_2|^2 dS_1 dS_2 = |a|^2 |b|^2 dS_1 dS_2. \quad (4.11)$$

如果我们要求的是 a 和 b 两者都进入计数器的概率，我们将 dS_1 和 dS_2 都在 ΔS 上积分，得到

$$P_2 = |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2. \quad (4.12)$$

附带提一下，我们注意到它正好等于 $p_a \cdot p_b$ ，正如你们假定粒子 a 和 b 互相独立地行动那样。

然而，如果两个粒子是全同的，对于每一对面积元 dS_1 和 dS_2 就有两个不能区分的概率。粒子 a 进入 dS_1 而粒子 b 进入 dS_2 和粒子 a 进入 dS_2 而粒子 b 进入 dS_1 是不能区分的，所以这两个过程的概率将相互干涉。（在上面当我们有两个不同的粒子时——虽然事实上我们并不在乎到底哪一个粒子跑到计数器的哪一部分——原则上我们能够找出哪个粒子进入哪里，所以不存在干涉。而对于全同粒子，即使在原则上我们也不可能断定。）于是，我们必须把两个全同粒子到达 dS_1 和 dS_2 的概率写成

$$|a_1 b_2 + a_2 b_1|^2 dS_1 dS_2. \quad (4.13)$$

然而，现在我们对计数器的面积求积分时，我们必须小心。如果令 dS_1 和 dS_2 都遍及整个面积 ΔS ，我们就把面积上每一部分都计算了两次，因为式 (4.13) 包括了任何一对面积元 dS_1 和 dS_2 ^[1] 可能会遇到的所有情况。如果我们把结果除以2来改正双重计算，我们仍然可以求这个积分。于是，对于全同玻色子，我们得到

$$P_2(\text{玻色}) = \frac{1}{2} \{4 |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2\} = 2 |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2. \quad (4.14)$$

这正好又等于式（4.12）的两倍，该式是我们对可以区别的粒子求得的。

如果我们设想一下，我们知道通道***b***已经将其粒子送入某一特定方向，我们可以说第二个粒子进入同一方向的概率等于我们把它当作独立事件计算时所预期的结果的两倍。玻色子具有这样的特性：如果已有一个粒子处于某一状态，在这同一状态中出现第二个粒子的概率等于第一个粒子不在这个状态时的两倍。这个事实常常用下面的方式来表达：如果已有一个玻色子处于一给定的状态中，再将另一全同玻色子放进这同一状态的振幅等于第一个粒子不在该状态时的 $\sqrt{2}$ 倍。

（从我们所采用的物理的观点来看，这并不是表达这个结果的适当方式，但是如果始终将它当作一个法则来使用，它肯定会给出正确的结果。）

§4-3 n 个玻色子的状态

我们把上一节的结果推广到具有 n 个粒子的情况。设想图4-4所示的情况。我们有 n 个粒子 $a, b, c, \dots$ 它们分别被散射至1, 2, 3, ..., n 等各个方向上。所有这 n 个方向都正对着放在远处的小计数器。和上一节一样，我们把所有的振幅都归一化，各个粒子单独行动时进入计数器上面积元 dS 的概率是：

$$| \langle \rangle |^2 dS.$$

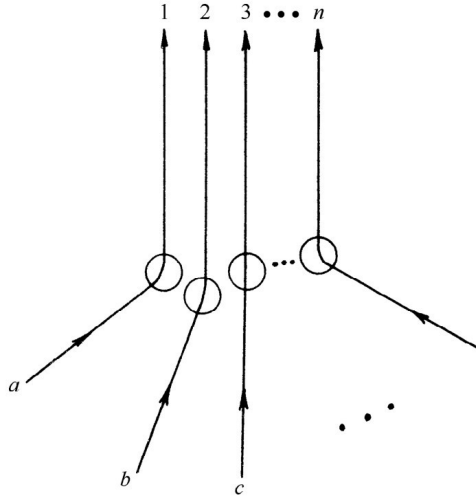


图4-4 n 个粒子被散射到靠近的终态

让我们先假设这些粒子都是可以区别的，于是， n 个粒子在 n 个不同的面积元上都一起被计数的概率是：

$$|a_1 b_2 c_3 \dots|^2 dS_1 dS_2 dS_3 \dots \quad (4.15)$$

我们再假设振幅不依赖于 dS 在计数器（假设它很小）上的位置，并把这些振幅称为 $a, b, c, \dots$ 。概率式 (4.15) 变成：

$$|a|^2 |b|^2 |c|^2 \dots dS_1 dS_2 dS_3 \dots \quad (4.16)$$

将各个 dS 分别在计数器的表面 ΔS 上求积分，我们得到同时对 n 个不同粒子计数的概率 P_n （不同）为

$$P_n \text{（不同）} = |a|^2 |b|^2 |c|^2 \dots (\Delta S)^n. \quad (4.17)$$

这正好等于各个粒子分别进入计数器的概率的乘积。它们各自独立地行动——某一粒子进入计数器的概率与另外还有多少其他粒子也进入计数器无关。

现在假设所有的粒子都是全同的玻色子。对于每一组方向：1，2，3，...有许多不可分辨的可能性。例如，当只有3个粒子时，我们有以下几种可能性：

$a \rightarrow 1$	$a \rightarrow 1$	$a \rightarrow 2$
$b \rightarrow 2$	$b \rightarrow 3$	$b \rightarrow 1$
$c \rightarrow 3$	$c \rightarrow 2$	$c \rightarrow 3$
$a \rightarrow 2$	$a \rightarrow 3$	$a \rightarrow 3$
$b \rightarrow 3$	$b \rightarrow 1$	$b \rightarrow 2$
$c \rightarrow 1$	$c \rightarrow 2$	$c \rightarrow 1$

共有6种不同的组合。 n 个粒子就有 $n!$ 种不同的、但是不可分辨的可能性，因此我们必须把它们的振幅相加。于是， n 个粒子在 n 个面积元上计数的概率就是

$$| a_1 b_2 c_3 \dots + a_1 b_3 c_2 \dots + a_2 b_1 c_3 \dots + a_2 b_3 c_1 \dots + \dots |^2 dS_1 dS_2 dS_3 \dots dS_n. \quad (4.18)$$

我们再次假设所有的方向很靠近，因而我们可以设 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ ，对于 $b, c, \dots$ 也如此，式(4.18)表示的概率则成为：

$$| n! abc \dots |^2 dS_1 dS_2 dS_3 \dots dS_n. \quad (4.19)$$

当我们把各个 dS 对计数器的面积 ΔS 求积分时，每个可能的面积元的乘积都计算了 $n!$ 次，对此我们除以 $n!$ 来加以修正，于是得到

$$P_n(\text{玻色}) = \frac{1}{n!} |n!abc\cdots|^2 (\Delta S)^n$$

或

$$P_n(\text{玻色}) = n! |abc\cdots|^2 (\Delta S)^n. \quad (4.20)$$

把这个结果和式(4.17)比较, 我们看到, 对 n 个玻色子一起计数的概率比假设这些粒子都是可以分辨的情况下所算出的概率大 $n!$ 倍。我们可以把以上结果概括为

$$P_n(\text{玻色}) = n! P_n(\text{不同}). \quad (4.21)$$

于是, 玻色子情况的概率比假设粒子都独立行动所算出的概率大 $n!$ 倍。

下面的问题可使我们更好地看出上述结果的意义: 一个玻色子进入已有 n 个其他玻色子存在的某个特殊状态的概率是什么? 我们把这个新加入的粒子叫做 w 。包括 w 在内, 我们共有 $(n+1)$ 个粒子, 式(4.20)变成

$$P_{n+1}(\text{玻色}) = (n+1)! |abc\dots w|^2 (\Delta S)^{n+1}. \quad (4.22)$$

此式可以写成

$$P_{n+1}(\text{玻色}) = \{ (n+1) |w|^2 \Delta S \} n! |abc\dots|^2 \Delta S^n$$

或

$$P_{n+1}(\text{玻色}) = (n+1) |w|^2 \Delta S P_n(\text{玻色}). \quad (4.23)$$

我们可以下列方式来看待这个结果。 $|w|^2 \Delta S$ 是当没有其他粒子存在时，粒子 w 进入探测器的概率， P_n （玻色）是已经有了另外 n 个玻色子存在时的概率。所以式（4.23）表明，当已经有另外的 n 个全同玻色子存在于某一状态中时，在这同一个状态中再增加一个玻色子的概率增强了 $(n+1)$ 倍。由于其他粒子的存在，使得再加入一个粒子的概率增大了。

§4-4 光子的发射和吸收

在上面的整个讨论中，我们所谈的都是像 α 粒子散射这一类的过程。但这并不是本质问题。我们可以谈论粒子的产生，例如光的发射。发射光时，光子“产生”了。在这样的情况中，我们不需要图4-4中的入射线。我们只要考虑有一些原子发射 n 个光子，如图4-5所示。于是，我们的结果也可以表述为：如果在某一特定的状态中已经有了 n 个光子，原子再发射一个光子到这个特定状态中的概率增大了 $(n+1)$ 倍。

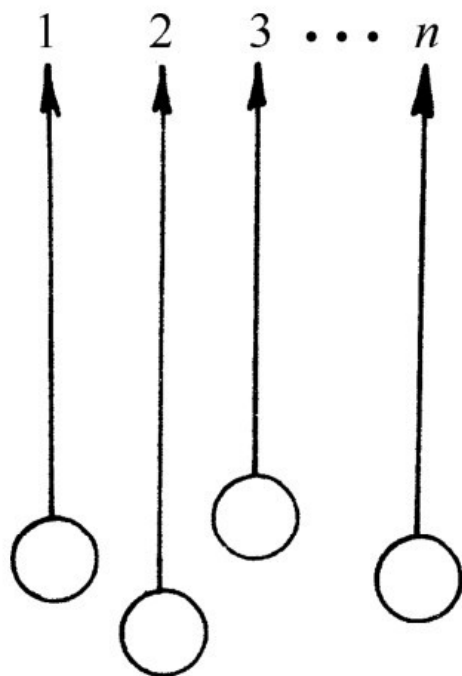


图4-5 处于接近状态中的 n 个光子的产生

人们常常喜欢把这个结果概括为：当已有 n 个光子存在时，再发射一个光子的振幅增大了 $\sqrt{n+1}$ 倍。当然，这只是同一事情的另一种说法而已，因为振幅的平方就是概率。

从任何一个状态 ϕ 转变到另一个状态 χ 的振幅就是从状态 χ 变为状态 ϕ 的振幅的共轭复数：

$$\langle \chi | \phi \rangle = \langle \phi | \chi \rangle^* . \quad (4.24)$$

这在量子力学中是普遍正确的。不久我们将学习这个定律，但目前我们就假定它是正确的。我们可以用它来弄清楚光子是怎样从一个给定的状态被散射或吸收的。一个光子加入某一个已经有 n 个光子存在于其中的状态（譬如说 i ）的振幅是

$$\langle n+1 | n \rangle = \sqrt{n+1} a , \quad (4.25)$$

其中 $a = \langle i | a \rangle$ 是没有其他粒子存在时的振幅。应用式(4.24)，过程反方向进行——从 $(n+1)$ 个光子变为 n 个光子——的振幅是

$$\langle n | n+1 \rangle = \sqrt{n+1} a^*, \quad (4.26)$$

这不是通常所用的叙述方式。人们不喜欢考虑从 $(n+1)$ 到 n 这样的过程，而总喜欢从存在 n 个粒子的状态开始。于是，他们说：当有 n 个光子存在时，从其中吸收掉一个光子的振幅——换言之，从 n 到 $n-1$ ——是

$$\langle n-1 | n \rangle = \sqrt{n} a^*, \quad (4.27)$$

当然这和式(4.26)完全一样。但这样却有要努力记住何时用 $\sqrt{n}$ 或用 $\sqrt{n+1}$ 的麻烦。这里有一个记忆的方法， a 前面的因子总是出现的最大光子数的平方根，不论此数出现在反应前，还是反应后，式(4.25)和(4.26)表明这个定律实际上是对称的——只有当你们把它写成式(4.27)的形式，看上去才不对称。

从这些新的法则可以推导出许多物理的结论；我们说一下其中一个与光的发射有关的结论。假如我们设想这样一种情况，光子被包围在一个盒子里面——你们可以想象一个用反射镜做墙的盒子。现在假定在这个盒子中有 n 个光子，它们都处于同样的状态——同样的频率、同样的传播方向和偏振——所以它们是不可分辨的。此外在盒子中还有一个原子，它可把另一个光子发射到这同一状态中。这个原子发射光子的概率是

$$(n+1) |a|^2, \quad (4.28)$$

它吸收一个光子的概率是

$$n |a|^2, \quad (4.29)$$

其中 $|a|^2$ 是原来没有光子存在时，这个原子发射一个光子的概率。我们已经在第1卷第42章中以稍许不同的方式讨论过这些法则。式 (4.29) 说明原子吸收一个光子并跃迁到较高的能量状态的概率正比于照射到这个原子上的光的强度。但是，正如爱因斯坦首先指出的，原子向下跃迁到较低能量状态的概率包含两个部分，这个概率等于自发跃迁的概率 $|a|^2$ 加上感应跃迁的概率，后者正比于光的强度——即正比于出现的光子数目，即 $n |a|^2$ 。此外，正如爱因斯坦所说的，吸收系数和感应发射系数相等并与自发发射的概率有关。我们这里所学到的是：如果用出现的光子的数目（用它来代替每单位时间通过每单位面积的能量）来量度光的强度，吸收、感应发射以及自发发射的系数都相等。这就是第1卷第42章式 (42.18) 中的爱因斯坦系数 A 和 B 之间关系的实质。

§4-5 黑体光谱

我们要应用关于玻色子的法则再来讨论黑体辐射的光谱（见第1卷第42章）。我们要找出在一个盒子内部，辐射与某些原子处于热平衡状态时，该盒子里面有多少光子。假设对于光的每一种频率 ω ，存在着某一数量 N 的原子，这些原子具有两个能量状态，其能量间隔为 $\Delta E = \hbar \omega$ 。参见图4-6。我们把较低的能量状态叫做“基”态，较高能量的状态叫做“激发”态。令 N_g 和 N_e 分别是基态和激发态上的原子

平均数，那么，当这些原子处于温度为 T 的热平衡状态时，由统计力学，我们有

$$\frac{N_e}{N_g} = e^{-\Delta E/kT} = e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (4.30)$$

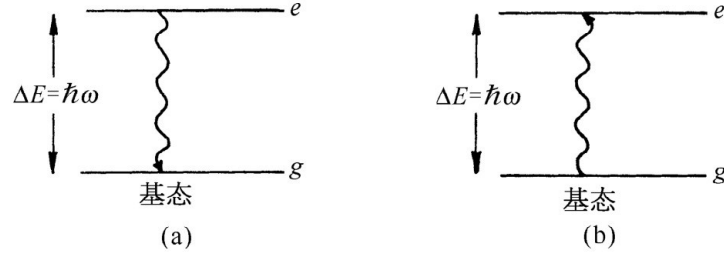


图4-6 频率为 ω 的光子的辐射和吸收

处于基态的每一个原子都可以吸收一个光子并跃迁到激发态，激发态的每一个原子都可以发射一个光子并跃迁到基态。平衡状态下，这两个过程的速率必定相等。这速率正比于事件的概率和其中原子的数目，设 $\bar{n}$ 是处于频率为 ω 的状态中的光子的平均数。那么，从该状态中吸收的吸收率是 $N_g \bar{n} |a|^2$ ，光子发射到这个状态中的发射率是 $N_e (\bar{n} + 1) |a|^2$ 。令这两个速率相等，我们就有

$$N_g \bar{n} = N_e (\bar{n} + 1). \quad (4.31)$$

把此式和式(4.30)结合起来，我们得到

$$\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} = e^{-\hbar\omega/kT}.$$

解出 $\bar{n}$ ，得到

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (4.32)$$

这是在热平衡的空腔中，处于频率为 ω 的状态中光子平均数。因为每一个光子具有能量 $\hbar\omega$ ，在这个状态中光子的总能量是 $\bar{n}\hbar\omega$ ，或

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (4.33)$$

附带提一下，此式和另外一章中的一个式子〔第1卷第41章式(41.15)〕相同。你们还记得，对于任何一种谐振子——例如弹簧上的重物——量子力学能级是以相等的间距 $\hbar\omega$ 均匀地分布的，如图4-7所示。如果我们令第 n 个能级的能量为 $n\hbar\omega$ ，我们发现，这样的振子的平均能量也由式(4.33)表示。然而这个方程在这里是通过计算粒子数对光子导出的，它也得出同样的结果，这是量子力学不可思议的奇迹之一。如果我们从考虑没有相互作用的玻色子的某种状态或条件开始（我们曾经假设光子彼此之间是没有相互作用的），然后设想在这个状态中可以放入或者零个，或者一个，或者两个……直到任意数目 n 个粒子。人们发现，这个系统所有量子力学意义上的行为与谐振子完全一样。所谓谐振子是指一种动力学系统，譬如像弹簧上的重物或者共振腔里的驻波。这就是为什么可以用光子来描绘电磁场的理由。从某种观点来看，我们可以用大量的谐振子这一思想来分析盒子或空腔中的电磁场。根据量子力学把每一种振动模式当作一种谐振子。从另一种观点来看，我们可以对同样的物理过程，按照全同玻色子的概念来进行分析。两种方式所得出的结果总是完全一致。你们无法决定电磁场实际上应当用量子化的谐振子来描写还是用在各个状态中的光子数来说明，可以证明这两种观点在数学上是完全相同的。所以今后我们可以说盒子里处于某一特定状态的光子数目，也可以说和

电磁场某一特定振动模式相联系的能级的数目。它们是描述同一事物的两种不同的方式。对于自由空间中的光子，这也同样正确，它们相当于器壁移至无穷远处的空腔中的振动。

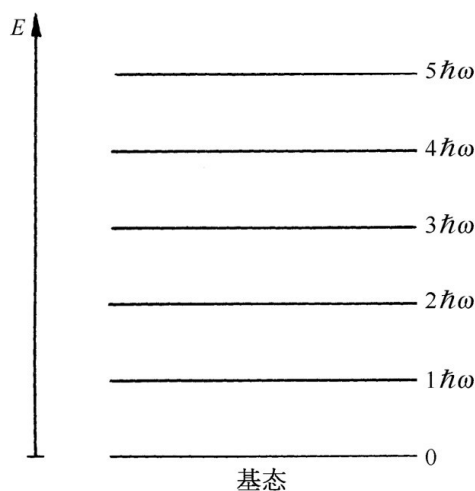


图4-7 谐振子的能级

我们已算出在温度为 T 的盒子里任一特定的模式的平均能量。为得到黑体辐射定律，我们只需再知道一件事，即需要知道在每一种能量状态有多少模式。（我们假设，对于每一种模式，在盒子里——或者在器壁上——都有一些原子，它们具有可能辐射到这个模式的能级，从而每一模式都能达到热平衡。）黑体辐射定律的表达通常是给出：在单位体积内，在微小的频率间隔 ω 到 $\omega + \Delta\omega$ 中的光所携带的能量。所以我们需要知道盒子内部，在频率间隔 $\Delta\omega$ 中有多少个模式。虽然这个问题在量子力学中经常出现，但它纯粹是一个关于驻波的经典问题。

我们只对矩形盒子求解。对于任意形状的盒子，结果都是相同的。但是对于任意情况，计算非常复杂。而且我们只对线度比光的波长大的盒子有兴趣。这样就有亿万个模式。在任意小的频率间隔 $\Delta\omega$ 内也有许多模式。所以我们可以讨论频率 ω 处，任何频率间隔 $\Delta\omega$

中的“平均数”。首先我们讨论在一维情况——就像在一条紧绷着的绳子上的波——中有多少个模式。你们都知道，每一种模式就是一个正弦波，在两个端点处必须趋于零。换言之，整个线的长度必须为整数个半波长，如图4-8所示。我们喜欢用波数： $k=2\pi/\lambda$ 。令 k_j 为第 j 个模式的波数，我们有：

$$k_j = \frac{j\pi}{L}, \quad (4.34)$$

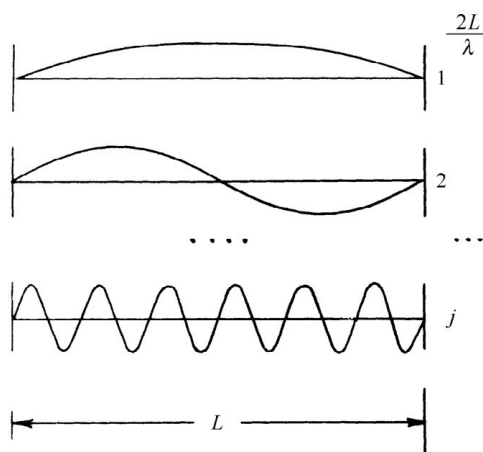


图4-8 一条线上驻波的模式

其中 j 是任意整数。相邻的模式波数间隔 δk 是

$$\delta k = k_{j+1} - k_j = \frac{\pi}{L}.$$

我们假设 kL 如此之大，从而在很小的间隔 Δk 内就有许多模式。令 ΔN 为间隔 Δk 内模式的数目，我们有：

$$\Delta N = \frac{\Delta k}{\delta k} = \frac{L}{\pi} \Delta k. \quad (4.35)$$

现在，在量子力学方面工作的理论物理学家常常喜欢用只有这个数目一半的模式数来表示。他们写作

$$\Delta \mathcal{N} = \frac{L}{2\pi} \Delta k. \quad (4.36)$$

我们来解释一下这是为什么，他们通常喜欢用行波的概念来思考——某些波向右行进（具有正的 k ），某些波向左行进（具有负的 k ）。但是，所谓“模式”是对于驻波而言的。驻波是两列波之和，两列波各自在相反方向上行进。换言之，他们认为每一驻波包含了两个不同的光子“态”。如果人们喜欢用 $\Delta \mathcal{N}$ 来表示给定 k （现在 k 的范围包括从正的到负的数值）的光子态的数目，那么应该取式（4.35） $\Delta \mathcal{N}$ 的一半大小。（现在所有的积分必须从 $k = -\infty$ 积到 $k = +\infty$ ，从而对于任何给定 k 的绝对值算出的状态总数仍然完全正确。）当然，这样并没有很好地描写驻波，但是我们用前后一贯的方法来计算振动模式。

现在我们要把结果推广到三维情况。矩形盒子中的驻波必须沿着每一个轴都有整数个半波长。图4-9所示是其中的二维情况。每个波的方向和频率都用一个波矢 $\mathbf{k}$ 来表示。波矢的 x ， y 和 z 方向的分量必定满足类似于式（4.34）那样的方程。所以我们得到

$$k_x = \frac{j_x \pi}{L_x},$$

$$k_y = \frac{j_y \pi}{L_y},$$

$$k_z = \frac{j_z \pi}{L_z}.$$

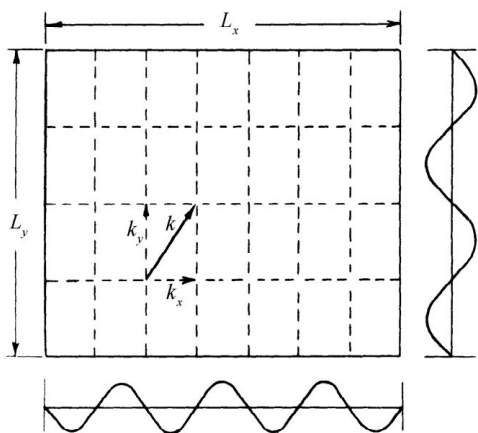


图4-9 二维的驻波模式

和前面一样，具有 k_x 值在间隔 Δk_x 内的模式数为

$$\frac{L_x}{2\pi} \Delta k_x.$$

对于 Δk_y 和 Δk_z 的情况也是一样。令 $\Delta N(\mathbf{k})$ 为波矢 $\mathbf{k}$ 的模式数目，波矢 $\mathbf{k}$ 的 x 分量在 k_x 和 $k_x + \Delta k_x$ 之间，它的 y 分量在 k_y 和 $k_y + \Delta k_y$ 之间，它的 z 分量在 k_z 和 $k_z + \Delta k_z$ 之间。那么

$$\Delta N(\mathbf{k}) = \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (4.37)$$

乘积 $L_x L_y L_z$ 等于盒子的体积。于是我们得到一个极其重要的结果：对于高的频率（波长比盒子的线度小得多），空腔中模式的数目正比于盒子的体积 V 和“ k 空间中的体积” $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ 。这个结果在许多问题中反复地出现，应该将它记住：

$$d\mathcal{N}(\mathbf{k}) = V \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.38)$$

虽然我们还没有证明过，但这个结果不依赖于盒子的形状。

我们现在应用这个结果来求光子的频率范围 $\Delta\omega$ 内的光子模式的数目。我们感兴趣的只是各个模式中的能量——对波的方向不感兴趣，我们想要知道在给定频率范围内模式的数目。真空中 $\mathbf{k}$ 的大小和频率的关系是

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (4.39)$$

所以在频率间隔 $\Delta\omega$ 内，与波矢 $\mathbf{k}$ 相对应的模式就是与大小在 k 到 $k + \Delta k$ 之间的全部模式，它们与方向无关。在 k 到 $k + \Delta k$ 之间的“ k 空间体积”是一球壳，其体积为

$$4\pi k^2 \Delta k.$$

于是模式的数目为

$$\Delta\mathcal{N}(\omega) = \frac{V 4\pi k^2 \Delta k}{(2\pi)^3}. \quad (4.40)$$

然而，由于我们现在感兴趣的是频率，我们应将 $k = \omega / c$ 代入上式，于是得到

$$\Delta\mathcal{N}(\omega) = \frac{V 4\pi \omega^2 \Delta\omega}{(2\pi)^3 c^3}. \quad (4.41)$$

这里还有一个复杂的情况。如果我们讨论的是电磁波的模式，对于任一波矢 $\mathbf{k}$ 可以有两个（互相正交的）偏振。因为这些模式是互相

独立的，我们必须——对于光——把模式的数目加倍。所以我们得到

$$\Delta \mathcal{N}(\omega) = \frac{V \omega^2 \Delta \omega}{\pi^2 c^3} (\text{对于光}). \quad (4.42)$$

我们曾经指出，式（4.33）每一模式（或每一“状态”）的平均能量是

$$\bar{n} \hbar \omega = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}.$$

将此式乘以模式的数目，我们就得到在区间 $\Delta \omega$ 内这些模式的总能量 ΔE ：

$$\Delta E = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \cdot \frac{V \omega^2 \Delta \omega}{\pi^2 c^3}. \quad (4.43)$$

这就是关于黑体辐射频谱的定律，我们在第1卷第41章中已经得到过这一定律。其频率谱画在图4-10中。你们现在看到，这个答案取决于光子是玻色子这一事实，它们具有使所有的粒子都进入同一状态的倾向（因为这样做振幅大）。你们要记住，是普朗克对黑体辐射光谱的研究（从经典物理学看来，这是很神秘的问题），以及他对式（4.43）的发现开创了量子力学整个学科。

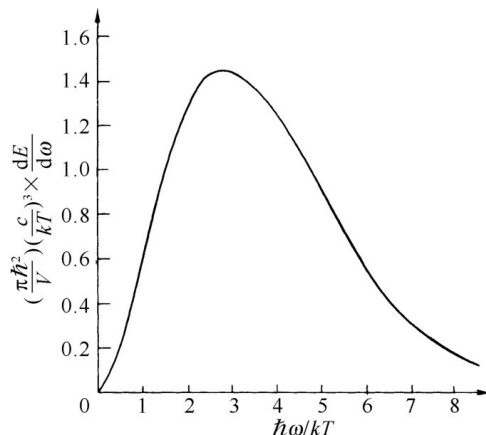


图4-10 处于热平衡的空腔中辐射的频谱，“黑体”光谱

§4-6 液氦

液氦在低温下有许多奇特的性质，遗憾的是我们现在不可能花时间来详细叙述，但它的许多性质起源于氦原子是玻色子这个事实。其中一个性质是，液氦在流动时没有任何黏性阻力。实际上，这就是我们在以前有一章中所讲的理想“干”水——假如速度足够低的话。其原因如下：为使液体具有黏性，就必定有内能损失；必须有某种方法使一部分液体具有与其余部分不同的运动。这就意味着必须有可能把某些原子撞击到不同于另一些原子所占据的状态中去。但是在足够低的温度下，当热运动变得非常小时，所有的原子都企图进入同样的状态中。于是，只要有一部分原子在向前运动，所有的原子都要以同样的方式一起运动。这种运动具有一种刚性，并且很难使它像在互相独立的粒子中所发生的那样分裂为不规则的湍流。所以在玻色子组成的液体中，所有原子有极强的进入同样状态的倾向——这个倾向可以用我们以前求得的因子 $\sqrt{n+1}$ 来表征。（对于一瓶液氦来说， n 当然是一个非常大的数字！）在高温下，这种合作运动不出现，因为这时有足够的热能使不同的原子进入不同的高能态。但是在足够低的温度下，

突然在某一瞬间所有的氦原子都试图进入同一状态中。氦就成为超流体。顺便提一下，这个现象只出现在原子量为4的氦同位素中。对于原子量为3的氦同位素，各个原子都是费米子，其液体是正常的液体。由于超流动性只发生于 He^4 ，这显然是一种量子力学的效应——由于 α 粒子的玻色子性质。

§4-7 不相容原理

费米子的行为完全不同。我们来看一下，如果试图把两个费米子放到同一状态中将会发生些什么。我们回到原先的例子，求两个全同费米子被散射到几乎完全相同的方向上的振幅。粒子 a 进入方向1而粒子 b 进入方向2的振幅是

$$\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle ,$$

两个粒子出射方向互相交换的振幅是

$$\langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle .$$

因为我们讨论的是费米子，这个过程的振幅等于这两个振幅之差：

$$\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle - \langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle . \quad (4.44)$$

我们所说的“方向1”不仅表示粒子的某一个运动方向，还表示其确定的自旋方向。“方向2”和方向1几乎完全相同，并且相当于同样的自旋方向。于是 $\langle 1 | a \rangle$ 和 $\langle 2 | a \rangle$ 近乎相等。（如果出射状态1和2的自旋不相同，这个结果就不一定成立，因为有某些理由可以说明为什么振幅要依赖于自旋方向。）现在如果使方向1和2互相靠近，式（4.44）

中的总振幅就变成零。对于费米子所得出的结果比玻色子简单得多。两个费米子——譬如两个电子——根本不可能进入完全相同的状态。你们永远不会发现两个自旋方向相同的电子在同一个位置上。两个电子不可能具有相同的动量和相同的自旋方向。如果它们在同一位置上或具有同样的运动状态，唯一的可能性是它们必须有相反的自旋。

这有些什么后果呢？有许多十分引人注目的效应，这些效应都归结为一个事实：即两个费米子不可能同时进入同一状态。实际上，几乎物质世界的所有特性都和这个奇妙的事实有关。周期表所显示的丰富多样的元素基本上就是这一法则的结果。

当然，我们无法说出如果这个法则发生了变化，世界将要成为什么样子。因为它是量子力学的整个结构的一个部分，我们不可能说清楚如果关于费米子的法则改变了，还有别的什么东西会改变。不管怎样，让我们试着看一下，假如只有这个法则改变的话，可能会发生些什么。首先，我们可以证明，这样一来所有的原子就会多少有点相同了。我们从氢原子开始吧，它不会受到明显的影响。构成原子核的质子被球对称的电子云所包围，如图4-11（a）所示。正如我们在第2章中所描述的那样，电子被吸向中心，但不确定性原理要求在空间的密集和动量的集中之间有一个平衡。这个平衡意味着必定存在着某一能量和某种弥散状态的电子分布，这种分布决定了氢原子的特征线度。

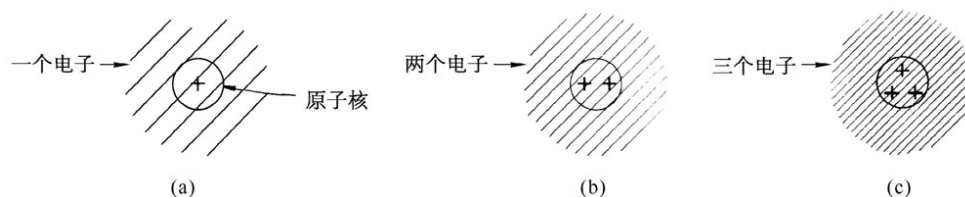


图4-11 假如电子的行为像玻色子，原子看上去可能会是什么样的

现在假定我们有一带两个单位电荷的原子核，譬如氦原子核。这个原子核要吸引两个电子，如果电子是玻色子，它们就会——除了它们之间的排斥作用外——尽可能地一齐挤向原子核。氦原子看上去就会像图4-11（b）所画的那样。同样，锂原子具有3个荷电核子，它的电子分布如图4-11（c）所示。各种原子看上去多少是相同的——一个所有电子都处在原子核附近的小圆球，没有方向性，也并不复杂。

然而，由于电子是费米子，实际情况就大不相同了。对于氢原子来说，情况基本不变。唯一的差别是电子具有自旋，这在图4-12（a）中用一个小箭头表示。然而就氦原子而言，我们不能再把两个电子紧靠在一起。不过且慢，这只在两者的自旋相同时才是正确的。如果两个电子的自旋相反，它们就可以占据同一状态。所以氦原子看上去也没有很大的不同。它看上去像图4-12（b）所画的那样。然而对于锂来说，情况就变得完全不同了。我们可以把第三个电子放在什么地方呢？第三个电子不能再和另外两个电子紧靠在一起了，因为这一状态上的两个自旋方向都已被占据了。（你们记得，一个电子或任何一个自旋为 $1/2$ 的粒子只有两个可能的自旋方向。）第三个电子不能靠近另外两个电子所占据的地方，所以，它只能在远离原子核的另一个状态中占据一个特殊位置，见图4-12（c）。（这只是一种极其粗浅的说法，因为实际上这3个电子都是全同的。由于我们不能真正区别这个电子和那个电子，所以我们的图像只是近似的。）

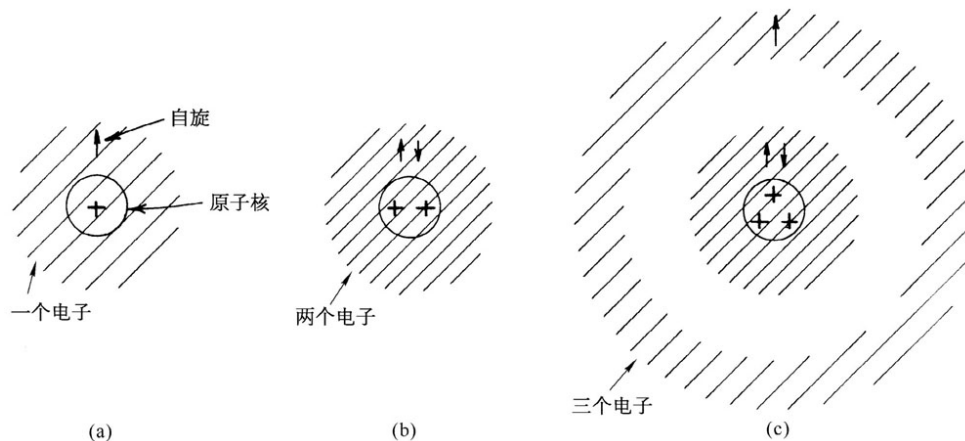


图4-12 真实的费米型的、自旋为 $1/2$ 的电子的原子组态

现在我们可以理解为什么不同的原子具有不同的化学性质。因为锂原子中的第三个电子离中心较远，相对地说对它的束缚比较松。从锂原子中拿走一个电子比从氢原子中拿走一个电子来得容易。（实验得到，使氢电离需要 25 eV ，而使锂电离只要 5 eV 。）这就说明了锂原子的价键。价键的方向性和外层电子的波的图样有关，我们暂时不去讨论它。但是我们已经能够看出所谓不相容原理——不可能在完全相同的状态（包括自旋）中找到两个电子——的重要性。

不相容原理对大尺度物体的稳定性也起着作用。我们以前曾经说物质中各个原子之所以不会坍缩是由于不确定关系，但是这不能解释为什么不能随心所欲地把两个氢原子紧紧挤压在一起——为什么所有的质子不能互相靠得很近，使一大团电子围绕着它们。答案当然是由于没有两个以上的电子——具有相反的自旋——可以大体上处在同一个位置上，氢原子之间必须保持一定的距离。所以，大尺度的物质的稳定性实际上是电子的费米子性质的结果。

当然，如果两个原子的外层电子具有相反方向的自旋，它们就能够彼此接近。实际上化学键就是这样发生的。结果是，如果两个原子之间有一个电子，则这两个原子总共具有最低能量。对两个带正电的

原子核来说，这时受到的是一种指向中间的电子的静电吸引力。只要两个电子的自旋相反，就可将它们放在两个原子核的中间。最强的化学键就是这样产生的。没有比这更强的链联了，因为不相容原理不允许在两个原子之间的空间里存在着两个以上的电子。我们认为氢分子看上去多少有些像图4-13所示的那样。

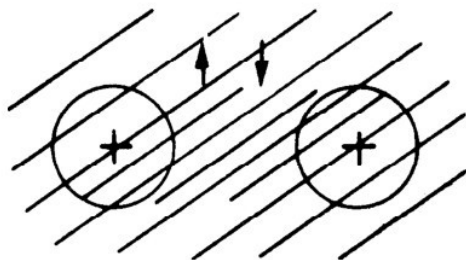


图4-13 氢分子

我们还要讲一个不相容原理的结果。你们记得如果氢原子中的两个电子都靠近原子核，那么它们的自旋必须相反。现在假定我们设法把两个电子的自旋排列在同一个方向上——我们可以设想加上一个极强的磁场使电子的自旋排成同一方向。但是，这样一来，两个电子就不可能占据空间的同一状态，其中一个电子必须占据一个不同的几何位置，如图4-14所示。离原子核较远的那个电子具有较小的结合能。于是整个原子的能量就變得更大得多。换言之，当两个电子的自旋方向相反时，总的吸引力要强得多。

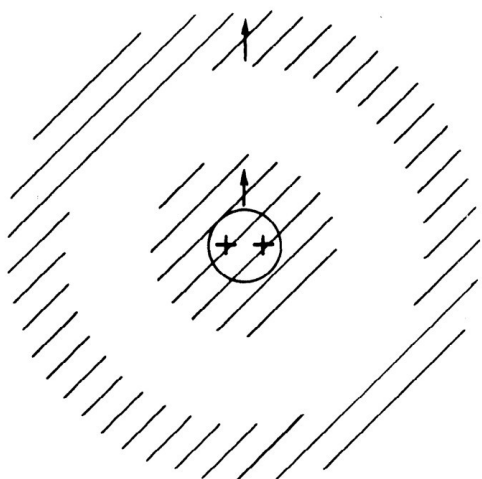


图4-14 一个电子在 高能态的氮

所以，当两个电子接近时，有一个表观上的、巨大的力试图使自旋按彼此相反的方向排列，如果两个电子试图进入同一位置，其自旋就有极其强烈的反向排列倾向。这一试图使两个自旋取向相反的表现上的力比起电子磁矩之间的微弱的力来要强得多。你们记得，在我们讲到铁磁性的时候，曾经有过这样一个不可思议的问题，为什么不同的原子中的电子具有极强的平行排列的倾向。对此虽然还没有定量的解释，但可认为其中所发生的过程是这样的：原子的内层电子和已经变为在整个晶体内自由运动的外层电子因不相容原理而相互作用，这种相互作用使得自由电子的自旋和内层电子的自旋的取向相反。但是只有当所有的内层电子都具有相同的自旋方向时，自由电子和内层电子的自旋才可能相反，如图4-15所示。看来可能是这样的情况：不相容原理的效应通过自由电子间接地起作用，引起了在铁磁体中起作用的强烈的排列力。

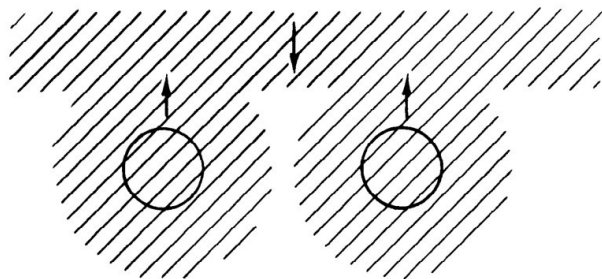


图4-15 在铁磁体晶体中可能的机理：传导电子反平行于不成对的内层电子

我们再讲一个受不相容原理影响的例子。以前曾经讲过，中子和质子之间、质子和质子之间、中子和中子之间的核力都是相同的。为什么一个质子和一个中子可以粘在一起形成一个氘原子核，而不存在只有两个质子或者只有两个中子的原子核呢？事实上，氘原子核大约受到2.2 MeV的能量束缚，然而在一对质子之间却没有相应的束缚以组成原子量为2的氦同位素。这样的核不存在，两个质子的组合不形成束缚态。

这个问题的答案是两个效应的共同结果：第一是由于不相容原理，第二是由于核力对于自旋方向比较敏感这一事实。中子和质子之间的作用力是吸引力，而且这种力当它们的自旋相互平行时比它们的自旋相反时稍微强一些。由于两种力的这一点差别，使得中子和质子的自旋方向互相平行时，正好足以构成氘原子核；当它们的自旋方向相反时，质子和中子间的引力不足以使它们束缚在一起。由于中子和质子的自旋都是 $1/2$ ，而且在同样的方向上，因此氘原子核的自旋为1。然而我们知道，两个自旋互相平行的质子不可能紧挨在一起。如果不是由于不相容原理，两个质子就可以束缚在一起。但是由于自旋方向相同的质子不可能在同一位置存在，因此 He^2 原子核就不存在。两个质子如果其自旋相反就可能聚集在一起，但这样就没有足够的束缚力以形成稳定的原子核，因为自旋相反时的核力太弱了，不足以把一

对核子束缚在一起。自旋相反的中子和质子之间的相互吸引力可以从散射实验中观察到。对两个自旋平行的质子所做的同样的散射实验表明也存在着相应的吸引力。所以不相容原理解释了为什么氦可以存在而 He^2 却不能。

[1] 在式 (4.11) 中, 交换 dS_1 和 dS_2 就得到另一个不同的事件, 所以两个面积元都必须遍及计数器的整个面积。在式 (4.13) 中, 我们把 dS_1 和 dS_2 成对地处理, 并且包括了可能发生的所有情况。如果积分又包含 dS_1 和 dS_2 交换后所发生的情况, 各种情况就计算了两次。

第5章 自旋1

§5-1 用施特恩-格拉赫装置过滤原子

本章我们才真正开始讨论量子力学本身——就是说我们将完全用量子力学方法来描述量子力学现象。我们并不想找出量子力学和经典力学之间的联系，也不为此而感到抱歉。我们要用新的语言来讲述某些新的事物。我们所要描述的特殊问题是自旋1的粒子的所谓角动量量子化。但是要等到后面我们才使用经典力学的像“角动量”之类的术语或其他概念。我们之所以选择这一个特殊的例子是由于它比较简单，虽然它可能并不是最简单的例子。不过，它也还是足够复杂因而可作为一个范例，将它推广后就可以用来描写所有量子力学现象。因此，我们所处理的虽然只是一个特例，但我们提到的所有定律都可直接推广，我们将作出这种推广，从而使你们可看到量子力学描述的一般特性。我们从施特恩-格拉赫实验中一束原子会分裂成三束这个现象开始讨论。

你们记得，如果有一个带有尖端磁极的磁铁所产生的非均匀的磁场，我们使一原子束穿过这个磁场，粒子束就会分裂成好几束——其数目取决于原子的种类和它所处的状态。我们要讨论能分裂成三束的原子，并把这种粒子称作自旋1粒子。你们可以自己讨论五束、七

束、两束等情况——只要把每一个步骤都重复一遍，在得到三项的地方，就得到了五项、七项等等。

想象这样的装置，其简图画在图5-1中。一束原子（或者任何种类的粒子）经过狭缝后成为准直射束，然后通过非均匀磁场，我们设此射束沿 y 方向运动，磁场和磁场梯度都沿 z 方向。从侧面观察，我们将看到射束竖直地分裂成为三束，如图所示。在磁铁的输出端可以放置一个小小的计数器，用来计算三射束中的任意一束的到达率。或者我们也可以挡住两束射束而只让第三束通过。

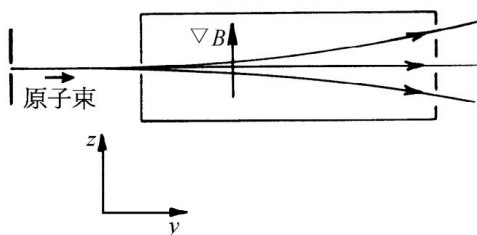


图5-1 在施特恩-格拉赫实验中，自旋为1的原子分裂成三束

假设我们挡住下面两个射束，只让最上面的那一束通过并使它进入第二台同样的施特恩-格拉赫装置，如图5-2所示。这时将发生什么情况呢？在第二台装置中不再出现三射束，而只有最上面的一束^[1]。如果你认为第二台装置只是第一台装置的延伸，这个结果将正是你所预期的。那些被向上推的原子在第二台装置中继续被向上推。

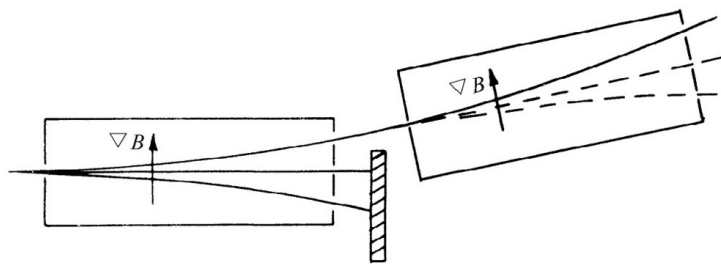


图5-2 三束射束中的一束被送入第二台同样的装置

于是你们看到，第一台装置产生了一束“纯化了的”原子——在特殊的非均匀磁场中向上偏转的原子。进入第一台施特恩-格拉赫装置的原子有三“种”，这三种原子采取不同的轨道。留下其中的一种，其他两种都被滤掉后，我们获得了这样一束射束，它以后在同样的装置中的行为是确定的并且是可以预言的。我们称它为滤过射束，或者极化射束，或者已知其中所有原子都处于某一确定状态的射束。

在下面的讨论中，如果我们考虑经过某些修改的施特恩-格拉赫型装置将更为方便。虽然这种装置初看上去比较复杂，但它会使所有论证比较简单。不管怎样，既然这只是“理想实验”，把仪器弄得复杂一点并不需要花费什么东西。（附带提一下，从来没有人做过我们这种方式描写的每一个实验，但是我们从量子力学定理可以知道必定会发生些什么事，当然这些定理是建立在其他类似的实验基础上的。这些其他的实验在初学时比较难以理解，所以我们要叙述一些理想的——但却是可能的——实验。）

图5-3（a）是我们想要用的、“改装过的施特恩-格拉赫仪器”的简图，它包括一串三个高磁场强度梯度的磁铁，第一个（左边的）就是通常的施特恩-格拉赫磁铁，它把一束入射的自旋1的粒子射束分开成三束。第二个磁铁和第一个磁铁有同样的截面，但是有第一个的两倍长，并且它的磁场的极性和第一个磁铁的磁场极性相反。第二个磁铁把原子磁体推向相反的方向，使其路线向轴线弯曲，如图5-3（b）中的轨迹所示。第三个磁铁和第一个完全一样，它使三束射束重新聚合在一起。从沿着轴线上的出射孔射出去。最后，我们想象在小孔A的前面有某种机构，它能使原子从静止开始运动，而在出射孔B的后面有一个减速机构，它使原子在B处回到静止状态。虽然这些并不是必不可少的，但是这意味着在分析过程中我们可以不必考虑任何像原子

射出等等这样的一些运动效应，而把注意力集中于只和自旋有关的现象上。“改进”的装置的全部目的仅仅在于使所有的粒子都来到同一地点而且速度为零。

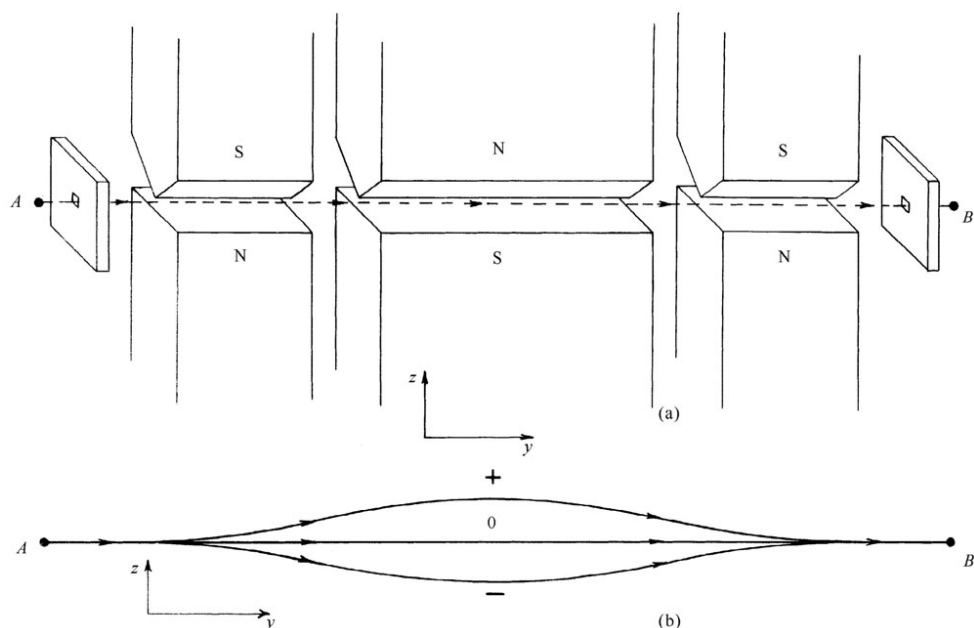


图5-3 (a) 施特恩-格拉赫装置的一个改装设想；(b) 自旋1的原子的路径

现在如果我们要做一个如图5-2所示的实验，我们可以在装置的中央放上一块挡板以挡住射束中的两束从而获得一束滤过射束，如图5-4所示。如果我们使这些极化原子穿过第二台同样的装置，所有原子都将采取上面的一条路线。这可以将同样的挡板放在第二个S过滤器中各射束的通道上，并观察粒子是否通过来证明。

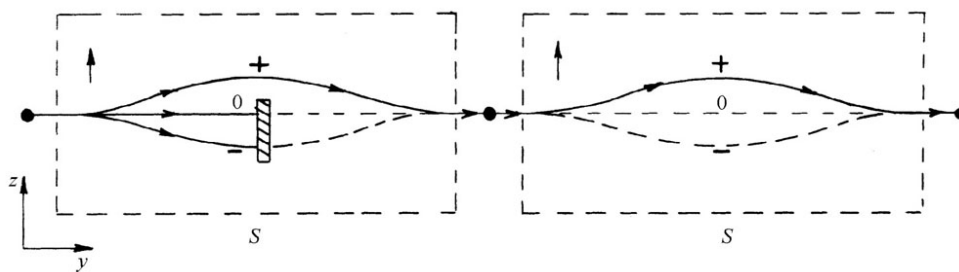


图5-4 “改进的”施特恩-格拉赫装置作为一个过滤器

假设我们把第一台装置称作 S 。（我们将要考虑各种可能的组合，为使条理清楚需对各台装置加上标记。）我们说在 S 中采取上面一条路线的原子是处在“相对于 S 为正的状态”中，采取中间一条路线的原子是处于“相对于 S 为零的状态”中，采取下面一条路线的原子是处在“相对于 S 为负的状态”之中。（用较为常用的语言，我们说角动量的 z 分量是 $+1\hbar$ ， 0 和 $-1\hbar$ ，但是我们现在不用这种术语。）在图5-4中，第二台装置的取向和第一台相同，所以经第一台装置滤过的原子进入后都将走上面的那条路线。或者如果我们挡住第一台装置中上面的和下面的射束，而只让零态原子通过，所有滤过原子都将通过第二台装置中间的那条路线。如果在第一台装置中，除了最低的那一束射束外，其余两束都被挡住，于是在第二台装置中只有下面的一束射束。我们可以说，在上述各种情况中，第一台装置产生了一束相对于 S 而言（ $+$ ， 0 或 $-$ ）处于纯粹状态中的滤过射束，我们可以使射束通过第二台同样的装置以检验其中原子所处的状态。

我们可以这样安排第二台装置，使它只让某种特殊状态的原子通过——就像第一台装置那样，在其中放上挡板——那么我们只要看一看是否有什么东西从远端出来，就可以检验出入射射束的状态。举例说，如果我们挡住第二台装置中下面的两条路线，结果百分之百的原子都能通过，但如果我们挡住上面的路线，那么一个原子也通不过。

为使讨论容易起见，我们发明一种速记符号来表示改进的施特恩-格拉赫装置。我们用下面的符号

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad (5.1)$$

代表一台完整的装置。（这并不是你们通常所看到的在量子力学中用的符号，它是我们为这一章的方便而发明的，它只是图5-3中的装置的速写符号。）因为下面我们想要同时使用好几台装置，这些装置有不同的取向，我们就在每一个符号下面写上一个字母以资识别。所以式（5.1）中的符号代表装置S。当我们挡住其中一束或几束粒子时，我们就用一条垂直的杠杠来表示哪一束粒子被挡住了，如：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \text{S} \quad (5.2)$$

图5-5表示我们将要使用的各种可能的组合。

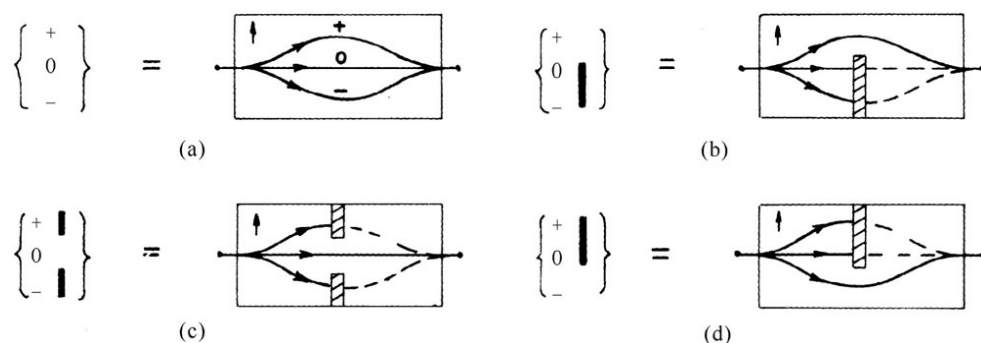


图5-5 施特恩-格拉赫过滤器的专用速记符号

如果我们接连放置两个过滤器（如图5-4所示），我们就将两个符号紧接在一起，像这样：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \text{S} \quad \text{S} \quad (5.3)$$

对于这样的装置，通过第一台的各种粒子也都能通过第二台。实际上，即使我们挡住第二台装置中的“零”和“负”通道也没什么关系，从而我们有

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}, \quad (5.4)$$

$S \qquad S$

我们仍旧得到穿过第二台装置的透射粒子为百分之百。另一方面，如果我们有

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}, \quad (5.5)$$

$S \qquad S$

那么远端连一个原子都不会出来。同样，

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

$S \qquad S$

什么都不出来。另外，

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

$S \qquad S$

等效于

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \\ S$$

现在我们要用量子力学来描写这些实验。如果原子通过图5-5 (b) 的装置，我们说该原子处在 $(+S)$ 态中，如果原子通过 (c)，就处在 $(0S)$ 态中，如果通过 (d)，就处在 $(-S)$ 态 [\[2\]](#)。我们令 $\langle b | a \rangle$ 是处于状态 a 的原子通过装置后状态变为 b 的振幅。我们也可以说： $\langle b | a \rangle$ 是在 状态 a 中的原子 进入状态 b 的振幅。实验 (5.4) 给出：

$$\langle +S | +S \rangle = 1,$$

而式 (5.5) 给出：

$$\langle -S | +S \rangle = 0.$$

同样，式 (5.6) 的结果是：

$$\langle +S | -S \rangle = 0,$$

式 (5.7) 的结果是：

$$\langle -S | -S \rangle = 1.$$

只要我们处理的是“纯粹的”状态——即我们只打开一条通道——就有9个这样的振幅，我们可以把它们列在一张表格里：

	从 +S	0S	-S	
到 +S	1	0	0	(5.8)
0S	0	1	0	
-S	0	0	1	

这9个数字的排列——叫做矩阵——概括了我们以上所述的现象。

§5-2 过滤原子的实验

现在讨论一个重要的问题：如果使第二台装置倾侧一个角度，因而其场的轴线不再和第一台场的轴线相平行，这将会发生些什么现象呢？第二台装置不仅可以倾侧，而且还可以指向另一方向——例如可以使射束相对于原来的方向转过 90° 。为方便起见，我们先考虑一种安排，其中第二个施特恩-格拉赫实验装置绕 y 轴转过一个角度 α ，如图5-6所示。我们称第二台装置为 T ，假定我们现在做下面的实验：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\},$$

$S \qquad T$

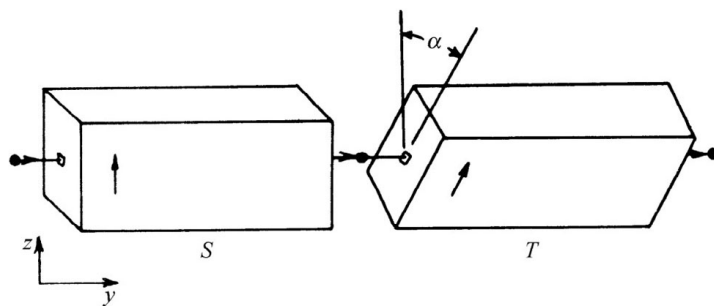


图5-6 两个串联的施特恩-格拉赫型的过滤器，第二台相对第一台倾侧一角度 α

或者做这样的实验：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \cdot$$

$S \qquad T$

在这些情况下，从远端出来的是些什么呢？

答案如下：假定原子相对于 S 处在一个确定的状态中，它们对于 T 就不是处在这一状态中—— $(+S)$ 态并不就是 $(+T)$ 态。然而，发现原子在 $(+T)$ 态——或者 $(0T)$ 态，或者 $(-T)$ 态——都有一定的振幅。

换言之，尽管我们像已经做过的那样仔细地查明了所有的原子都处在确定状态，但实际情况却是当原子通过一台转过一定角度的装置时，它不得不“重新取向”——不要忘记，这个“重新取向”是凭运气的。我们可以使一次只有一个粒子通过，于是我们只能提出这样的问题：它通过的概率是什么？通过 S 的原子有些将进入 $(+T)$ 态，有些将进入 $(0T)$ 态，还有一些将进入 $(-T)$ 态——都各有各的可能性。这种可能性可以由复数振幅绝对值的平方求得，我们需要的是表示这种振幅的一些数学方法或量子力学描述。我们所需要知道的是像

$$\langle -T \mid +S \rangle$$

之类的各种量，它表示原来在 $(+S)$ 态的原子进入 $(-T)$ 态的振幅（除非 T 和 S 平行排列否则这个振幅不等于零）。还有另一些振幅，如

$$\langle +T \mid 0S \rangle, \text{ 或 } \langle 0T \mid -S \rangle, \text{ 等等.}$$

事实上有9个这样的振幅——另一个矩阵——粒子的理论应当告诉我们怎样计算它们。正如 $F=ma$ 告诉我们怎样计算一个经典粒子在任何情况下的运动状态一样，量子力学定律使我们可以决定粒子通过某个特定装置的振幅。于是，中心问题是要能够——对于任意给定的倾角 α ，实际上就是对于无论什么取向——求出9个振幅：

$$\begin{aligned} &\langle +T \mid +S \rangle, \quad \langle +T \mid 0S \rangle, \quad \langle +T \mid -S \rangle, \\ &\langle 0T \mid +S \rangle, \quad \langle 0T \mid 0S \rangle, \quad \langle 0T \mid -S \rangle, \quad (5.9) \\ &\langle -T \mid +S \rangle, \quad \langle -T \mid 0S \rangle, \quad \langle -T \mid -S \rangle. \end{aligned}$$

我们已能得出这些振幅之间的一些关系。第一，按照我们的定义，绝对值的平方

$$| \langle +T \mid +S \rangle |^2$$

是 $(+S)$ 态的原子进入 $(+T)$ 态的概率。我们经常发现把这个平方数写成下列等效形式更为方便：

$$\langle +T \mid +S \rangle \langle +T \mid +S \rangle^*.$$

用同样的记号，数值

$$\langle 0T \mid +S \rangle \langle 0T \mid +S \rangle^*$$

是在 $(+S)$ 态中的原子进入 $(0T)$ 态的概率，以及

$$\langle -T \mid +S \rangle \langle -T \mid +S \rangle^*$$

是原子进入 $(-T)$ 态的概率。但是我们的装置做成这样，凡是进入 T 装置的每一个原子一定在 T 装置的3个状态中的某一个状态中被发现——对于给定的这种原子没有别的地方可去，所以我们刚才写的3个概率的总和必定等于百分之百。我们得到下面的关系式：

$$\langle +T | +S \rangle \langle +T | +S \rangle^* + \langle 0T | +S \rangle \langle 0T | +S \rangle^* + \langle -T | +S \rangle \langle -T | +S \rangle^* = 1. \quad (5.10)$$

当然，如果从 $(0S)$ 或 $(-S)$ 出发，我们可以得到另外两个类似的方程。这些都是我们能够很容易得到的方程，下面我们将继续讨论另一些普遍的问题。

§5-3 串联施特恩-格拉赫过滤器

这是一个有趣的问题：假设原子经过过滤成为 $(+S)$ 态，然后将这些原子送入第二个过滤器，使之成为 $(0T)$ 态，然后再通过另一个 $+S$ 过滤器。（我们称这最后一个过滤器为 S' ，这样我们就可把它和第一个 S 过滤器相区别。）原子是否还记得它们曾经处在 $(+S)$ 态中呢？换句话说就是我们做下面的实验：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

$S \qquad T \qquad S'$

我们想要知道是否所有通过 T 的原子也都通过 S' 。它们并不是如此，它们一经被 T 过滤后，就丝毫不记得在它们进入 T 以前曾经处在 $(+S)$ 态中。注意，(5.11) 中的第二台 S 装置的取向和第一台 S 装置的取

向完全一样，所以它仍旧是 S 型过滤器。被 S' 过滤后的状态当然也是 $(+S)$ ， $(0S)$ 和 $(-S)$ 。

这里的要点是，假如 T 过滤器只能通过一束原子，通过第二台 S 过滤器的原子占进入这一台 S 过滤器原子总数的比例只取决于 T 过滤器，而与在 T 前面是些什么完全无关。相同的一些原子曾被 S 过滤器分类这个事实对它们被 T 过滤器再一次分类成为纯粹射束后的行为丝毫没有影响。它们此后进入不同状态的概率与进入 T 仪器之前的经历完全无关。

作为一个例子，我们把实验（5.11）和下面的实验相比较：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right|, \quad (5.12)$$

$S \qquad T \qquad S'$

其中只有第一个 S 改变了。设（ S 和 T 之间的）角度 α 的大小正好使得（5.11）实验中通过 T 的原子有三分之一也能通过 S' 。在实验（5.12）中，虽然一般说来通过 T 的原子数有所不同，但其中仍然有同样的一部分——三分之一——将通过 S' 。

事实上，从以前已学过的东西我们就可证明，从 T 出来并且通过任一特定 S' 的原子的比例只取决于 T 和 S' 而与在这以前所发生的任何事情无关。我们来把实验（5.12）和

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \quad (5.13)$$

$S \qquad T \qquad S'$

比较一下。在（5.12）的实验中，原子从 S 出来并且也能通过 T 和 S' 两者的振幅是：

$$\langle +S | 0T \rangle \quad \langle 0T | 0S \rangle .$$

相应的概率是：

$$| \langle +S | 0T \rangle \quad \langle 0T | 0S \rangle |^2 = | \langle +S | 0T \rangle |^2 | \langle 0T | 0S \rangle |^2 .$$

实验（5.13）的概率是：

$$| \langle 0S | 0T \rangle \quad \langle 0T | 0S \rangle |^2 = | \langle 0S | 0T \rangle |^2 | \langle 0T | 0S \rangle |^2 .$$

它们的比例是：

$$\frac{| \langle 0S | 0T \rangle |^2}{| \langle +S | 0T \rangle |^2} .$$

它只取决于 T 和 S' ，而与 S 所选择的射束是（ $+S$ ）还是（ $0S$ ）或是（ $-S$ ）毫无关系。（绝对数随通过 T 的原子数目多少而一起增减。）当然，如果我们比较进入 S' 的正的或负的状态的概率，或者求进入零或负的状态的概率的比值，我们会得到同样的结果。

事实上，由于这些比值只取决于被允许通过 T 的是哪一束射束而与第一台 S 过滤器所作的选择无关，显然，甚至最后的装置不是 S 过滤器我们也会得到同样的结果。如果我们所用的第三台装置——我们现在称它为 R ——相对于 T 转过一个任意的角度，我们将会发现，像 |

$\langle 0R \mid 0T \rangle \mid^2 / \mid \langle +R \mid 0T \rangle \mid^2$ 这样的比例不依赖于第一台过滤器 S 中通过的是哪一束射线。

§5-4 基础态

以上的结果说明了量子力学的一条基本原理：任何原子体系都可以通过过滤将其分解为某一组所谓的基础态，在任一给定的基础态中，原子未来的行为只依赖于基础态的性质——而与其以前的任何历史无关^[3]。当然，基础态取决于所采用的过滤器，例如 $(+T)$ ， $(0T)$ 和 $(-T)$ 这3个状态是一组基础态， $(+S)$ ， $(0S)$ 和 $(-S)$ 3个状态是另一组基础态。完全可以有许多种可能性，每一种都和其他的一样合适。

当我们说正在考虑的是的确能产生“纯粹”射束的优良过滤器时，我们须加小心。如果我们的施特恩-格拉赫装置不能把3束射束很好地分开，那么我们就不能用挡板把它们不含糊地分开，这样我们就不能完全地分出各基础态。通过观察射束在另一个同类的过滤器中是否再进一步分裂，我们就能够确定是否得到了纯粹的基础态。例如，假设我们得到的射束是纯粹的 $(+T)$ 态，那么所有原子都会通过：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \Bigg|_T,$$

而没有原子能通过

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\},$$

T

也不能通过

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}.$$

T

我们对基础态的陈述意味着射束有可能被过滤成某种纯粹的状态，以致用同样的仪器不可能再有进一步的过滤。

还必须指出，我们所说的只对颇为理想的情况才严格地正确。在任何实际的施特恩-格拉赫装置中，我们必须考虑狭缝的衍射，这会使某些原子进入对应于别的角度的状态，或者考虑射束中是否包含不同的内部激发状态的原子，等等。我们已把情况理想化了，因此所谈的只是在磁场中分裂的状态，对于与位置、动量、内部激发等有关的事情我们都忽略了。一般说来，我们还必须考虑按照这些性质分类的基础态。但是，为了保持概念简单，我们只考虑上面所说的包含三个状态的基础态组，这对于理想情况的严格处理已足够了，在这理想情况中，原子通过仪器时不会被破坏，也不会受到严重干扰，并且离开装置后就停止下来。

你们会注意到，我们开始理想实验时总是用一台只打开一条通道的过滤器，以使我们从某一确定的基础态出发。之所以这样做是因为从炉子里出来的原子具有各种状态。这些状态是由炉子中偶然发生的过程随意决定的。（它给出所谓“非极化”射束。）这种无规性包含了

“经典”型的概率——类似于抛掷硬币——而与我们现在所讨论的量子力学概率不同。处理非极化的射束会使我们陷入更为复杂的情况，我们最好是避开它，一直到我们了解了极化射束的行为以后。所以现在不去考虑如果第一台装置可以让一束以上的射束通过时会发生些什么。（在本章的末了会告诉你们怎样处理这类情况。）

我们现在回过头来看一看，当从一台过滤器的一个基础态变为另一台不同的过滤器的一个基础态时，会发生些什么？假如我们还是从

$$\begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S & T \end{array}$$

出发。从 T 出射的原子是处于基础态（ $0T$ ），这些原子已忘记了它们曾经处于（ $+S$ ）态中。有人会说，原子被 T 过滤时，“失去”关于以前状态（ $+S$ ）的信息，因为当我们在装置 T 中把原子分解成三束时，我们“扰乱了”它们。但这是不正确的。关于过去的信息并不是由于将原子分解成三束而失去的，而是由于放进去的挡板——这一点我们从下面的一组实验可以看出。

我们从 $+S$ 过滤器出发，并将从这个过滤器出射的原子数记作 N 。如果在它的后面接着放置一个 $0T$ 过滤器，从这后一过滤器出射的原子数目是原来的原子数的一部分，令其为 αN 。如果我们再放上一个 $+S$ 过滤器，只有这些原子中的一部分 β 可以从远端出射。我们可用下列方式来表示这一过程：

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{\alpha N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{\beta \alpha N} . \\
 S \qquad \qquad T \qquad \qquad S'
 \end{array} \quad (5.14)$$

如果第三台装置 S' 选择另一个不同的状态，譬如说（ $0S$ ）态，出射原子的比例就不同了，譬如这个比数是 γ 。[\[4\]](#)我们有：

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{\alpha N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{\gamma \alpha N} . \\
 S \qquad \qquad T \qquad \qquad S'
 \end{array} \quad (5.15)$$

现在假定我们重复这两个实验，不过把 T 的所有挡板都去掉。于是我们得到引人注意的结果如下：

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} , \\
 S \qquad \qquad T \qquad \qquad S'
 \end{array} \quad (5.16)$$

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \xrightarrow{0} . \\
 S \qquad \qquad T \qquad \qquad S'
 \end{array} \quad (5.17)$$

在第一种情况下，所有的原子都能通过 S' ，可是在第二种情况下，一个原子也没有通过！这是量子力学的主要定律之一。自然界按照这种方式行动并不是不证自明的，但是从我们的理想实验所得到的结果就是从无数实验中观察到的量子力学行为。

§5-5 干涉的振幅

从实验（5.15）变为实验（5.17）——打开更多的通道——通过的原子怎么反而更少了呢？这是量子力学的一个很老而又深奥的问题——振幅的干涉。它和我们在最初的电子双缝干涉实验中所观察到的现象属于同一类。在那里，我们曾经看到：到达某些地点的电子在两个狭缝都打开时可以比只打开一个狭缝时少。在定量上是按下述方式处理的，我们可以把原子通过（5.17）装置中 T 和 S' 的振幅写成三个振幅之和，每一个振幅相当于 T 中的一束射束，其总和等于零：

$$\langle 0S | +T \rangle \langle +T | +S \rangle + \langle 0S | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle + \langle 0S | -T \rangle \langle -T | +S \rangle = 0. \quad (5.18)$$

这三个振幅没有一个等于零——例如，第二个振幅的绝对值的平方等于 $\gamma\alpha$ ，见实验（5.15）——可是三项的总和为零。如果把 S' 安装成选择（ $-S$ ）态，我们会得到同样的结果。然而，在（5.16）的装置中，答案就不同了。如果令 a 为通过 T 和 S' 的振幅，则在此情况下，我们有[5]：

$$a = \langle +S | +T \rangle \langle +T | +S \rangle + \langle +S | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle + \langle +S | -T \rangle \langle -T | +S \rangle = 1. \quad (5.19)$$

在实验（5.16）中，一射束被分解又被重新组合。打碎的蛋又复原了。关于原来（ $+S$ ）态的信息仍被保留下来——就像 T 仪器完全不存在一样。无论把什么接在“敞开的” T 装置后面都是这个样子。我们可以在它后面接一个 R 过滤器——转过其他角度的过滤器——或者其他任何东西，答案总是与原子从第一台 S 过滤器直接过来一样。

这是一个重要的原理：一个挡板敞开的 T 过滤器——或者任何一种过滤器——没有引起任何改变。我们还要附加一个条件。敞开的过

滤器不仅能够让3束射束都通过，而且对于3束射束不产生不相等的扰动。例如，不能使一束射束近旁有很强的电场而在另一束附近却没有。理由是：即使这个额外的扰动仍旧让所有的原子都通过过滤器，但它可以改变某些振幅的相位，那么干涉将发生变化，式（5.18）和（5.19）中的振幅也会不同。我们始终假设没有这类额外的扰动。

让我们用改进的符号把式（5.18）和（5.19）重写一下。用 i 代表3个状态（ $+T$ ）、（ $0T$ ）和（ $-T$ ）中的任一个，于是方程式就可以写成：

$$\sum_{\text{所有 } i} \langle 0S | i \rangle \langle i | +S \rangle = 0 \quad (5.20)$$

以及

$$\sum_{\text{所有 } i} \langle +S | i \rangle \langle i | +S \rangle = 1. \quad (5.21)$$

同样地，对于用完全任意的过滤器 R 代替 S' 的实验，我们有：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \cdot \quad (5.22)$$

$S \qquad T \qquad R$

其结果总是和 T 仪器被省去时一样，只有

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \cdot$$

$S \qquad R$

或者，用数学公式表示，

$$\sum_{\text{所有 } i} \langle +R | i \rangle \langle i | +S \rangle = \langle +R | +S \rangle. \quad (5.23)$$

这是一个基本定律，并且只要*i* 代表任何过滤器的3个基础态，它便是普遍正确的。

你们要注意，在实验（5.22）中，*S* 和 *R* 与 *T* 并没有特殊的关系。而且，不论它们选择的是什么态，论证都是同样的。为了把这个方程写成普遍的形式，不必涉及*S* 和 *R* 所选择的特定的状态，我们称 ϕ （“phi”）为第一个过滤器所准备的状态（在我们特定的例子中是+*S* 态）， χ （“khi”）是最后一个过滤器所检验的状态（在我们的例子中是+*R* ）。于是我们可把基本定律式（5.23）用下面的形式来表述：

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\text{所有 } i} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle, \quad (5.24)$$

其中*i* 遍及于某一特定过滤器的3个基础态。

我们要再次强调基础态的意义。它们像可以用我们的施特恩-格拉赫装置的任何一台来选择的3个状态那样。基础态的一个条件是：如果有了一个基础态，那么未来就不取决于过去。另一个条件是，假如有一组完全的基础态，式（5.24）对于任何一组初态 ϕ 和末态 χ 都是正确的。然而，基础态组并不是唯一的。我们是从考虑对于特定的装置 *T* 的基础态开始的。如果考虑对于*S* 或对于*R* 或其他 [6] 装置的另一组基础态也同样有效。我们通常说“在某个表象中的”基础态。

在任一特定表象中的一组基础态的另一个条件是：它们都是完全不相同的。这意思是说：如果原子在（+*T*）态它就不会有进入（0*T*

）或 $(-T)$ 态的振幅。如果我们用 i 和 j 来代表特定的一组基础态中的两个基础态，当 i 和 j 不相等时从 (5.8) 式有关的讨论中可以得到的普遍规律是：

$$\langle j | i \rangle = 0.$$

当然，我们知道：

$$\langle i | i \rangle = 1.$$

通常将这两个方程写成：

$$\langle j | i \rangle = \delta_{ji}, \quad (5.25)$$

其中 δ_{ji} (“克罗内克符号”) 是一个符号，当 $i \neq j$ 时，它定义为零，当 $i = j$ 时则定义为1。

式 (5.25) 并非与我们所讲过的其他的定律相独立。我们现在对于寻找这样一个数学问题，即寻找可以把所有的定律作为其推论的最少的一组独立的公理，并没有特殊的兴趣^[7]。只要我们有一组完全的无明显矛盾的基础态，我们就感到满意了。然而我们可证明：式 (5.25) 和 (5.24) 不是互相独立的。我们令式 (5.24) 的 ϕ 表示与 i 同一组基础态中的某一个基础态，譬如说第 j 个基础态，那么我们就得到：

$$\langle \chi | j \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | j \rangle.$$

但是式 (5.25) 告诉我们，除非 $i = j$ ，否则 $\langle i | j \rangle$ 等于零。所以求和变成只有 $\langle \chi | j \rangle$ 一项，于是我们得到一个恒等式，这就证明了两个

定律不是互相独立的。

我们可看出，如果式（5.10）和（5.24）都是正确的话，振幅之间必定还有另外一个关系。式（5.10）为

$$\langle +T | +S \rangle \langle +T | +S \rangle^* + \langle 0T | +S \rangle \langle 0T | +S \rangle^* + \langle -T | +S \rangle \langle -T | +S \rangle^* = 1.$$

如果式（5.24）中的 ϕ 和 χ 都是 $(+S)$ 态，那么其左边就是 $\langle +S | +S \rangle$ ，显然它等于1，于是我们再一次得到式（5.19），

$$\langle +S | +T \rangle \langle +T | +S \rangle + \langle +S | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle + \langle +S | -T \rangle \langle -T | +S \rangle = 1.$$

只有满足下列方程式时，上面两个式子才是一致的（对于装置 T 和 S 的所有相对取向）

$$\langle +S | +T \rangle = \langle +T | +S \rangle^*,$$

$$\langle +S | 0T \rangle = \langle 0T | +S \rangle^*,$$

$$\langle +S | -T \rangle = \langle -T | +S \rangle^*.$$

由此，对于任意的状态 ϕ 和 χ ：

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*. \quad (5.26)$$

假如这个式子不正确，概率就不会“守恒”，粒子就会“丢失”。

在继续讨论之前，我们把有关振幅的三条重要的普遍定律总结一下，这就是式（5.24），（5.25）和（5.26）：

I

$$\langle j | i \rangle = \delta_{ji},$$

II

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\text{所有 } i} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle, \quad (5.27)$$

III

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*.$$

在这些方程式里 i 和 j 代表某一表象的所有基础态，而 ϕ 和 χ 代表原子的任何可能状态。必须注意，II式只对遍及体系的所有基础态（在我们的情况中是3个： $+T$ ， $0T$ ， $-T$ ）求和时才成立。关于怎样选择我们的基础态组的各个基础态，以上这些定律一点也没有谈到。我们从应用装置 T 开始，这是一个有任意选定的某种取向的施特恩-格拉赫实验装置，但任意别的取向，譬如 W （装置），也同样适用。我们也可把另一组不同的状态作为 i 和 j ，而所有的定律仍然适用——基础态组的选择并不是唯一的。量子力学的主要策略之一就是利用事物都可以用一种以上的方法来计算这个事实。

§5-6 量子力学的处理方法

我们来证明为什么这些定律是有用的。假设我们有一个处于给定状态中的原子（这就是说该原子是以某种方法制备的），我们想要知道它在某个实验中的行为。换句话说，开始时原子处于状态 ϕ 中，我们想知道该原子通过只能接受在满足条件 χ 的原子的装置的可能性。量子力学定律表明，我们可以用3个复数 $\langle \chi | i \rangle$ 完全地描写仪器，这3个复数就是各个基础态在状态 χ 中的振幅。如果我们用3个数字 $\langle i | \phi \rangle$ （即分别在3个基础态的每一个态中找到初始状态原子的振幅）来描写原子的状态，我们就能说出，该原子被放进装置后会发生些什么变化。这是一个重要的概念。

我们来考虑另一个例子。考虑下面这个问题：我们从一台 S 装置开始，接着放上一个极其复杂的装置，我们称它为 A ，后面再接上一台装置 R ——就像这样：

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}_S \quad \underbrace{\{A\}} \quad \underbrace{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}_R. \quad (5.28)$$

A 指的是任何施特恩-格拉赫装置的复杂组合，其中有挡板或半挡板，具有特定角度的取向，额外的电场和磁场……几乎有你想要放进去的任何东西。（做理想实验是很有方便的——不必费心去真实地建立这样一台装置！）于是我们的问题是：进入 A 的一个 $(+S)$ 态粒子从 A 出来时处于 $(0R)$ 态，从而它能通过最后的那个 R 过滤器，这个过程的振幅是什么？对于这样的振幅，有一个习惯的记法，它就是：

$$\langle 0R | A | +S \rangle .$$

它照例从右读到左（像希伯来文那样）：

〈终结 | 经过 | 开始〉。

如果 A 正巧不起任何作用——只是一条打开的通道——于是我们写成

$$\langle 0R \mid 1 \mid +S \rangle = \langle 0R \mid +S \rangle, \quad (5.29)$$

这两个符号是等效的。对于更为一般的问题，我们可以用一般的起始状态 ϕ 代替 $(+S)$ ，以及用一般的终了状态 χ 代替 $(0R)$ ，我们想要知道的是振幅

$$\langle \chi \mid A \mid \phi \rangle.$$

对于装置 A 的完整的分析必定给出对每一对初态 ϕ 和终态 χ 的振幅 $\langle \chi \mid A \mid \phi \rangle$ ——共有无穷多个组合！怎样才能对装置 A 的行为作出一个简明的描述呢？我们可以采用下面的方法。设想把式(5.28)的装置仪器改为：

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}_S \underbrace{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}_T \underbrace{\{A\}}_T \underbrace{\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}}_T \underbrace{\begin{Bmatrix} + \mid \\ 0 \\ - \mid \end{Bmatrix}}_R. \quad (5.30)$$

实际上根本没有改变，因为完全开放的装置 T 不起任何作用。但是它能启发我们如何来分析这个问题。原子从 S 进入 T 的 i 状态有一组振幅 $\langle i \mid +S \rangle$ 。于是有另一组的状态 i （对于 T ）进入 A 而以状态 j （对于 T ）出来的振幅。最后，有一个每一个 j 态通过最后一个过滤器成为 $(0R)$ 态的振幅。对于每一条可能的路径，有一个振幅，其形式为

$$\langle 0R \mid j \rangle \langle j \mid A \mid i \rangle \langle i \mid +S \rangle,$$

总振幅为从各种可能的 i 和 j 的组合所得出的各项之和。我们所要求的振幅就是：

$$\sum_{ij} \langle 0R | j \rangle \langle j | A | i \rangle \langle i | +S \rangle. \quad (5.31)$$

如果 $(0R)$ 和 $(+S)$ 用一般的状态 χ 和 ϕ 来代替，我们可得到同样类型的表达式，于是我们得到普遍的结果：

$$\langle \chi | A | \phi \rangle = \sum_{ij} \langle \chi | j \rangle \langle j | A | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (5.32)$$

注意式(5.32)的右边实际上比左边简单。这里装置 A 完全可以用9个数字 $\langle j | A | i \rangle$ 描述，这9个数字表示 A 对装置 T 的3个基础态的响应。只要我们知道这9个数字，并且把入射和出射状态 ϕ 和 χ 分别用进入3个基础态或从3个基础态出来的3个振幅来予以定义，我们就能够处理任何两个入射和出射状态 ϕ 和 χ 。实验结果可以用式(5.32)来预言。

这就是对于自旋为1的粒子的量子力学处理方法机理。每一个状态可以用3个数字来描写，这3个数是对于某一组选定的基础态的每一基础态中的振幅。每一装置可以用9个数字来描写，这9个数字是装置中从一个基础态进入另一个基础态的振幅。任何结论都可以从这些数字计算出来。

描写仪器的9个数字常常写成方阵的形式——叫做矩阵 $\langle j | A | i \rangle$ ：

到

$$\begin{array}{c}
 \text{从} \\
 \begin{array}{ccc}
 & + & 0 & - \\
 + & \langle +|A|+ \rangle & \langle +|A|0 \rangle & \langle +|A|- \rangle \\
 0 & \langle 0|A|+ \rangle & \langle 0|A|0 \rangle & \langle 0|A|- \rangle \\
 - & \langle -|A|+ \rangle & \langle -|A|0 \rangle & \langle -|A|- \rangle
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5.33)$$

量子力学的数学只是这个概念的推广。我们将给出一个简单的例证。假设有一台我们要进行分析的装置 C ——就是说我们要计算各个 $\langle j | C | i \rangle$ 。例如我们想要知道在像下面这样的实验里发生些什么：

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ C \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\
 S & & R
 \end{array}
 \quad (5.34)$$

但是后来我们注意到 C 是由 A 和 B 两台装置串联组成——粒子先通过 A 然后通过 B ——所以我们可以用符号写出

$$\{C\} = \{A\} \cdot \{B\} . \quad (5.35)$$

我们可以把装置 C 叫做 A 和 B 的“乘积”。我们还要假设已经知道怎样来分析这两个部分，所以我们可以写出 A 和 B （对于 T ）的矩阵。我们的问题就这样解决了。对于任何入射和出射状态，我们很容易求出

$$\langle \chi | C | \phi \rangle .$$

我们首先写下

$$\langle \chi | C | \phi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \phi \rangle .$$

你们看得出这样写的理由吗？（提示：设想在 A 和 B 之间放进一个装置 T 。）如果我们考虑一个特殊情况， ϕ 和 χ 也是（ T 的）基础态，譬如说是 i 和 j ，我们得到

$$\langle j | C | i \rangle = \sum_k \langle j | B | k \rangle \langle k | A | i \rangle. \quad (5.36)$$

这个方程式给出以装置 A 和 B 的两个矩阵表示的“乘积”装置 C 的矩阵。数学家们把新的矩阵 $\langle j | C | i \rangle$ ——由两个矩阵 $\langle j | B | i \rangle$ 和 $\langle j | A | i \rangle$ 按照式（5.36）所表示的方式求和得出的——称为两个矩阵 A 和 B 的“乘积”矩阵 BA 。（注意：次序很重要， $AB \neq BA$ 。）因此，我们可以说：两台串接的装置的矩阵等于这两台装置的矩阵的矩阵乘积（把第一台装置放在乘积的右边）。知道矩阵代数的每一个人都懂得这就是式（5.36）。

§5-7 变换到不同的基

我们要提出有关计算时所用的基础态的最后一个问题。假定我们已经选用某一特定的基——譬如说 S 基——而另一个人决定采用不同的基——譬如说 T 基——进行同一计算。为明确起见，把我们所用的基础态称做（ iS ）态，其中 $i = +, 0, -$ 。同样我们可以称他所用的基础态为（ jT ）。怎样把我们的工作和他的工作进行比较呢？任何测量结果的最后答案应该相同，但是在计算过程中所用的各个振幅和矩阵却是不同的，两者的关系是怎样的呢？如果大家都从同样的初态 ϕ 出发，我们将用3个振幅 $\langle iS | \phi \rangle$ 来描写它，这个式子表示 ϕ 在 S 表象中分解为基础态，而他却用振幅 $\langle jT | \phi \rangle$ 来描写它，这表示 ϕ 分解为他所用的 T 表象的基础态。怎样证明大家所描写的实际上都是同一

状态 ϕ 呢？我们可以应用式（5.27）的普遍定律II来证明。用他的任意一个状态 jT 来代替 χ ，我们得到：

$$\langle jT | \phi \rangle = \sum_i \langle jT | iS \rangle \langle iS | \phi \rangle. \quad (5.37)$$

为了把两个表象联系起来，我们只要给出矩阵 $\langle jT | iS \rangle$ 的9个复数。于是用这个矩阵就可以把我们的所有方程式转换为他所用的形式。它告诉我们怎么从一组基础态变换为另一组基础态。（因这个理由， $\langle jT | iS \rangle$ 有时称为“从 S 表象到 T 表象的变换矩阵”。好长的名词！）

对于自旋为1的粒子的情形，我们只有3个基础态（对于更高的自旋，就有更多的基础态），其数学运算和我们在矢量代数中所见过的很相似。每一个矢量可以用3个数来表示——沿 x ， y 和 z 轴的分量。这就是说每一个矢量可以分解为3个“基础”矢量，这些“基础”矢量是沿着3个坐标轴的矢量。但是假如另一人选择另一组坐标系—— x' ， y' 和 z' ，他就将用3个不同的数字来代表同一矢量。他的计算看上去和我们的不同，但最后的结果将是一样的。我们以前已经考虑过这个问题并且知道从一组坐标到另一组坐标的矢量变换法则。

你们或许希望通过某个例子来看一看量子力学变换是怎样进行的；所以我们在这里对两个过滤器 S 和 T 的各个特殊的相对取向写出（不予证明）自旋为1的粒子的振幅从 S 表象变换到 T 表象的变换矩阵。（我们将在下一章告诉你们如何导出这个结果。）

第一种情况： T 装置和 S 装置的 y 轴（粒子沿此轴运动）重合，但 T 装置绕着这个共同的 y 轴转过一个角度 α （如图5-6）。（说得明确一些，固定在 T 装置上的一组坐标轴 x' ， y' ， z' 和固定在 S 装置上的坐

标 x ， y ， z 的关系为： $z'=z \cos \alpha + x \sin \alpha$ ， $x'=x \cos \alpha - z \sin \alpha$ ， $y'=y$ ），那么，变换振幅是：

$$\begin{aligned}
 \langle +T | +S \rangle &= \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha), \\
 \langle 0T | +S \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \\
 \langle -T | +S \rangle &= \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \\
 \langle +T | 0S \rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \\
 \langle 0T | 0S \rangle &= \cos \alpha, \\
 \langle -T | 0S \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \\
 \langle +T | -S \rangle &= \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \\
 \langle 0T | -S \rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \\
 \langle -T | -S \rangle &= \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha).
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

第二种情况： T 装置和 S 装置有同一 z 轴，但 T 装置绕 z 轴转过角度 β 。（坐标变换为： $z'=z$ ， $x'=x \cos \beta + y \sin \beta$ ， $y'=y \cos \beta - x \sin \beta$ 。）于是，变换振幅为：

$$\begin{aligned}
 \langle +T | +S \rangle &= e^{+i\beta}, \\
 \langle 0T | 0S \rangle &= 1, \\
 \langle -T | -S \rangle &= e^{-i\beta},
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

所有其他的=0.

注意， T 的任何转动都可以由上述两种转动合成。

假定状态 ϕ 由3个数定义：

$$C_+ = \langle +S | \phi \rangle, \quad C_0 = \langle 0S | \phi \rangle, \quad C_- = \langle -S | \phi \rangle, \quad (5.40)$$

从 T 的观点来看，上述状态可用另外3个数来表示：

$$C'_+ = \langle +T | \phi \rangle, \quad C'_0 = \langle 0T | \phi \rangle, \quad C'_- = \langle -T | \phi \rangle, \quad (5.41)$$

那么，式（5.38）或（5.39）的系数 $\langle jT | iS \rangle$ 给出 C_i 和 C'_i 的变换关系。换言之， C_i 很像一个矢量的分量，从 S 和 T 的观点来看，这些分量是不同的。

仅仅对于自旋为1的粒子——因为它需要3个振幅——与矢量的对应才十分相近。在各种情况下都有随坐标的改变而以某种确定方式变换的3个数字。实际上，存在着一组基础态，其变换与一个矢量的3个分量完全相似。下列3个组合

$$C_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - C_-), \quad C_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-), \quad C_z = C_0 \quad (5.42)$$

变换到 C'_x, C'_y 和 C'_z 的方式与 x, y, z 变换到 x', y', z' 的方式完全一样。〔你们可以用变换定律式（5.38）和（5.39）来检验一下。〕现在你们可以看出，为什么自旋为1的粒子常常叫做“矢量粒子”。

§5-8 其他情况

我们在一开始就指出，对于自旋为1的粒子的讨论是所有量子力学问题的典范。只要改变状态的数目就可使讨论普遍化。在任一特殊情

况中可以包括 n 个基础态而不只是3个基础态^[8]。我们的基本定律（5.27）式具有完全相同的形式——只是 i 和 j 要理解为遍及于所有 n 个基础态。任何现象都可以这样来分析：求出它出发时在每一基础态的振幅以及终止于另一组基础态中的振幅，然后对整个基础态组求和。任何适当的基础态组都可以采用。如果有人愿意用另外的一组也同样合适。两个基础态组可用 n 行 n 列的变换矩阵相联系，关于这种变换，我们以后还有更多的东西要讲。

最后，我们愿意谈论一下怎样处理下述情况，如果原子直接来自原子炉，经过某台装置，譬如说 A ，然后用选择状态 χ 的过滤器对之进行分析。你们不知道开始时原子所处的状态 ϕ 是什么。也许最好目前不要把精力花费在这个问题上，而是把注意力集中在从纯粹状态出发的问题上。但是，如果你们坚持要知道的话，下面就是这个问题的处理方法。

首先，你们必须能对从炉子里出来的原子的状态分布方式作出某些合理的猜测。例如，假使炉子没有任何的“特殊性”，你们可以合理地猜想原子离开炉子时“取向”是无规的。按照量子力学，这就相当于说，除了可以说有三分之一的原子在 $(+S)$ 态，三分之一在 $(0S)$ 态，还有三分之一在 $(-S)$ 态。你们关于原子状态一点也不了解。对于 $(+S)$ 态的原子，通过整个装置的振幅是 $\langle \chi | A | +S \rangle$ ，通过的概率就是 $|\langle \chi | A | +S \rangle|^2$ ，另外两个状态也与之类似。于是总概率等于：

$$\frac{1}{3} |\langle \chi | A | +S \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle \chi | A | 0S \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle \chi | A | -S \rangle|^2.$$

为什么我们用 S 而不用 T 呢？不可思议的是，对于初始分解，无论我们选取什么基础态组，答案都是一样的——只要我们所处理的情况是完全的无规取向。对于任何 χ ，下式总是成立的：

$$\sum_i |\langle \chi | iS \rangle|^2 = \sum_j |\langle \chi | jT \rangle|^2.$$

（我们把它留给你们自己去证明。）

必须注意，如果说初始的状态具有振幅 $\sqrt{1/3}$ 在 $(+S)$ 中， $\sqrt{1/3}$ 在 $(0S)$ 中以及 $\sqrt{1/3}$ 在 $(-S)$ 中，这就不正确了；这种说法意味着可能存在着某种干涉。情况只是你们不知道初态是什么，你们不得不根据概率的观点认为体系在开始的时候处于各种可能的初始状态，然后对各种可能性取加权平均。

[1] 我们假定偏转角非常小。

[2] 读法： $(+S)$ = “正 S ”； $(0S)$ = “零 S ”； $(-S)$ = “负 S ”。

[3] 我们并不打算让“基础态”这个词含有比这里所说的更多的任何意思。无论如何不能认为它们具有任何“基本的”意思。我们是以描述的基础这个观念来应用基础这个词的，有点像人们所说的“以十为基础的数字”这种意思。

[4] 用以前的符号来表示： $\alpha = |\langle 0T | +S \rangle|^2$ ， $\beta = |\langle +S | 0T \rangle|^2$ ，以及 $\gamma = |\langle 0S | 0T \rangle|^2$ 。

[5] 实际上，从这个实验我们并不能推断出 $a=1$ ，只能断定 $|a|^2=1$ ，所以 a 可能等于 $e^{i\delta}$ 。但可以证明，如果选择 $\delta=0$ 实际上并不失去普遍性。

[6] 事实上，对于有3个或更多基础态的原子体系来说，还存在着另外一些类型的过滤器——和施特恩-格拉赫装置完全不同的——可以用它们来选择更多的基础态组（每一组都有同样的状态数）。

[7] 过多的真理不会迷惑我们！

[8] 基础态的数目 n 可以是，而且通常是无穷的。

第6章 自旋1/2 [\[1\]](#)

§6-1 变换振幅

在上一章中，我们用自旋1的体系作为例子，将量子力学的普遍原理概括如下：

任何状态 ψ 都可用这个状态在一组基础态的各个态中的振幅来描述。

一般说来，从任意一个状态过渡到另一个状态的振幅可写成许多乘积的总和，每一个乘积为从初态进入某一基础态的振幅乘以从该基础态到终态的振幅，最后每个基础态的项求和：

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \psi \rangle. \quad (6.1)$$

基础态是相互正交的——一个基础态的振幅在另一个基础态中等于零：

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (6.2)$$

从一个状态过渡到另一个状态的振幅等于其逆过程的振幅的复共轭：

$$\langle \chi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \chi \rangle. \quad (6.3)$$

我们还讨论了一下状态可以有不止一个基这一事实，而且我们可以用式（6.1）从一个基变换到另一个基。例如，假定在基础体系 S 的第 i 基础态中找到状态 ψ 的振幅是 $\langle iS | \psi \rangle$ ，但是后来我们决定宁愿用另一组基础态，譬如说用属于基础体系 T 的状态 j 来表示 ψ 这个状态。在一般公式（6.1）中，我们用 jT 代替 χ ，从而得到下面的公式：

$$\langle jT | \phi \rangle = \sum_i \langle jT | iS \rangle \langle iS | \psi \rangle. \quad (6.4)$$

状态 ψ 在基础态 (jT) 中的振幅通过一组系数 $\langle jT | iS \rangle$ 和 ψ 在基础态 (iS) 中的振幅相联系。如果有 N 个基础态，那么就有 N^2 个这样的系数。这一组系数常常被称为“从 S 表象到 T 表象的变换矩阵”。这看上去在数学上是很棘手的，但是只要稍微改变一下名称，我们就可以看到它实际上并非如此之难。如果我们令 C_i 为状态 ψ 在基础态 iS 中的振幅——即 $C_i = \langle iS | \psi \rangle$ ——并令 C'_j 是对于基础体系 T 的相应的振幅——即 $C'_j = \langle jT | \phi \rangle$ ，于是式（6.4）可以写成：

$$C'_j = \sum_i R_{ji} C_i, \quad (6.5)$$

式中 R_{ji} 就是 $\langle jT | iS \rangle$ 。每一个振幅 C'_j 等于振幅 C_i 乘以对应的系数 R_{ji} 后对所有 i 求和。这和矢量从一个坐标系到另一坐标系的变换有同样的形式。

为了避免过分抽象，我们曾对自旋1的情况举过若干个这些系数的例子，使你们能领会在实际情况中怎样应用它们。在另一方面，量子力学中有一件极其美妙的事——从存在着3个状态这一纯粹的事实以及转动的空间对称性出发，这些系数可以用纯粹抽象推理来推出。在此

初期阶段就给你们讲解这样的论证有其不利之处，在我们“脚踏实地”之前，你们又陷入了另一个抽象问题之中。然而，这是如此之美妙，不管怎样我们还是谈一谈吧。

在本章里，我们将向你们说明，对于自旋 $1/2$ 的粒子，怎样求出它的变换系数。我们选择自旋 $1/2$ 的情况而不选择自旋 1 的情况是由于前者比较容易。我们的问题是，对于施特恩-格拉赫装置中分裂为两束的粒子——原子体系——确定它的系数 R_{ji} 。我们要用纯粹的推理——加上一些假设——推导出从一个表象到另一个表象的所有变换系数。为了进行“纯粹的”推理，作一些假设常常是必要的！虽然这个论证是抽象的，而且比较复杂，但是所得到的结果叙述起来却比较简单并且容易理解——而结果是最重要的事情。如果你们愿意，可以把这当作一种文化游览。实际上我们是这样安排的，凡是在这一章里得到的重要结果在以后的几章中如果需要的话会用另外的方法导出。所以你们不必担心如果把这一章完全略去或留到以后某个时刻再来学习，会使你们学习量子力学时乱了头绪。我们是在这个意义上说这是“文化的”游览：即试图表明量子力学原理不仅有趣，而且如此深刻，只要再加上关于空间结构的少数几个假设，我们就能导出物理体系的许许多多性质。知道量子力学的不同结论来自何处也是重要的，因为只要我们的物理定律还是不完全的——正如我们知道它们确是如此——弄清理论和实验不一致的那些地方到底是我们的逻辑最好之处还是最糟之处，是很有趣的。直到现在为止，看来我们的逻辑最抽象的地方却总是给出正确的结果——它和实验一致。只有当我们试图提出基本粒子内部机理和它们相互作用的特殊模型时，我们才不能找到和实验符合的理论。下面要讲的理论无论在什么地方受到检验时，都和实验符合——对于奇异粒子以及对于电子、质子等都如此。

在我们继续讲下去之前，先谈一个令人烦恼但却很有趣的问题：不可能唯一地确定系数 R_{ji} ，因为概率振幅始终具有某种任意性。假定你们有一组任何种类的振幅，譬如说是通过所有不同的路径到达某一地点的振幅，如果在每一个振幅上乘以同样的相位因子——例如 $e^{i\delta}$ ——你们就得到另一组和原来的一组同样好的振幅。所以对于任何给定的问题中，如果你愿意的话，可以任意改变所有振幅的相位。

假定你们写下多个振幅之和，譬如说是 $(A+B+C+\dots)$ ，并取其绝对值的平方以计算某个概率。可是另外的某一个人应用振幅之和 $(A'+B'+C'+\dots)$ 并取其绝对值的平方以计算同一事物的概率。如果除了因子 $e^{i\delta}$ 之外，所有各个 A' 、 B' 、 C' ...与 A 、 B 、 C ...都各各相等，那么两者取绝对值平方所得出的概率将完全相等，因为此时 $(A+B+C+\dots)$ 等于 $e^{i\delta}(A'+B'+C'+\dots)$ 。例如，假定我们要用式(6.1)计算某个东西，但是，我们突然改变了某个基础体系的所有相位。每一个振幅 $\langle i | \psi \rangle$ 都要乘以同样的因子 $e^{i\delta}$ 。同样，振幅 $\langle i | \chi \rangle$ 也要改变 $e^{i\delta}$ ，但是振幅 $\langle \chi | i \rangle$ 是振幅 $\langle i | \chi \rangle$ 的共轭复数，所以， $\langle \chi | i \rangle$ 改变因子 $e^{-i\delta}$ 。指数上正的和负的 $i\delta$ 相消，于是我们就得到和以前同样的表式。所以这是一个普通的规则。如果对于一个给定基础体系，我们使所有的振幅改变同一个相位——或者甚至在任意问题中我们改变所有振幅的相位——这不会影响结果。所以在我们的变换矩阵中有着某种选择相位的自由。我们常常要作这种任意的选择——通常按照通用的惯例来作出选择。

§6-2 变换到转动坐标系

我们再来考虑上一章曾描写过的“改进的”施特恩-格拉赫装置。一束自旋 $1/2$ 粒子从左边进入装置，一般说来它会分裂成两束，如图6-1所示。（对于自旋 1 就有三束。）和以前一样，两束粒子会重新会聚，除非其中一束被插在中间的“挡板”挡住。在图上我们画一个箭头，它表示磁场大小的增加方向——就是说指向有尖端的磁极。我们用这个箭头来表示任一特定装置的“向上”坐标轴。它相对于装置是固定的，当我们同时使用几台装置时，可以用这个箭头表示各装置的相对取向。我们还假设每一个磁铁中的磁场方向总是与此箭头一致。

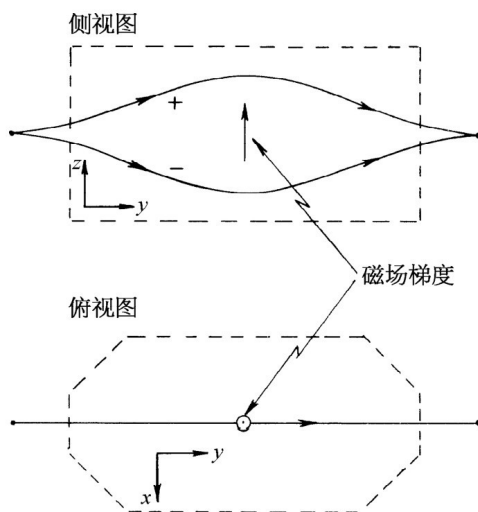


图6-1 有自旋 $1/2$ 粒子束通过“改进的”施特恩-格拉赫仪器的俯视图和侧视图

我们说：在“上”射束中的原子是处于对该装置而言的 $(+)$ 的状态中，在“下”射束中的原子是处于 $(-)$ 的状态中。（对于自旋 $1/2$ 粒子没有“零”状态。）

现在我们把两台改进的施特恩-格拉赫装置串接起来，如图6-2 (a) 所示。第一台装置称为 S ，我们可以用挡住其中的这一束或那一束射束的方法来制备纯粹的 $(+S)$ 或纯粹的 $(-S)$ 状态，[图上所示为制备纯粹的 $(+S)$ 态。] 对于每一种情况，从 S 出射的粒子都有

一定的振幅进入第二台装置中的 $(+T)$ 射束或 $(-T)$ 射束。实际上，一共只有4个振幅：从 $(+S)$ 到 $(+T)$ ， $(+S)$ 到 $(-T)$ ， $(-S)$ 到 $(+T)$ ，以及 $(-S)$ 到 $(-T)$ 的振幅。这些振幅就是从 S 表象到 T 表象的变换矩阵 R_{ji} 的4个系数。我们可以认为：第一台装置“制备”在某一个表象中的特定状态，而第二台装置按照第二个表象来“分析”上面得到的状态。于是，我们要解答的问题是：假定处于给定状态——譬如说 $(+S)$ 态——的原子是用挡住 S 装置中某一射束的方法制备的，那么该原子通过调节成（譬如说） $(-T)$ 态的第二台装置 T 的机会是多少？当然，其结果依赖于 S 和 T 这两个系统间的角度。

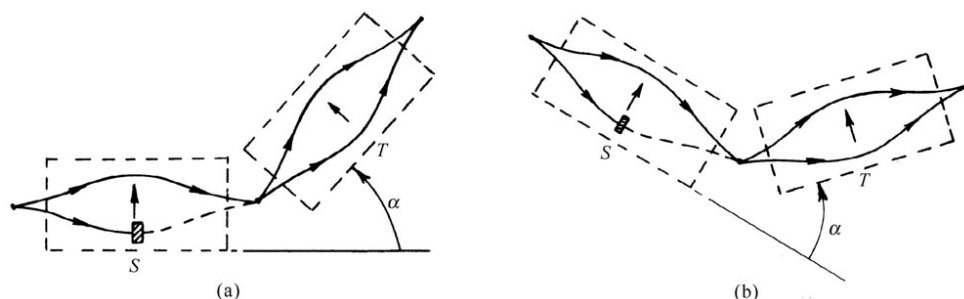


图6-2 两个等效的实验

我们应当解释一下：为什么我们能够希望用演绎法来求出系数 R_{ji} 。你们知道很难相信如果一个粒子原来的自旋沿 $+z$ 方向排列，以后会有可能发现其自旋指向 $+x$ 方向——或者另一个完全任意的方向。实际上，这虽然是几乎不可能的，但并不是绝对不可能。它几乎不可能，所以只有一种方法可使上述情况发生，这就是我们可以找到这唯一的方法的理由。

我们可以作出的第一个论证是：假定我们建立了如图6-2 (a)中的那样一套设备，其中有两台装置 S 和 T ， T 对于 S 向上翘起一个角度 α ，我们只让 S 通过 $(+)$ 射束，而让 T 通过 $(-)$ 射束。我们将观察到

从 S 出来的粒子并通过 T 的概率有一定的数值。现在假定我们用图6-2 (b) 的装置进行另一次测量。 S 和 T 的相对取向不变，但整个系统放在空间另一个角度的位置上，我们要假设，关于对处于 S 的一个纯粹状态中的粒子进入 T 的某一特定状态的概率，这两个实验都会给出同样的数值。换言之，我们假设这种类型的任何实验的结果都是相同的——物理规律是相同的——无论整套装置在空间中如何取向。（你们会说：“这是显而易见的。”不，它是一个假设，只当它符合实际情况时才能认为它是“正确的”。）这意味着系数 R_{ji} 只依赖于 S 和 T 在空间的相互关系而不依赖于 S 和 T 在空间的绝对位置。换一种说法， R_{ji} 只依赖于将 S 至 T 的转动，因为图6-2 (a) 和6-2 (b) 的相同之处显然是将装置 S 转到装置 T 的三维转动，当变换矩阵 R_{ji} 只依赖于转动时，这里的情形就是如此，它被称作转动矩阵。

为下一步的讨论，我们还需要一点资料。假定我们加上第三台装置，我们称它为 U ，它以任意的角度接在 T 的后面，如图6-3 (a)。

（初看起来这很讨厌，但这正是抽象思维有趣之处——你们只要用划线的办法就可进行最不可思议的实验！）现在要问， $S \rightarrow T \rightarrow U$ 的变换是什么？我们实际上要做的是，当我们已知从 S 到 T 和从 T 到 U 的变换的前提下，求出从 S 的某一个状态到 U 某一个状态的振幅。我们接着要讨论的是 T 的两个通道都打开的实验，我们可连续两次运用式(6.5)来求出答案。从 S 表象到 T 表象，我们有：

$$C'_j = \sum_i R_{ji}^{TS} C_i, \quad (6.6)$$

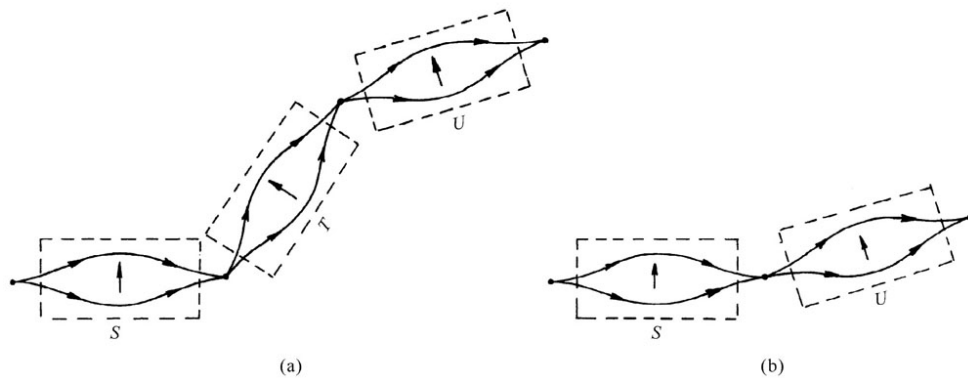


图6-3 如果 T “敞开”，(b) 和 (a) 等效

式中，我们在 R 上加上上标 TS 是为了和 T 到 U 的系数 R^{UT} 相区别。

假设处于 U 表象中基础态的振幅为 C_k'' ，我们可再一次运用式 (6.5) 把它和 T 振幅联系起来；我们得到：

$$C_k'' = \sum_j R_{kj}^{UT} C_j' \quad (6.7)$$

将式 (6.6) 和式 (6.7) 结合起来，就得到直接从 S 到 U 的变换。把式 (6.6) 的 C_j' 代入式 (6.7)，我们得到：

$$C_k'' = \sum_j R_{kj}^{UT} \sum_i R_{ji}^{TS} C_i \quad (6.8)$$

由于 i 在 R_{kj}^{UT} 中不出现，我们可把对 i 的求和符号也放到前面来，并把上式写成：

$$C_k'' = \sum_i \sum_j R_{kj}^{UT} R_{ji}^{TS} C_i \quad (6.9)$$

这就是双重变换的公式。

可是，注意，只要所有 T 中的射束都没有被挡住，从 T 出射的粒子的状态和进入 T 时的状态是相同的。我们就可以直接从 S 表象变换到 U 表象。这应和直接把装置 U 接在 S 后面是一样的，如图6-3（b）。在这个情况下，我们可以写出：

$$C_k'' = \sum_i R_{ki}^{US} C_i, \quad (6.10)$$

式中 R_{ki}^{US} 就是这一变换的系数。显然，式（6.9）和（6.10）应该给出同一个振幅 C_k'' ，并且不管给我们振幅 C_i 的初态 ϕ 是什么，这个结果都应该正确，所以，下式必定成立：

$$R_{ki}^{US} = \sum_j R_{kj}^{UT} R_{ji}^{TS}. \quad (6.11)$$

换言之，如果参考基的 $S \rightarrow U$ 任意转动可以看作由连续两次相继的转动 $S \rightarrow T$ 和 $T \rightarrow U$ 组成，转动矩阵 R_{ki}^{US} 可以按照式（6.11）由两次部分转动的矩阵求得。如果你们愿意，你们可以直接从式（6.1）求出式（6.11），因为它只是 $\langle kU | iS \rangle = \sum_j \langle kU | jT \rangle \langle jT | iS \rangle$ 的不同记法而已。

为透彻起见，我们应加上下面的附注。不过，它们并非十分重要的，如果你们不愿意看的话可以略去它直接阅读下一节。我们上面所讲的东西不是十分正确的。我们确实不能说式（6.9）和式（6.10）必须给出严格相同的振幅。只是在物理意义上应该相同；所有的振幅可以相差某个共同的相位因子 $e^{i\delta}$ 而并不改变关于真实世界的任何计算结果。所以，代替式（6.11），我们真正能够说的是：

$$e^{i\delta} R_{ki}^{US} = \sum_j R_{kj}^{UT} R_{ji}^{TS}, \quad (6.12)$$

其中 δ 是某个实常数。当然，这个额外的因子 $e^{i\delta}$ 的意义是：如果我们采用矩阵 R^{US} ，由此求得的所有振幅与从两次转动 R^{UT} 和 R^{TS} 所得到的振幅都可以相差同样的相位因子 $e^{i\delta}$ 。我们知道如果所有的振幅都改变同样的相位是无关紧要的，所以只要我们愿意，完全可以忽略这个相位因子。然而，可以证明，假如我们用特定的方法来定义转动矩阵，这个额外的相位因子就永远不会出现——式（6.12）中的 δ 永远等于零。虽然这对于我们以后的论证并不重要，但我们可以用关于行列式的数学定理来简短地证明一下。〔如果你们对行列式知道得不多，可以不必为此证明烦恼而可以直接跳到式（6.15）的定义。〕

第一，我们应该指出，式（6.11）是两个矩阵的“乘积”的数学定义。（说成“ R^{US} 是 R^{UT} 和 R^{TS} 的乘积”可能更简便一些。）第二，有一个数学定理——对于这里的两行两列矩阵你们自己能够很容易证明它——这个定理说：两个矩阵的“乘积”的行列式等于它们的行列式的乘积。把这个定理应用于式（6.12），我们得到

$$e^{i2\delta} (\text{Det} R^{US}) = (\text{Det} R^{UT}) (\text{Det} R^{TS}). \quad (6.13)$$

（我们省略了下标，因为它们并不告诉我们任何有用的东西。）是的， 2δ 是正确的。要记住我们所处理的是两行两列的矩阵；矩阵 R_{ki}^{US} 中的每一项都乘上 $e^{\delta i}$ ，所以行列式中的每一个乘积——它有两个因子——都要乘上 $e^{i2\delta}$ 。现在取式（6.13）的平方根，并用它来除式（6.12），我们得到

$$\frac{R_{ki}^{US}}{\sqrt{\text{Det} R^{US}}} = \sum_j \frac{R_{kj}^{UT}}{\sqrt{\text{Det} R^{UT}}} \frac{R_{ji}^{TS}}{\sqrt{\text{Det} R^{TS}}}. \quad (6.14)$$

额外的相位因子不见了。

现在已清楚，假如我们要使任意给定的表象中的所有振幅都归一化（你们还记得，归一化的意思是 $\sum_i \langle \phi | i \rangle \langle i | \phi \rangle = 1$ ），转动矩阵就都有像 $e^{i\alpha}$ 的纯粹虚数指数的行列式。（我们不去证明它，你们将会看到，它们都是这样的。）所以，只要我们愿意，我们可以这样来进

行选择，使 $\text{Det}R=1$ ，我们的转动矩阵 R 就具有唯一的相位。具体的做法是这样的，假设我们以某种任意的方式求出了转动矩阵 R ，作为一条规则，我们通过定义：

$$R_{\text{标准}} = \frac{R}{\sqrt{\text{Det}R}}. \quad (6.15)$$

把 R “变换”到“标准形式”。因为我们可在 R 的每一项上乘以相同的相位因子以得到我们所要的相位，所以我们可以做到这一要求。下面我们总是假定我们的矩阵已经变换成“标准形式”，于是我们可以运用式（6.11）而不需要有任何额外的相位因子。

§6-3 绕 z 轴的转动

我们现在准备找出两个不同表象之间的变换矩阵。有了合成转动的法则以及空间没有特殊方向的假设，我们就有了求出任意转动矩阵的钥匙。解答只有一个，我们从对应于绕 z 轴转动的变换开始。假设两台装置 S 和 T ，串联安放在一直线上，它们的轴平行，从图指向外，如图6-4（a）所示。我们取此方向为“ z 轴”。确实，若射束的路径在 S 装置中向“上”（向着 $+z$ ）偏移，那么在 T 装置中也将如此。同样，如果射束在 S 装置中向下偏移，它在 T 装置也将向下。假定 T 装置被放在另一个角度上，但其轴仍旧平行于 S 的轴，如图6-4（b）。根据直觉你们会说在 S 中的（+）射束到达 T 中仍旧是（+）射束，因为 S 和 T 的磁场和磁场梯度仍旧在同样的物理方向上。这是十分正确的。同样 S 中的（-）射束在 T 中仍旧是（-）射束。对于 T 在 S 的 xy 平面中的任意取向都可得出同样的结果。关于 $C'_+ = \langle +T | \psi \rangle$ ， $C'_- = \langle -T | \psi \rangle$ 以及 $C_+ = \langle +S | \psi \rangle$ ， $C_- = \langle -S | \psi \rangle$ 之间的关系，上面的结论可以告诉我们些什么呢？你们也许会得出这样的结论：绕“参考系” z 轴的任意转动使射束“向上”或“向下”偏移的基础态的

振幅仍和先前一样。我们可以写出： $C'_+ = C_+$ 以及 $C'_- = C_-$ ——但这是不正确的。我们所能作出的结论只是：经过这样的转动之后，在 S 装置中和 T 装置中处于“向上”射束的概率相同，即：

$$|C'_+| = |C_+| \text{ 和 } |C'_-| = |C_-|.$$

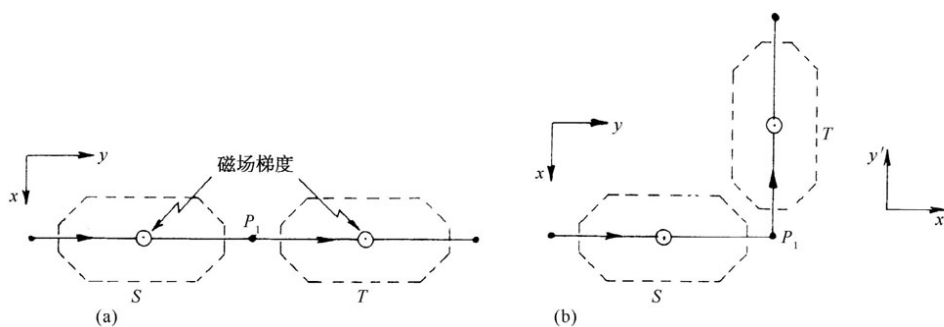


图6-4 绕 z 轴转动 90°

我们不能认为，对于图6-4 (a) 和 (b) 中 T 装置的两个不同取向，有关 T 装置的振幅的相位 不会不同。

图6-4的 (a) 和 (b) 中的两个装置实际上是不一样的，我们可以由下述方法看出这一点。假定我们把一台产生纯粹 $(+x)$ 态的装置放在 S 的前面。（ x 轴指向图的下端。）这些粒子在 S 中会分裂成 $(+z)$ 和 $(-z)$ 射束，但是这两束射束在 S 的出口 P_1 处重新结合得到 $(+x)$ 态。在 T 中又发生同样的过程。假如在 T 后面接着放上第三台装置 U ，它的轴沿着 $(+x)$ 方向，如图6-5 (a) 所示，所有的粒子都将进入 U 的 $(+)$ 射束中。现在把 T 和 U 一起转过 90° 到达图6-5 (b) 所示的位置，设想一下将会发生些什么。同样，从 T 仪器出射的状态就是进入 T 仪器的状态，所以进入 U 的粒子是处在对于 S 为 $(+x)$ 的状态。但是现在的 U 是相对于 S 为 $(+y)$ 状态分析的，这是不同的状态。（根据对称性，我们将预期只有一半粒子通过。）

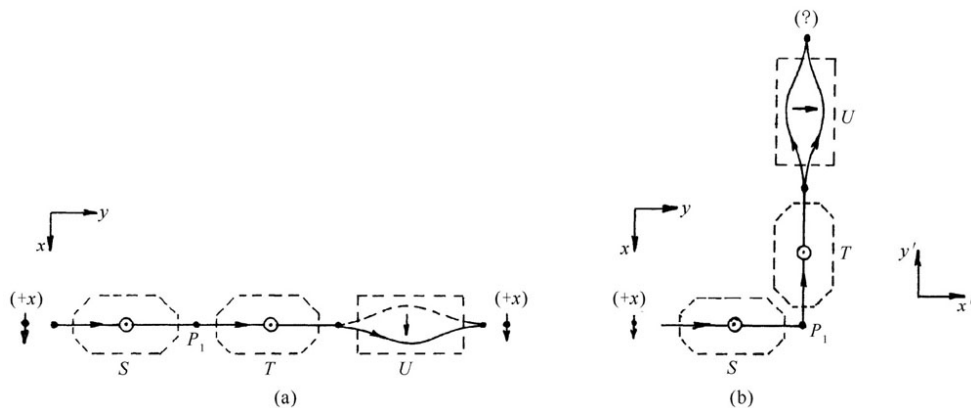


图6-5 处于 $(+x)$ 态的粒子在 (a) 和 (b) 中有不同的行为

什么因素变了呢？装置 T 和 U 仍处在相同的相对物理 关系 中。仅仅是因为 T 和 U 处在另一个不同的方向上就能使物理规律 改变 吗？我们原来的假设是物理规律不应改变。答案只能是这样，对于 T 的 振幅 在图6-5的两种情况下是不同的——所以在图6-4的两种情况下也是不同的。粒子必定有某种方法知道它在 P_1 点拐了一个弯。怎么会知道呢？我们已确定的是 C'_+ 和 C_+ 的 大小 在这两种情况中是相同的，但是它们可能——事实上，必定——具有不同的 相位。我们得出结论， C'_+ 和 C_+ 必定由下列关系联系起来：

$$C'_+ = e^{i\lambda} C_+,$$

C'_- 和 C_- 必定由下列关系联系起来：

$$C'_- = e^{i\mu} C_- ,$$

其中 λ 和 μ 是实数，它们必定以某种方式与 S 和 T 之间的角度相联系。

目前我们关于 λ 和 μ 可以说的仅仅是它们一定不相等。〔除了图6-5 (a) 所表示的特殊情况，这时 T 和 S 有相同的取向。〕我们曾看到，

所有的振幅同时改变相同的相位时不会有什么物理后果。由于同一理由，我们总可以在 λ 和 μ 上加上同样的任意数值而不改变任何东西。所以我们可以这样选择 λ 和 μ ，使其分别等于某一数的正负值，即我们总可以取：

$$\lambda' = \lambda - \frac{(\lambda + \mu)}{2}, \mu' = \mu - \frac{(\lambda + \mu)}{2}.$$

于是

$$\lambda' = \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = -\mu'.$$

所以为了方便[2]，我们取 $\mu = -\lambda$ 。于是我们得到参考装置绕 z 轴转动某一角度的普遍法则，其变换是

$$C'_+ = e^{+i\alpha} C_+, C'_- = e^{-i\alpha} C_-. \quad (6.16)$$

振幅的绝对值不变，只是相位不同。这些相位因子造成了图6-5中两个实验的不同结果。

现在我们想要知道联系 λ 与 S 和 T 之间角度的定律。我们已经知道一种特殊情况的答案。如果角度为零，则 λ 也为零。现在我们假设，当 S 和 T 之间的角度 ϕ （见图6-4）趋近于零时，相移 λ 是 ϕ 的连续函数——这仅仅看上去是合理的。换言之，如果将 T 从通过 S 的直线转过很小的角度 ϵ ，这时 λ 也是一个很小的数量，譬如说等于 $m\epsilon$ ， m 是某一个数，因为我们可以证明 λ 必正比于 ϵ ，所以我们可以这样写。假定我们在 T 后面放上另一台装置 T' ，它和 T 成角度 ϵ ，因而就和 S 成角度 2ϵ 。于是对于 T ，我们得到：

$$C'_+ = e^{i\lambda} C_+,$$

对于 T' ，我们有：

$$C''_+ = e^{i\lambda} C'_+ = e^{i2\lambda} C_+.$$

但是我们知道，如果我们把 T' 直接接在 S 后面，我们应当得到同样的结果。这样，如果角度加倍相位也要加倍。显然我们可以把这一论证推广，并且完全可以通过一系列无限小的转动以构成任意的转动。我们得到结论：对于任意的角度 ϕ ， λ 正比于转过的角度。因此我们可以写下 $\lambda = m\phi$ 。

于是，我们得到的一般结果是：当 T 绕 z 轴相对于 S 转过角度 ϕ 时，

$$C'_+ = e^{im\phi} C_+, C'_- = e^{-im\phi} C_- . \quad (6.17)$$

对于角度 ϕ 以及我们以后将要讲到的所有转动，我们采用标准的约定：正的转动是对于参考轴正方向的右手旋转，正的 ϕ 表示向正 z 方向前进的右手螺旋的转动。

我们现在要求出 m 应当等于多少？首先，我们可以试一下这样来论证：假定 T 转过 360° ，显然它正好回到原来零度的位置，我们应当有 $C'_+ = C_+$ 以及 $C'_- = C_-$ ，或者和这意义相同的式子： $e^{im2\pi} = 1$ 。我们得到 $m=1$ 。这个论证是错误的！为了看出这是错误的，我们来考虑 T 转过 180° 的情况。假如 m 等于1，我们有 $C'_+ = e^{i\pi} C_+ = -C_+$ ， $C'_- = e^{-i\pi} C_- = -C_-$ 。然而，这恰好又是原始状态，两个振幅都正好乘上-1，于是它回复为原始的物理体系。（这又是一个共同相位变

化的情况。)这意味着如果图6-5 (b) 中 T 和 S 间的角度增加到 180° , 这个系统(对于 T)就和 0° 的情形不可区分, 粒子重又通过 U 装置的 $(+)$ 状态。尽管在 180° , 但 U 装置的 $(+)$ 态是原来 S 装置的 $(-x)$ 态, 因而 $(+x)$ 态就变成 $(-x)$ 态。但是, 我们并没有改变原始状态, 这个答案是错误的。我们不能令 $m=1$ 。

我们具有的情况必须是转动 360° , 并且没有比 360° 更小的角度能够再得到同样的物理状态。如果 $m=1/2$ 就可以满足这个条件。这样, 只有这样, 再得到同样的物理状态的第一个角度是 $\phi=360^\circ$ [3] 它给出:

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= -C_+ \\ C'_- &= -C_- \end{aligned} \right\} \text{绕 } z \text{ 轴转 } 360^\circ. \quad (6.18)$$

如果你们使装置转过 360° , 你将得到新的振幅, 这是非常奇怪的说法。然而这实在不是什么新东西, 因为共同改变符号并没有给出任何不同的物理状态。假定另外某一个人决定改变所有振幅的符号, 因为他认为他已经把装置转过了 360° , 这完全正确, 他仍得到同样的物理状态 [4]。于是, 我们的最后答案是: 如果我们已经知道自旋 $1/2$ 粒子对于参考系 S 的振幅 C_+ 和 C_- , 然后我们应用对于 T 的基础系统(T 为将 S 绕 z 轴转动 ϕ 所得出的), 用旧的振幅表示的新振幅为:

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= e^{i\phi/2} C_+ \\ C'_- &= e^{-i\phi/2} C_- \end{aligned} \right\} \text{绕 } z \text{ 轴转动 } \phi. \quad (6.19)$$

§6-4 绕 y 轴转动 180° 和 90°

下面，我们要求 T 相对于 S 绕垂直于 z 轴的某一个轴——譬如说 y 轴——转动 180° 的变换关系。（在图6-1中我们已规定了坐标轴。）换言之，我们从两个全同的施特恩-格拉赫设备开始，不过其中第二台装置 T 对于第一台 S 来说是“上下倒置”的，如图6-6。现在设想粒子像一个小磁偶极子，处在 $(+S)$ 态的一个粒子——所以它在第一台装置中走上面的通道——在第二台装置中也走上面的通道，所以它对于 T 来说是在“负的”状态中。（在倒放的 T 装置中，场和它的梯度的方向都是倒转的。对于一个带有一定方向磁矩的粒子来说，力是不变的）。不管怎样，对于 S 来说是“向上”的，对于 T 而言就是“向下”的。那么，对于 S 和 T 这样的相对位置，我们认为变换必定给出

$$|C'_+| = |C_-|, |C'_-| = |C_+|.$$

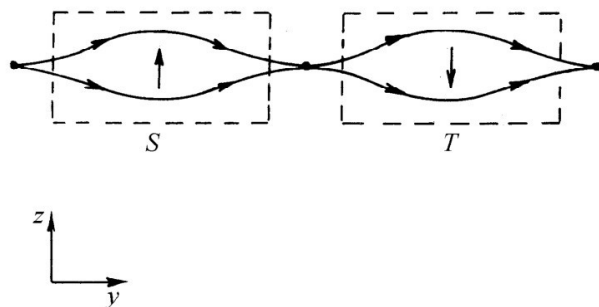


图6-6 绕 y 轴转动 180°

和以前一样，我们不能排除某个附加的相位因子，（对于绕 y 轴 180° 的旋转）我们可以有

$$C'_+ = e^{i\beta} C_- \text{ 和 } C'_- = e^{i\gamma} C_+, \quad (6.20)$$

其中 β 和 γ 仍然是要求的。

绕y轴旋转360°又是怎样的情况呢？我们已经知道绕z轴旋转360°的答案——在各个状态中的振幅都改变符号。随便绕哪一个坐标轴旋转360°仍旧回到原来位置。对于绕任意轴旋转360°的结果必定和绕z轴旋转360°的结果相同——所有的振幅仅仅改变符号。现在我们想象绕y轴的两次连续旋转180°——运用公式（6.20）——我们应当得到式（6.18）的结果，换言之，

$$C''_+ = e^{i\beta} C'_- = e^{i\beta} e^{i\gamma} C_+ = -C_+$$

以及

$$C''_- = e^{i\gamma} C'_+ = e^{i\gamma} e^{i\beta} C_- = -C_- \quad (6.21)$$

这两个式子意味着：

$$e^{i\beta} e^{i\gamma} = -1 \quad \text{或} \quad e^{i\gamma} = -e^{-i\beta}.$$

所以，绕y轴旋转180°的变换就可以写成

$$C'_+ = e^{i\beta} C_-, \quad C'_- = -e^{-i\beta} C_+. \quad (6.22)$$

上面的论证同样适用于绕xy平面中的任意轴旋转180°，当然，不同的轴β的数值是不同的。然而，这也是它们唯一可以不同之处。β取什么数值具有一定的任意性，但是对于xy平面上的一个旋转轴，这个数值一经确定以后，对于同一平面上其他任意的旋转轴的数值也就确定了。习惯上对于绕y轴旋转180°选取β=0。

为了证明我们可以作这样的选择，我们假定绕y轴旋转时β不等于零。那么我们可以证明：在xy平面上可以找到另外的某一个轴，绕这

一个轴旋转时，相应的相位因子将等于零。图6-7 (a) 上表示一个和y轴成 α 角的轴A，我们求对于A轴的相位因子 β_A 。（为了清楚起见，图上所画的 α 是一个负数，但这是无关紧要的。）假定开始的时候T装置和S装置在一直线上，然后T装置绕A轴旋转 180° ，旋转以后T装置的3个坐标轴——我们用 x'' ， y'' 和 z'' 来标记——表示在图6-7 (a) 中。于是，对于T的振幅是：

$$C_+'' = e^{i\beta_A} C_-, \quad C_-'' = -e^{i\beta_A} C_+. \quad (6.23)$$

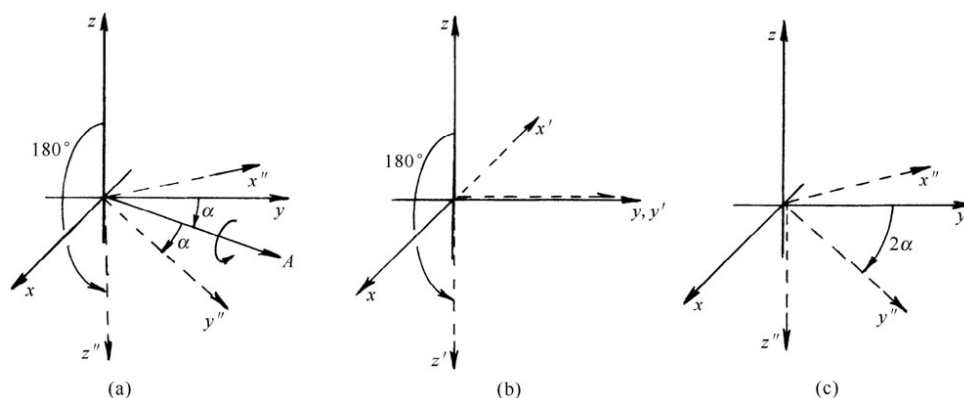


图6-7 绕A轴旋转 180° 等效于先绕y轴旋转 180° 再绕 z' 轴旋转

我们可以通过图上 (b) 和 (c) 所表示的两次连续转动，使装置转到同样的方向上。第一，我们想象装置U对于装置S绕y轴旋转 180° 。图6-7 (b) 中 x' ， y' 和 z' 表示U的坐标轴。对于U的振幅由式 (6.22) 给出。

现在注意，我们可以通过绕U装置的z轴旋转，即绕 z' 轴旋转，从U到达T，如图6-7 (c) 所示。你们从图上可以看到，需要转动的角度为 α 的两倍，但是方向相反（对于 z' 而言）。应用式 (6.19) 的变换，令 $\phi = -2\alpha$ ，我们得到

$$C''_+ = e^{-i\alpha} C'_+, C''_- = e^{+i\alpha} C'_-. \quad (6.24)$$

结合式 (6.24) 和 (6.22)，我们得到：

$$C''_+ = e^{i(\beta-\alpha)} C_-, C''_- = -e^{-i(\beta-\alpha)} C_+. \quad (6.25)$$

这些振幅一定和我们在式 (6.23) 中得到的相同。所以 β_A 与 α 及 β 必定以下式相联系：

$$\beta_A = \beta - \alpha. \quad (6.26)$$

这个式子意味着当 A 轴和 (S 的) y 轴之间的夹角 α 等于 β 时，绕 A 轴旋转 180° 的变换将有 $\beta_A = 0$ 。

只要垂直于 z 轴的某个轴，具有 $\beta = 0$ ，我们就可把它选作 y 轴。这纯粹是习惯的问题，在普通的情况中我们就采用它。我们的结果是：对于绕 y 轴作 180° 的旋转，我们有

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= C_- \\ C'_- &= -C_+ \end{aligned} \right\} \text{绕 } y \text{ 轴旋转 } 180^\circ. \quad (6.27)$$

当考虑 y 轴时，我们接着来求绕 y 轴转 90° 的变换矩阵。因为我们知道绕同一个轴接连两次旋转 90° 等于旋转 180° ，所以可求出这一变换矩阵。我们从把对 90° 的变换写成最普遍的形式开始：

$$C'_+ = aC_+ + bC_-, C'_- = cC_+ + dC_-. \quad (6.28)$$

绕同一个轴的第二次 90° 旋转将具有同样的系数：

$$C''_+ = aC'_+ + bC'_-, C''_- = cC'_+ + dC'_-. \quad (6.29)$$

把式 (6.28) 和 (6.29) 结合起来, 得到:

$$\begin{aligned}C''_+ &= a(aC_+ + bC_-) + b(cC_+ + dC_-), \\C''_- &= c(aC_+ + bC_-) + d(cC_+ + dC_-).\end{aligned}\tag{6.30}$$

然而, 从式 (6.27) 我们知道:

$$C''_+ = C_-, \quad C''_- = -C_+,$$

所以, 我们必定有:

$$\begin{aligned}ab + bd &= 1, \\a^2 + bc &= 0, \\ac + cd &= -1, \\bc + d^2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.31}$$

从这四个方程式足以确定所有的未知数 a , b , c 和 d 。这是不难做到的。考察第二个和第四个方程式。由之推得 $a^2 = d^2$, 这意味着 $a = d$, 或者 $a = -d$ 。但是 $a = -d$ 要去掉, 因为如果这个关系成立的话第一个方程式就不正确了, 所以 $d = a$ 。利用这一关系式我们立即可以得到 $b = 1/2a$ 以及 $c = -1/2a$ 。现在我们把各个未知数用 a 表示。譬如, 把第二个方程式全部用 a 表示:

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0 \quad \text{或} \quad a^4 = \frac{1}{4}.$$

这个方程式有四个不同的解，但其中只有两个给出行列式的标准值。

我们可以取 $a = 1/\sqrt{2}$ ；于是^[5]

$$\begin{aligned} a &= 1/\sqrt{2}, b = 1/\sqrt{2}, \\ c &= -1/\sqrt{2}, d = 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

换言之，对于两台装置 S 和 T ， T 对 S 绕 y 轴旋转 90° ，变换式为：

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-) \\ C'_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-C_+ + C_-) \end{aligned} \right\} \text{绕 } y \text{ 轴旋转 } 90^\circ. \quad (6.32)$$

当然，我们可以从这些方程式解出 C_+ 和 C_- ，这就给出绕 y 轴转动负 90° 的变换。交换“撇”号，将得出结论

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - C_-) \\ C'_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-) \end{aligned} \right\} \text{绕 } y \text{ 轴旋转 } -90^\circ. \quad (6.33)$$

§6-5 绕 x 轴的转动

你们可能会想：“这样越来越荒谬。接下来他们将做些什么？绕 y 轴旋转 47° ，然后绕 x 轴旋转 33° 等，一直这样求下去吗？”不，我们就要结束了。只用两个我们已经求出的变换——绕 y 轴旋转 90° 。以及绕 z 轴转任意的角度（如果你还记得，我们在一开始就已经把它算出来了）——我们就完全可以做到任意的转动。

作为一个例证，我们讨论绕 x 轴旋转角度 α 。我们知道如何处理绕 z 轴旋转角度 α ，但是我们现在要的是绕 x 轴旋转。怎样求呢？第一步，把 z 轴转到 x 的位置——这就是图6-8所示的绕 y 轴旋转 90° 。然后绕 z' 转过角度 α 。再绕 y'' 旋转 -90° 。三次旋转的净效果和绕 x 轴旋转 α 角度是相同的。这是空间的特性。

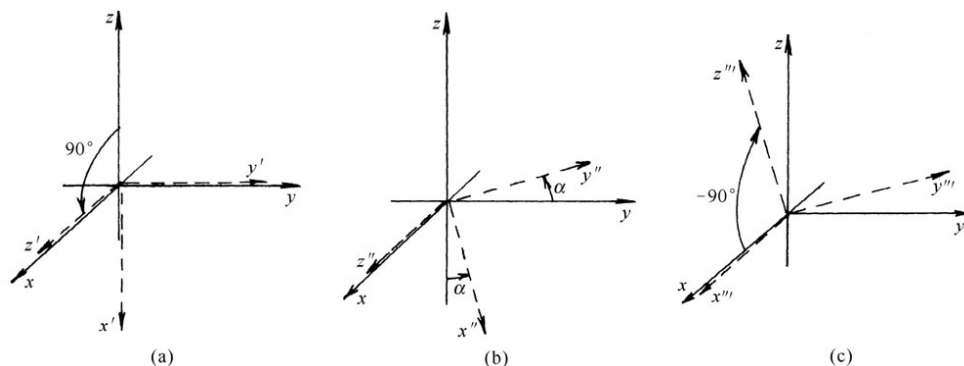


图6-8 绕 x 轴旋转 α 等效于：(a) 绕 y 轴旋转 $+90^\circ$ ，接着 (b) 绕 z' 轴旋转 α ，接着 (c) 绕 y'' 轴旋转 -90°

（这些组合旋转的过程以及它们产生的结果很难直观地掌握。这是比较陌生的，虽然我们生活在三维空间中，但是这样转一转，然后那样转一转会得到些什么结果，对我们来说是很难领会的。假如我们是鱼或者是鸟，真正体会过在空中翻筋斗时发生些什么，或许我们就比较容易理解这些东西。）

不管怎样，现在让我们应用已知的结论来求出绕 x 轴旋转 α 的变换关系。第一步绕 y 轴旋转 $+90^\circ$ ，振幅按照式(6.32)改变。我们把旋转后的坐标轴叫做 x' 、 y' 和 z' ，第二步绕 z' 转动角度 α ，我们就得到坐标系 x'' 、 y'' 、 z'' ，对此：

$$C''_+ = e^{i\alpha/2} C'_+, \quad C''_- = e^{-i\alpha/2} C'_-.$$

最后一次绕 y'' 轴作 -90° 旋转使我们得到 x''' 、 y''' 、 z''' ，由式（6.33）

$$\begin{aligned} C_+''' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+'' - C_-''), \\ C_-''' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+'' + C_-''). \end{aligned}$$

把上面这两个变换式结合起来，我们得到：

$$\begin{aligned} C_+''' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+i\alpha'/2} C_+' - e^{-i\alpha'/2} C_-'), \\ C_-''' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+i\alpha'/2} C_+' + e^{-i\alpha'/2} C_-'). \end{aligned}$$

应用对于 C_+' 和 C_-' 的方程式（6.32），我们得到完整的变换：

$$\begin{aligned} C_+''' &= \frac{1}{2} \{ e^{+i\alpha'/2} (C_+ + C_-) - e^{-i\alpha'/2} (-C_+ + C_-) \}, \\ C_-''' &= \frac{1}{2} \{ e^{+i\alpha'/2} (C_+ + C_-) + e^{-i\alpha'/2} (-C_+ + C_-) \}. \end{aligned}$$

根据：

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad \text{和} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta,$$

可把上面的公式写成比较简单的形式，于是得到：

$$\left. \begin{aligned} C_+''' &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right) C_+ + i \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) C_- \\ C_-''' &= i \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) C_+ + \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right) C_- \end{aligned} \right\} \text{绕 } x \text{ 轴旋转 } \alpha. \quad (6.34)$$

这就是绕 x 轴旋转任意角度 α 的变换。它比其他的变换只是稍微复杂一点。

§6-6 任意的旋转

现在我们可以知道对于完全任意的角度应怎样进行变换。首先，我们知道，两个坐标系之间的任意相对取向可用图6-9所示的3个角度来描写。假定我们有一组对于 x ， y 和 z 而言具有完全任意取向的坐标系 x' ， y' 和 z' ，我们可用3个欧拉角 α ， β ， γ 来描写这两个坐标系之间的关系。欧拉角规定了从坐标系 x ， y ， z 变为坐标系 x' ， y' ， z' 的3次连续转动。从 x ， y ， z 开始，我们把坐标绕 z 轴转过角度 β ， x 轴转到直线 x_1 ，然后绕这临时的 x 轴（即 x_1 ）旋转 α ，把 z 转至 z' 。最后，绕新的 z 轴（即 z' ）旋转角度 γ ，就使 x 轴变为 x' ， y 轴变为 y' [\[6\]](#)。我们已经知道这3次旋转的每一次旋转的变换关系——它们由式（6.19）和（6.34）所给出。以适当的顺序把它们结合起来，我们得到：

$$\begin{aligned} C'_+ &= \cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2} C_+ + i \sin \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta-\gamma)/2} C_-, \\ C'_- &= i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta-\gamma)/2} C_+ + \cos \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta+\gamma)/2} C_-. \end{aligned} \tag{6.35}$$

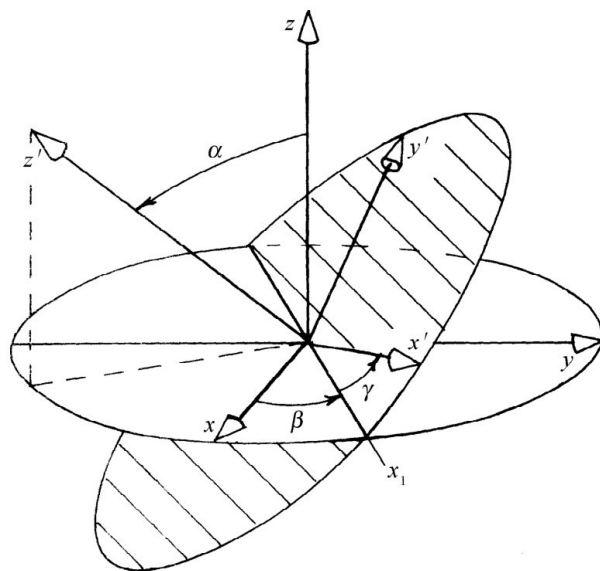


图6-9 任意坐标系 x' , y' , z' 相对于另一坐标系 x , y , z 的取向可以用欧拉角 α , β , γ 来规定

所以仅仅从关于空间性质的某些假设出发，我们就导出了完全任意的旋转的变换关系式。这就意味着，如果我们知道了处于任一状态的自旋为1/2的粒子进入坐标为 x , y , z 的施特恩-格拉赫装置 S 的两束射束的振幅，我们就可以算出这种粒子进入坐标为 x' , y' , z' 的装置 T 中某一射束粒子的比例。换言之，假如我们已经知道自旋为1/2的粒子的状态 ψ ，它们在 x , y , z 坐标系中相对于 z 轴向“上”和向“下”的振幅是 $C_+ = \langle + | \psi \rangle$ 和 $C_- = \langle - | \psi \rangle$ ，我们也就知道了相对于另一任意坐标系 x' , y' , z' 的 z' 轴向“上”和向“下”的振幅。方程式 (6.35) 中4个系数是“变换矩阵”中的项，有了它们，就可把自旋为1/2的粒子的振幅投影到另一任意的坐标系中。

现在举几个例子来说明怎样进行这种变换。我们来讨论下面这个简单的问题。将一个自旋1/2的原子放入只能透过 $(+z)$ 态的施特恩-格拉赫装置中。这个原子进入 $(+x)$ 态的振幅是什么？ $+x$ 轴与系统绕 y 轴旋转 90° 后的 $+z'$ 轴相同。对这个问题，用式 (6.32) 最为简单——

虽然你们也可应用式（6.35）这个完整的方程式。因为 $C_+=1$ ， $C_-=0$ ，我们得到 $C'_+=1/\sqrt{2}$ 。概率就等于这些振幅的绝对值的平方，从而粒子有50%的机会通过选择（+x）态的装置。如果我们问的是（-x）态，振幅就是 $-1/\sqrt{2}$ ，它仍旧给出概率为1/2——正如你们从空间的对称性所预期的。所以，如果粒子处于（+z）态，它有同样的可能性进入（+x）态和（-x）态，只不过相位是相反的。

对于y轴也同样合适，在（+z）态中的粒子进入（+y）或进入（-y）的机会是50对50，然而，在这种情况下（应用绕x轴旋转-90°的公式），振幅为 $1/\sqrt{2}$ 和 $-i/\sqrt{2}$ 。这一次两个振幅的相位差为90°，这和（+x）和（-x）相位差为180°不同。事实上，这里显示出了x和y之间的区别。

作为最后一个例子，假定已知在状态 ψ 中的自旋为1/2的粒子是对于某个轴A“向上”极化的。A轴由图6-10中的 θ 和 ϕ 决定。我们要求出粒子对于z轴“向上”的振幅 C_+ 和对于z“向下”的振幅 C_- 。我们可以这样来求这两个振幅：设想A是一个坐标系的z轴，这个坐标系的x轴指向随便哪一个方向——譬如A和z组成的平面上，然后可以通过3次旋转使A的坐标系和x，y，z重合。首先，绕A轴旋转 $-\pi/2$ ，于是x轴落到图上的直线B上，然后绕直线B（坐标系A的新的x轴）旋转 θ 使A和z轴重合。最后，绕z轴旋转角度 $(\pi/2-\phi)$ 。记住，我们只有对于A为（+）的状态，我们得到

$$C_+ = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2}, \quad C_- = \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi/2}. \quad (6.36)$$

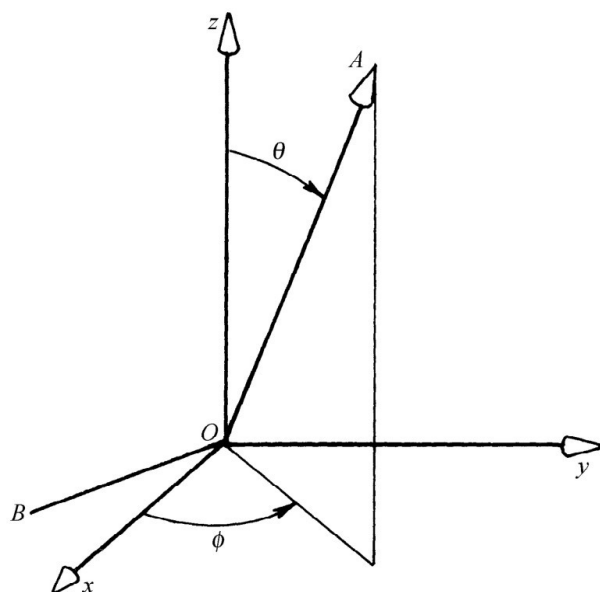


图6-10 由极角 θ 和 ϕ 定义的 A 轴

最后，我们将以表格形式总结一下本章的结果，这对我们以后的工作是有用的。首先要提醒你们，式（6.35）中的主要结果可以用另外的符号来表示。注意式（6.35）和（6.4）是同一回事。这就是说，式（6.35）中的系数 $C_+ = \langle +S | \psi \rangle$ 和 $C_- = \langle -S | \psi \rangle$ 就是式（6.4）中的振幅 $\langle jT | iS \rangle$ ——处于 S 的 i 态中的粒子进入 T 的 j 态的振幅（ T 相对于 S 的取向由 α, β, γ 表示）。在式（6.6）中我们也把它叫作 R_{ji}^{TS} 。（我们的符号太多了！）例如， $R_{+-}^{TS} = \langle -T | +S \rangle$ 就是在 C_- 的公式中 C_+ 的系数，即 $i \sin(\alpha/2) e^{i(\beta-\gamma)/2}$ 。因此，我们把我们的结果总结一下排列在表6-1中。

表6-1 由图6-9的欧拉角 α, β, γ 所定义的旋转的振幅 $\langle jT | iS \rangle R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)$

$\langle jT iS \rangle$	$+S$	$-S$
$+T$	$\cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2}$	$i \sin \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta-\gamma)/2}$
$-T$	$i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta-\gamma)/2}$	$\cos \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta+\gamma)/2}$

将某些已经求出的简单的特殊情况的振幅列出来，在使用时往往十分方便。令 $R_z(\phi)$ 代表绕 z 轴转过角度 ϕ 的旋转。它也可以代表相应的旋转矩阵（略去下标 i 和 j ，这很容易理解）。按照同样的精神， $R_x(\phi)$ 和 $R_y(\phi)$ 分别代表绕 x 轴和绕 y 轴旋转角度 ϕ 。在表6-2中我们写出矩阵——振幅 $\langle jT | iS \rangle$ 的表——这些是从 S 坐标系投影到 T 坐标系的矩阵元， T 是从 S 经过指定的旋转得到的。

表6-2 绕 z 轴， x 轴或 y 轴转过角度 ϕ 的旋转 $R(\phi)$ 的振幅 $\langle jT | iS \rangle$

	$R_z(\phi)$		$R_x(\phi)$		$R_y(\phi)$	
$\langle jT iS \rangle$	$+S$	$-S$	$+S$	$-S$	$+S$	$-S$
$+T$	$e^{i\phi/2}$	0	$\cos \phi/2$	$i \sin \phi/2$	$\cos \phi/2$	$\sin \phi/2$
$-T$	0	$e^{-i\phi/2}$	$i \sin \phi/2$	$\cos \phi/2$	$-\sin \phi/2$	$\cos \phi/2$

[1] 本章是比较长且抽象的一个附带观光，这里并不引进，在以后各章中也不再以其他的方式引进任何新概念。所以你们完全可以跳过这一章，如果以后感兴趣的话可以再回头过来读它。

[2] 从另一个角度来看，我们只是利用式（6.15）把变换纳入§6-2所描写的“标准形式”中。

[3] 可以看出 $m=-1/2$ 也行。然而，我们从式（6.17）中看到，符号的改变只是重新规定自旋向上的粒子的符号而已。

[4] 同样，假如某一物体经过一系列微小转动后，其净效果正好回到原来的取向，如果你们跟踪它的整个历史就可以定义它转动了 360° ——以区别于净转动为零。（非常有趣的是，对于 $72^\circ 0$ 的净转动这是不正确的。）

[5] 另一个解改变 a ， b ， c 和 d 的所有符号，它相当于 -270° 的旋转。

[6] 稍微花一点功夫你们就可以看出，通过下述绕原来的坐标轴作三次旋转也能够把 x ， y ， z 变换为 x' ， y' ， z' ：①绕原来的 z 轴旋转角度 γ ；②绕原来的 x 轴旋转角度 α ；③绕原来的 z 轴旋转角度 β 。

第7章 振幅对时间的依赖关系

§7-1 静止的原子；定态

我们现在要谈一些概率幅在时间中的行为。之所以只讲“一些”，是因为时间中的实际行为必然涉及空间中的行为。因此，如果我们正确而详尽地处理这个问题，我们立刻就遇到最复杂的可能情况。我们总是处于这种困境，究竟是选用一种逻辑上严密然而颇为抽象的方式来处理问题，还是选用一种全然不严格、然而能使人对真实情况获得某种概念的方式来处理问题——将更仔细的讨论留到以后去。就能量相关性而言，我们将采用第二种做法。我们将作出一系列陈述。我们不要求严格，只是把业已发现的事实告诉你们，使你们对振幅作为时间的函数的特性得到一些感觉。当我们继续讲下去时，描述的精确性将逐渐增加，所以不要感到不安，似乎我们是在凭空捏造。当然，它确实是完全凭空的——凭借实验以及人类想象之空。但是重温历史的发展要花费太多时间，所以我们必须从其中某个阶段开始。我们可以埋头于抽象方式，并推导出一切——然而这么一来你们不易理解——或者，也可以诉诸大量实验来证实每个论述。我们选取了介于上述两者之间的做法。

虚空空间中只有一个电子时，在一定条件下，它可以有确定的能量。例如，假使它静止着（就是它不作平动，也就没有动量或动能），它具有静止能量。像原子这样较复杂的粒子在静止时也可以有确定的能量，但它也可能由于内部激发而处在另一个能级上。（我们

将在以后叙述其中机理。) 我们常常可以把处在激发态的原子看作具有确定的能量，但这实际上只是近似正确而已。原子不会永远停留在激发态上，因为它会通过和电磁场相互作用而释放能量。所以，就有产生新状态的振幅——原子跃迁到较低的状态，而电磁场则变为较高的激发态。系统的总能量前后不变，但原子的能量减少了。所以，一个受激原子具有确定的能量这种说法是不精确的，不过这样说常常是方便的，而且并不十分错误。

[附带提一下，为什么原子这样变化而不那样变化？为什么原子辐射光？答案必定与熵有关。当能量处在电磁场中时，这些能量有如此多的存在方式——有如此多的地方供它徘徊——如果我们寻求平衡条件的话，我们发现最可能的情况是电磁场受到激发增加光子，原子退激发。要经过很长的时间后光子再返回来，并且发现它会将原子重新激发。这与以下这个经典问题非常类似：为什么加速运动的电荷会辐射？这并不意味着它“想要”丢掉能量，因为实际上当它辐射时，世界的总能量依然与辐射前一样。辐射或吸收沿着熵增加的方向进行。]

原子核也可处于不同能级，在不计电磁效应的近似下，我们可以说有一个处于激发态的原子核。虽然我们知道它不会永远停留在该状态，但是，从一种多少理想化了的而又易于思考的近似情况着手往往是有用的。在一定的情况下这种近似常常也是合理的。（当我们最初介绍自由落体的经典定律时，并没有把摩擦考虑进去，但几乎从未有过一点摩擦也没有的情况。）

还存在着一些亚核“奇异粒子”，它们具有不同的质量。但较重的粒子会衰变为其他的轻粒子，因此说它们具有精确确定的能量也不正确。只当它们永远不发生变化这样说才是正确的。所以，在我们当作

它们具有确定能量这一近似时，忽略了这些粒子必定分裂这一事实。目前，我们有意忘掉这种过程，以后再来学习怎样将它们考虑进去。

假设有个原子——或电子，或任何粒子——在静止时具有确定能量 E_0 。所谓 E_0 指的是总质量乘以 c^2 。这种质量包括了所有内能；所以受激原子具有的质量与处在基态的同样原子的质量不同。（基态的意思是能量最低。）我们称 E_0 为“静止能量”。

对于静止的原子，在各个地方找到它的量子力学振幅处处相同，它与位置无关。当然，这意味着在任何地方找到原子的概率都相同。不过，这里还有更多的含义。概率可以和位置无关，但振幅的相位则可以随着地点而改变。但对静止的粒子来说，整个振幅处处一样，然而它实际上依赖于时间。对于处在具有确定能量 E_0 的状态的粒子来说，在 (x, y, z) 处和时刻 t 找到粒子的振幅是

$$a e^{-i(E_0/\hbar)t}, \quad (7.1)$$

这里 a 是某个常数。此振幅对空间任一点都相同，但它按照式(7.1)依赖于时间。我们就假定这一法则是正确的。

当然，式(7.1)也可写成

$$a e^{-i\omega t}, \quad (7.2)$$

这里

$$\hbar\omega = E_0 = Mc^2,$$

M 是原子或粒子的静质量。这里可以用三种不同的方式来表示能量：振幅的频率，经典意义的能量，或者惯性质量。它们彼此等价，只不过是同一事物的不同说法而已。

你们可能认为，想象一个在整个空间各个地点找到它的振幅都相等的“粒子”未免太不可思议了。无论如何，我们平常总将“粒子”想象为位于“某一地点”的一个小物体。但是，不要忘记不确定性原理。如果一个粒子有确定能量，它也就有确定的动量。如果动量的不确定量为零，那么不确定性原理 $\Delta p \Delta x = \hbar$ 告诉我们，位置的不确定量必定无限大，这正是我们所说的在空间中所有各点找到粒子的振幅都相等这句话的意义。

如果原子内部具有不同总能量的不同状态，那么振幅随时间的变化就不相同。如果你不知道它究竟处于哪种状态，那么它有一定的振幅处于某一状态，也有一定的振幅处于另一状态，而这些振幅各有不同的频率。在这些不同的分量之间将出现如拍音那样的干涉现象，这将表现为变化的概率。在原子内将有某种事情“发生”——即使从质心没有漂移这个意义上来说，整个原子是“静止”的。然而，如果原子有一个确定的能量，振幅由式 (7.1) 给出，而其绝对值平方与时间无关。由此你们可以看出，如果一个东西有确定能量而我们去追问任何有关于它的概率 问题的话，答案将与时间无关。但是如果能量确定，虽然振幅 随时间而变，但它按虚指数变化，因而绝对值不变。

这就是为什么我们常说在确定能级上的原子在定态 之中。假定你们对原子内部进行任何测量，你们将会发现没有一个量（的概率）会随时间而变化。为使概率随时间变化，必须使不同频率的两个振幅相干，而这就意味着我们不可能知道能量是多少。粒子将具有一定的振

幅处在一种能量状态，又具有一定的振幅处在另一种能量状态。这就是当某种东西的行为 随时间而变时量子力学对它的描述。

如果有这么一种“情况”，它是两种能量不同的状态的混合，那么原来各状态的振幅就按式（7.2）随时间而变化，例如

$$e^{-i(E_1/\hbar)t} \quad \text{及} \quad e^{-i(E_2/\hbar)t}. \quad (7.3)$$

如果这二者组合起来，我们就得到干涉。但我们注意到，如在两种能量上都加上一常数，这将毫无影响。如果另外某人采用一种不同的能量标度，使所有能量增加（或减少）同一个常量，譬如说 A ——那么在他看来，两种状态的振幅将是

$$e^{-i(E_1+A)t/\hbar} \quad \text{及} \quad e^{-i(E_2+A)t/\hbar}. \quad (7.4)$$

所有振幅都将乘上同样的因子 $e^{-i(A/\hbar)t}$ ，因而所有的线性组合或干涉都有同样的因子。在取绝对值平方求概率时，所有的答案都相同。能量标度的原点选择不会造成任何差异，我们可以从我们想选取的任何零点起测量能量。对于相对论的要求来说，测量能量时将静质量也包括在内较好，但对许多非相对论性的情况，从出现的所有能量中都减去某个标准量值常常是有益的。例如，就原子来说，减去 $M_s c^2$ 通常较方便，这里 M_s 是所有各个单独部分——核与电子——的总质量，它当然与整个原子的质量不同。在另一些问题中，从所有能量中减去 $M_g c^2$ 较为有用，这里 M_g 是处在基态的整个原子的质量，于是出现的能量只是原子的激发能。所以，有时我们可以将能量的零点移动很大的一个常量，如果在某个计算中将所有能量都作同样数量的移动，则不会造成任何差别。关于静止粒子我们就讲这些。

§7-2 匀速运动

如果我们认为相对论是正确的，那么在一个惯性系中静止的粒子在另一个惯性系中观察可能作匀速运动。在粒子静止的参考系中，概率振幅对所有的 x ， y 及 z 都相同，但它将随时间 t 而变化。振幅的大小对所有 t 都相同，但相位则依赖于 t 。如果画出作为 x 与 t 的函数关系等相位线——譬如说零相位线——我们就可得到一种表示振幅行为的图。对于静止的粒子，这些等相位线平行于 x 轴而在 t 轴上等间隔分布，如图7-1的虚线所示。

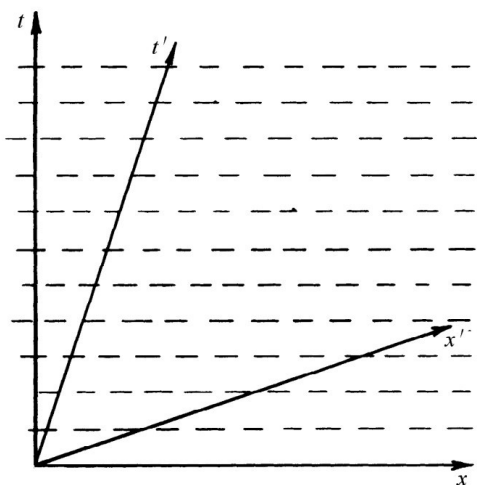


图7-1 在不同的 $x-t$ 系统中静止粒子振幅的相对论性变换

另一个不同的参考系—— x' ， y' ， z' ， t' ——相对于粒子在譬如说 x 方向上运动，空间任一点的坐标 x' 与 t' 通过洛伦兹变换和 x 与 t 相联系着。如图7-1中那样画出 x' 与 t' 轴，就可将这种变换用图来表示。

（见第1卷第17章图17-2。）你们可以看出，在 $x'-t'$ 系中等相位点沿着 t' 轴的间隔与 t 轴的不相同，因而时间变化频率是不相同的。同样，相位随 x' 也有变化，所以概率振幅必定也是 x' 的函数。

对以速度 v 沿着负 x 方向运动的洛伦兹变换中 t 与 t' 之间的关系是

$$t = \frac{t' - x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

所以现在振幅的变化方式就是

$$e^{-(i/\hbar)E_0 t} = e^{-(i/\hbar)(E_0 t' / \sqrt{1 - v^2/c^2} - E_0 vx' / c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})}.$$

在带撇的系统中它既随时间变化，也随空间变化。如果我们把振幅写成

$$e^{-(i/\hbar)(E'_p t' - p'_x x')},$$

就可以看出 $E'_p = E_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 是在经典物理含义上对一个静止能量为 E_0 而以速度 v 运动的粒子所求得能量，而 $p' = E'_p v / c^2$ 是相应的粒子动量。

你们知道 $x_\mu = (t, x, y, z)$ 及 $p_\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ 都是四维矢量，而 $p_\mu x_\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ 是个标量不变量。在粒子的静止参考系中， $p_\mu x_\mu$ 就是 Et ，所以如果变换到另一个坐标系中， Et 应代之以

$$E't' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'.$$

于是，动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子的概率幅将正比于

$$e^{-(i/\hbar)(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (7.5)$$

这里 E_p 是动量为 p 的粒子的能量，即

$$E_p = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}, \quad (7.6)$$

像前面一样，上式 E_0 是静能。对于非相对论性问题，

$$E_p = M_s c^2 + W_p, \quad (7.7)$$

这里 W_p 是原子各组成部分的静能 $M_s c^2$ 之外的能量。一般地讲， W_p 既包括原子动能，也包括可称之为“内”能的结合能或激发能。 W_p 可以写成

$$W_p = W_{\text{内}} + \frac{p^2}{2M}, \quad (7.8)$$

而振幅是

$$e^{-(i/\hbar)(W_p t - p \cdot x)}. \quad (7.9)$$

由于我们一般进行的是非相对论性计算，所以将使用概率幅的这个表达式。

注意，根据我们的相对论性变换，无须任何附加假设，就可得出在空间运动的原子的振幅变化。由式（7.9）空间变化的波数为

$$k = \frac{p}{\hbar}; \quad (7.10)$$

因而波长是

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}. \quad (7.11)$$

这跟前面我们所用的动量为 p 的粒子的波长相同。德布罗意正是以这个方式首先得出这个公式的。对一个运动粒子，振幅变化的频率仍由下式得出

$$\hbar \omega = W_p. \quad (7.12)$$

式(7.9)的绝对值平方正好是1，所以对一个具有确定能量的运动粒子，在任何地方找到它的概率都相同，并且不随时间变化。（重要的是应当注意振幅是复数波。假如我们用的是实数正弦波表示，其平方就会随位置而变化，而这是不正确的。）

当然，我们知道存在着粒子由一处运动到另一处的情况，因而概率随位置和时间而变化。怎样来描写这种情况呢？我们可以这样做，把振幅看成两个或两个以上的对应于确定能量状态的振幅之叠加。我们已经在第1卷第48章讨论过这种情况——即使对概率振幅而言也同样适用！我们发现具有不同波数 k （即动量）及不同频率 ω （即能量）的两个振幅之和将给出干涉峰或拍，因此振幅的平方就随着空间与时间变化。我们也发现这些拍以下式给出的所谓“群速度”运动：

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

这里 Δk 与 $\Delta\omega$ 分别是两列波的波数之差与频率之差。对更复杂的波——由许多频率全都相近的振幅叠加而成——来说，群速度是

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.13)$$

取 $\omega = E_p / \hbar$ 及 $k = p / \hbar$ ，我们看到

$$v_g = \frac{dE_p}{dp}. \quad (7.14)$$

利用式 (7.6)，我们有

$$\frac{dE_p}{dp} = c^2 \frac{p}{E_p}. \quad (7.15)$$

但 $E_p \approx Mc^2$ ，所以

$$\frac{dE_p}{dp} \approx \frac{p}{M}, \quad (7.16)$$

这正是粒子的经典速度。或者，如果使用非相对论性表达式 (7.7) 和 (7.8)，我们有

$$\omega = \frac{W_p}{\hbar} \quad \text{和} \quad k = \frac{p}{\hbar},$$

以及

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{dW}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2M} \right) = \frac{p}{M}, \quad (7.17)$$

这样又得到了经典速度。

于是我们的结果是，如果有几个能量几乎相同的纯能量状态的振幅，它们的干涉将产生概率“团”，以具有同样能量的粒子的经典速度在空间运动。然而，应当说明，当我们说将两列波数不同的波叠加所得到的拍对应于运动粒子的时候，我们已经引进了不能由相对论推出

的某种新的东西。我们讲过静止粒子的振幅如何，还要推知如果粒子运动，振幅又将如何。但由这样的论证不可能推论出当两列波以不同速度移动时会发生些什么。如果我们使其中一列停下，就不能停止另一列。所以我们无形中添加了额外的假设，即不仅式(7.9)是个可能的解，而且对于同样的系统还存在具有各种动量 p 的解，并且这些不同的项会发生干涉。

§7-3 势能；能量守恒

现在我们来讨论当粒子能量可以变化时将出现什么情况。我们从下述问题开始考虑。粒子在一个可用势描述的力场中运动，首先讨论势是常数的效应。假设有个大金属盒，将其静电势升高到 ϕ ，如图7-2所示。如果在盒内有带电体，它们的势能将是 $q\phi$ （我们称之为 V ），完全与位置无关。因为恒势对盒内所发生的任何事情都没有影响，因此在盒内的物理状况不会发生任何变化。我们既然没法推知答案是什么，那就必须进行猜测。你们多少会料到一个合理的猜测是：能量必定是势能 V 与能量 E_p 的和，这里 E_p 本身就是内能与动能的和。于是，振幅正比于

$$e^{-(i/\hbar)[(E_p+V)t-p\cdot x]}. \quad (7.18)$$

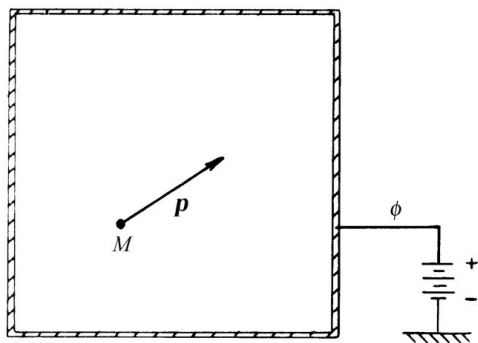


图7-2 质量为 M ，动量为 p 的粒子处在一个恒势区域中

一般的原则是： t 的系数（可称之为 ω ）总是由系统的总能量给出，
即内能（或“质量”）加动能再加势能：

$$\hbar \omega = E_p + V. \quad (7.19)$$

或者，对非相对论性情况有

$$\hbar \omega = W_{\text{内}} + \frac{p^2}{2M} + V. \quad (7.20)$$

现在，盒内会出现什么物理现象呢？如果存在着几个不同的能量状态，我们将得到什么结果？对每个状态的振幅都有一个相同的附加因子

$$e^{-(i/\hbar)Vt},$$

其余的因子都是 $V=0$ 时的项。这只不过好像改变了能量标度的零点。它使所有的振幅都产生相同的相位变化，但我们在前面已经看到，这并不会使概率有任何改变。所有的物理现象都相同。（我们假定讨论的是同一个带电体的不同状态，因此 $q\phi$ 对所有的状态都一样。如果带

电体由一个状态变到另一个状态时电荷也会变化，那就会有完全不同的结果，但电荷守恒防止了这种情况的出现。)

至此，我们的假设与我们对参照能级的变化所预期的情况是相符的。但如它确实正确，那就应当对势能不是恒量的情况亦成立。一般而言， V 可以随空间与时间两者以任意方式变化，有关振幅的完整结果必须借微分方程求得。我们打算立刻就来处理这种一般情况，而只想对某些事情怎样发生获得一些概念，所以我们将考虑只随空间作极缓慢变化而对时间为恒定的势场，这样我们就可以将经典概念与量子概念作一比较。

设想如图7-3所示的情况：有两个分别具有恒势 ϕ_1 与 ϕ_2 的盒子。假设在它们之间的区域中势从一个值平滑地变化到另一个值，我们设想在任何一个区域中都有找到某个粒子的振幅，并假定粒子的动量足够大，以至在任何有很多波长的小区域内势几乎是恒定的。于是我们会认为在空间的任何部分，振幅应具有式(7.18)那样的形式，而其中的 V 取所在的该部分空间的值。

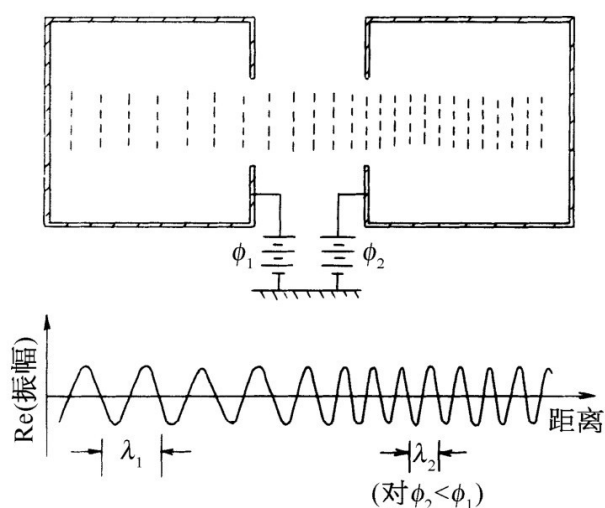


图7-3 粒子由一个势场转移至另一个势场的振幅

让我们考虑一个 $\phi_1=0$ 的特殊情况，因而此处势能为0，但 $q\phi_2$ 为负值，所以按照经典观点，在第二个盒子内的粒子具有更多的能量。按照经典观点，粒子在第二个盒内将跑得快些——它将具有更多能量，从而有更大的动量。现在来看一下怎样能从量子力学来得出这个结论。

依照所作的假设，在第一个盒中的振幅将正比于

$$e^{-(i/\hbar)[(W_{\text{内}}+p_1^2/(2M)+V_1)t-p_1\cdot\mathbf{x}]}, \quad (7.21)$$

而在第二个盒内的振幅正比于

$$e^{-(i/\hbar)[(W_{\text{内}}+p_2^2/(2M)+V_2)t-p_2\cdot\mathbf{x}]}. \quad (7.22)$$

（这里认为内能不变，因而在两个区域中都相同。）现在的问题是这两个振幅在两盒子之间的区域中如何相匹配？

我们假设势不随时间变化，即所有条件都不发生变化。于是我们就可假定各处不同的振幅（即其相位）都有相同的频率——可以说在“介质”中没有任何事情与时间有关。如果空间中没有任何变化，我们可以认为在一个区域中的波在全部空间中“产生”出子波，它们全都以相同频率振动——就像光波通过几种静止的材料时不改变它们的频率一样。如果式（7.21）和（7.22）中的频率相同，就必定有

$$W_{\text{内}} + \frac{p_1^2}{2M} + V_1 = W_{\text{内}} + \frac{p_2^2}{2M} + V_2. \quad (7.23)$$

两边都正好等于经典的总能量，故式（7.23）就是能量守恒的表述。换言之，与能量守恒的经典表述相等价的量子力学表述是：如果条件不随时间变化，则粒子的频率到处都相同。这一切都与 $\hbar\omega = E$ 这个概念相符合。

在上述特例中 $V_1=0$ ，而 V_2 为负。式（7.23）给出 p_2 大于 p_1 ，所以区域2中波的波长较短。等相面由图7-3中虚线表示出来。我们也画出了振幅的实部图，它再次显示出由区域1至区域2波长减少的情况。波的群速度 p/M 也按照我们由经典的能量守恒关系所预期的方式增加，因为经典能量守恒律由式（7.23）所表示。

有一种有趣的特殊情况是： V_2 很大以至 $V_2 - V_1$ 大于 $p_1^2/(2M)$ ，这时，由公式

$$p_2^2 = 2M \left[\frac{p_1^2}{2M} - V_2 + V_1 \right] \quad (7.24)$$

给出的 p_2^2 为负值。这意味着 p_2 是个虚数，譬如说 ip' ，按照经典的观点我们会说粒子绝不会进入区域2，它没有足够的能量越过势垒。然而，在量子力学上，振幅仍由式（7.22）给出，它随空间的变化方式仍是

$$e^{(i/\hbar)p_2 \cdot x}.$$

但如 p_2 是虚数，空间相关性变为实指数形式。譬如说粒子原先沿 +x 方向运动，那么振幅则按

$$e^{-p'x/\hbar} \quad (7.25)$$

而变化，它随着 x 的增加而迅速减小。

设想这两个具有不同势的区域互相非常靠近，这样势能从 V_1 突然变为 V_2 ，如图7-4（a）所示。如果我们画出振幅的实部，就得到图7-4（b）中所示的曲线。在区域1中的波对应于试图进入区域2的粒子，但在进入区域2后振幅就迅速衰减了。在区域2中还是有可以观察到粒子的机会——在经典（观念）上它是根本不可能达到该区域的——但除去紧靠边界处外，振幅是非常小的。这种情况与我们在光的全内反射情况中所见到的极为相像。这时光没有像通常那样射出，但若在离表面的一两个波长的地方放上某种东西，我们就可以观察到光。

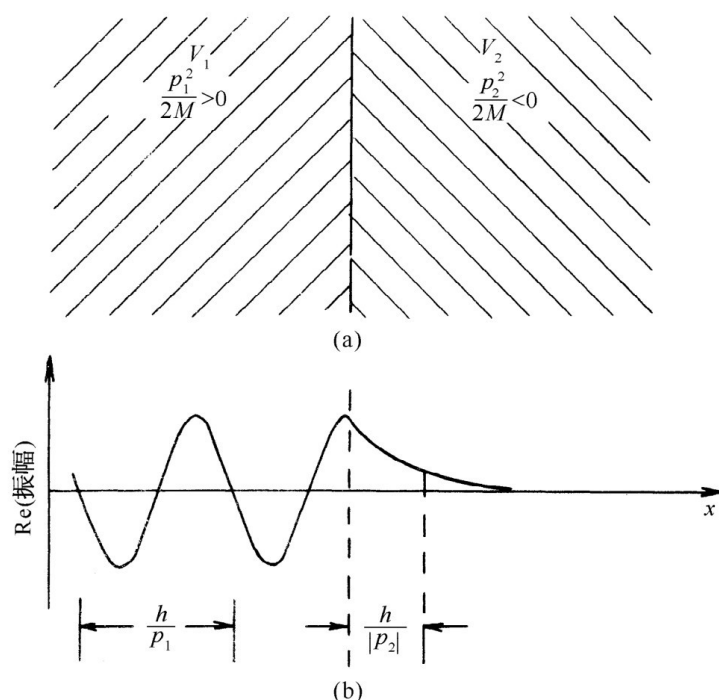


图7-4 向很强的排斥势运动的粒子的振幅

你们一定还记得，如果将另一个表面紧靠着光全反射的那个边界面，就会发现有一些光透射到了第二块材料中。在量子力学中粒子也发生相类似的情况。如在一个狭小区域中有一个颇大的势 V 以至于使

经典意义上的动能为负，按照经典的观点粒子绝不会通过这个区域。但在量子力学中，指数衰减的振幅可以通过这个区域，给出在动能重新为正的另一边找到粒子的微小概率，情况如图7-5所示。这个效应就称为量子力学的“势垒穿透”效应。

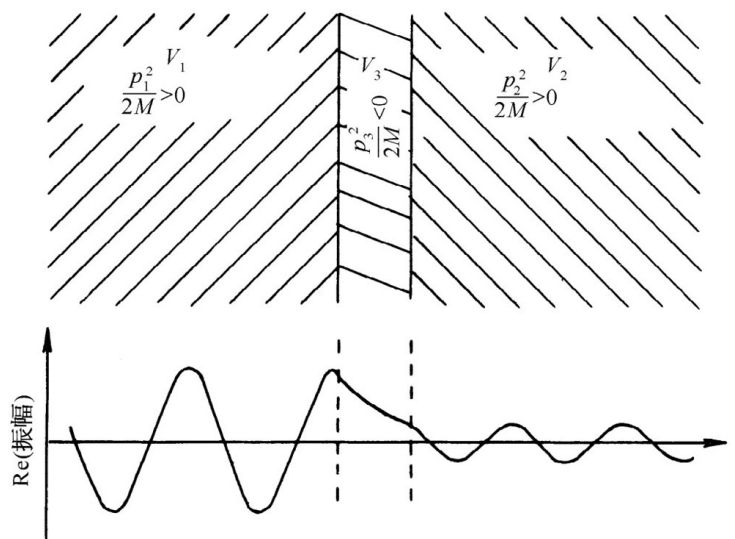


图 7-5 粒子穿透势垒的振幅

量子力学振幅的势垒穿透对铀核的 α 粒子衰变作出了解释——或者说描述。如图7-6（a）所示为 α 粒子的势能作为离铀核中心之距离的函数。如果我们打算把一个能量为 E 的 α 粒子射入铀核，它将会受到来自核电荷 Z 的静电斥力，按照经典力学，它不可能靠得比距离 r_1 更近，在 r_1 处它的总能量与势能 V 相等。然而，在原子核内部，因为短程核力的强烈吸引，势能就大为降低。那么，在放射衰变中我们发现具有能量 E 的 α 粒子由核内射出，这是怎么回事呢？原因是它们带有能量 E 从核内出发，并“透”过势垒。概率幅大致如图7-6（b）所示。当然实际上指数衰减要比图中画的大得多。事实上，令人非常惊异的是，铀核中的 α 粒子的平均寿命长达45亿年，而核内的固有振动极快——约为 10^{22} Hz！怎么可能由 10^{-22} s得出 10^9 年这样一个数呢？答案在

于指数提供了约为 e^{-45} 这样极其微小的因子，这就得到了极其微小的、然而却是确定的渗漏概率。一旦 α 粒子处在核中，在外部几乎就没有找到它的振幅，然而，如果你们取许多铀核，并且等待足够长时间的话，你们就可能有幸发现一个 α 粒子跑了出来。

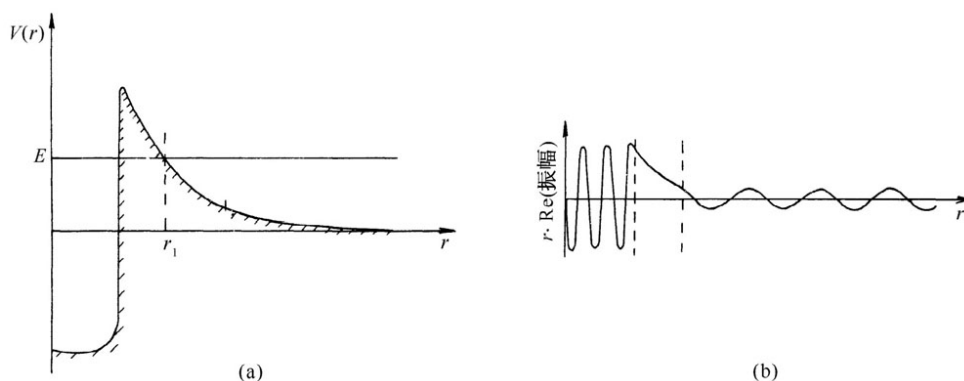


图7-6 (a) 铀核中 α 粒子的势函数；(b) 概率幅的定性图示

§7-4 力；经典极限

假设有个运动粒子穿过一个区域，在该区域内，存在着一个在垂直于运动方向上变化的势场。按照经典的观点我们可以用图7-7来描述这种情况。如粒子沿 x 方向运动，进入一个势随 y 而变化的区域，那么这个粒子将从力 $F = -\partial V / \partial y$ 得到一个横向的加速度。如果只是在宽为 w 的有限区域中存在力的作用，那么作用时间只是 w/v 。粒子获得的横向动量就将是

$$p_y = F \frac{w}{v},$$

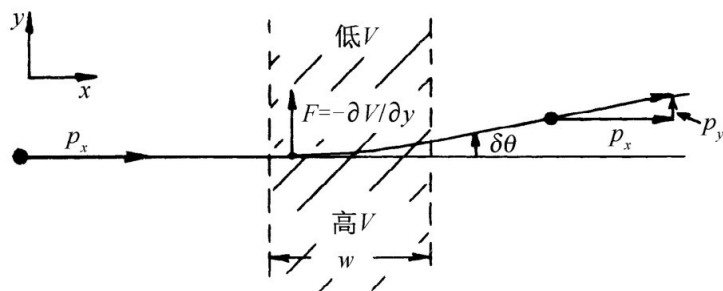


图7-7 在横向势梯度作用下粒子的偏转

而偏转角 $\delta\theta$ 就是

$$\delta\theta = \frac{p_y}{p} = \frac{Fw}{pv},$$

这里 p 是初始动量。用 $-\partial V/\partial y$ 代 F ，就有

$$\delta\theta = -\frac{w}{pv} \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (7.26)$$

现在我们该来看一下，所设想的式（7.20）那样的波是否能解释这样的结果。我们从量子力学角度来看这同一件事，假设每样东西的尺度与概率幅波的波长相比都非常大。在任何小区域内我们可以说振幅依下式变化

$$e^{-(i/\hbar)[(W+p^2/(2M)+V)t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}]}. \quad (7.27)$$

我们是否能由此看出当 V 具有横向梯度时上式会造成粒子的偏转呢？在图7-8中我们描绘了概率波的样子。我们所画的是一系列“等相位”线，你们可将它们看作振幅的相位为零的面。在每个小区域中，相邻等相位线之间的距离，即波长是

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

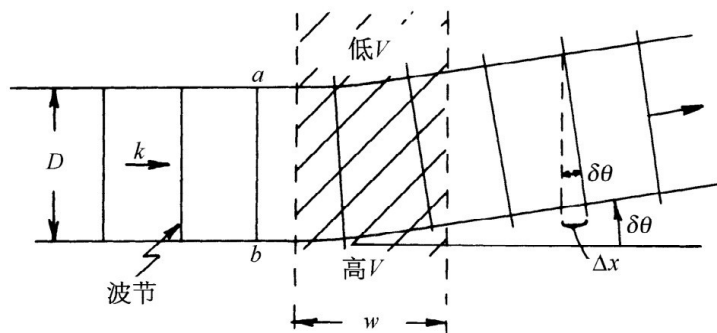


图7-8 在具有横向势梯度的区域中的概率幅波

p 与 V 之间的关系是

$$W + \frac{p^2}{2M} + V = \text{常数}. \quad (7.28)$$

在 V 较大区域中, p 较小, 波长就较长。因此等相位线之间的角度就发生变化, 如图中所示。

为求出波的等相位线的角度的变化, 我们注意到, 对于图7-8中 a 和 b 两条路径而言, 存在着势差 $\Delta V = (\partial V / \partial y) D$, 所以两条路径上就有动量差 Δp , 这可由式 (7.28) 得出:

$$\Delta\left(\frac{p^2}{2M}\right) = \frac{p}{M} \Delta p = -\Delta V. \quad (7.29)$$

因此, 沿两条路径上的波数 $p/\hbar$ 是不同的, 这意味着相位以不同的速率前进。相位增加率的差值是 $\Delta k = \Delta p/\hbar$, 于是经过距离 w 后的总的相位差是

$$\Delta(\text{相位}) = \Delta k \cdot w = \frac{\Delta p}{\hbar} w = -\frac{M}{p} \frac{\Delta V}{\hbar} \cdot w. \quad (7.30)$$

这就是当波离开狭条阴影区时沿路径***b***的相位“超前”于沿路径***a***的相位的数量。而在狭条外的区域中，这一数量的相位超前对应于等位相线超前的数量为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta(\text{相位}) = \frac{\hbar}{p} \Delta(\text{相位})$$

或

$$\Delta x = -\frac{M}{p^2} \Delta V \cdot w. \quad (7.31)$$

参考图7-8，我们看到新的波前将偏转 $\delta\theta$ ， $\delta\theta$ 可由下式得出

$$\Delta x = D\delta\theta, \quad (7.32)$$

于是我们有

$$D\delta\theta = -\frac{M}{p^2} \Delta V \cdot w. \quad (7.33)$$

如果用 v 代替 p/M ，用 $\partial V/\partial y$ 代替 $\Delta V/D$ ，上式就与式（7.26）相同。

我们刚才所得结果只是在势缓慢而光滑变化的情况下（我们称此为经典极限）才是正确的。我们证明了在这些条件下，假如势 V 对概率幅相位的贡献是 $Vt/\hbar$ 的话，我们将得出与由 $F=ma$ 所得的同样的粒子运动。在经典极限下，量子力学与牛顿力学相一致。

§7-5 自旋1/2粒子的“进动”

注意，我们还不曾对势能作过任何特殊的假定——它只是个由其导数可求出力的能量。例如在施特恩-格拉赫实验中，能量是 $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ ，如果 $\mathbf{B}$ 在空间中变化，由 U 就能求出力来。如果我们要作一个量子力学描述，就可以说一束粒子的能量按一种方式变化，另一束粒子的能量则按相反的方式变化。（我们可以将磁能 U 归入势能 V 中，也可以归入“内”能 W 中，这并没有什么关系。）由于能量的变化，波被折射，粒子束往上或往下偏转。（现在我们看到量子力学所给出的弯曲和由经典力学计算所得的结果相同。）

从振幅对势能的依赖关系，我们也可以预期：如果粒子处在沿 z 方向均匀的磁场中，它的概率幅必定按

$$e^{-(i/\hbar)(-\mu_z B)t}$$

而随时间变化。（事实上，我们可以把这作为 μ_z 的定义。）换言之，假如我们把一个粒子置于均匀磁场 B 中，经过一段时间 τ ，其概率幅将为无磁场时的概率幅乘以

$$e^{-(i/\hbar)(-\mu_z B)\tau}.$$

由于对自旋1/2粒子来说， μ_z 可以是某个数 μ 的正值或负值，因而在匀磁场中这两种可能状态的相位将有同样的变化率，但沿着相反的方向。两种振幅分别要乘以

$$e^{\pm(i/\hbar)\mu B\tau}. \quad (7.34)$$

这个结果会得出一些有趣的结论：假定有个自旋1/2粒子处于某个不完全朝上或朝下的状态，我们可以用处于纯粹朝上和纯粹朝下状态的振幅来描述这一状态，但在磁场中，这两个态的相位将有不同的变化率。所以如果要问一些有关振幅的问题，那么答案将取决于它在磁场中已停留了多长时间。

作为一个例子，我们考虑 μ 子在磁场中的衰变。当 μ 子作为 π 介子衰变的产物而形成时，它们是极化的（换言之，它们有着优先的自旋取向）。接着， μ 子衰变——平均约为 $2.2\mu\text{s}$ ——发射出一个电子及两个中微子：

$$\mu \longrightarrow e + \nu + \bar{\nu}.$$

发现这个衰变中（至少在最高能量下）电子优先在与 μ 子自旋方向相反的方向上发射出来。

假设我们考虑一个如图7-9所示的实验安排。如果极化的 μ 子从左方射入而在一块材料的 A 中停了下来，稍过一会儿它们就会衰变。一般地说，电子将向一切可能方向飞出。然而，假定当 μ 子进入这块停在 A 处的物质时，全都带有沿 x 方向的自旋。如果没有磁场的话，将会在衰变方向上存在某种角分布，我们想要知道的是磁场的存在怎样改变这种分布。我们预期分布会以某种方式随时间而变。通过求出任何时刻在 $(+x)$ 态找到 μ 子的振幅，我们就可以知道发生了什么。

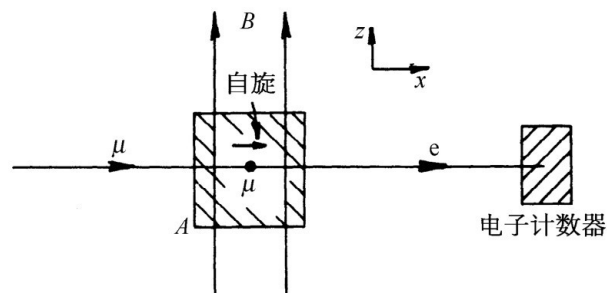


图7-9 μ 子衰变实验

这个问题可以表述为：已知一个 μ 子在 $t=0$ 时其自旋沿 $+x$ 方向，那么在 τ 时刻它处在同一自旋态的振幅为何？关于自旋 $1/2$ 粒子处在与自旋相垂直的磁场中的行为，我们现在还没有任何法则，但我们知道磁场对于自旋朝上或朝下的状态所产生的影响——它们的振幅需乘以式（7.34）的因子。于是我们的办法就是选择这样一种表象，其中的基础态对 z 方向（场方向）而言为自旋朝上和自旋朝下。任何问题都可参照这两个态的振幅来表达。

让我们设 $\psi(t)$ 表示 μ 子状态。当它进入块状物 A 时，其状态为 $\psi(0)$ ，我们想知道晚些时刻 τ 的 $\psi(\tau)$ 。如果用 $(+z)$ 与 $(-z)$ 表示两个基础态，我们知道 $\langle +z | \psi(0) \rangle$ 及 $\langle -z | \psi(0) \rangle$ 这两个振幅——我们知道这些振幅，因为我们知道 $\psi(0)$ 表示自旋沿 $(+x)$ 方向的状态。由上一章所得的结果，这些振幅是^[2]

$$\langle +z | +x \rangle = C_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.35)$$

及

$$\langle -z | +x \rangle = C_- = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

它们正好相等。由于这些振幅涉及的是 $t=0$ 时的状况，让我们称它们为 $C_+(0)$ 及 $C_-(0)$ 。

现在我们知道这两个振幅将如何随时间变化。利用式(7.34)，我们有

$$C_+(t) = C_+(0)e^{-(i/\hbar)\mu B t}$$

及

$$C_-(t) = C_-(0)e^{+(i/\hbar)\mu B t}. \quad (7.36)$$

但如我们求得了 $C_+(t)$ 及 $C_-(t)$ ，也就知道了在时刻 t 的一切状况。唯一的困难在于我们想要知道的是在 t 时刻自旋沿 $+x$ 方向的概率。然而，我们的一般法则可以处理这个问题。我们将 t 时刻处在 $(+x)$ 状态的振幅记为 $A_+(t)$ ，

$$A_+(t) = \langle +x | \psi(t) \rangle = \langle +x | +z \rangle \langle +z | \psi(t) \rangle + \langle +x | -z \rangle \langle -z | \psi(t) \rangle$$

或

$$A_+(t) = \langle +x | +z \rangle C_+(t) + \langle +x | -z \rangle C_-(t). \quad (7.37)$$

再利用前章的结果——或者最好用第5章的等式 $\langle \phi | x \rangle = \langle x | \phi \rangle^*$ ——我们知道

$$\langle +x | +z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle +x | -z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

于是我们就知道了式（7.37）中的所有量，从而得到

$$A_+(t) = \frac{1}{2}e^{(i/\hbar)\mu Bt} + \frac{1}{2}e^{-(i/\hbar)\mu Bt},$$

或

$$A_+(t) = \cos \frac{\mu B}{\hbar} t.$$

这是多么简单的一个结果！注意这个答案与我们预期的 $t=0$ 时的结果一致。我们得到 $A_+(0)=1$ ，这是正确的，因为我们假设 $t=0$ 时 μ 子就处在 $(+x)$ 态中。

在 t 时刻找到 μ 子处在 $(+x)$ 态的概率 P_+ 是 $(A_+)^2$ ，即

$$P_+ = \cos^2 \frac{\mu B t}{\hbar}.$$

概率在0与1之间振荡，如图7-10所示。注意当 $\mu B t / \hbar = \pi$ （不是 2π ）时概率回到1。因为我们已将余弦函数平方，概率以频率 $2\mu B / \hbar$ 自身重复。

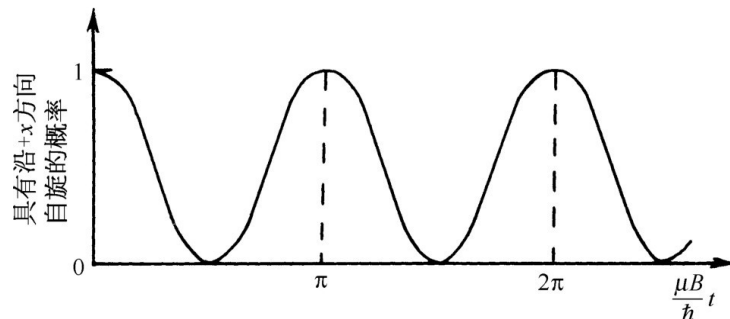


图7-10 自旋1/2粒子对于 x 轴处于 $(+)$ 态的概率与时间的关系

于是我们发现，图7-9中的电子计数器捕获衰变电子的机会随 μ 子处于磁场中的时间作周期变化。变化频率与磁矩 μ 有关。事实上， μ 子的磁矩正是以这种方式测得的。

当然，我们可以利用同样的方法来回答有关 μ 子衰变的任何其他问题。比方说，在与 x 方向成 90° 但仍与磁场方向垂直的 y 方向上检测到衰变电子的机会如何随时间 t 而变？如果你们把它求出来，处在 $(+y)$ 态的概率将按 $\cos^2\{(\mu B t / \hbar) - \pi/4\}$ 随时间变化，它的振动周期与前相同，但是晚了四分之一周期才达到最大值，即当 $\mu B t / \hbar = \pi/4$ 。事实上所出现的情况是，随着时间的推移， μ 子经历一系列状态，它们对应着在绕着 z 轴的不断转动的方向上的完全极化，我们可以这样来描述这种情况：自旋以频率

$$\omega_p = \frac{2\mu B}{\hbar} \quad (7.38)$$

作进动。

你们开始看到，在描述事物如何随时间而变的行为时量子力学所采取的表述方式是怎样的。

[1] 这里我们假设在两个参考系中对应的点具有相同的相位值。然而这是个微妙的问题，因为量子力学振幅的相位在很大程度上是任意的。为了完全证明这个假设，需要对两个或者多个振幅之间的干涉进行更仔细的讨论。

[2] 如果你们跳过了第6章，可以在此刻把式（7.35）作为尚未推导过的法则。我们在后面（第10章）将对自旋进动作更全面的讨论，包括把这些振幅推导出来。

第8章 哈密顿矩阵

§8-1 振幅与矢量

在开始讲述本章的主题前，我们想来描述一些在量子力学文献中用得很多的数学概念。了解它们会使你们阅读这方面的其他书籍或论文时更为方便。第一个概念是：量子力学的方程与两个矢量的标积方程数学上十分相似。你们记得，如果 χ 和 ϕ 是两个状态，那么从 ϕ 态开始而终止于 χ 态的振幅，可以写成由 ϕ 进入一组完全的基础态中各个基础态，再由各基础态进入 χ 态之振幅，最后对这一组全部基础态求和：

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\text{所有 } i} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (8.1)$$

我们曾用施特恩-格拉赫装置解释这点，但要提醒你们注意：这里并不需要有这种装置。式（8.1）是数学定律，不论我们是否装上过滤设备，它总是正确的——不用老是想象有仪器在那儿。我们可以简单地把它看作振幅 $\langle \chi | \phi \rangle$ 的一个公式。

我们把式（8.1）与两个矢量 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{A}$ 的点积公式作个比较。如果 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 是三维空间中的普通矢量，我们可以将点积写成

$$\sum_{\text{所有 } i} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}), \quad (8.2)$$

这里符号 $\mathbf{e}_i$ 表示沿 x , y 及 z 方向的3个单位矢量。于是 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_1$ 就是通常所说的 B_x ; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_2$ 则是通常说的 B_y ; 等等。这样, 式 (8.2) 就等同于

$$B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z,$$

这就是 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ 的点积。

比较式 (8.1) 与 (8.2), 可以看出下述类似点: 态 χ 与 ϕ 对应于两个矢量 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$, 诸基础态 i 对应于一些特定的矢量 $\mathbf{e}_i$, 我们用这些矢量来表示所有其他矢量。任何矢量都可表示成3个“基矢” $\mathbf{e}_i$ 的线性组合。而且, 如果你知道该组合中每个“基矢”的系数——矢量的3个分量——你就知道了这个矢量的一切。类似地, 任何量子力学状态可以用处在各个基础态的振幅 $\langle i | \phi \rangle$ 完全地表示出来, 如果知道了这些系数, 也就知道了有关此态的一切。因为存在着这样切近的类比, 我们也常常将“态”称为“态矢量”。

由于基矢 $\mathbf{e}_i$ 都互相垂直, 就有关系式

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (8.3)$$

这与各基础态 i 之间的关系式 (5.25) 相对应:

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (8.4)$$

现在你们可以明白, 为什么人们说基础态 i 全都“正交”。

在式 (8.1) 与点积之间有个小小的差别。我们知道

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*, \quad (8.5)$$

但在矢量代数中，

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

由于在量子力学中使用了复数，我们必须始终保持各项的先后次序，而在点积中，次序是无关紧要的。

现在来考虑下列矢量等式：

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}). \quad (8.6)$$

这种写法有点与众不同，但它是正确的。它的含义与下式相同：

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \cdot \mathbf{e}_i = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z. \quad (8.7)$$

不过请注意，式（8.6）涉及到一个不同于点积的量。点积只是数，而式（8.6）是矢量方程。矢量分析的一大诀窍就是从方程中抽象出矢量概念本身。或许有人也同样想从量子力学公式（8.1）中抽象出一个类似于“矢量”的东西来——这的确可以。我们将式（8.1）的两边移去 $\langle \chi |$ ，从而写出如下方程（别怕，这只是个记法，不一会儿你们就会弄清符号的含义）：

$$| \phi \rangle = \sum_i | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (8.8)$$

人们将括号 $\langle \chi | \phi \rangle$ 分为两半。后半半个括号 $| \phi \rangle$ 常称为右矢（ket），前半半个括号 $\langle \chi |$ 称为左矢（bra）[放在一起，就构成“左右”（“bra-ket”）——这是狄拉克提出的符号]，半括号 $\langle \chi |$ 及 $| \phi$

〉也称为态矢量。无论如何，它们不是数，而一般来说，我们希望计算所得的结果为数，所以这些“未完成”的量只是计算中的过渡步骤。

实际上，迄今我们的所有结果都用数表示。我们是怎样设法避开矢量的呢？有意思的是，即使在通常的矢量代数中，我们也能够使所有的方程只包括数。譬如，我们总可以将矢量方程

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

改写为

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C} \cdot (m \mathbf{a}) .$$

于是我们就有了一个对任何矢量 $\mathbf{C}$ 都成立的点积方程。但是，如果对一切 $\mathbf{C}$ 都成立，那么写出 $\mathbf{C}$ 来就没有什么意思了！

现在来看看式（8.1）。它是对任何 χ 都成立的方程。所以为简化书写起见，我们正可以拿走 χ 而将它改写为式（8.8）。该式与式（8.1）具有同样多的信息，只要我们理解到，它总是要在两边“左乘”某个 $\langle \chi |$ （这只不过是重新拼上括号而已）才得以“完成”。所以式（8.8）的意义不多不少正好与式（8.1）相同。当你想要数字时，就把合适的 $\langle \chi |$ 放进去。

或许你已对式（8.8）中的 ϕ 感到疑惑。既然这式对任何 ϕ 成立，为什么我们还要保留它？的确，狄拉克提议， ϕ 也一样可以抽掉，于是我们就只有

$$| = \sum_i | i \rangle \langle i | . \quad (8.9)$$

这就是量子力学的伟大定律！（在矢量分析中没有与这类似的公式。）它表示如果在方程式等号两边从左、右两侧各放进任何两个态 χ 和 ϕ ，就回到式（8.1）。这种表达实际上并非很有用处，但它很巧妙地提示了方程对任何两个态都成立。

§8-2 态矢量的分解

让我们再来看一下式（8.8）；可以用下述方式来考虑它。任何态矢量 $|\phi\rangle$ 可以表示为一组具有适当系数的基“矢”的线性组合——或者，只要你喜欢，也可表示为一些比例恰当的“单位矢量”的叠加。为了强调系数 $\langle i | \phi \rangle$ 只是普通的（复）数，我们可以假设

$$\langle i | \phi \rangle = C_i.$$

那么式（8.8）就等同于

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i. \quad (8.10)$$

我们可以对任何别的态矢量，例如 $|\chi\rangle$ ，写下类似的关系式，当然，其中的系数不同——譬如说为 D_i 。于是就有

$$|\chi\rangle = \sum_i |i\rangle D_i, \quad (8.11)$$

这里 D_i 就是振幅 $\langle i | \chi \rangle$ 。

假定我们一开始已从式（8.1）抽去 ϕ ，那就有

$$\langle \chi | = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i |. \quad (8.12)$$

我们记得 $\langle \chi | i \rangle = \langle i | \chi \rangle^*$ ，故可将上式写为

$$\langle \chi | = \sum_i D_i^* \langle i |. \quad (8.13)$$

有趣的是，只要将式（8.13）与式（8.10）相乘，就能回到 $\langle \chi | \phi \rangle$ 。在相乘时，必须注意求和指标，因为在两式中它们是完全不同的。让我们先把式（8.13）重新写为

$$\langle \chi | = \sum_j D_j^* \langle j |,$$

这当然不会改变什么。然后将它与式（8.10）相乘，就有

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{ij} D_j^* \langle j | i \rangle C_i, \quad (8.14)$$

不过，记住 $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$ ，因而在求和中只留下 $j=i$ 的项。于是得到

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_i D_i^* C_i, \quad (8.15)$$

当然，这里 $D_i^* = \langle i | \chi \rangle^* = \langle \chi | i \rangle$ ，而 $C_i = \langle i | \phi \rangle$ 。由此我们又一次看到与点积

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \sum_i B_i A_i$$

非常相似。唯一的差别在于取了 D_i 的复数共轭。这样式（8.15）就说明如果态矢量 $\langle \chi |$ 及 $|\phi\rangle$ 在基矢 $\langle i |$ 或 $|i\rangle$ 上展开，那么由 ϕ 到

χ 的振幅就可由式 (8.15) 的那种类型的点积得到。当然，这个表式只是用不同符号写的式 (8.1) 罢了。我们就这样为了习惯新的记号而兜了一个圈子。

或许我们应当再一次强调，三维空间的矢量是用3个 相互正交的单位矢量来描写的，而量子力学状态的基矢 $|i\rangle$ 则必须遍布在适用于任何特定问题的完整的集合内。按具体情况，基础态可以有两个、三个、五个或无限多个。

我们也曾谈到当粒子通过一个仪器时发生的情况。假如让粒子从某个定态 ϕ 开始，通过一台仪器，然后来测量它们是否处在 χ 态，其结果可由以下振幅来表示：

$$\langle \chi | A | \phi \rangle . \quad (8.16)$$

在矢量代数中没有与这个符号相近的类似符号。（它更接近于张量代数，但这种类比没有特别的用处。）由第5章式 (5.32) 可知，我们可将式 (8.16) 写为

$$\langle \chi | A | \phi \rangle = \sum_{ij} \langle \chi | i \rangle \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle . \quad (8.17)$$

这正是两次使用基本法则式 (8.9) 的一个例子。

如果在 A 后面再放进另一台仪器 B ，则有

$$\langle \chi | BA | \phi \rangle = \sum_{ijk} \langle \chi | i \rangle \langle i | B | j \rangle \langle j | A | k \rangle \langle k | \phi \rangle . \quad (8.18)$$

这又是直接由狄拉克记号 (8.9) 得到的——只要记得我们总可以在 B 与 A 之间划一个竖线 (|)，它正犹如因子1。

顺便提一下，我们可以用另一种方法理解式（8.17）。设想处在 ϕ 态的粒子进入仪器 A ，而离开时则处在 ψ （“psi”）态。换句话说，我们可以向自己提出这样的问题：能否找到这样的 ψ 态，使得从 ψ 态到 χ 态的振幅在任何时刻和任何地点都恒等于振幅 $\langle \chi | A | \phi \rangle$ ？答案是肯定的。我们想用下式代替式（8.17）：

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (8.19)$$

显然，只要

$$\langle i | \phi \rangle = \sum_j \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle = \langle i | A | \phi \rangle, \quad (8.20)$$

就可以从它确定 ψ 。但你们会说：“这没有确定 ψ ，只确定 $\langle i | \psi \rangle$ 。”然而， $\langle i | \psi \rangle$ 的确 确定了 ψ 。因为，如果你已知道 ψ 与各个基础态 i 相联系的所有系数的话， ψ 就唯一地被定义了。事实上，可以利用我们的记法将式（8.20）的最后一项写成

$$\langle i | \phi \rangle = \sum_j \langle i | j \rangle \langle j | A | \phi \rangle. \quad (8.21)$$

这么一来，由于上式对所有 i 成立，我们就可简写为

$$| \phi \rangle = \sum_j | j \rangle \langle j | A | \phi \rangle. \quad (8.22)$$

于是我们可以说：“ ψ 态就是从 ϕ 态开始，通过仪器 A 后所得到的态。”

再举最后一个应用这一诀窍的例子。我们还是从式（8.17）出发。既然它对任何 χ 与 ϕ 成立，我们可以将两者都扔掉！于是可得^[1]

$$A = \sum_{ij} |i\rangle \langle i| A |j\rangle \langle j|. \quad (8.23)$$

它表示什么意思呢？它的含义和把 ϕ 与 χ 代回去所得到的一样不多不少。写成式(8.23)时，它是个“开放”的未完成的方程。如果将它“右乘” $|\phi\rangle$ ，就变为

$$A|\phi\rangle = \sum_{ij} |i\rangle \langle i| A |j\rangle \langle j|\phi\rangle, \quad (8.24)$$

这正好回到式(8.22)。事实上，我们正可从式(8.22)略去对 j 求和而写成

$$|\psi\rangle = A|\phi\rangle. \quad (8.25)$$

符号 A 既不是振幅，也不是矢量，它是一种称为算符的新东西，是一种“作用在”一个态上以产生一个新态的东西——式(8.25)就表示 $|\psi\rangle$ 是 A 作用到 $|\phi\rangle$ 上所得到的结果。这又是个开放方程，直到将某个左矢如 $\langle\chi|$ 乘之才得以完成

$$\langle\chi|\psi\rangle = \langle\chi|A|\phi\rangle. \quad (8.26)$$

当然，如果利用任一组基矢给出振幅矩阵 $\langle i|A|j\rangle$ ——也可写为 A_{ij} ——那么就完全描写出算符 A （的特性）了。

对这一新的数学记法，我们实际上没有加入任何新东西。之所以要面面俱到地讨论这一记号方法，是要把各种方程的书写方式告诉你们，因为你们会在许多书上发现以不完全的形式书写的方程，而在遇到它们时你没有理由对之束手无策。如果你愿意，总可以加入一些略去的部分使方程成为表示数量间关系的形式，这样看来更熟悉些。

正如你们将看到的，“左矢”与“右矢”是一种十分方便的记法。首先，从现在开始我们可以用态矢量来表示一个状态。当我们想要表述一个具有确定动量 $\mathbf{p}$ 的状态时，就可说：“状态 $|\mathbf{p}\rangle$ 。”我们也可说某个任意态 $|\psi\rangle$ 。为前后一致起见，我们将总是用右矢（记为 $|\psi\rangle$ ）来表示一个态。（当然，这是个随意的选择，我们同样可以选用左矢 $\langle\psi|$ 表示态。）

§8-3 世界的基础态是什么？

我们已经发现世界上的任何状态可以用基础态的叠加——具有适当系数的线性组合——表示出来。你们可能首先会问，这些基础态是什么？这里存在着许多不同的可能性，例如，你们可以将自旋投影到 z 方向或别的某个方向上。存在着许许多多不同的表象，这跟人们可以用不同的坐标系来表示通常的矢量相类似。其次，你们要问用哪些系数？这取决于物理状况。不同的系数集合对应于不同的物理条件。重要的是要知道你在其中研究的“空间”是什么，换句话说，基础态的物理意义是什么。所以，一般来说，你必须知道的第一件事情是基础态是什么样子的，然后才能够知道如何用这些基础态来描写一个状态。

我们想在这里根据现在流行的物理观念，略微提前谈一点自然界的一般量子力学描述是怎样的。首先，人们得选定一种基础态的特定表象——不同的表象总是可能的。例如，对自旋1/2粒子，可以利用相对于 z 轴的正和负两种态。但 z 轴本身并无任何特殊之处——你可随意取任何别的轴。然而为前后一贯起见我们总是采用 z 轴。假定我们从一个电子的情况开始。除了电子自旋的两种可能性（沿着 z 轴“朝上”

和“朝下”)外,还有电子的动量。我们选取一组基础态,每个基础态对应于动量的一个值。那么,假如电子没有确定的动量怎么办呢?这没有关系,我们说的只是基础态是什么。如果电子没有确定的动量,它总有取某一个动量的一定振幅,取另一个动量有另一振幅,等等。而如果电子并非一定朝上自旋,它总有一定振幅以这个动量朝上自旋,有另一个振幅以那个动量朝下自旋,等等。就我们现在所知,对一个电子的完全描述,只需要用动量和自旋来描写的基础态就可以了。所以对单个电子而言,一组令人满意的基础态 $|i\rangle$ 就是指动量的不同数值,以及自旋究竟朝上还是朝下的振幅的不同组合——即系数 C 的不同组合描写不同的状况。对任何特定电子的行为,可以这样来描写:它的自旋朝上或朝下的振幅是多少,对所有可能的动量值而言,它具有某个动量值或另一个动量值的振幅又是多少。于是你们可以看到单个电子的完全量子力学描述包括些什么内容。

对多于一个电子的系统又如何呢?那时基础态变得较为复杂。假设有两个电子,首先,自旋有4种可能状态,即:两电子自旋均朝上,第一个朝下而第二个朝上,第一个朝上而第二个朝下,或两者都朝下。另外我们也必须标出第一个电子具有动量 p_1 ,第二个电子具有动量 p_2 。对两个电子而言的基础态需要指明两个动量和两个自旋的性质。对于7个电子,我们则必须指明7个动量和7个自旋的性质。

如果有一个质子和一个电子,我们必须标出质子的自旋方向及其动量,以及电子的自旋方向及其动量。至少这是近似正确的。我们并不真正知道这个世界的正确表象是什么。如果从一开始就能够指明电子自旋及其动量,对质子也有同样的参数,你就会有一组基础态。能够这样那就很好。但对质子的“内部”怎么办呢?让我们这样来看这个问题。在氢原子中有一个质子和一个电子,我们有许多不同的基础态

来描述它——质子及电子朝上和朝下的自旋，质子和电子的种种可能的动量。于是就存在着振幅 C_i 的不同组合，它们合在一起描写处在不同状态中的氢原子的性质。但是，假定我们将整个氢原子看作一个“粒子”，如果我们不知道氢原子由一个质子及一个电子组成，也许会一开始就说：“噢，我知道基础态是什么——它们对应于氢原子的特定的动量。”错了，因为氢原子具有内部结构，于是，它可以具有不同内能的各种状态，从而，描写真实的性质就需要更多的细节。

问题是：质子是否有内部结构？我们是否一定要通过给出质子、介子和奇异粒子的所有可能状态来描写质子？我们不知道。而即使我们假设电子是简单的，我们对它必须要讲的只是它的动量和自旋，但可能明天我们发现了电子也有内部齿轮和轮子。那就意味着我们的表示是不完全的，或错的，或者是近似的——这跟只用动量来描写氢原子的表示是不完全一样的，因为那种表示忽略了氢原子内部有可能成为激发态这样的事实。假如电子内部也可能激发而转变为其他某个东西，譬如说，一个 μ 子，那么对它的描写不仅要给出新粒子的状态，而且大概还要利用某些更复杂的内部机构来描写它。今天的基本粒子研究中的主要问题，就是要揭示什么是描述自然界的正确表象。在目前，我们猜想，对电子来说指明其动量与自旋就够了。我们也猜想存在着理想质子，还有它的一些 π 介子， K 介子，等等，而所有这些都得指明。共有几十种粒子——真是迷人！哪些是基本粒子，哪些不是基本粒子的问题——关于这些你们现在听得很多——就是要发现在世界的最终量子力学描述中最后的表象究竟是什么样的。电子的动量将来是否仍旧是描述自然的正确东西？甚至于整个问题到底是否该这么提！这个问题在任何科学研究中必然会一再被提出来。无论如何，我们看到了问题——如何去找到表象。我们不知道答案是什么，甚至还

不知道我们是否提出了“正确”的问题，但如问题正确，我们必须首先要查明任一特定的粒子是否“基本的”粒子。[\[2\]](#)

在非相对论量子力学中——假定能量不太高，以致你们不会干扰奇异粒子等等的内部过程——你们可以不必考虑这些细节而做出一些相当好的工作来。你尽可以只说明电子和核的动量及自旋，就会一切顺利。在大多数化学反应及其他低能事件中，核内不发生什么变化，它们不受到激发。再者，如果一个氢原子缓慢运动并轻轻地与其他氢原子相撞——根本不会引起内部激发或辐射，或任何类似的复杂情况，它的内部运动始终是处于基态能量——你可以应用这样的近似，即将整个氢原子视为一整个客体或粒子，而不必担心它的内部可能发生某种变化。只要在碰撞中动能比10 eV（使氢原子激发到另一种内部状态所需的能量）低得多，上述近似就是个颇好的近似。我们将经常作这种不包含内部运动可能性的近似，从而减少必须纳入基础态的细节的数目。当然，这一来就忽略了在某些高能情况下（通常）会出现的一些现象，但利用这种近似我们得以大大简化物理问题的分析。例如，我们可以讨论低能下两个氢原子的碰撞或任何化学过程而不必顾虑原子核也可能被激发这个事实。概而言之，当我们可以略去粒子的任何内部激发态的效应时，我们就可选择一组基础态，这些基础态就是具有确定动量以及角动量 z 分量的状态。

于是，描写自然界的一个问题就是找出基础态的一种适当的表象。但这只是开始。我们还要能够说出会“发生”什么。假如我们知道了某个时刻世界的“状态”，就想知道下一个时刻的状态。所以我们还须找到决定事物如何随时间而变的规律。现在我们就来论述量子力学框架中的第二部分——状态怎样随时间而变化。

§8-4 状态怎样随时间而变

我们已经谈过如何表示让某个东西通过一个装置的情形。现在考虑一种方便而令人愉快的“装置”，它只是等候几分钟；就是说，先提供一个状态 ϕ ，在你分析它之前，就只要让它待几分钟。或许你会让它待在某个特殊的电场或磁场中——它依赖于世界中的物理环境。总而言之，无论条件如何，你都让该物体从时间 t_1 待到时间 t_2 。假设它在 t_1 从第一个装置出来时处在状态 ϕ ，然后它通过一台“装置”，但该“装置”只是把时间推延到 t_2 。在这段延迟过程中，可能发生着种种情况——有外力作用或其他把戏——于是就会发生某些事情。在时间推延的末了，在某个态 χ 中找到这东西的振幅与没有延迟时所具有的振幅不再完全相同了。既然“等待”只是一种特别的“装置”，我们就可以使用与式(8.17)同样的表式给出振幅以描写所发生的事情。因为“等待”这种操作特别重要，我们将称之为 U 而不称为 A ，并标明起始和末了时刻 t_1 与 t_2 ，将它记为 $U(t_2, t_1)$ 。于是所求的振幅就是

$$\langle \chi | U(t_2, t_1) | \phi \rangle. \quad (8.27)$$

像任何其他这样的振幅一样，可以用某一种或另一种基础态系统表示它而将上式写为

$$\sum_{ij} \langle \chi | i \rangle \langle i | U(t_2, t_1) | j \rangle \langle j | \phi \rangle, \quad (8.28)$$

于是 U 就可由一组完整的振幅，即由以下矩阵完全描写：

$$\langle i | U(t_2, t_1) | j \rangle. \quad (8.29)$$

顺便指出，矩阵 $\langle i | U(t_2, t_1) | j \rangle$ 提供了比所需的更多的细节。第一流的高能理论物理学家考虑下列一般性质的一些问题（因为这正是通常进行实验的方式）。他从一对粒子开始，譬如说从无穷远来到一起的两个质子。（在实验室中，通常一个粒子静止，而另一个来自某个加速器，就原子尺度而言加速器实际上在无穷远处。）两个粒子碰撞后，结果在某些方向上得到具有一定动量的许多粒子，譬如两个K介子，6个 π 介子及两个中子等。出现这种情况的振幅有多大？这可用下面的数学公式来描写：用 ϕ 态表示入射粒子的自旋与动量。 χ 态则是待求的出射状态。例如，朝这个或那个方向运动的6个介子及各带着自己的自旋朝一定方向出射的两个中子的振幅有多大，等等。换句话说， χ 态将由给出最终产物的所有动量和自旋等等来表征。接着，理论物理学家的工作就是计算振幅式（8.27）。然而，他实际上只对 t_1 为 $-\infty$ 和 t_2 为 $+\infty$ 的这种特殊情况感兴趣。（对过程的细节没有什么实验数据，有的只是关于入射粒子和出射粒子的数据。）当 $t_1 \rightarrow -\infty$ 和 $t_2 \rightarrow +\infty$ 时， $U(t_2, t_1)$ 的极限情况称为 S ，于是他要知道的就是

$$\langle \chi | S | \phi \rangle ,$$

或者，利用式（8.28），他要计算矩阵

$$\langle i | S | j \rangle .$$

上式称为 S 矩阵。所以，如果你看到一个理论物理学家一面在地板上踱来踱去，一面说道：“我所要做的就是计算 S 矩阵。”你就知道他所操心的是怎么了。

如何分析或阐明关于 S 矩阵的定律是个有趣的问题。在相对论量子力学中，采用了一种做法，而在非相对论量子力学中则可采用另一种非常方便的做法。（这另一种做法也可用在相对论情况下，但那样做并不很方便。）这种方法是算出小的时间间隔的情况下——即 t_2 与 t_1 十分靠近时的 U 矩阵。如果对于相继的时间间隔可以找到一系列这样的 U 矩阵，我们就能够观察到情况如何随时间变化。你们马上会意识到这种做法对相对论的情况并不那么合适，因为你们大概不想去做那种对发生在不同地点的每一种事件是否“同时”都得逐一说明的工作吧。但我们不必担心这事——我们这里只打算考虑非相对论力学。

假定我们考虑一个由时刻 t_1 推延到 t_3 的 U 矩阵，而 t_3 大于 t_2 。换句话说，取三个相继时刻： t_1 小于 t_2 ， t_2 小于 t_3 。然后我们断言从 t_1 到 t_3 的矩阵是从 t_1 推延到 t_2 ，然后再从 t_2 推延到 t_3 的两个矩阵的连乘积。这正如 B 和 A 两个装置串联的情形一样。于是，根据§5-6的记法，可以写出

$$U(t_3, t_1) = U(t_3, t_2) \cdot U(t_2, t_1). \quad (8.30)$$

换言之，我们能够分析任何时间间隔，只要能够分析该时间间隔中的一系列短时间间隔。只需将所有小段连乘在一起就行，这就是非相对论量子力学的分析方法。

于是，我们的问题就是弄清无穷小时间间隔下的矩阵 $U(t_2, t_1)$ ，这里 $t_2 = t_1 + \Delta t$ 。我们自问：如果现在有个态 ϕ ，那么在无穷小时间 Δt 后它变成什么样？让我们想一想怎么来写出它。称时刻 t 的态为

$|\psi(t)\rangle$ （我们写出 ψ 的时间依赖关系非常明确，就表明我们说明了时刻 t 的状况）。现在我们要问，在很短的时间间隔 Δt 后情况如何呢？答案是

$$|\psi(t+\Delta t)\rangle = U(t+\Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (8.31)$$

此式的含义与式（8.25）相同，就是说，在时刻 $(t+\Delta t)$ 找到 χ 态的振幅是

$$\langle \chi | \psi(t+\Delta t) \rangle = \langle \chi | U(t+\Delta t, t) | \psi(t) \rangle. \quad (8.32)$$

由于我们尚不大擅长于这些抽象的东西，让我们把振幅投影到一个确定的表象中。如果将式（8.31）两边都乘上 $\langle i |$ ，就有

$$\langle i | \psi(t+\Delta t) \rangle = \langle i | U(t+\Delta t, t) | \psi(t) \rangle. \quad (8.33)$$

我们也可将 $|\psi(t)\rangle$ 分解为基础态：

$$\langle i | \psi(t+\Delta t) \rangle = \sum_j \langle i | U(t+\Delta t, t) | j \rangle \langle j | \psi(t) \rangle. \quad (8.34)$$

可以这样来理解式（8.34）：如果用 $C_i(t) = \langle i | \psi(t) \rangle$ 表示时刻 t 处在基础态 i 的振幅，那我们就可把这个振幅（记住，这只是一个数！）看成随时间而变。每个 C_i 成为 t 的一个函数。而且我们对这振幅怎样随时间而变也有些了解。每一个 $(t+\Delta t)$ 时刻的振幅跟 t 时刻的所有其他振幅与一组系数的乘积之和成比例。将 U 矩阵表为 U_{ij} ，意即

$$U_{ij} = \langle i | U | j \rangle.$$

那就可将式（8.34）写成

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j U_{ij}(t + \Delta t, t) C_j(t). \quad (8.35)$$

这就是量子力学的动力学方程的样式。

但是，除去一件事外我们对 U_{ij} 知道得还不多。我们知道当 Δt 趋于零时，不会发生任何变化——我们应该得到原有状态。所以， $U_{ii} \rightarrow 1$ ；而对 $i \neq j$ ， $U_{ij} \rightarrow 0$ 。换句话说，如 $\Delta t \rightarrow 0$ ， $U_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$ 。我们也可认为，对小的 Δt ，每个系数 U_{ij} 与 δ_{ij} 的差应当是个与 Δt 成比例的量，于是可以写出

$$U_{ij} = \delta_{ij} + K_{ij} \Delta t. \quad (8.36)$$

然而，由于某些历史的与其他方面的原因，通常由系数 K_{ij} 中提出因子 $(-i/\hbar)$ [3]，我们喜欢将式（8.36）写成

$$U_{ij}(t + \Delta t, t) = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t. \quad (8.37)$$

当然，这与式（8.36）相同，如果你们愿意的话，它正好定义系数 $H_{ij}(t)$ 。 H_{ij} 项正是系数 $U_{ij}(t_2, t_1)$ 对 t_2 的导数在 $t_2 = t_1 = t$ 时的值。

将 U 的这种形式用于式（8.35），我们有

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j \left[\delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t \right] C_j(t). \quad (8.38)$$

对 δ_{ij} 项求和，正好得 $C_i(t)$ ，可将它移到方程式左边。再除以 Δt ，我们就看出是一个导数的式子

$$\frac{C_i(t + \Delta t) - C_i(t)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) C_j(t)$$

或

$$i \hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t) C_j(t). \quad (8.39)$$

你们记得， $C_i(t)$ 就是（时刻 t ）在基础态中的一个 i 找到状态 ψ 的振幅 $\langle i | \psi \rangle$ 。所以式（8.39）告诉我们每个系数 $\langle i | \psi \rangle$ 怎样随时间变化。但这等于说式（8.39）告诉我们态 ψ 如何随时间变化，因为我们就是用振幅 $\langle i | \psi \rangle$ 来描写 ψ 的。 ψ 随时间的变化由矩阵 H_{ij} 来描写， H_{ij} 当然必定包括能使系统发生变化而给予它的性质。 H_{ij} 包括作用的物理意义，而且一般说来，可能依赖于时间，如果我们知道了它，我们对系统随时间变化的行为就可以有完整的描述。所以式（8.39）就是世界的动力学的量子力学定律。

（应指出，我们所取的总是一组固定的、不随时间变化的基础态。有人用的是会变化的基础态。这类似于在力学中使用转动坐标系，我们不想陷入这种情况。）

§8-5 哈密顿矩阵

描述量子力学世界的思路是，我们需要选取一组基础态 i ，并通过给出系数为 H_{ij} 的矩阵来写出物理定律。于是我们就有了一切——我们就可以回答关于会发生什么事情的任何问题。所以必须知道求出在任何物理条件下的 H 的法则——这些物理条件是指磁场或电场，等等。这是最困难的部分。例如，对新的奇异粒子，我们根本不知道该用什么 H_{ij} 。换句话说，没有人知道整个世界的完全的 H_{ij} 。（部分困难是，当人们甚至不知道基础态是什么时，当然很难指望他会找到 H_{ij} ！）对非相对论性现象及某些其他的特殊情况，我们确已有了很好的近似。特别是，我们已经有了描写原子中电子运动所需要的方法——可以用于描写化学。但我们不知道对于全宇宙而言全部的正确的 H 是什么。

系数 H_{ij} 称为哈密顿矩阵，或简称为哈密顿。（活跃于19世纪30年代的哈密顿怎么会命名在一个量子力学矩阵上，有一段历史故事。）把它称为能量矩阵更恰当，其理由到我们应用它时就会明白。所以问题就是：找出你的哈密顿！

哈密顿有一个可以直截了当地推得的性质，那就是

$$H_{ij}^* = H_{ji}, \quad (8.40)$$

此性质来自以下的条件：系统处在某个态的总概率不会改变。如果起初有一个粒子——一个物体或整个世界，那么随着时间的流逝你得到的仍然是它。在任何地方找到它的总概率是

$$\sum_i |C_i(t)|^2,$$

它必定不会随时间而变。如果这对任何初始状况 ϕ 正确，那么式(8.40)也必定正确。

作为第一个例子，我们取一个物理环境不随时间变化的情况，意思就是外界物理条件与时间无关，于是 H 与时间无关。没有什么人将电磁铁通上电流或关掉。我们还取一个只要用一个基础态描写的系统。这是一种近似，对于静止氢原子或与之类似的体系所可以作的一种近似。于是式(8.39)就成为

$$i \hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11} C_1, \quad (8.41)$$

只有一个方程——就是这些！如果 H_{11} 是常数，这个微分方程很容易解得：

$$C_1 = (\text{常数}) e^{-i H_{11} t / \hbar}. \quad (8.42)$$

这就是具有确定能量 $E = H_{11}$ 的状态与时间的关系。你们已看到为什么应该称 H_{ij} 为能量矩阵了。它不过是能量概念对于更复杂情况的推广。

接着，为了再多理解一点有关方程的含义，我们来研究具有两个基础态的系统。这时式(8.39)成为

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{dC_1}{dt} &= H_{11} C_1 + H_{12} C_2, \\ i \hbar \frac{dC_2}{dt} &= H_{21} C_1 + H_{22} C_2. \end{aligned} \quad (8.43)$$

如各个 H 仍旧与时间无关，你们会很容易解出这个方程组。为提高兴趣，我们将这留给你们去尝试一下，后面我们将反过来解这个问题。的确，只要 H 系数与时间无关，你们就能够在不知道 H 的情况下解量子力学问题。

§8-6 氨分子

现在我们要来向你们说明怎样使用量子力学的动力学方程去描写某个特定的物理系统。我们选取一个有趣而又简单的例子，在这个例子中通过对哈密顿作一些合理的猜测，我们可以求得某些重要的——并且是实用的——结果。我们打算考虑的是可用两个态描写的情况：氨分子。

氨分子有1个氮原子和3个氢原子，氢原子都位于氮原子下面的一个平面上，于是这个分子成金字塔形，就如图8-1（a）中所示的那样。这个分子像任何其他分子一样有无穷多个状态。它可以绕任何可能的轴自转，可以朝任何方向运动，可以在内部发生振动，等等，等等。因此，它根本不是个双态系统。但我们要作个近似，即认为所有其他态都固定不变，因为它们并不包括在我们目前考虑的问题里。我们只考虑分子绕其对称轴的自转（如图所示），它的平动动量为零，并且它的振动尽可能地小。这就限定了所有的条件，只有一点除外：对氮原子来说仍然存在着两种可能的位置——氮原子可以在氢原子平面的一侧或另一侧，如图8-1（a）及（b）所示。所以我们把分子当作双态系统来讨论。这就是说，我们实际上考虑的只有两个状态，而假设所有其他状态都保持不变。你们看到，即使我们知道分子以一定角动量绕对称轴自转，以一定的动量运动，以及以确定的方式振动，但

仍然存在着两种可能的状态。氮原子在“上面”，如图8-1（a）那样，我们就说分子处在态 $|1\rangle$ ，而当氮原子在“下面”，如图8-1（b）那样，就说分子处在态 $|2\rangle$ 。我们将把态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 取作分析氨分子行为的一组基础态。任何时刻分子的实际状态 $|\psi\rangle$ 可由 $C_1 = \langle 1 | \psi \rangle$ 即处于态 $|1\rangle$ 的振幅，及 $C_2 = \langle 2 | \psi \rangle$ 即处于态 $|2\rangle$ 的振幅表示出来。于是，利用式（8.8），可以把态矢量 $|\psi\rangle$ 写作

$$|\psi\rangle = |1\rangle \langle 1 | \psi \rangle + |2\rangle \langle 2 | \psi \rangle$$

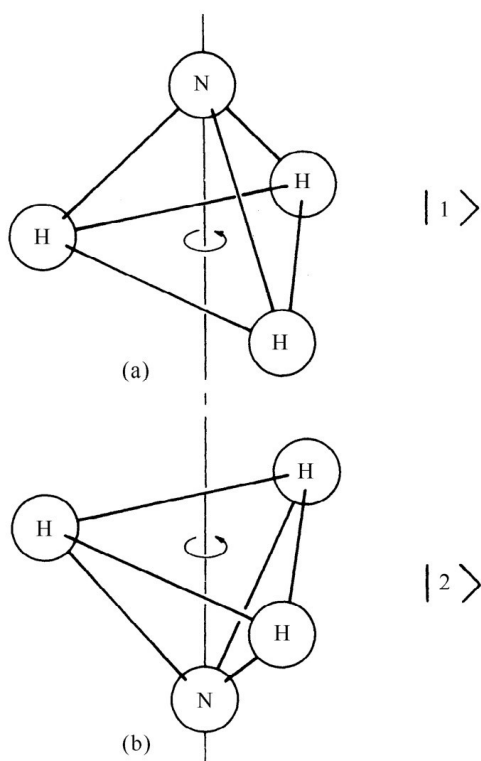


图8-1 氨分子的两种等价的几何构形

或

$$|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2. \quad (8.44)$$

有趣的是，如果知道在某个时刻分子处在某态，那么稍过一会儿它就将不再处于同一态了。两个 C 系数将依式 (8.43) 而随时间变化，该式对任何双态系统都成立。例如，假定你进行过某种观察——或者对分子进行挑选——因此你知道分子起初处在态 $|1\rangle$ 。在稍后一时刻，会有一定机会在态 $|2\rangle$ 中找到它。为了求出机会有多大，我们必须去解那个告诉我们振幅如何随时间变化的微分方程。

唯一的麻烦是我们不知道在式 (8.43) 中系数 H_{ij} 怎样得到。然而，我们能够讲出一些东西来。假设分子一旦处在态 $|1\rangle$ ，它就不再有机会进入态 $|2\rangle$ ，反之亦然。于是 H_{12} 及 H_{21} 都应为零，从而式 (8.43) 变为

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1, \quad i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{22}C_2.$$

很容易解出这两个方程，我们得到

$$C_1 = (\text{常数})e^{-(i/\hbar)H_{11}t}, \quad C_2 = (\text{常数})e^{-(i/\hbar)H_{22}t}. \quad (8.45)$$

这正是具有能量 $E_1 = H_{11}$ ， $E_2 = H_{22}$ 的定态的振幅。然而，我们注意到，对氮分子来说，两个态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 有确定的对称性。假如自然界真是合理的话，矩阵元 H_{11} 与 H_{22} 应当相等。我们都用 E_0 来表示这两者，因为它们对应着如果 H_{12} 与 H_{21} 等于零时状态所具有的能量。但式 (8.45) 并没告诉我们氮分子的真实行为。原来氮原子有可能穿过3个氢原子中央而翻到另一边去。这是十分困难的，越过一半路程也需要大量能量。如果氮原子没有足够的能量那它怎么能翻过去呢？这里存在着它能穿透势垒的若干振幅。在量子力学中有可能很快地穿透

一个从能量来看是被禁止的区域。所以，确实有一个很小的振幅使开始处于态 $|1\rangle$ 的分子变为态 $|2\rangle$ 。系数 H_{12} 与 H_{21} 并非真正为零。

由对称性，它们也应当相等——至少在大小上如此。事实上，我们已经知道，一般来说， H_{ij} 必须等于 H_{ji} 的共轭复数，所以它们只可能在相位上有差别。结果表明，正如你们将会明白的，即使让它们彼此相等也并不失一般性。为以后的方便，我们让它们都等于一个负数，即取 $H_{12}=H_{21}=-A$ 。于是就有下列一对方程：

$$i \hbar \frac{dC_1}{dt} = E_0 C_1 - A C_2, \quad (8.46)$$

$$i \hbar \frac{dC_2}{dt} = E_0 C_2 - A C_1. \quad (8.47)$$

这个方程组足够简单，可以用多种方法去解。有一种方便的解法如下。取两式之和，得到

$$i \hbar \frac{d}{dt}(C_1 + C_2) = (E_0 - A)(C_1 + C_2),$$

它的解是

$$C_1 + C_2 = a e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t}. \quad (8.48)$$

然后，再取式 (8.46) 与 (8.47) 的差，就有

$$i \hbar \frac{d}{dt}(C_1 - C_2) = (E_0 + A)(C_1 - C_2),$$

由此得

$$C_1 - C_2 = b e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}. \quad (8.49)$$

我们称两个积分常数为 a 与 b ；当然，它们必须选得使对任何特定的物理问题都能给出适当的初始条件。通过（8.48）与（8.49）两式的加减，我们得到 C_1 与 C_2 ：

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}, \quad (8.50)$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}. \quad (8.51)$$

它们除第二项的符号外都相同。

我们求出了解，但它们的意义是什么呢？（量子力学中的麻烦不仅在于求解方程，而且在于理解求出的解的意义是什么！）首先，注意到若 $b=0$ ，两项具有相同的频率 $\omega = (E_0 - A)/\hbar$ 。如果一切都以同一频率变化，就意味着系统处在某个确定的能量状态中——在这里能量是 $(E_0 - A)$ 。所以存在着一个具有这种能量的定态，这时两个振幅 C_1 与 C_2 相等。我们得到如下结果：如果氮原子“在上”或“在下”两个状态具有相同的振幅，则氮分子就有确定的能量 $(E_0 - A)$ 。

当 $a=0$ 时，还有另一个可能的定态，这时两个振幅都有频率 $\omega = (E_0 + A)/\hbar$ 。所以，若两个振幅等值反号，即 $C_2 = -C_1$ ，则存在另一种具有确定能量 $(E_0 + A)$ 的定态。这些是两个仅有的具有确定能量的状态。下章中我们将更详细地讨论氮分子的状态，这里我们只提两件事。

我们得到结论，因为氮原子有一定的机会从一个位置翻转到另一个位置，所以分子的能量并不正好是我们原来所预料的 E_0 ，而是有 $(E_0 + A)$ 与 $(E_0 - A)$ 两个能级。不管分子具有怎样的能量，它的每

一个可能的状态都“分裂”成两个能级。我们说每一个状态，是因为你们记得，我们当初挑出了一个特定的转动态、内能态，等等。对这样的每一个可能情况，由于分子的翻转，都出现了双重能级。

现来问下面一个有关氨分子的问题。假设 $t=0$ 时，我们知道分子处在态 $|1\rangle$ ，换句话说， $C_1(0)=1$ ， $C_2(0)=0$ 。那么在时刻 t 发现分子处在态 $|2\rangle$ 的概率有多大，或者，在时刻 t 发现分子仍处在态 $|1\rangle$ 的概率有多大？初始条件告诉我们式(8.50)及(8.51)中的 a 与 b 是什么。令 $t=0$ ，就有

$$C_1(0) = \frac{a+b}{2} = 1, \quad C_2(0) = \frac{a-b}{2} = 0.$$

显而易见 $a=b=1$ 。将这些值代入 $C_1(t)$ 及 $C_2(t)$ 的表式，经整理后有

$$C_1(t) = e^{-(i\hbar)E_0 t} \left(\frac{e^{(i\hbar)At} + e^{-(i\hbar)At}}{2} \right),$$

$$C_2(t) = e^{-(i\hbar)E_0 t} \left(\frac{e^{(i\hbar)At} - e^{-(i\hbar)At}}{2} \right).$$

以上两式可改写为

$$C_1(t) = e^{-(i\hbar)E_0 t} \cos \frac{At}{\hbar}, \quad (8.52)$$

$$C_2(t) = ie^{-(i\hbar)E_0 t} \sin \frac{At}{\hbar}, \quad (8.53)$$

两振幅随时间作简谐式变化。

时刻 t 在态 $|2\rangle$ 找到分子的概率是 $C_2(t)$ 的绝对值平方：

$$|C_2(t)|^2 = \sin^2 \frac{At}{\hbar}. \quad (8.54)$$

这个概率开始是0（理应如此），增大到1，然后在0和1之间来回摆动，如图8-2的曲线 P_2 所示。分子处在 $|1\rangle$ 态的概率当然不会一直保持为1。概率“倾泻”入第二状态直至在第一状态中找到分子的概率为零，如图8-2的曲线 P_1 所示。概率就这样在0和1之间摆动。

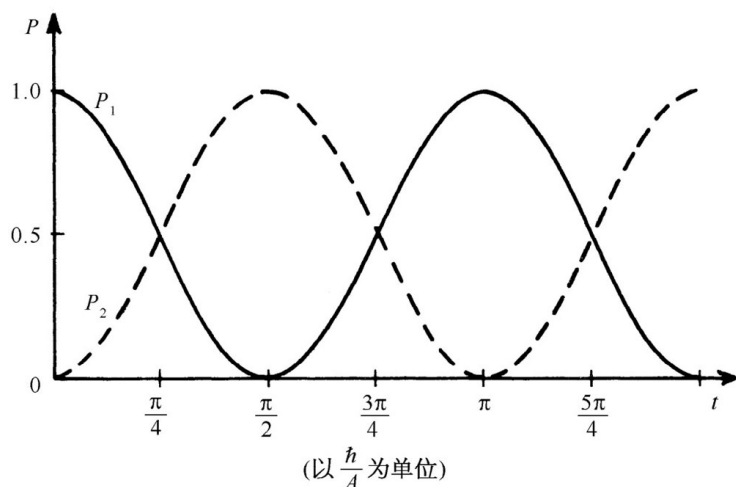


图8-2 $t=0$ 时处于 $|1\rangle$ 态的氨分子在 t 时刻仍处在 $|1\rangle$ 态的概率是 P_1 ； P_2 是在 $|2\rangle$ 态发现氨分子的概率

很早之前我们见到过两个弱耦合的相同的摆所发生的情况（见第1卷第49章）。当我们将其中一个拉向一边然后放开，它就会摆动，但渐渐地另一个也开始摆起来。不一会第二个摆获得了所有能量。接着，过程逆转，第一个摆又获得能量。这和上述情况完全相类似。能量来回交换的速率取决于两摆之间的耦合——即“振动”得以漏过去的速率。你们该还记得，对两个摆的组合有两种特殊运动——每种都有确定频率——我们称之为基本模式。如果将两个摆一起向一边拉开，它们就以同一频率一起摆动。另一方面，将一摆向一边拉开而将另一摆向另一边拉开，就会有另一种稳定模式，它也具有确定的频率。

你看，这里我们有类似的情况——在数学上氨分子就像一对摆。这里有两个频率—— $(E_0 - A)/\hbar$ 及 $(E_0 + A)/\hbar$ ，各对应于它们一起振动和反相振动。

摆的类比并不比同样方程具有同样的解这条原理深奥多少。振幅的线性方程式（8.39）非常像谐振子的线性方程。（事实上，这就是经典折射率理论成功的原因，在这种理论中，我们用谐振子代替了量子力学的原子，即使从经典上说这也不是一种对于电子绕核转动的合理观点。）如果你将氨原子拉向一边，你就会得到这两个频率的叠加，从而得到一种拍现象，因为系统不再处于这个或那个有确定频率的状态了。然而，氨分子的能级分裂全然是一种量子力学的效应。

氨分子的能级分裂有重要的实际应用，我们将在下章中讨论。我们终于有了个能利用量子力学来理解的实际物理问题的例子！

[1] 你们可能想我们得写上 $|A|$ 而不只是 A 。但这个符号看起来像“ A 的绝对值”符号，所以两条竖线通常略去了。一般来说，竖线（ $|$ ）的作用很像因子1。

[2] 从20世纪70年代以来，粒子物理学有很大的进展。关于粒子构造最流行的是“标准模型”。但它也还存在不少问题。有兴趣的读者可参阅有关书籍和文献。——译者注

[3] 这里在符号上遇到一些麻烦。在因子 $(-i/\hbar)$ 中， i 的意思是虚数单位 $\sqrt{-1}$ ，而不是表示第 i 个基础态的指标 i ！ 我们希望你们不致混淆。

第9章 氨微波激射器

§9-1 氨分子的状态

本章我们打算讨论量子力学在一个实用的器件——氨微波激射器上的应用。你们也许会奇怪为什么我们打断量子力学讨论的正规进程去研究一个特殊问题，但是，你们会看到，这个特殊问题的许多特征在量子力学的一般理论中相当普遍，如果仔细考察了这个问题，你们将学到许多东西。氨微波激射器是产生电磁波的器件，其工作原理系建立在我们上一章简单讨论过的氨分子性质的基础上。让我们先把上章已经得到的结果概括一下。

氨分子有许多状态，但我们只将其视为双态系统，即只考虑分子处于任何一种特定的转动或平动状态时所发生的事情。双态的物理模型可以描绘如下。设想氨分子绕通过氮原子并垂直于氢原子组成的平面的轴转动，如图9-1所示，其中仍然存在着两种可能的状态——氮原子可以在氢原子平面的这边或那边。我们称这两个状态为 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 。这两个态就取为我们分析氨分子行为的一组基础态。

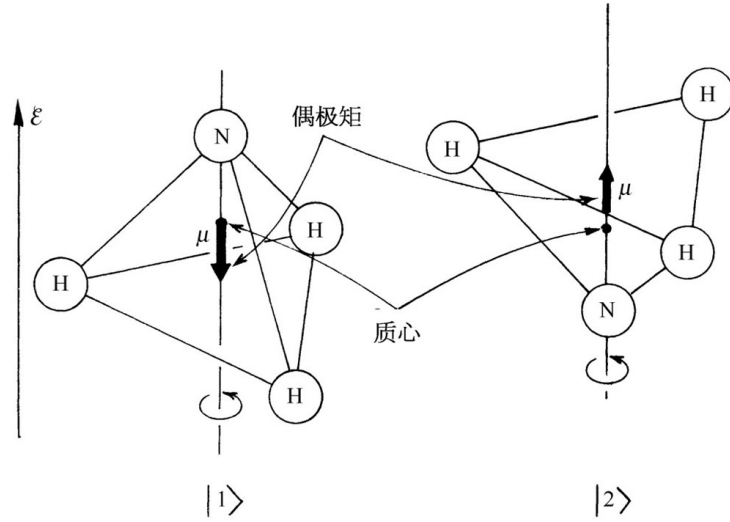


图9-1 氨分子双基础态的物理模型。这种状态具有电偶极矩 μ

在一个具有两种基础态的系统中，系统的任何态 $|\psi\rangle$ 总可用这两个基础态的线性组合来描写；这就是说，存在着处于一种基础态的一定振幅 C_1 以及处于另一基础态的振幅 C_2 。可以把系统的态矢量写成

$$|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2, \quad (9.1)$$

式中

$$C_1 = \langle 1 | \psi \rangle, \quad C_2 = \langle 2 | \psi \rangle.$$

这两个振幅随时间变化的关系满足哈密顿方程式 (8.43)。利用氨分子的两种状态的对称性，可取 $H_{11} = H_{22} = E_0$ ，及 $H_{12} = H_{21} = -A$ ，从而得到解 [见式 (8.50) 及 (8.51)]

$$C_1 = \frac{a}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}, \quad (9.2)$$

$$C_2 = \frac{a}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t} - \frac{b}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}. \quad (9.3)$$

我们现在要更仔细地考察这两个一般解。假设分子原先处在系数 b 为零的态 $|\psi_{\text{II}}\rangle$ 中。那么当 $t=0$ 时，处于态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 的振幅相同，并且它们一直保持这种状态。它们的相位以同样的方式，即以同样的频率 $(E_0 - A)/\hbar$ 随时间变化。类似地，如果我们将分子置于 $a=0$ 的状态 $|\psi_{\text{I}}\rangle$ ，振幅 C_2 等于 C_1 的负值，这个关系也将一直保持下去。两个振幅都以频率 $(E_0 + A)/\hbar$ 随时间变化。以上所述就是 C_1 与 C_2 之间的关系与时间无关的仅有的两种可能状态。

我们已经找到了振幅的大小不变而它们的相位以相同频率变化的两个特解，按§7-1的定义，它们是定态，意即具有确定能量的状态。态 $|\psi_{\text{II}}\rangle$ 具有能量 $E_{\text{II}}=E_0 - A$ ，而态 $|\psi_{\text{I}}\rangle$ 具有能量 $E_{\text{I}}=E_0 + A$ 。这两者是存在的仅有的两种定态，所以我们发现分子有两个能级，能量差为 $2A$ 。（当然，我们指的是相对于原先假设中所给定的转动和振动状态而言的两个能级。）[\[1\]](#)

如果氮原子没有上下翻转的可能性，就得取 A 等于零，于是两个能级将在能量 E_0 处彼此重叠在一起。但实际能级并不是这样，它们的平均能量是 E_0 ，但它们分裂，离开 E_0 距离为 $\pm A$ ，在两个状态的能量之间有 $2A$ 的间隔。实际上，由于 A 非常小，能量差也非常小。

从原子内部激发一个电子所需要的能量比这高得多——需要可见光或紫外光光子。为了激发分子的振动，需要红外光光子。至于转动

的激发，状态的能量差就对应于远红外光的光子。但能量差 $2A$ 低于上述任何值，事实上，它低于红外波段进入了微波区域。实验发现，有一对间隔是 10^{-4} eV——相当于频率24 000 MHz——的能级。显然这意味着 $2A = hf$ ，即 $f = 24\,000$ MHz（对应的波长是1.25 cm）。所以，这种分子在跃迁时发射的不是通常意义下的光，而是微波。

为以下的讨论，我们要稍稍改进一下对这两种具有确定能量的状态的描述。假设我们取两个数 C_1 与 C_2 的和而得到一个振幅 C_{II} ：

$$C_{II} = C_1 + C_2 = \langle 1 | \Phi \rangle + \langle 2 | \Phi \rangle . \quad (9.4)$$

此式的意义是什么？这正是在某个新的状态 $|II\rangle$ 中找到态 $|\Phi\rangle$ 的振幅，而在这个新的状态中，原有基础态的振幅是相等的。如果把 C_{II} 写成 $\langle II | \Phi \rangle$ ，则可从式（9.4）中抽出 $|\Phi\rangle$ ——因为此式对任何 Φ 成立，从而可得

$$\langle II | = \langle 1 | + \langle 2 | ,$$

此式同下式意义相同

$$|II\rangle = |1\rangle + |2\rangle , \quad (9.5)$$

态 $|II\rangle$ 处于态 $|1\rangle$ 的振幅是

$$\langle 1 | II \rangle = \langle 1 | 1 \rangle + \langle 1 | 2 \rangle ,$$

显然这正好是1，因为 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 是基础态。态 $|II\rangle$ 处在态 $|2\rangle$ 的振幅也是1，所以态 $|II\rangle$ 是一个在两个基础态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 中具有相等振幅的状态。

但是，我们碰到了一点麻烦。态 $|\text{II}\rangle$ 处在这个或那个基础态的总概率大于1。不过这只是意味着该态矢量未适当地“归一化”。只要记住令 $\langle \text{II} | \text{II} \rangle = 1$ ，（这对任何态都必须成立）那我们就能消除这个麻烦。利用一般关系式

$$\langle \chi | \Phi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \Phi \rangle,$$

设 Φ 及 χ 都是态II，并对基础态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 求和，就有

$$\langle \text{II} | \text{II} \rangle = \langle \text{II} | 1 \rangle \langle 1 | \text{II} \rangle + \langle \text{II} | 2 \rangle \langle 2 | \text{II} \rangle.$$

要使这个式子等于1，只要改变式（9.4）中 C_{II} 的定义，将 C_{II} 写为

$$C_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_1 + C_2].$$

同样，我们可以构造出一个振幅

$$C_{\text{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_1 - C_2],$$

或

$$C_{\text{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle 1 | \Phi \rangle - \langle 2 | \Phi \rangle]. \quad (9.6)$$

这个振幅是态 $|\Phi\rangle$ 在一个新态 $|\text{I}\rangle$ 上的投影，这个新态处在态 $|1\rangle$ 的振幅与处在态 $|2\rangle$ 的振幅差一符号。即式（9.6）的意义与下式相同：

$$\langle I | = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle 1 | - \langle 2 |],$$

或

$$| I \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[| 1 \rangle - | 2 \rangle], \quad (9.7)$$

由此可得

$$\langle 1 | I \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\langle 2 | I \rangle.$$

我们做所有这一切的原因在于表明态 $| I \rangle$ 及 $| II \rangle$ 可以取作一组新的基础态，用它描写氨分子的定态特别方便。你们记得，作为一组基础态要满足

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}.$$

我们已使

$$\langle I | I \rangle = \langle II | II \rangle = 1.$$

由式 (9.5) 及 (9.7) 很容易证明

$$\langle I | II \rangle = \langle II | I \rangle = 0.$$

任何态 Φ 处在我们的新基础态 $| I \rangle$ 及 $| II \rangle$ 中的振幅 $C_I = \langle I | \Phi \rangle$ 及 $C_{II} = \langle II | \Phi \rangle$ 也必须满足式 (8.39) 形式的哈密顿方程。事实上，若将式 (9.2) 减式 (9.3) 然后再对 t 求导，就有

$$i \hbar \frac{dC_I}{dt} = (E_0 + A)C_I = E_I C_I. \quad (9.8)$$

如取式 (9.2) 及 (9.3) 的和再对 t 求导, 就得

$$i \hbar \frac{dC_{II}}{dt} = (E_0 - A)C_{II} = E_{II} C_{II}. \quad (9.9)$$

用 $|I\rangle$ 和 $|II\rangle$ 作基础态, 哈密顿矩阵具有简单的形式

$$H_{I, I} = E_I, \quad H_{I, II} = 0,$$

$$H_{II, I} = 0, \quad H_{II, II} = E_{II}.$$

注意式 (9.8) 与 (9.9) 看起来都正好跟 §8-6 中在单态系统下所得的方程相像。对应于单一的能量它们具有简单的随时间作指数式变化的关系。处在各个态的振幅各自独立地随时间变化。

当然, 我们上面所找到的两个定态 $|\psi_I\rangle$ 及 $|\psi_{II}\rangle$ 是方程式 (9.8) 及 (9.9) 的解。对于态 $|\psi_I\rangle$ (这时 $C_I = -C_{II}$) 有

$$C_I = e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}, \quad C_{II} = 0. \quad (9.10)$$

而对态 $|\psi_{II}\rangle$ (这时 $C_I = C_{II}$) 则有

$$C_I = 0, \quad C_{II} = e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t}, \quad (9.11)$$

还记得式 (9.10) 中的振幅就是

$$C_I = \langle I | \psi_I \rangle, \quad \text{以及} \quad C_{II} = \langle II | \psi_I \rangle;$$

从而式 (9.10) 和下式相同：

$$|\psi_I\rangle = |I\rangle e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}.$$

这就是说，定态的态矢量 $|\psi_I\rangle$ 与基础态的态矢量 $|I\rangle$ 的差别只在于有个与状态的能量相应的指数因子。事实上，当 $t=0$ 时

$$|\psi_I\rangle = |I\rangle,$$

态 $|I\rangle$ 的物理组态与能量为 (E_0+A) 的定态相同。同样，对第二个定态我们有

$$|\psi_{II}\rangle = |II\rangle e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t},$$

态 $|II\rangle$ 正是 $t=0$ 时能量为 (E_0-A) 的定态。于是我们的两个新基础态 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 在物理上与具有确定能量但去掉了指数时间因子的状态形式上相同，因而它们可以成为与时间无关的基础态。（下面我们会发现不去区别定态 $|\psi_I\rangle$ 和 $|\psi_{II}\rangle$ 以及它们的基础态 $|I\rangle$ 和 $|II\rangle$ 是方便的，因为它们的差别只在于明显的时间因子。）

总之，态矢量 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 是一对基矢，它们适合于描写氨分子的确定能量的状态。它们与我们原来的基矢的关系是

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle], \quad |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle + |2\rangle]. \quad (9.12)$$

处在 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 中的振幅与 C_1 ， C_2 的关系是

$$C_I = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_1 - C_2], C_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_1 + C_2]. \quad (9.13)$$

任何状态都可用 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 的线性组合表示——系数为 C_1 与 C_2 ，或者用确定能量的基础态 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 的线性组合表示——系数为 C_I 与 C_{II} 。于是

$$|\Phi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2,$$

或

$$|\Phi\rangle = |I\rangle C_I + |II\rangle C_{II}.$$

第二种形式给出了在能量为 $E_I = E_0 + A$ 的状态或在能量为 $E_{II} = E_0 - A$ 的状态找到态 $|\Phi\rangle$ 的振幅。

§9-2 静电场中的分子

若氨分子处在两个确定能态之一，我们以某种频率 ω 扰动它， ω 满足 $\hbar\omega = E_I - E_{II} = 2A$ ，这时系统就可能由一个态跃迁到另一个态。或者，如果它原来处在较高能态，它就可能变到较低能态而发出一个光子。但是为了诱发这种跃迁，必须与状态发生物理上的联系——某种扰动系统的方法。必须有某种外部机制如磁场或电场来影响该状态。在现在所讨论的特定情况下，这些态对于电场较敏感。所以，接下来我们来考察氨分子处在外电场中的行为。

为讨论电场中的行为，我们将回到原来的基础态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ ，而不使用 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 。假设在垂直于氢原子组成的平面的方向上存在一个电场。暂时不去考虑氮原子上、下翻转的可能性，那么对于氮原子的两种位置，这个分子的能量是否相同？一般说来并不相同。由于电子更倾向于靠近氮原子核而不是氢原子核，所以氢原子略带正电。真实的能量取决于电子分布的详细状况。要精确描写出该分布的情况是个复杂的问题，但无论如何，净效应是氨分子具有一个电偶极矩，如图9-1所示。我们可以在不知道电荷位移的方向与大小的详细情况下继续进行我们的分析。但为了跟其他人的记号相一致，让我们假设电偶极矩是 μ ，方向从氮原子垂直指向氢原子平面。

当氮原子由一边翻转到另一边时，质心并不移动，但电偶极矩反转。由于这个偶极矩的存在，分子处在电场 E 中的能量将取决于分子的取向。^[2]按照上面所作的假定，如氮原子的指向沿着场的方向，势能就高，如与场方向相反，势能就低，两者能量的间隔是 $2\mu E$ 。

在到此为止的讨论中，我们只假设了 E_0 与 A 的值而不知道怎么去计算它们。根据正确的物理理论，应有可能根据所有原子核和电子的位置与运动来计算出这些常数。但从没有人作过这种计算。这样一个系统包括10个电子和4个原子核，这种计算实在是太复杂的问题。事实上，关于这个分子的情况，别人知道的比我们的也多不了许多。人们所能够说的只是，当电场存在时，两种状态的能量是不同的，其差值正比于电场。我们令比例系数为 2μ ，但其值必须由实验确定。我们也可以说分子翻转的振幅是 A ，但它也必须由实验测定。没有人会告诉我们 μ 和 A 的精确理论值，因为详细计算实在太复杂。

对于处在电场中的氨分子，我们的描写必须有些改变。如果不考虑分子由一个位形翻转到另一个位形的振幅，我们可以预料这两个态 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 的能量是 $(E_0 \pm \mu E)$ 。按照上一章的做法，我们取

$$H_{11} = E_0 + \mu E, \quad H_{22} = E_0 - \mu E. \quad (9.14)$$

我们还假定施加的电场不会显著地影响分子的几何形状，因此，也不会影响氨分子从一位置跳至另一位置的振幅。于是可以认为 H_{12} 与 H_{21} 没有变化，即

$$H_{12} = H_{21} = -A. \quad (9.15)$$

现在我们必须来解具有这些新的 H_{ij} 值的哈密顿方程式 (8.43)。我们本可以像过去那样来解方程，但因为以后有几种场合需要求双态系统的解，让我们对一般情况下的任意 H_{ij} ——只假定它们不随时间变化——一劳永逸地求出方程的解来。

我们要求下列一对哈密顿方程的一般解：

$$i \hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11} C_1 + H_{12} C_2, \quad (9.16)$$

$$i \hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{21} C_1 + H_{22} C_2. \quad (9.17)$$

由于这些是常系数线性微分方程，我们总可找到依赖于变量 t 的指数函数的解。我们得先来求对 C_1 与 C_2 两者来说有相同时间相关性的解；可以用尝试函数

$$C_1 = a_1 e^{-i\omega t}, \quad C_2 = a_2 e^{-i\omega t}.$$

因为这样一个解对应于能量 $E = \hbar\omega$ 的状态，我们可以直接写出

$$C_1 = a_1 e^{-iE/\hbar t}, \quad (9.18)$$

$$C_2 = a_2 e^{-iE/\hbar t}. \quad (9.19)$$

这里 E 仍然未知，要求使微分方程式 (9.16) 及 (9.17) 得到满足来给予确定。

将式 (9.18) 及 (9.19) 的 C_1 与 C_2 代入微分方程式 (9.16) 及 (9.17) 中，导数项正好给出 $-iE/\hbar$ 乘以 C_1 或 C_2 ，所以左边就是 EC_1 和 EC_2 。消去公共指数因子，我们得到

$$Ea_1 = H_{11}a_1 + H_{12}a_2, \quad Ea_2 = H_{21}a_1 + H_{22}a_2,$$

经整理之后得到

$$(E - H_{11})a_1 - H_{12}a_2 = 0, \quad (9.20)$$

$$-H_{21}a_1 + (E - H_{22})a_2 = 0. \quad (9.21)$$

这齐次代数方程组，只有在 a_1 与 a_2 的系数行列式为零，即当

$$\text{Det} \begin{pmatrix} E - H_{11} & -H_{12} \\ -H_{21} & E - H_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.22)$$

时， a_1 和 a_2 才有非零解。

然而，当只有两个方程和两个未知数时，我们无需这种深奥的概念。两个方程式（9.20）与（9.21）中的每个都给出两个系数 a_1 与 a_2 的比，这两个比必须相等。由式（9.20）有

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{H_{12}}{E - H_{11}}, \quad (9.23)$$

由式（9.21）有

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{E - H_{22}}{H_{21}}. \quad (9.24)$$

这两个比值相等，我们得到 E 必须满足的方程

$$(E - H_{11})(E - H_{22}) - H_{12}H_{21} = 0.$$

这与解式（9.22）得到的结果相同。不论哪种解法都得到一个 E 的二次方程，它有两个解

$$E = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}, \quad (9.25)$$

能量 E 有两个可能值。注意两个解对能量都给出实数，因为 H_{11} 与 H_{22} 是实数，而 $H_{12}H_{21} = H_{12}H_{12}^* = |H_{12}|^2$ ，都是正实数。

利用与前面同样的约定，我们称较高的能量为 E_I ，较低的能量为 E_{II} 。于是

$$E_{\text{I}} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}, \quad (9.26)$$

$$E_{\text{II}} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}, \quad (9.27)$$

在式(9.18)及(9.19)中分别使用这两个能量值,就得到两个定态(确定能量的状态)的振幅。如果没有外来扰动,系统原先处在两态中某一个态,就将一直处在该态,只是相位会改变。

可以对两种特殊情况验证我们的结果。如 $H_{12}=H_{21}=0$,就有 $E_{\text{I}}=H_{11}$ 及 $E_{\text{II}}=H_{22}$ 。这无疑是正确的,因为这时式(9.16)与(9.17)之间没有耦合,分别表示能量为 H_{11} 和 H_{22} 的状态。其次,如令 $H_{11}=H_{22}=E_0$ 及 $H_{21}=H_{12}=-A$,我们就会得到先前得到过的解:

$$E_{\text{I}}=E_0+A \text{ 和 } E_{\text{II}}=E_0-A.$$

对一般情况,两个解 E_{I} 和 E_{II} 对应于两个状态,这两个状态又可以写成

$$|\psi_{\text{I}}\rangle = |\text{I}\rangle e^{-(i/\hbar)E_{\text{I}}t} \text{ 和 } |\psi_{\text{II}}\rangle = |\text{II}\rangle e^{-(i/\hbar)E_{\text{II}}t}.$$

这两个态就有式(9.18)及(9.19)给出的 C_1 与 C_2 ,其中 a_1 与 a_2 仍待定。它们的比值由式(9.23)或(9.24)给出。它们还需满足一个条件。如果已知系统处在定态之一,那么在 $|1\rangle$ 或 $|2\rangle$ 中找到它的概率之和必定等于1,即必须有

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1, \quad (9.28)$$

或等价地

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1. \quad (9.29)$$

这些条件并没有唯一地确定 a_1 与 a_2 ，它们仍有个不确定的任意的相位，即有 $e^{i\delta}$ 这样一个因子未确定。虽然可以写出各个 a 的一般解^[3]，但算出每一种具体情况下各 a 的值通常更方便些。

现在让我们回到电场中的氨分子这一特例上去。利用式(9.14)与(9.15)所给定的 H_{11} ， H_{22} 及 H_{12} 的值，我们得到两个定态的能量

$$E_I = E_0 + \sqrt{A^2 + \mu^2 \mathcal{E}^2}, \quad E_{II} = E_0 - \sqrt{A^2 + \mu^2 \mathcal{E}^2}, \quad (9.30)$$

这两个能量作为电场强度 E 的函数画在图9-2中。当电场为零时，两个能量当然正好是 $E_0 \pm A$ 。在施加电场之后，两个能级之间的分裂增加。这种分裂起先随 E 缓慢增大，但最后变为与 E 成正比例。（曲线是双曲线。）在极强的电场中，能量成为

$$E_I = E_0 + \mu E = H_{11}, \quad E_{II} = E_0 - \mu E = H_{22}. \quad (9.31)$$

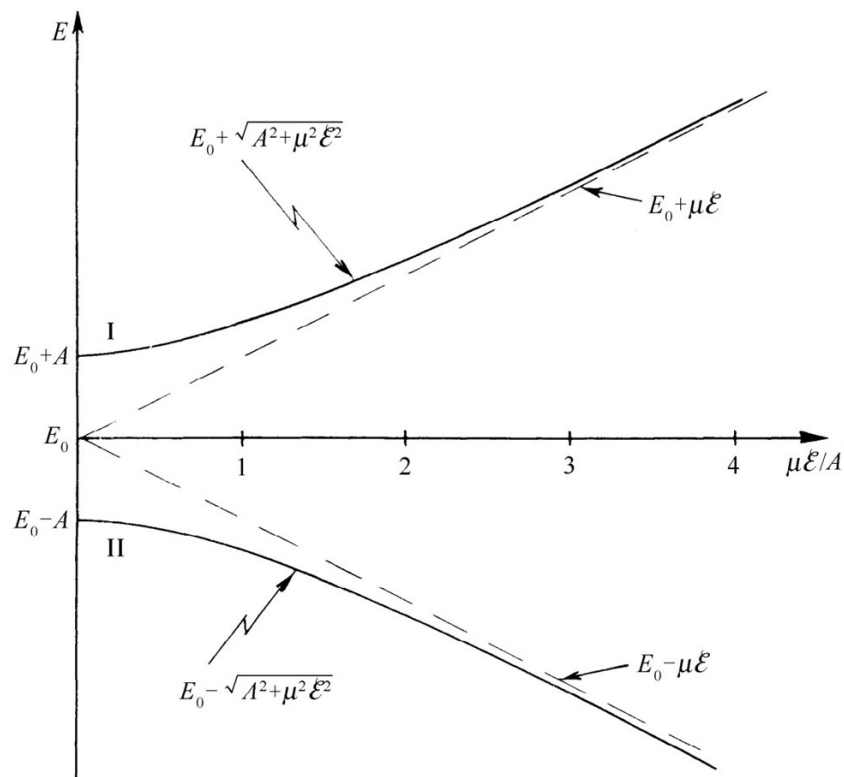


图9-2 处于电场中的氮分子的能级

当氮原子在两个位置上的能量相差非常大时，它在两个位置之间来回翻转的振幅就不起什么作用了。这是个有趣的问题，我们后面还要谈到它。

我们终于可以理解氨微波激射器的工作原理了。其概念如下。首先，我们要找到一种把处在 $|I\rangle$ 态的分子和处在 $|II\rangle$ 态的分子分离开的方法^[4]。然后，使处于较高能态 $|I\rangle$ 的分子通过一个共振频率为 24 000 MHz 的谐振腔。分子会把能量交给谐振腔——交的方式将在后面讨论——从而在离开腔时分子处在态 $|II\rangle$ 之中。每一个发生这样跃迁的分子都把 $E = E_I - E_{II}$ 的能量交给谐振腔。来自分子的能量将在腔内表现为电能。

我们如何使两种状态的分子分离？一种办法是：使氨气由细小喷嘴射出，连续通过两个狭缝后形成一细束，如图9-3所示，然后让细束通过一个具有颇大横向电场的区域。产生电场的电极形状要做得使电场在横越分子束方向上迅速地变化。于是电场的平方 $E \cdot E$ 在垂直于分子束的方向上有很大的梯度。而处在 $|I\rangle$ 态的分子所具有的能量随 E^2 而增大，因此这部分分子束将向 E^2 较低的区域偏转。相反，处在 $|II\rangle$ 的分子将向 E^2 较大的区域偏转，因为它的能量随 E^2 增大而减小。

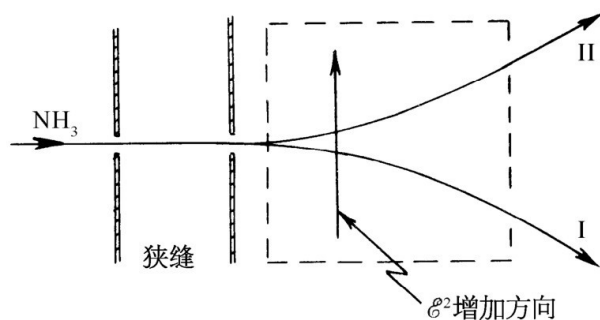


图9-3 氨分子束可以用电场分离，在该电场中 E^2 具有垂直于分子束方向上的梯度

附带提一下，对实验室中所能产生的电场来说，能量 μE 总是远小于 A 。在这样的情况下，式(9.30)中的平方根可以近似取为

$$A \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 E^2}{A^2} \right). \quad (9.32)$$

所以，就实用的目的而言，能级是

$$E_1 = E_0 + A + \frac{\mu^2 E^2}{2A} \quad (9.33)$$

及

$$E_{\parallel} = E_0 - A - \frac{\mu^2 \mathcal{E}^2}{2A}. \quad (9.34)$$

而能量的变化近似地与 E^2 成线性关系。于是作用在分子上的力是

$$\mathbf{F} = \frac{\mu^2}{2A} \nabla \mathcal{E}^2. \quad (9.35)$$

许多分子在电场中具有正比于 E^2 的能量。比例系数就是分子的极化率。由于分母中的 A 值很小，氨分子具有异常高的极化率。所以，氨分子对电场异常敏感。（你估计一下氨气的介电系数是多少？）

§9-3 在随时间变化的场中的跃迁

在氨微波激射器中，处在态 $|I\rangle$ 且具有能量 E_I 的分子束被送入一个共振腔，如图9-4所示。而另一分子束则被丢弃。在腔内有一个随时间变化的电场，于是我们要讨论的下一个问题就是分子处在随时间变化的电场中的行为。我们碰到了完全不同类型的问题——具有随时间变化的哈密顿的问题。由于 H_{ij} 依赖于 E ， H_{ij} 也就随时间而变，于是我们必须确定系统在这种情况下行为。

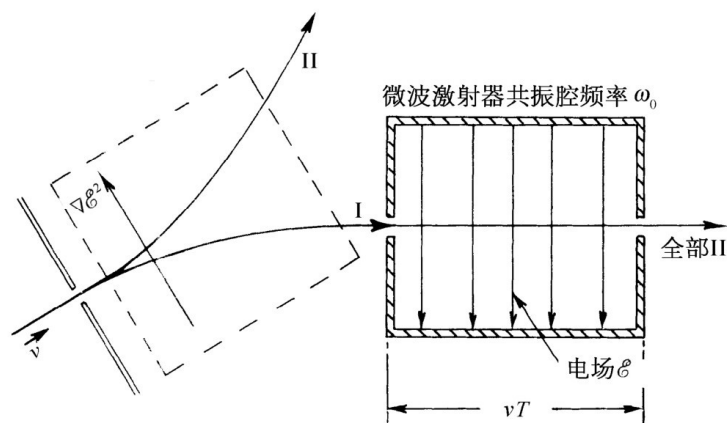


图9-4 氨微波激射器示意图

首先，我们写下待解的方程：

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{dC_1}{dt} &= (E_0 + \mu \mathcal{E}) C_1 - A C_2, \\ i \hbar \frac{dC_2}{dt} &= -A C_1 + (E_0 - \mu \mathcal{E}) C_2. \end{aligned} \quad (9.36)$$

为明确起见，我们设电场作正弦式变化，于是可以写出

$$E = 2E_0 \cos \omega t = E_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (9.37)$$

在实际操作中频率 ω 与分子跃迁的共振频率 $\omega_0 = 2A/\hbar$ 极为接近，但此刻我们想使问题保持普遍性，所以还是设它具有任意值。解上述方程的最好方法是像先前那样构成 C_I 与 C_{II} 的线性组合。于是我们将两个方程相加，除以2的平方根，再利用式(9.13)中 C_I 及 C_{II} 的定义。就得到

$$i \hbar \frac{dC_{II}}{dt} = (E_0 - A) C_{II} + \mu \mathcal{E} C_I, \quad (9.38)$$

你们会注意到这与式(9.9)相同，只是多了一个由电场引起的额外项。类似地，将式(9.36)中的两个方程相减，可得

$$i \hbar \frac{dC_I}{dt} = (E_0 + A) C_I + \mu \mathcal{E} C_{II}. \quad (9.39)$$

现在的问题是，怎样解这些方程？它们比先前的那组方程更难解，因为 E 依赖于 t ，而事实上，对于一般的 $E(t)$ ，其解无法用初

等函数表示。然而，只要电场很小，我们可以得到一个很好的近似解。首先我们写出

$$\begin{aligned} C_I &= \gamma_I e^{-i(E_0+A)t/\hbar} = \gamma_I e^{-i(E_I)t/\hbar}, \\ C_{II} &= \gamma_{II} e^{-i(E_0-A)t/\hbar} = \gamma_{II} e^{-i(E_{II})t/\hbar}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

如果不存在电场，那么只要选取 γ_I 与 γ_{II} 为两个复常量，这些解就是正确的，事实上，因为处在态 $|I\rangle$ 的概率是 C_I 的绝对值平方，而处在态 $|II\rangle$ 的概率是 C_{II} 的绝对值平方，处在态 $|I\rangle$ 或态 $|II\rangle$ 的概率正好是 $|\gamma_I|^2$ 或 $|\gamma_{II}|^2$ 。例如，系统开始时处于态 $|II\rangle$ ，那么 γ_I 为零而 $|\gamma_{II}|^2$ 是1，这种状况将一直继续下去。如果分子本来处在态 $|II\rangle$ ，那么就没有机会变为态 $|I\rangle$ 。

注意，我们将方程写成式（9.40）的形式的思路是，如果 μE 比 A 小，那么解答依然可写成这种形式，只是 γ_I 与 γ_{II} 变成随时间缓慢变化的函数了。所谓“缓慢变化”是指与指数函数相比较而言。这就是诀窍。我们利用 γ_I 与 γ_{II} 变化缓慢这个事实来得到近似解。

现在我们要把式（9.40）中的 C_I 代入微分方程式（9.39），但必须记住 γ_I 也是 t 的函数。我们有

$$i\hbar \frac{dC_I}{dt} = E_I \gamma_I e^{-iE_I t/\hbar} + i\hbar \frac{d\gamma_I}{dt} e^{-iE_I t/\hbar}.$$

微分方程就变成

$$\left(E_I \gamma_I + i\hbar \frac{d\gamma_I}{dt} \right) e^{-(i/\hbar)E_I t} = E_I \gamma_I e^{-(i/\hbar)E_I t} + \mu^e \gamma_{II} e^{-(i/\hbar)E_{II} t}. \quad (9.41)$$

类似地， $dC_{\parallel}/dt$ 的微分方程成为

$$\left(E_{\parallel} \gamma_{\parallel} + i \hbar \frac{d\gamma_{\parallel}}{dt}\right) e^{-(i/\hbar)E_{\parallel}t} = E_{\parallel} \gamma_{\parallel} e^{-(i/\hbar)E_{\parallel}t} + \mu^{\mathcal{E}} \gamma_{\perp} e^{-(i/\hbar)E_{\perp}t}. \quad (9.42)$$

现在你们会注意到每个方程的两边都有相等的项。我们先将它们消去，再将第一个方程乘以 $e^{+iE_{\perp}t/\hbar}$ ，将第二个方程乘以 $e^{+iE_{\parallel}t/\hbar}$ 。要记住 $(E_{\perp} - E_{\parallel}) = 2A = \hbar\omega$ ，最后就有

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d\gamma_{\perp}}{dt} &= \mu^{\mathcal{E}}(t) e^{i\omega_0 t} \gamma_{\parallel}, \\ i \hbar \frac{d\gamma_{\parallel}}{dt} &= \mu^{\mathcal{E}}(t) e^{-i\omega_0 t} \gamma_{\perp}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

现在我们有了一对外观上简单的方程——当然，它们仍然是精确的。一个变量的导数是时间函数 $\mu^{\mathcal{E}}(t) e^{i\omega_0 t}$ 乘以第二个变量，第二个变量的导数则是类似的一个时间函数乘以第一个变量。尽管不能得出这些简单方程的一般解，我们仍将就某些特殊情况求解这些方程。

我们只对振动电场的情况感兴趣，至少当前是这样。将 $E(t)$ 取为式 (9.37) 的形式，我们发现 $\gamma_{\perp}$ 与 $\gamma_{\parallel}$ 的方程变为

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d\gamma_{\perp}}{dt} &= \mu^{\mathcal{E}_0} [e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}] \gamma_{\parallel}, \\ i \hbar \frac{d\gamma_{\parallel}}{dt} &= \mu^{\mathcal{E}_0} [e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] \gamma_{\perp}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

如果 E_0 足够小， $\gamma_{\perp}$ 与 $\gamma_{\parallel}$ 的变化率也就小。两个 γ 随时间 t 的变化不会很大，特别是跟指数项所引起的迅速变化相比而言。这些指数项具有实部及虚部，它们以频率 $(\omega + \omega_0)$ 或 $(\omega - \omega_0)$ 振荡。以 $(\omega + \omega_0)$ 振荡的这一项在平均值零上下变化得很快，因此，对 γ 的变化率的

平均值贡献并不很大。这样，我们就可以合理地取一个很好的近似，即用它们的平均值，也就是零，来代替这些项。只要舍去它们，即可取作我们的近似式：

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d\gamma_{\perp}}{dt} &= \mu \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega - \omega_0)t} \gamma_{\parallel}, \\ i \hbar \frac{d\gamma_{\parallel}}{dt} &= \mu \mathcal{E}_0 e^{+i(\omega - \omega_0)t} \gamma_{\perp}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

即使剩下的其指数与 $(\omega - \omega_0)$ 成比例的那一项也变化得很快，除非 ω 接近于 ω_0 。只有这时右边的变化才会足够缓慢，以至当我们将方程对 t 求积分时才能得到可觉察到的量值。换句话说，对弱电场而言，只有那些靠近 ω_0 的频率才是重要的。

在得到式 (9.45) 所作的近似下，方程才可以精确地解出，但解法仍颇复杂，所以我们现在不想解它，而要等到以后碰到同样类型的另一个问题时再说。现在我们只求出近似解——或更确切地说，我们将找出完全共振，即 $\omega = \omega_0$ 时的精确解，以及频率接近于共振频率时的近似解。

§9-4 共振跃迁

首先让我们考虑完全共振的情况。如果取 $\omega = \omega_0$ ，则式 (9.45) 的两个方程的指数均等于1，于是便有

$$\frac{d\gamma_{\perp}}{dt} = -\frac{i\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}\gamma_{\parallel}, \quad \frac{d\gamma_{\parallel}}{dt} = \frac{-i\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}\gamma_{\perp}. \quad (9.46)$$

如果先从这些方程中消去 γ_I ，然后消去 γ_{II} ，我们就发现每个 γ 都满足简谐运动的微分方程：

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}\right)^2 \gamma. \quad (9.47)$$

这些方程的一般解可由正弦和余弦函数组成。很容易验证，下列方程式就是一种解：

$$\begin{aligned} \gamma_I &= a \cos\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right) + b \sin\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right), \\ \gamma_{II} &= ib \cos\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right) - ia \sin\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right), \end{aligned} \quad (9.48)$$

式中 a 与 b 是根据特定的物理条件来定的常数。

例如，设 $t=0$ 时分子系统处在较高能态 $|I\rangle$ ，由式(9.40)可知，这要求 $t=0$ 时 $\gamma_I=1$ 及 $\gamma_{II}=0$ 。在这种情况下，就要求 $a=1$ ， $b=0$ 。往后某时刻 t 分子处在态 $|I\rangle$ 的概率是 γ_I 的绝对值平方，即

$$P_I = |\gamma_I|^2 = \cos^2\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right). \quad (9.49)$$

类似地，分子处于态 $|II\rangle$ 的概率是 γ_{II} 的绝对值平方，即

$$P_{II} = |\gamma_{II}|^2 = \sin^2\left(\frac{\mu\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right). \quad (9.50)$$

只要 E 很小，并且处于共振情况下，概率就由简单的振荡函数给出。处在态 $|I\rangle$ 的概率由1下降为0，然后再回升到1，同时，处在态 $|II\rangle$ 的概率则由0上升到1，再下降。两种概率随时间的变化曲线如图9-5所示。不用说，两概率的和总是等于1，分子总得处在某个状态之中！

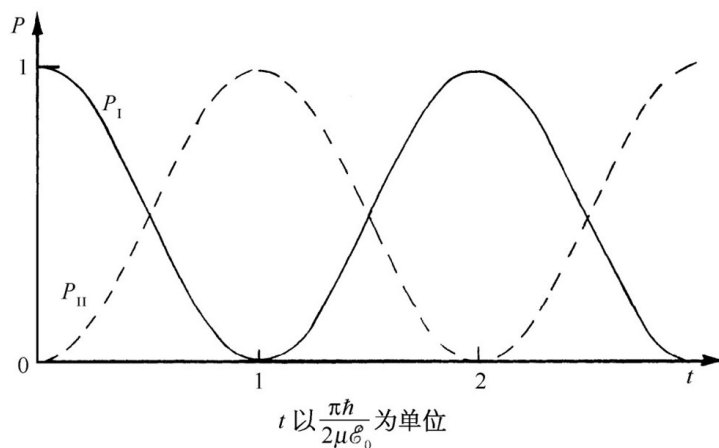


图9-5 在正弦型电场中的氮分子处于两种状态的概率

设氮分子通过共振腔需要时间 T 。如果使腔长正好满足 $\mu\mathcal{E}_0 T/\hbar = \pi/2$ ，那么进腔时处在态 $|I\rangle$ 的分子离开时必处于态 $|II\rangle$ 。如果它进入空腔时处于高能态，离开腔时就处于低能态。换句话说，它的能量减少了，能量不可能丢失到其他地方，只可能进入产生场的机制中去。你们可以看到分子能量怎么馈入共振腔的振荡中去的有关细节是不简单的，不过，我们不必去研究这些细节，因为我们可以利用能量守恒原理。（如果我们一定要研究这些细节，那么除了原子的量子力学外我们还要考虑共振腔中场的量子力学。）

概括一下：分子进入共振腔后，以正好恰当的频率振荡的腔内电场诱发分子从高能态跃迁至低能态，而所释放的能量则馈入振荡电场。在一个工作着的微波激射器中，分子提供足够的能量以维持腔的振荡——不仅提供足够功率以弥补腔内损耗，还提供少量可从腔中引出的额外功率。于是，分子能量被转换为外界的电磁场能量。

记住，在分子束进入共振腔之前，必须使用一个分离分子束的过滤装置，只让高能态的分子进入腔内。不难证明，如果你在开始时用的是低能态的分子，整个过程将沿相反方向进行，从腔中取出能量。如果使未过滤的分子束进入，那么有多少分子取走能量就有多少分子释放能量，最终什么也不发生。当然，在实际运行中，不必使 $(\mu \mathcal{E}_0 T / \hbar)$ 正好是 $\pi/2$ 。对任何其他值（除去正好是 π 的整数倍外），都有一定概率从态 $|I\rangle$ 跃迁至态 $|II\rangle$ 。但对其他值来说，器件的效率不是100%；许多离腔时本来应该把一些能量交给空腔的分子并没有把能量交给腔。

在实际情况下，所有分子的速度并不都相同，它们具有某种形式的麦克斯韦分布。这意味着不同分子的理想的时间周期不相同，因此不可能同时对所有分子都获得100%的效率。此外，还存在另一种容易想到的复杂性，但此刻我们不想为此费心。大家记得腔内的电场通常在腔中处处不同。因此，当分子通过共振腔时，分子所在处的电场以比我们所假设的随时间作简谐式振荡更为复杂的方式变化。显然，必须用更繁复的积分来精确计算这个问题，但其基本概念仍然相同。

还有另外一些制造微波激射器的方法，代替用施特恩-格拉赫装置分离态 $|I\rangle$ 的分子和态 $|II\rangle$ 的分子，也可以将原子（像气体或固体）预先放在腔内，用某种方法使原子从态 $|II\rangle$ 变到态 $|I\rangle$ 。一种方法是在所谓三态^[5]微波激射器中使用的方法。为此，所用的原子系统要有3个能级，如图9-6所示，它们具有下列特性。系统会吸收频率为 $\hbar \omega_1$ 的辐射（如光），从最低能级 E_{II} 跳到高能级 E' ，然后迅速发射光子 $\hbar \omega_2$ 而落到能量 E_I 的态 $|I\rangle$ 。态 $|I\rangle$ 有长的寿命，因而这个态的布居数会增多，这样，就会达到于态 $|I\rangle$ 与态 $|II\rangle$ 之间发生

微波激射的条件。虽然这种器件称为“三态”微波激射器，它的工作方式实际上和我们所描写的双态系统完全一样。

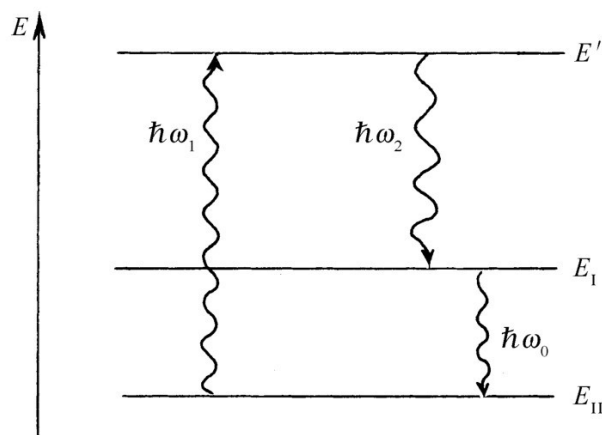


图9-6 “三态”微波激射器的能级

激光（Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation）只不过是一种工作在光学频率的激射器。激光的“共振腔”通常由两块反射镜组成，在两反射镜之间建立起驻波。

§9-5 偏离共振的跃迁

最后，我们想要搞清在共振腔频率接近、但不严格等于 ω_0 的情况下状态如何变化。我们能够精确解答这个问题，但我们并不打算这样做，而讨论一种重要情况，即电场较弱，而且时间间隔 T 也较小，从而 $\mu\mathcal{E}_0 T/\hbar$ 远小于1。这样，即使在我们刚计算过的完全共振的情况下，产生跃迁的概率也较小。假设我们仍从 $\gamma_I=1$ 及 $\gamma_{II}=0$ 开始。在时间 T 内我们预料 γ_I 仍然保持近似等于1，而 γ_{II} 则保持远小于1。这样问题就很容易。我们可以从式（9.45）的第二个方程来计算 γ_{II} ，取 γ_I 等于1，并从 $t=0$ 积分到 $t=T$ 。我们得到

$$\gamma_{\text{II}} = \frac{\mu_{\mathcal{C}_0}}{\hbar} \left[\frac{1 - e^{i(\omega - \omega_0)T}}{\omega - \omega_0} \right]. \quad (9.51)$$

将此 γ_{II} 值用于式(9.40)中即给出时间间隔 T 内从态 $|I\rangle$ 跃迁至态 $|II\rangle$ 的振幅。发生跃迁的概率 $P(I \rightarrow II)$ 是 $|\gamma_{\text{II}}|^2$ ，即

$$P(I \rightarrow II) = |\gamma_{\text{II}}|^2 = \left[\frac{\mu_{\mathcal{C}_0} T}{\hbar} \right]^2 \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T/2]}{[(\omega - \omega_0)T/2]^2}. \quad (9.52)$$

将在一定时间间隔内跃迁的概率作为共振腔频率的函数作图是很有意义的，从这可以看出在共振频率 ω_0 附近跃迁概率对频率依赖的灵敏程度。我们将这样的 $P(I \rightarrow II)$ 曲线画在图9-7中。（通过将纵坐标表示的概率除以 $\omega = \omega_0$ 处的概率值，峰值的纵坐标被调整到1。）我们在衍射理论中已见到过这样的曲线，所以你们对它应该已经熟悉了。当 $(\omega - \omega_0) = 2\pi/T$ 时，曲线相当迅速地下降至零，而对更大的频率偏差，再也不能重新达到可观的数值。事实上，曲线下面积的绝大部分位于 $\pm\pi/T$ 的区间之内，可以证明^[6]曲线下的面积正好是 $2\pi/T$ ，并等于图中所画的阴影矩形的面积。

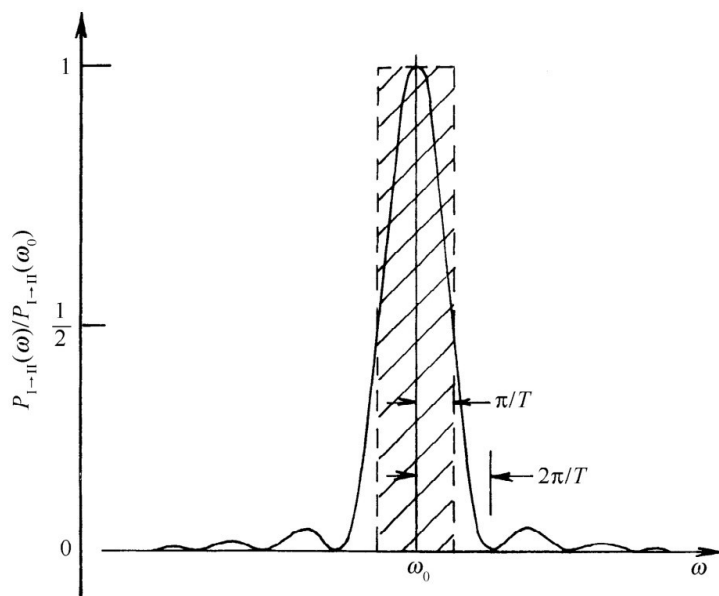


图9-7 氨分子跃迁概率与频率的函数关系

让我们就一个真实的微波激光器来考察上述结果的含义。假设氨分子在腔内呆了适当长的时间，比方说1 ms。那么对 $f_0 = 24\,000\text{ MHz}$ ，我们可以求出频率偏差为 $(f - f_0) / f_0 = 1 / f_0 T$ ，这个数值为 5×10^{-8} 时，跃迁概率下降为零。显然频率必须非常接近于 ω_0 才能得到可观的跃迁概率。这一效应是能够用“原子”钟获得极高精度的基础，而原子钟就是根据微波激光器原理工作的。

§9-6 光的吸收

上面的处理方法适用于比氨微波激光器更普遍的情况。我们处理过分子在电场的影响下的行为，不论场是否局限于腔内。所以我们可以简单地把一束“光”——微波频率——照射到分子上，并求发射或吸收的概率。我们的方程同样适用于这种情况，但我们用辐射的强度而

不是用电场作为参数来重新写出那些方程。如果定义强度 I 为每秒钟通过单位面积的平均能量，则由第2卷第27章，我们可以写出

$$\mathcal{J} = \epsilon_0 c^2 |\mathcal{E} \times \mathbf{B}|_{\text{平均}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 |\mathcal{E} \times \mathbf{B}|_{\text{极大}} = 2\epsilon_0 c \mathcal{E}_0^2.$$

(E 的最大值是 $2E_0$ 。) 于是跃迁概率为

$$P(\text{I} \rightarrow \text{II}) = 2\pi \left[\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} \right] \mathcal{J} T^2 \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T/2]}{[(\omega - \omega_0)T/2]^2}. \quad (9.53)$$

通常照射在这样一种系统上的光并不是严格单色的。因此，值得再求解一个问题——就是计算光的频率分布在包括 ω_0 在内的一定宽度区间上的跃迁概率，令每单位频率间隔的光强为 $I(\omega)$ 。这时，从 $|\text{I}\rangle$ 至 $|\text{II}\rangle$ 跃迁的概率成为一个积分：

$$P(\text{I} \rightarrow \text{II}) = 2\pi \left[\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} \right] T^2 \int_0^\infty \mathcal{J}(\omega) \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T/2]}{[(\omega - \omega_0)T/2]^2} d\omega. \quad (9.54)$$

一般来说， $I(\omega)$ 随 ω 的变化将远比尖锐的共振项来得缓慢。两个函数也许就像图9-8所示那种样子。在这种情况下，我们就可以将 $I(\omega)$ 用它在尖锐的共振曲线中央位置处的值 $I(\omega_0)$ 来代替，并将它提出积分号外。所留下的正是图9-7的曲线下的积分，如我们所知此积分正好等于 $2\pi/T$ 。我们得到如下结果

$$P(\text{I} \rightarrow \text{II}) = 4\pi^2 \left[\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} \right] \mathcal{J}(\omega_0) T. \quad (9.55)$$

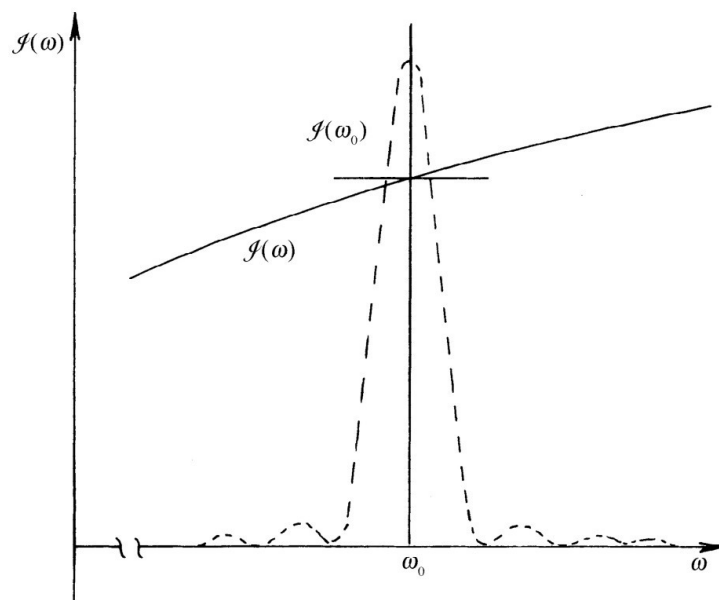


图9-8 光谱强度 $J(\omega)$ 可以近似地用它在 ω_0 处的值表示

这是个重要的结果，因为它是光被任何分子或原子系统吸收的普遍理论。尽管我们是从考虑态 $|I\rangle$ 比态 $|II\rangle$ 能量高的情况开始的，但我们的讨论中没有任何依赖这个事实的地方。如果态 $|I\rangle$ 具有的能量比态 $|II\rangle$ 低，式 (9.55) 仍然成立；这时 $P(I \rightarrow II)$ 就表示从入射电磁波吸收能量发生跃迁的概率。任何原子系统对光的吸收总是与能量差为 $E = \hbar\omega_0$ 的两个状态之间在振荡电场中发生跃迁的振幅有关。所以，对任何特定情况，此振幅总是用我们这里所用的方法计算，并可得到如式 (9.55) 那样的表式。因此，我们要强调指出这个结果的下列几个特点。首先，概率正比于 T 。换句话说，单位时间发生跃迁的概率是常数。其次，这个概率正比于入射到系统上的光强。最后，跃迁概率正比于 μ^2 。你们该记得， μE 决定了由电场 E 所引起的能量变化。正因为这一点， μE 作为耦合项也出现在式 (9.38) 及 (9.39) 中，就是它引起原来是定态的两个状态 $|I\rangle$ 与 $|II\rangle$ 之间的跃迁。换句话说，对于我们所考虑的小的 E ， μE 就是哈密顿矩阵元中联系着态

$|I\rangle$ 与 $|II\rangle$ 的所谓“微扰项”。在一般情况下，我们要用矩阵元 $\langle II | H | I \rangle$ 代替 μE （见§5-6）。

在第1卷§42-5中我们讲过用爱因斯坦系数 A 与 B 表示的光的吸收，受激发射，及自发发射之间的关系。现在，我们终于有了计算这些系数的量子力学程序了。我们所说的双态氨分子的 P ($I \rightarrow II$) 正好对应于爱因斯坦辐射理论的吸收系数 B_{nm} 。对于复杂的氨分子——无论什么人要对它进行计算都太困难——我们已将矩阵元 $\langle II | H | I \rangle$ 取作为 μE ，并讲明 μ 要由实验得到。对简单的原子系统，属于任何特定跃迁的 μ_{mn} 可由以下定义计算出：

$$\mu_{mn} E = \langle m | H | n \rangle = H_{mn}, \quad (9.56)$$

这里 H_{mn} 是包括弱电场效应的哈密顿矩阵元。这样计算出的 μ_{mn} 称为电偶极子矩阵元。所以，光的吸收与发射的量子力学理论就归结为对特定原子系统计算这些矩阵元。

我们对简单的双态系统的研究就这样使我们得以理解光的吸收与发射的普遍问题。

[1] 往后你自己在阅读或与别人交谈时，如果有个区分阿拉伯数字1及2和罗马数字I及II的简便方法将是有益的。我们觉得对阿拉伯数字保留“one”和“two”的名称，而用“eins”及“zwei”来称呼I及II是方便的（虽然称作“unus”及“duo”也许更合理些！）。（以上外文分别是英文、德文和意大利文“一”和“二”的意思。——译者注）

[2] 很抱歉，我们不得不引进一个新的记号，因为我们已经用 p 和 E 来表示动量和能量，所以不想再用它们来表示偶极矩和电场。记住，在这一节中 μ 是电偶极矩。

[3] 例如，下面就是一组可能的解，你很容易验证它们：

$$a_1 = \frac{H_{12}}{[(E - H_{11})^2 + H_{12} H_{21}]^{1/2}}, \quad a_2 = \frac{E - H_{11}}{[(E - H_{11})^2 + H_{12} H_{21}]^{1/2}}.$$

[4] 从现在起我们写 $|I\rangle$ 与 $|II\rangle$ 来代替 $|\psi_I\rangle$ 与 $|\psi_{II}\rangle$ 。你们必定记得实际的态 $|\psi_I\rangle$ 与 $|\psi_{II}\rangle$ 是能量的基础态乘以适当的指数因子。

[5] 本书原文 **three-state**，译作“三态”。现在普遍使用的术语是“三能级”**three-level**。——译者注

[6] 利用公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$ 。

第10章 其他双态系统

§10-1 氢分子离子

上一章我们在把氨分子看作双态系统的近似下讨论了氨分子的一些特性。当然，氨分子实际上不是双态系统——还存在着转动、平动、振动等等许多状态，但由于氮原子的上下翻转，这些运动状态的每一个都要分解成两种内部状态。这里，我们要考虑在某种近似下可视为双态系统的另一些例子。有许多问题都是近似的，因为总是有许多其他状态存在，在更精确的分析中应当把它们考虑进去。但在所举的每个例子中，仅仅考虑两个状态我们还是能学到许多东西。

因为我们只处理双态系统，所以所需要的哈密顿就与上一章所用过的一样。当哈密顿与时间无关时，我们知道有两个具有确定——通常不相同的——能量的定态。我们的分析所用的一组基础态通常不是这些定态，而是可能具有其他某种简单物理意义的态。于是，系统的定态将用这些基础态的线性组合来表示。

为方便起见，我们总结一下第9章中重要的方程式。设原来选取的基础态是 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 。那么任何态 $|\psi\rangle$ 可以表示为如下的线性组合

$$|\psi\rangle = |1\rangle \langle 1|\psi\rangle + |2\rangle \langle 2|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2. \quad (10.1)$$

振幅 C_i （就是指 C_1 或 C_2 ）满足两个线性微分方程

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j, \quad (10.2)$$

这里 i 与 j 都取值1及2。

当哈密顿的各项 H_{ij} 不依赖于 t 时，具有确定能量的两种状态（定态），即我们称为

$$|\psi_I\rangle = |I\rangle e^{-(i/\hbar)E_I t} \text{ 和 } |\psi_{II}\rangle = |II\rangle e^{-(i/\hbar)E_{II} t}$$

的状态具有能量

$$\begin{aligned} E_I &= \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + H_{12}H_{21}}, \\ E_{II} &= \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + H_{12}H_{21}}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

这两种状态的两个振幅 C 具有相同的时间的依赖关系。与定态相联系的态矢量 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 与原来的基础态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 之间有以下关系

$$\begin{aligned} |I\rangle &= |1\rangle a_1 + |2\rangle a_2, \\ |II\rangle &= |1\rangle a'_1 + |2\rangle a'_2. \end{aligned} \quad (10.4)$$

这些 a 都是复数，它们满足

$$\begin{aligned} |a_1|^2 + |a_2|^2 &= 1, \\ \frac{a_1}{a_2} &= \frac{H_{12}}{E_I - H_{11}}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} |a'_1|^2 + |a'_2|^2 &= 1, \\ \frac{a'_1}{a'_2} &= \frac{H_{12}}{E_{II} - H_{11}}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

如 H_{11} 与 H_{22} 相等——比方说都等于 E_0 ——而 $H_{12}=H_{21}=-A$ ，那么 $E_I = E_0 + A$ ， $E_{II} = E_0 - A$ ，从而态 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 就特别简单：

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle], \quad |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle + |2\rangle]. \quad (10.7)$$

现在我们要利用这些结果来讨论一些取自化学和物理学领域中的有兴趣例子。第一个例子是氢分子的离子，一个带正电的电离氢分子由两个质子及一个电子组成，这个电子在两个质子周围运行。如果两个质子相距很远，我们预期这样的系统会有什么状态呢？答案很清楚：电子将靠近一个质子而形成一个处于最低能态的氢原子，而另一个质子则独自成为一个正离子。所以，如果两个质子离得很远，我们可想象这样一种物理状态，即电子“附着”在其中一个质子上。显然，还有另一种与之对称的状态，即电子靠近另一个质子，而第一个质子就成为一个离子。我们将取这两种态作为基础态，而称它们为 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 。两种态画在图10-1中。当然，一个电子靠近一个质子的状态实际上有许多，因为这种组合可以以任何一种氢原子的激发态存在。目前我们对这些各种各样的态并不感兴趣；我们只考虑氢原子处在最低能态——基态——的情况，而且我们暂时不考虑电子的自旋。我们可以假设在所有状态中电子都具有沿 z 轴^[1]“朝上”的自旋。

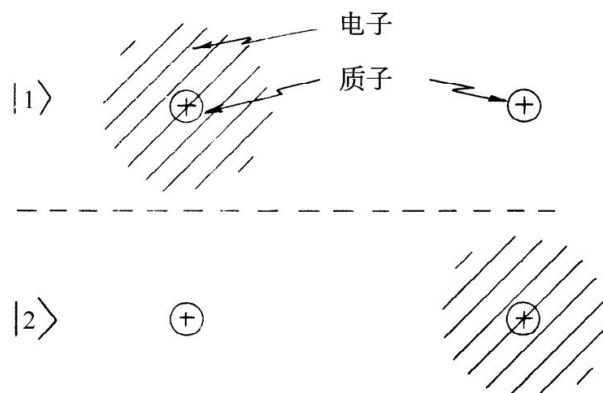


图10-1 两个质子及一个电子的一组基础态

从氢原子中移去一个电子需要13.6 eV能量。只要氢分子离子的两个质子相距很远，将电子移至靠近两质子中点某处也差不多需要这么多能量——在我们现在的问题中这是很大的能量。所以从经典物理的观点来看，电子从一个质子跳往另一个质子是是不可能的。然而，在量子力学中这是可能的——尽管可能性不很大。仍有一定的小的振幅使电子从一个质子跑向另一个质子。作为第一级近似，我们令每个基础态 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 都有能量 E_0 ，这正是一个氢原子加一个质子的能量。我们可以取哈密顿矩阵元 H_{11} 与 H_{22} 都近似等于 E_0 。对另外的矩阵元 H_{12} 与 H_{21} （它是电子往来跳动的振幅）我们仍记为 $-A$ 。

你们会发现这里的事情与上两章所玩的是同样的把戏。如果不考虑电子能够来回跳动的事实，我们就有能量完全相同的两个态。然而，由于电子有来回跳动的概率，这个能级就分裂为两个能级，跃迁的概率越大，分裂就越大。这样，系统的两个能级就是 $E_0 + A$ 及 $E_0 - A$ ，带有这两个确定能量的状态就由式（10.7）给出。

从解答中我们看出，如果使质子与氢原子靠近，电子就不会总待在其中一个质子一边，而要在两个质子间来回跳动。如果它开始处在

其中一个质子旁，那它就将在态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 之间来回振荡，即给出一个随时间变化的解。为了得到最低能量的解（这解不随时间变化），开始时此系统中的电子围绕各个质子的振幅就必须相等。记住，这里不是两个电子——我们并没有说围绕每个质子各有一个电子。总共只有一个电子，它在任一个质子旁的位置上都具有相同的振幅，其大小为 $1/\sqrt{2}$ 。

本来靠近一个质子的电子跑到另一个质子旁的振幅 A 依赖于质子之间的距离。质子靠得越近，振幅就越大。你们记得我们在第7章中谈到过在经典（观念）上不可能有电子“穿透势垒”的振幅。这里我们有同样的情况，电子穿透的振幅在距离大时大致上随距离增大而指数式减少。既然质子靠近时跃迁概率（从而 A ）变大，能级的分离也就增大。如果系统在态 $|I\rangle$ ，能量 $E_0 + A$ 随着距离的减小而增大，所以这样的量子力学效应将产生一种排斥力使质子分离。相反，若系统处在态 $|II\rangle$ ，那么如让质子靠近，总能量将减少；有个吸引力将质子拉到一起。两种能量随质子之间距离而变化的情况大致如图10-2所示。于是我们对使 H_2^+ 离子结合在一起的结合力就有了一个量子力学解释。

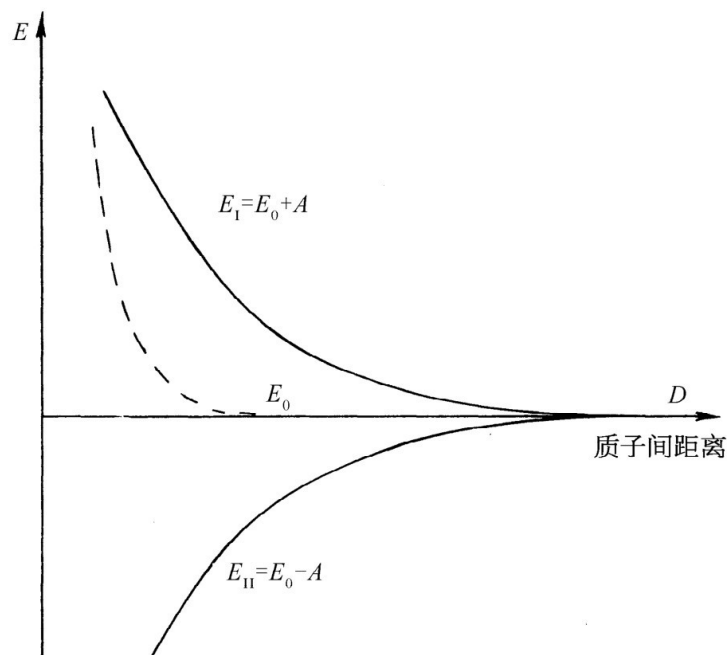


图10-2 H_2^+ 离子两种定态能量作为两个质子间距离的函数

但是，我们忘了一件事。除了我们刚才所描写的力外，在两个质子间还存在着静电斥力。当两个质子相隔较远时——如图10-1中的那种情况——“裸”质子只见到一个中性原子，因此静电力可以忽略不计。但当距离十分靠近时，“裸”质子开始进入电子的分布区“内部”，就是说，平均而言，氢原子核离另一个质子比离电子为近。这样便开始出现一些额外的静电能，当然是正的。这个能量——也随距离而变化——应包括在 E_0 之中。所以我们应当取图10-2中的虚曲线表示 E_0 ，当距离小于氢原子半径时，它迅速上升。我们应当由 E_0 加上及减去翻转能量 A 。这样做以后，能量 E_I 及 E_{II} 就将如图10-3所示那样随着质子间距离而变。〔在这个图上我们画的是经过更详细计算的结果。质子间距离以1 nm (10^{-9} m) 为单位标出。超过一个质子加上一个氢原子的能量 ΔE ，则以氢原子束缚能——所谓“里德伯”能量 E_H 13.6 eV——为单位标出。〕我们看到态 $|II\rangle$ 有一个能量极小点，这就是 H_2^+

离子的平衡位形，即最低能量态。这点的能量低于一个分离的质子与一个氢离子的能量，所以系统是束缚着的。单个电子起着使两个质子结合在一起的作用。化学家称之为“单电子键”。

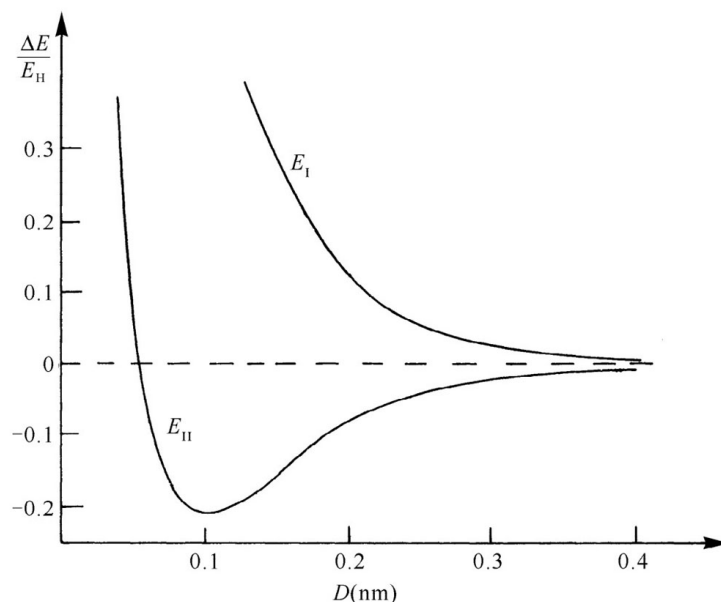


图10-3 H_2^+ 离子能级作为质子间距离 D 的函数 ($E_{\text{H}} = 13.6 \text{ eV}$)

这类化学键联也常称为“量子力学共振”（用我们先前描述过的两个耦合着的单摆作类比）。但这种称呼听起来比事情本身更神秘些。其实，只有当你从对基础态的不恰当选择出发——正如我们也做过的那样，它才“共振”！假如你选了态 $|\text{II}\rangle$ ，你就会有最低的能态——情况就是如此。

我们可以用另一种方式来看一下为什么这样一个状态具有比一个质子与一个氢原子低的能量。让我们设想一个电子靠近彼此相距某个固定但不太远的距离的两个质子。你们还记得，当只有一个质子时，由于不确定性原理，电子是“弥散”的。电子在具有低的库仑势能和不要被束缚在太小的空间两者之间寻求一种平衡。因为由于不确定性关系 ($\Delta p \Delta x \approx \hbar$)，电子被束缚在小的空间内则它的动能就要增高。如

果有两个质子，就有更多的空间使电子具有较低的势能。它可以在不加大势能的条件下弥散开来——从而降低动能。净结果就是得到低于一个质子和一个氢原子的能量。那么为什么另一种态 $|I\rangle$ 具有较高能量？请注意，这个态是态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 的差。由于 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 的对称性，它们的差使得在两个质子的半当中找到电子的振幅必定为零。这意味着电子在某种程度上被束缚得更紧，这就导致较大的能量。

应该指出，一旦两个质子之间的距离近到图10-3中曲线的极小值时，把 H_2^+ 离子视为双态系统的近似处理就完全失效了，因而这时不能得到实际结合能的精确值。对于小间距，我们在图10-1中所设想的两种“态”的能量不再恰好等于 E_0 ，需要一种更精确的量子力学处理方法。

假定我们现在问，如果不是两个质子，而是两个不同的客体，比方说一个质子与一个正的锂离子（两个粒子仍都带有单位正电荷），情况又会怎样？在这种情况下，两项哈密顿量 H_{11} 与 H_{22} 不再相等；事实上，它们将很不一样。如果出现了差 $(H_{11} - H_{22})$ 的绝对值远大于 $A = -H_{12}$ 的情况，吸引力就变得非常微弱，这可由下面看出。

如果将 $H_{12} H_{21} = A^2$ 代入式（10.3），就有

$$E = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \frac{H_{11} - H_{22}}{2} \sqrt{1 + \frac{4A^2}{(H_{11} - H_{22})^2}}.$$

当 $(H_{11} - H_{22})^2$ 远大于 A^2 时，平方根就近似地等于

$$1 + \frac{2A^2}{(H_{11} - H_{22})^2},$$

于是两个能量就是

$$\begin{aligned} E_I &= H_{11} + \frac{A^2}{H_{11} - H_{22}}, \\ E_{II} &= H_{22} - \frac{A^2}{H_{11} - H_{22}}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

它们非常接近于孤立原子的能量 H_{11} 与 H_{22} ，只是由于翻转振幅 A 而略有差别。

能量差 $E_I - E_{II}$ 是

$$(H_{11} - H_{22}) + \frac{2A^2}{H_{11} - H_{22}}.$$

来自电子振荡的附加能级分裂不再等于 $2A$ ，而小了一个因子 $A/(H_{11} - H_{22})$ ，该因子我们现在假设为远小于1。此外， $E_I - E_{II}$ 对两个原子核间距的依赖关系也比 H_2^+ 离子小得多——也减小因子 $A/(H_{11} - H_{22})$ 。现在我们明白了为什么不对称双原子分子的键联一般很微弱。

在我们的 H_2^+ 离子理论中我们已经发现了对两个质子共有的一个电子实际上提供了两质子间的吸引力这种机制的解释，这种吸引力即使在质子相距较远时也能存在。此吸引力来自电子从一个质子跳到另一个质子的可能性所造成的系统能量的减少。在这种跳跃过程中，系统由一种位形（氢原子，质子）变到另一种位形（质子，氢原子），或者反过来。我们可以用符号来表示这种过程

$$(H, p) \rightleftharpoons (p, H).$$

由于这个过程产生的能量偏移正比于振幅 A ， A 即能量为 $-W_H$ （电子在氢原子中的结合能）的电子可从一个质子跑到另一个质子的振幅。

当两个质子的间距离 R 较大时，电子在其跳跃过程中必须通过的大部分空间中静电势能都接近于零。因而在这些地方，电子就像自由粒子在真空中那样运动——但带有负的能量！我们在第3章式（3.7）中已知道，具有确定能量的粒子从一个地点跑到距离 r 的另一地点的振幅正比于

$$\frac{e^{(i/\hbar)pr}}{r},$$

这里 p 是与确定能量对应的动量。在现在的情况下（用非相对论公式）， p 由下式给定

$$\frac{p^2}{2m} = -W_H, \quad (10.9)$$

这意味着 p 是虚数，

$$p = i \sqrt{2mW_H}.$$

（带负号根式在这里没有意义。）

于是我们预期，当两个质子间距离 R 大时， H_2^+ 离子的振幅 A 将按下式变化

$$A \propto \frac{e^{-(\sqrt{2mW_H/\hbar})R}}{R}. \quad (10.10)$$

由电子键联而产生的能量偏移正比于 A ，于是就有一个力将两个质子拉近，此力在 R 大的情况下正比于式（10.10）对 R 的导数。

最后，为完备起见，我们应当指出对双质子和单电子的系统还有另一种给出能量对 R 相关的效应。迄今为止我们都忽略了这点，因为通常它是不很重要的——例外只在距离很大时出现，这时交换项 A 的能量已指数地衰减为很小的值。我们所考虑的新效应是质子对氢原子的静电吸引，这种吸引的产生方式与任何带电体吸引一个中性物体的情况一样。裸质子在中性氢原子处产生一个电场 E （随 $1/R^2$ 变化）。原子便极化而形成一个正比于 E 的感生偶极矩 μ 。偶极子的能量是 μE ，它正比于 E^2 或 $1/R^4$ 。因而在系统的能量中有随距离的4次方而衰减的一项。（它是对 E_0 的校正。）此能量随距离的减少比式（10.10）给出的 A 的改变来得慢；在大距离 R 处它就成为仅剩的给出能量随 R 而变的重要项，因此也就是仅剩的力。注意对两个基础态来说静电项都有相同的符号（力是引力，故能量为负），对两个定态也是如此，而电子交换项 A 对两种定态则给出了相反的符号。

§10-2 核力

我们已经看到，一个氢原子与一个质子的系统具有由交换单个电子引起的相互作用能，它在距离 R 大时的变化是

$$\frac{e^{-aR}}{R}, \quad (10.11)$$

这里 $\alpha = \sqrt{2mW_H}/\hbar$ 。（人们常说当电子——就像在这里——跃过它在其中具有负能量的空间时就是一次“虚”电子的交换。更明确地说，“虚交换”的意思是这种现象包含了在交换态与非交换态之间的量子力学干涉。）

现在我们可以问以下问题：在其他种类粒子之间的作用力是否可能也有类似的起源？例如，一个中子与一个质子，或两个质子之间的核力是否也相类似？在试图解释核力的本性时，汤川提出两个核子间的力就起因于类似的交换效应，只是在这种情况下，不是起因于电子的虚交换，而是起因于他称为“介子”的新粒子的虚交换。今天，我们认为质子或其他粒子在高速碰撞中所产生的 π 介子与汤川介子是同一种粒子。

作为一个例子，让我们来看看，在质子与中子之间交换一个质量为 m_π 的正 π 介子（ π^+ ）时，预期会出现哪一种力。就像氢原子 H^0 可以放弃一个电子 e^- 而成为质子 p^+ ：

$$H^0 \longrightarrow p^+ + e^-, \quad (10.12)$$

质子可以释放一个 π^+ 介子而变成一个中子 n^0 ：

$$p^+ \longrightarrow n^0 + \pi^+. \quad (10.13)$$

所以，如果 a 点有一个质子， b 点有一个中子，相距为 R 。在质子可以通过发射一个 π^+ 成为中子，而 b 处中子吸收这个 π^+ 后就成为一个质子。在双核子（加上 π 介子）系统中存在一种相互作用能，它依赖于 π 介子交换的振幅 A ——正像我们在 H_2^+ 离子中看到的电子交换情况一样。

在式(10.12)的过程中, H^0 原子的能量比质子能量小 W_H (作非相对论计算, 并忽略电子的静能 mc^2), 于是电子具有负动 能——或虚动量——如式(10.9)所示。在核过程(10.13)式中, 质子与中子具有几乎相等的质量, 所以 π^+ 的总 能量为零。对质量为 m_π 的 π 介子, 其总能量 E 与动量 p 之间的关系是

$$E^2 = p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4,$$

因为 E 为零 (或至少与 m_π 相比可忽略), 动量又是虚的了:

$$p = im_\pi c.$$

利用我们对束缚电子穿透两质子间的空间中的势垒之振幅所作的同样论证, 得到在核情况下的交换振幅 A , 在 R 大时, 它应为

$$\frac{e^{-(m_\pi c/\hbar)R}}{R}. \quad (10.14)$$

相互作用能正比于 A , 所以也以同样方式变化。我们得到了以所谓汤川势形式表示的两核子间的能量变化关系。顺便提一下, 我们早先曾直接从自由空间中 π 介子的运动微分方程得到过这同一公式 [见第2卷第28章式(28.18)]。

按同样的思路, 我们可以讨论由交换一个中性 π 介子 (π^0) 而产生的两个质子 (或两个中子) 间的相互作用。现在基本过程是

$$p^+ \longrightarrow p^+ + \pi^0. \quad (10.15)$$

一个质子可以发射一个虚 π^0 介子，而仍旧是一个质子。如果我们有两个质子，1号质子可以发射一个虚 π^0 介子，这个 π^0 介子被2号质子吸收。结果，我们仍然有两个质子。这多少与 H_2^+ 离子有些不同。在那里 H^0 在发射一个电子后变为另一种状态——质子。而现在我们假设质子可以发射一个 π^0 而不改变它的性质。事实上在高能碰撞中可观察到这种过程。它类似于一个电子发射一个光子后仍然是电子的情况：

$$e \longrightarrow e + \text{光子}. \quad (10.16)$$

在光子被发射前或被吸收后我们并没有在电子内部“见到”它们，它们的发射也不改变电子的“性质”。

现在回到两个质子的问题上，存在一种相互作用能，它是由下述过程的振幅 A 引起的：一个质子发射一个中性 π 介子，该介子（带有虚动量）抵达另一个质子并被其吸收。 A 也正比于式（10.14），式中 m_π 是中性 π 介子的质量。完全同样的论证给出两个中子之间同样的相互作用能。由于中子与质子、质子与质子、中子与中子之间的核力（与电效应无关）相同，我们可以推断带电的及中性 π 介子的质量应当相同。实验表明，它们的质量确实很接近于相等，微小的差别可以预料是来自电自能的校正（见第2卷第28章）。

还有其他种类的粒子——如K介子——也可以在两个核子间交换。两个 π 介子同时交换也是可能的。但所有这其他的交换“物体”都具有比 π 介子质量 m_π 大的静止质量 m_x ，在交换振幅中都出现依下式变化的项

$$\frac{e^{-(m_{\pi}c/\hbar)R}}{R}.$$

随着 R 的增加，这些项衰减得比单介子项快。今天，还没有人知道怎么去计算这些较高质量项，但对于足够大的 R 值而言，只有单 π 介子项才保留下来。而实际上，那些核相互作用的实验确实表明相互作用能只在距离大时才如单 π 介子交换理论所预言的那样。

在电磁学的经典理论中，库仑静电相互作用与加速电荷产生的光辐射密切相关，都可用麦克斯韦方程组说明。我们在量子论中已看到光可以用箱子中经典电磁场的简谐振动的量子激发来描述。另一方面，可以用服从玻色统计的粒子——光子来描写光，由此建立起量子理论，我们在§4-5中曾强调指出这两种可供选择的观点总是给出同样的预言。那么，第二种观点是否可以始终贯彻包括所有的电磁效应？特别是，如果我们想纯粹用玻色粒子——即用光子——来描写电磁场的话，那么库仑力由什么而产生？

从“粒子”的观点看，两个电子之间的库仑相互作用来自虚光子的交换。一个电子发射一个光子——就像式(10.16)中的反应——这个光子跑到第二个电子那里，在同样反应的逆过程中被吸收。于是相互作用又能用式(10.14)那样的公式给出，但现在 m_{π} 由光子的静止质量——等于零——代替。所以两个电子间光子的虚交换给出与电子间距 R 成简单反比关系的相互作用能——这正是通常的库仑势能！在电磁学的“粒子”理论中，虚光子交换过程引起所有的静电现象。

§10-3 氢分子

作为下一个双态系统的例子，我们来考察一下中性氢分子 H_2 。当然，由于它有两个电子，理解起来更复杂些。我们还是从考虑两个质子分得相当开时所发生的情况开始。只是现在要加上两个电子。为了追踪它们，称其中一个为“电子 a ”，另一个为“电子 b ”。我们仍旧设想两种可能的状态。一种可能性是“电子 a ”围绕第一个质子，“电子 b ”围绕第二个质子，如图10-4（a）所示。这时就只有两个氢原子。我们称此为状态 $|1\rangle$ 。另外还有一种可能性：“电子 b ”围绕第一个质子，而“电子 a ”则围绕第二个质子。称此为状态 $|2\rangle$ 。由情况的对称性，这两种可能性能量应该相等，只是（如我们将见到的）系统的能量不正好就是两个氢原子的能量。我们应当指出还存在其他许多可能性。例如，“电子 a ”可能靠近第一个质子，而“电子 b ”则可能在围绕同一个质子另一种状态中。但我们不去考虑这种情况，因为，它无疑具有较高的能量（由于两个电子间大的库仑斥力）。如要求更高的精确性，就得包括这些态，但是只要考虑图10-4中的两种状态，我们就能懂得分子键联的本质。在这种近似下，我们可以通过给出处在态 $|1\rangle$ 的振幅 $\langle 1 | \phi \rangle$ 及处在态 $|2\rangle$ 的振幅 $\langle 2 | \phi \rangle$ 来描写任何状态 ϕ 。换句话说，态矢量 $|\phi\rangle$ 可以写成线性组合

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \phi \rangle.$$

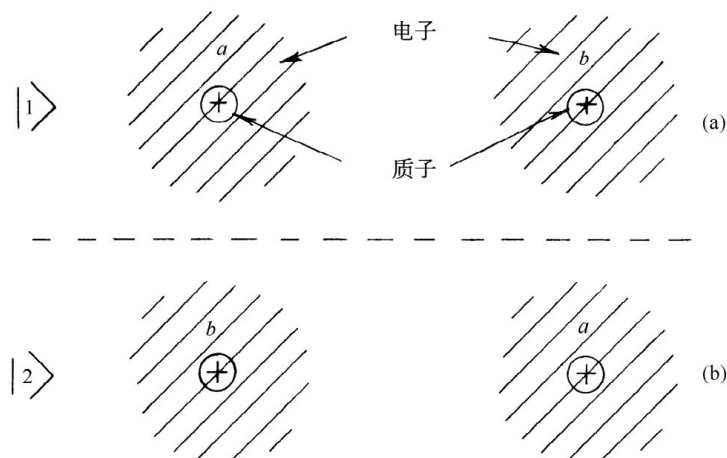


图10-4 H_2 分子的一组基础态

接下去，像往常那样，我们假设有电子通过两个质子之间的空间交换位置的一定振幅 A 。这种交换的可能性意味着系统的能量要分裂，就像我们在别的双态系统中已经见到的那样。像氢分子离子的情况一样，当质子间距较大时，分裂很小。当质子彼此靠近时，电子来回跑的振幅增大，因此分裂加大。低能态的降低意味着存在将原子拉在一起的吸引力。当两个质子靠得非常近时，由于库仑斥力，能级又将升高。最终净结果是两种定态具有如图10-5所示那样的随着分开的距离而变的能量。在距离约为 $0.74\text{\AA}$ （ $1\text{\AA}=0.1\text{nm}$ ）时，低能级达极小值，这就是真实氢分子的质子间的距离。

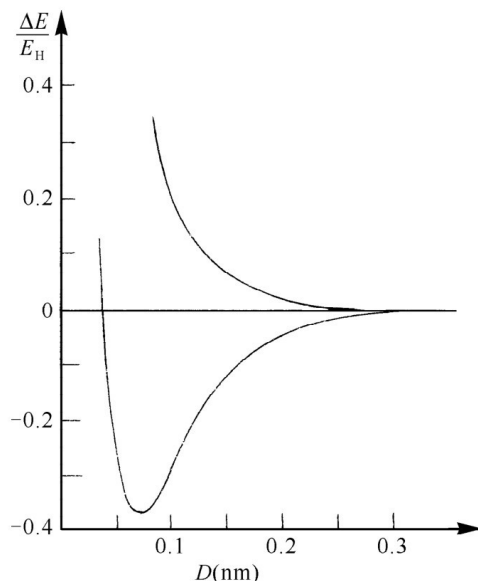


图10-5 对不同质子间距离 D 的 H_2 分子的能级 ($E_H = 13.6 \text{ eV}$)

此刻你也许正想到一个反对意见，怎么处理两个电子是全同粒子这件事呢？我们一直称它们为“电子 a ”与“电子 b ”，但实际上根本无法说出谁是谁。在第4章中我们曾说过，对于电子——它们是费米子——来说，如果通过交换电子引起的事件有两种可能的方式，两者的振幅将以负号相互干涉。这意味着如果我们把这个电子与那个电子互换，振幅的符号必须反过来。但是，我们刚才已得出结论，氢分子的束缚态应该是（当 $t=0$ 时）

$$|\Pi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle).$$

而根据第4章的法则，这种状态是不允许的。如果我们交换两个电子，就得到状态

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |1\rangle),$$

这一来，符号就相同而不是相反。

如果两个电子具有相同的自旋，上述论证是正确的。确实，如两个电子自旋都朝上（或二者自旋都朝下），唯一允许的态就是

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle).$$

对这种态来说，两个电子的交换得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |1\rangle),$$

这正是 $-|I\rangle$ ，符合要求。所以如果我们让两个氢原子彼此靠近而它们电子自旋的方向相同，它们就会进入态 $|I\rangle$ 而不是 $|II\rangle$ 。但请注意态 $|I\rangle$ 是个较高能态。它的能量-间距曲线没有极小值。这两个氢原子总是互相排斥而不能形成一个分子。所以我们得出结论，氢分子不可能以两个电子的自旋平行的方式存在。这是符合事实的。

另一方面，态 $|II\rangle$ 对两个电子来说是完全对称的。事实上，如果互换我们称为 a 的电子与我们称为 b 的电子，就恰好回到同一状态。在§4-7中我们曾看到，如果两个费米子处在同一状态，它们必定有相反的自旋。所以束缚而成的氢分子必定有一个自旋朝上的电子和一个自旋朝下的电子。

如果我们将质子的自旋包括在内的话，氢分子的整个描述就真的更复杂了。那样把分子视为双态系统就不再正确了。事实上应当将它看作为八态系统——对于态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的每一个状态各有4种可能

的自旋配置。由此可见我们略去自旋使事情简单一些。但最终的结论还是正确的。

我们发现 H_2 分子的最低能态——唯一的束缚态——有自旋相反的两个电子。电子的总自旋角动量是零。另一方面，带有平行自旋——因而具有总角动量 $\hbar$ ——的两个靠近的氢原子必定处在较高（非束缚）能量的状态；两个原子相互排斥。在自旋与能量间有一种有趣的相关。这里为以前讨论过的情况提供了另一个实例，由于自旋平行的情况具有比自旋相反的情况有更高的能量，由此看来在两个自旋之间存在一种“相互作用”能。在某种含义上你可以说自旋试图达到一种反平行状况，而在这样做的过程中它具有释放出能量的潜力——这不是因为存在着较大的磁力，而是因为不相容原理。

我们在§10-1中看到，单个 电子所造成的两个不同 离子的键联很可能是十分微弱的。若用两个 电子键联的话，情况就不是如此了。假设图10-4中的一对质子被任意两个离子（闭合的内电子壳层和一个离子电荷）所代替，而一个电子在两个离子上的结合能是各不相同的。态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的能量仍然相等，因为在每个这样的态中，都是一个电子与一个离子相结合。因此，我们总是有与 A 成比例的能量分裂。两个电子结合是普遍存在的，它是最常见的价键。化学键通常就是这种两个电子玩的翻转游戏。虽然也可以只用一个电子来键合两个原子，但那是相对少见的，因为它需要恰恰正好的条件。

最后我们想谈一下，如果电子与一个原子核的吸引能量远比与另一个核的能量高，那么早先所说的忽略其他可能的状态的讲法就不再正确了。假设核 a （也可以是一个正离子）对电子的吸引力远大于核 b 对电子的吸引力。那就可能发生即使两个电子都在核 a 旁而没有电子

在核 b 旁时，总能量仍然相当低的情况。强吸引作用可能比补偿两个电子的相互排斥作用所需的还多。如果是这样，在最低的能态中，就可能有较大的振幅在核 a 旁找到两个电子（形成一个负离子），而只有很小的振幅在核 b 旁找到任何电子。这种情况就好像一个负离子和一个正离子。事实上，这正是NaCl这样的“离子”分子中所发生的情况。你可以看出，在共价键与离子键之间各种渐变的键合形式都是可能的。

现在你已开始看到，许多化学事实怎样借助于量子力学的描述而获得最清楚的理解。

§10-4 苯分子

化学家们发明了一些精美的图式来表示复杂的有机分子。现在我们要来讨论其中最有趣的图式之一——如图10-6所示的苯分子。它由对称排列的6个碳原子与6个氢原子组成。图中的每根短线表示一对自旋相反的电子，它们起着共价键作用。每个氢原子提供1个电子而每个碳原子提供4个电子，总共包含有30个电子。（每个碳原子核近旁还有组成第一壳层或K壳层的两个电子。由于这些电子紧紧地受到束缚以至在共价键形成中并没有起明显作用，故在图中没有画出。）所以图上的每条短线表示一个键，或一对电子，而双键则意味着每隔一对碳原子间有两对电子。

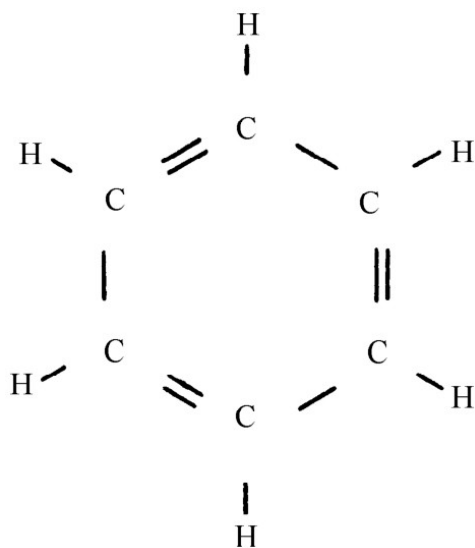


图10-6 苯分子 C_6H_6

这种苯分子有个奥妙的地方。由于化学家们已经测量了各种含有几个苯环的化合物的能量（例如，他们通过研究乙烯而得知双键的能量，等等），所以我们可以计算为形成这样的化合物所需要的能量。这样我们就能计算我们预期的苯分子的总能量。然而，苯环的实际能量要远小于由这种计算所得的值；比起根据所谓“未饱和双键系统”而预期的情况而言，苯环的结合要紧密得多。通常不处在这样一个环上的双键系统因其有相对较高的能量而在化学上容易被破坏，这种双键很容易被外加的其他氢原子断开。但苯中的环则十分稳固而难以打断。换句话说，苯所具有的能量要比由键的图像所算出的数值低得多。

另外还有一个奥妙。假设我们用两个溴原子代替两个相邻的氢原子以形成邻二溴苯分子。有两种方式组成这种分子，如图10-7所示。溴原子可以像图（a）中的那样联在双键的两端，也可像图（b）中那样联在单键的两端。人们会以为邻二溴苯分子应有两种不同的形式，但事实并非如此。只有一种这样的化合物^[2]。

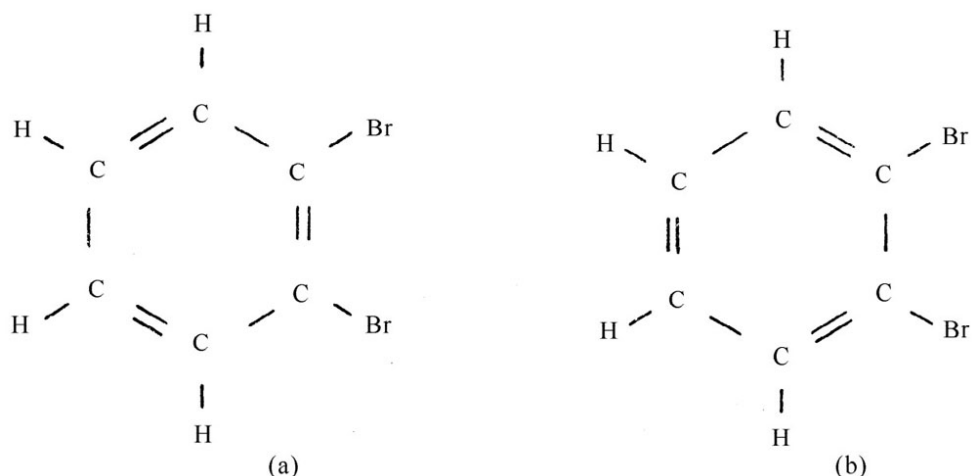


图10-7 邻二溴苯的两种可能组态。两个溴原子可相隔一个单键或一个双键

现在我们来解答这些奥秘——或许你们已经猜到如何来做了，当然，要注意到苯环的“基态”实际上是个双态系统。我们可以设想苯中的键可以取图10-8所示两种配置的任一形式。你会说，“它们实际上是相同的，它们应当有相同的能量。”确实应当如此，正因为如此，必须将它们作为双态系统来分析。每个态表示全体电子的不同的位形，整个结构有某个振幅 A 从这种配置转换到另一种配置——电子有机会由一种位形翻转到另一种位形。

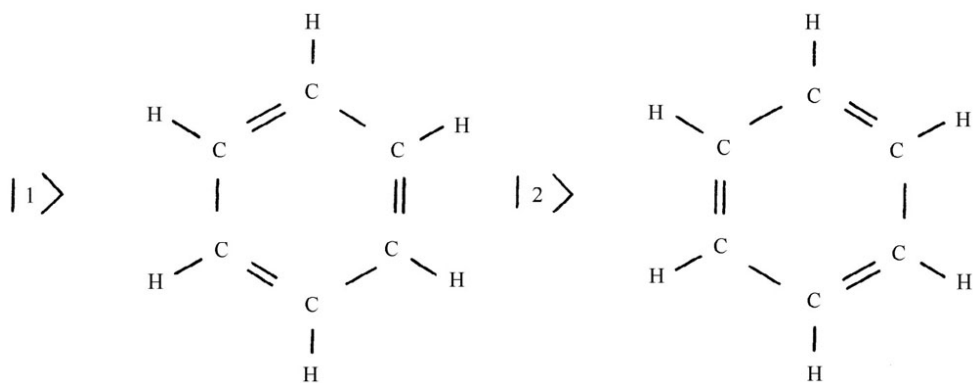


图10-8 苯分子的一组基础态

我们已知道，这种翻转的可能性就造成了一个混合态，它的能量比分别按图10-8中的两幅图案所作的计算结果来得低。这一来，就有

两种定态——一种的能量值大于预期值，另一种则小于预期值。因此，实际上图10-8所示的两种可能状态都不是苯的真正的正常状态（最低能量），而是它处于图示的每种态的振幅都是 $1/\sqrt{2}$ 。这是常温下苯化学中所涉及的唯一状态。附带说一下，较高能态也是存在的，我们知道它的存在是因为苯对于频率为 $\omega = (E_I - E_{II})/\hbar$ 的紫外线有强烈的吸收。你们记得，在氨分子中，来回翻转的是3个质子，而其能量的差在微波区域。对苯分子，翻转的是电子，由于它们轻得多，就更容易来回翻转，这就使系数 A 大得多。结果能量差也大得多，约为1.5 eV，这相当于紫外光子的能量^[3]。

如果用溴原子代替会发生什么情况？图10-7中的（a）与（b）两种“可能性”仍表示两种不同的电子位形。唯一的差别在于开始时所取的两种基础态所具有的能量略有不同。能量最低的定态仍是两种态的线性组合，但具有不相等的振幅。比方说，处在态 $|1\rangle$ 的振幅可能会取 $\sqrt{2/3}$ 这样的值，而处在态 $|2\rangle$ 的振幅的大小就可能是 $\sqrt{1/3}$ 。如没有更多的信息，我们就不能说得十分确切，但只要两种能量 H_{11} 与 H_{22} 不再相等，那么振幅 C_1 与 C_2 就不会再有相同的数值。当然，这意味着，图中的两种可能状态中有一种可能性大些，但由于电子的活动性足够大，因而两种情况都具有一定振幅。不过另一种状态具有不同的振幅（如 $\sqrt{1/3}$ 及 $-\sqrt{2/3}$ ），但处于较高能量上。只有一个最低能态，不像旧的固定化学键的理论所假设的有两个。

§10-5 染料

我们再举一个化学中双态现象的例子——这次是在较大的分子尺度上。它与染料的理论有关。许多染料——事实上是大多数人造染料

——的特性十分有趣；它们具有某种对称性。图10-9表示一种称为品红的特殊染料的离子，这染料呈现紫红颜色。它的分子是三个环状结构，其中两个是苯环。第三个环跟苯环不完全相同，因为环中只有两个双键。图上画出了两幅同样圆满的图案，我们会猜想它们具有相同的能量。但存在所有的电子都从一种状态翻转至另一种状态一定的振幅，而将“空”位挪到另一端。由于包括了这么多电子，翻转振幅要比苯的情况略低些，故两种定态间的能量差就要小些。然而，仍存在着通常的两种定态 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ ，它们是图中两种基础态的和与差。得到的 $|I\rangle$ 与 $|II\rangle$ 的能量差值等于可见光区光子的能量。如果将光照射在分子上，在某一频率上就会出现很强的吸收，从而显示出明亮的色彩。这就是染料的成因！

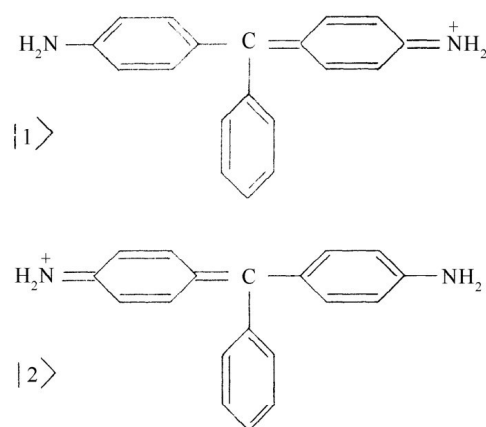


图10-9 品红染料分子的两个基础态

这种染料分子的另一个有趣特性是，在图示的两个基础态中，电荷中心处于不同的位置。结果，分子将受外电场的强烈影响。在氨分子中我们就见过类似的效应。显然，只要知道 E_0 与 A 的数值，就可以用完全相同的数学方法对它进行分析。一般来说， E_0 与 A 的数值是通过汇集实验数据得到的。如果对许多染料进行测量，就往往可能猜出某个相关的染料分子的情况。由于电荷中心的大位移，式（9.55）中

的 μ 值就较大，从而材料吸收特征频率为 $2A/\hbar$ 的光的概率就大。因此，染料不仅有颜色，而且颜色非常强——少量的材料就能吸收大量的光。

翻转率——从而 A ——对整个分子的结构非常敏感。改变 A ，能量分裂以及与此相关的染料颜色就要变化。还有，分子也不必是完全对称的。即使存在着微小的不对称，我们仍看到同样的基本现象，只是稍有不同。所以，可以通过在分子中造成一点非对称性来改变颜色。例如，另一种重要染料孔雀绿就与品红十分相似，只是其中两个氢原子被 CH_3 所代替。由于 A 改变了，翻转率也改变了，所以它就有另一种颜色。

§10-6 磁场中自旋1/2粒子的哈密顿

现在我们讨论包含自旋1/2粒子的双态系统。我们所要讲的有些内容已在以前的几章中讨论过，但再讲一次有助于将某些不明白的地方弄得更清楚些。我们可以把一个静止电子视为双态系统。尽管本节谈论“一个电子”，但所得到的东西对任何自旋1/2粒子都是正确的。假设我们选 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 作为基础态，它们分别为电子自旋的 z 分量是 $+\hbar/2$ 及 $-\hbar/2$ 。

当然，这些态与我们在前几章中称为 $(+)$ 态及 $(-)$ 态的是同样的态。尽管如此，为使本章的记号前后一致，我们称“正”自旋态为 $|1\rangle$ ，“负”自旋态为 $|2\rangle$ ，这里“正”与“负”指的是沿 z 轴的角动量。

电子的任何可能状态 ψ 可以像式(10.1)那样通过给出电子处在态 $|1\rangle$ 的振幅 C_1 及处在态 $|2\rangle$ 的振幅 C_2 来描写。为了处理这个问题，我们需要知道这个双态系统——即处在磁场内的电子的哈密顿。我们从磁场沿 z 方向这种特殊情况开始讨论。

假设矢量 $\mathbf{B}$ 只有 z 分量 B_z 。由两个基础态的定义（即自旋平行于和反平行于 $\mathbf{B}$ ）知道它们已经是磁场中有确定能量的定态了。态 $|1\rangle$ 对应于 $-\mu B_z$ 的能量^[4]，而态 $|2\rangle$ 则对应于 $+\mu B_z$ 的能量。在这种情况下，由于处在态 $|1\rangle$ 的振幅 C_1 不受 C_2 的影响，反之亦然，所以哈密顿必定十分简单：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= E_1 C_1 = -\mu B_z C_1, \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= E_2 C_2 = +\mu B_z C_2. \end{aligned} \quad (10.17)$$

对于这种特殊情况，哈密顿是

$$H_{11} = -\mu B_z, \quad H_{12} = 0, \quad (10.18)$$

$$H_{21} = 0, \quad H_{22} = +\mu B_z.$$

所以我们知道对于沿 z 方向磁场的哈密顿是什么，并且也知道定态的能量。

现在假定磁场不在 z 方向上，那么哈密顿是什么呢？如场不沿 z 方向，矩阵元变成什么样子？我们要提出一个假设，即哈密顿各项服从一种叠加原理。更具体地说，我们要假设：如果两个磁场叠加在一

起，那么，哈密顿的各项只要相加——如果知道仅有 B_z 时的 H_{ij} ，也知道仅有 B_x 时的 H_{ij} ，那么，当 B_z 及 B_x 两者都一同存在， H_{ij} 就只是两者分别存在情况下之和。如果我们考虑的只是沿 z 方向的场，上述结论肯定正确——因为若使 B_z 加倍，所有的 H_{ij} 也都加倍。所以我们假设在场 $\mathbf{B}$ 中 H 是线性的。这就是为了对任何磁场都能求出 H_{ij} 所需的一切了。

假定有个恒定均匀磁场 $\mathbf{B}$ ，我们完全可以选取 z 轴沿着磁场方向，从而就会找到能量为 $\mp\mu B$ 的两个定态。但是仅仅沿不同方向选取坐标轴并不会改变物理实质。这时我们定态的描述将会不同，但它们的能量将仍为 $\mp\mu B$ ，即

$$E_{\perp} = -\mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (10.19)$$

和

$$E_{\parallel} = +\mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}.$$

剩下的事情是容易的。这里已有了能量公式。我们需要一个与 B_x ， B_y ， B_z 成线性关系的哈密顿，将它代入一般公式（10.3）中就给出这些能量。问题是：找到哈密顿。首先，注意到能级分裂是对称的，其平均值为零。从式（10.3）我们可以直接看出，这要求

$$H_{22} = -H_{11}.$$

(注意这与我们已经知道的当 B_x, B_y 都为零时的情况相符, 在该情况下 $H_{11} = -\mu B_z$ 及 $H_{22} = +\mu B_z$ 。) 现在, 如果使式(10.3)的能量与从式(10.19)得出的能量相等, 就有

$$\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + |H_{12}|^2 = \mu^2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2). \quad (10.20)$$

(我们还利用了 $H_{21} = H_{12}^*$ 的事实, 所以 $H_{12}H_{21}$ 也可写成 $|H_{12}|^2$ 。) 再回到对于场沿 z 方向的特殊情况, 上式给出

$$\mu^2 B_z^2 + |H_{12}|^2 = \mu^2 B_z^2.$$

显见在这种特殊情况下 $|H_{12}|$ 必须为零, 这意味着 H_{12} 中不可能有任何 B_z 的项。(记住, 我们曾说过, 所有的项必须与 B_x, B_y, B_z 成线性关系。)

至此我们已发现 H_{11} 与 H_{22} 中有含 B_z 的项, 而 H_{12} 及 H_{21} 则没有。我们可以作一个满足式(10.20)的简单猜测, 即只要设

$$H_{11} = -\mu B_z,$$

$$H_{22} = \mu B_z, \quad (10.21)$$

及

$$|H_{12}|^2 = \mu^2(B_x^2 + B_y^2).$$

结果发现这是唯一可行的办法!

“等一等”——你们会说——“ H_{12} 与 B 并不成线性关系，式 (10.21) 给出 $H_{12} = \mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ 。”未必。还有另一种确实是线性关系的可能形式，那就是

$$H_{12} = \mu (B_x + iB_y) .$$

实际上，这样的可能性有好几种，最一般地，我们可以写为

$$H_{12} = \mu (B_x \pm iB_y) e^{i\delta} ,$$

这里 δ 是某个任意的相位。我们应当用哪个符号及什么相位？结果发现你可以任选一种符号，任选相位，而物理结果总是相同的。所以符号及相位的选择只是一种约定。在我们之前已有人选择了负号，并取 $e^{i\delta} = -1$ 。我们可以照着做，并写下

$$H_{12} = -\mu (B_x - iB_y) , \quad H_{21} = -\mu (B_x + iB_y) .$$

（附带地说一下，这些约定与第6章中所作的几种随意选择有关系，并且与它们相一致。）

这样，处在任意磁场中的电子的完整哈密顿是

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\mu B_z , \quad H_{12} = -\mu (B_x - iB_y) , \\ H_{21} &= -\mu (B_x + iB_y) , \quad H_{22} = +\mu B_z . \end{aligned} \quad (10.22)$$

而振幅 C_1 与 C_2 的方程组就是

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{dC_1}{dt} &= -\mu [B_z C_1 + (B_x - iB_y) C_2], \\ i \hbar \frac{dC_2}{dt} &= -\mu [(B_x + iB_y) C_1 - B_z C_2]. \end{aligned} \quad (10.23)$$

这样我们就找到了在磁场中电子的“自旋态的运动方程”。利用一些物理论证我们猜到了它们，但任何哈密顿的真正检验在于它应当作出与实验吻合的预言。至今所做过的任何检验都表明，这些方程是正确的。事实上，尽管我们的讨论只是恒定场，但所写出的哈密顿对于随时间变化的磁场也一样正确。所以我们现在可以用式（10.23）来考察种种有趣问题了。

§10-7 磁场中自旋的电子

第一个例子：我们从一个沿 z 方向的恒定磁场开始。这里只有能量为 $\mp \mu B_z$ 的两个定态。假定我们在 x 方向上加上弱磁场。于是方程组看起来与原来的双态问题相像。我们又一次碰到翻转问题，而能级又稍稍分开一些。现在使场的 x 分量随时间变化，譬如按 $\cos \omega t$ 变化。于是方程就与第9章中我们在氨分子上施加一个振荡电场后所得到的方程相同。你们可以用同样方法求出详细解答。你将得到这样的结果：当水平电场在共振频率 $\omega_0 = 2\mu B_z / \hbar$ 附近振荡时，振荡电场会引起从 $+z$ 态至 $-z$ 态——或者相反——的跃迁。这就是我们在第2卷第35章中所描写的磁共振现象的量子力学理论。

也可以利用自旋1/2的系统造成一种微波激射器。利用施特恩-格拉赫装置产生一束沿（比方说） $+z$ 方向极化的粒子，再将其送入在恒定磁场中的空腔。腔内的振荡电场与磁矩耦合而诱发跃迁，从而将能量递交给空腔。

现在让我们来考察下面的问题。假设有磁场 $\mathbf{B}$ ，它指向极角为 θ 和方位角为 ϕ 的方向，如图10-10所示。此外还假定有一个电子，而且我们已使它的自旋方向与磁场方向相同。这一电子的振幅 C_1 与 C_2 是什么？换句话说，令电子状态为 $|\psi\rangle$ ，我们可以写出

$$|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2,$$

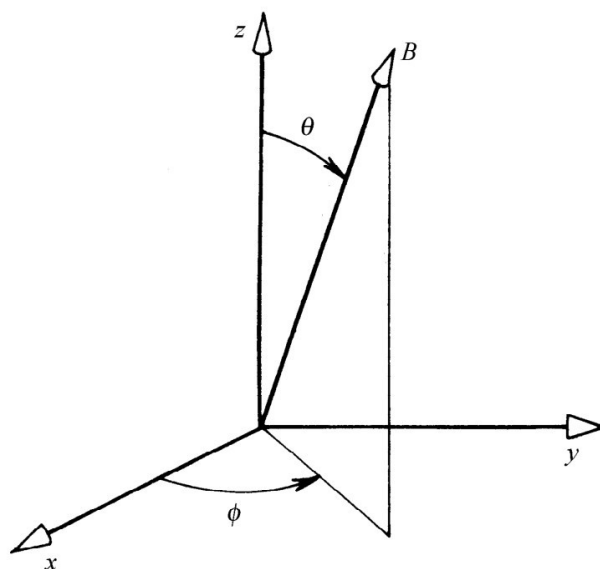


图10-10 $\mathbf{B}$ 的方向用极角 θ 和方位角 ϕ 确定

这里 C_1 与 C_2 为

$$C_1 = \langle 1 | \psi \rangle, \quad C_2 = \langle 2 | \psi \rangle,$$

这里用 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 表示与我们习惯称为 $|+\rangle$ 及 $|-\rangle$ （相对于所选的 z 轴而言）的相同的状态。

这个问题的答案也包括在双态系统的一般方程中。首先我们知道，由于电子自旋平行于 $\mathbf{B}$ ，它处在能量 $E_1 = -\mu B$ 的定态中。因此 C_1

与 C_2 两者都必定像式(9.18)那样, 按 $e^{-iE_1 t/\hbar}$ 变化, 而它们的系数 a_1 与 a_2 则由式(10.5)给定, 即

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{H_{12}}{E_1 - H_{11}}, \quad (10.24)$$

一个附加条件是 a_1 与 a_2 应当归一化, 使 $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ 。从式(10.22)中取出 H_{11} 及 H_{12} , 并利用

$$B_z = B \cos\theta, \quad B_x = B \sin\theta \cos\phi, \quad B_y = B \sin\theta \sin\phi.$$

就有

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\mu B \cos\theta, \\ H_{12} &= -\mu B \sin\theta (\cos\phi - i \sin\phi). \end{aligned} \quad (10.25)$$

附带提一下, 第二个式子中的最后一个因子是 $e^{-i\phi}$, 所以这样写更简单些:

$$H_{12} = -\mu B \sin\theta e^{-i\phi}. \quad (10.26)$$

在式(10.24)中代入这些矩阵元, 并从分子和分母中消去 $-\mu B$, 我们发现

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{1 - \cos\theta}. \quad (10.27)$$

利用这个比值及归一化条件，就可求得 a_1 与 a_2 。这并不困难，但我们可以利用小小的技巧来走一下捷径。注意到：

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

于是式（10.27）等同于

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (10.28)$$

一个可能的答案是

$$a_1 = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad a_2 = \sin \frac{\theta}{2}, \quad (10.29)$$

因为它符合式（10.28）。同时也满足

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1.$$

正像你们知道的， a_1 与 a_2 都乘以一个任意的相位因子不会改变任何东西。人们一般喜欢将式（10.29）的两者都乘上 $e^{i\phi/2}$ 而使它们更对称些，所以常用的形式就是

$$a_1 = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2}, \quad a_2 = \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi/2}. \quad (10.30)$$

这就是我们问题的答案。当我们知道电子的自旋沿着极角为 θ 、方位角为 ϕ 的方向时， a_1 与 a_2 的数值就是电子自旋沿着 z 轴朝上或朝下的振幅。（振幅 C_1 与 C_2 只是 a_1 与 a_2 乘以 $e^{-iE_1 t/\hbar}$ 。）

现在我们注意到一件有趣的事。在式（10.30）中任何地方都不出现磁感应强度 B 。显然，在 B 趋向于零的极限情况下，结果也一样。这意味着我们已经一般地回答了怎么来表示一个自旋沿任意方向的粒子的问题了。式（10.30）的振幅是自旋1/2粒子的投影振幅，此投影振幅相当于我们在第5章中〔式（5.38）〕所给出的自旋1粒子的投影振幅。现在我们能够求得自旋1/2的已过滤的粒子束经过任何特定的施特恩-格拉赫装置的振幅了。

设 $|+z\rangle$ 表示自旋沿 z 轴朝上的态， $|-z\rangle$ 则表示自旋朝下的态。如 $|+z'\rangle$ 表示自旋沿 z' 轴朝上的态，而 z' 轴与 z 轴成极角 θ 和方位角 ϕ ，那么按第5章的记号，我们有

$$\langle +z | +z' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2}, \quad \langle -z | +z' \rangle = \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi/2}. \quad (10.31)$$

这些结果与第6章中我们利用纯几何论证求得的式子（6.36）等价。（所以如果你已经决定跳过第6章的话，现在也得到了主要结果。）

作为最后一个例子，我们再来考察一件多次提到过的事情。我们考虑以下问题。我们从有某个给定自旋方向的电子开始，接着加上沿 z 方向的磁场25分钟，然后撤去磁场。最后的状态是什么？我们还是用线性组合来表示该状态 $|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2$ 。然而，对这个问题，具有确定能量的态也就是我们的基础态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 。所以 C_1 与 C_2 只在相位上变化。我们知道

$$C_1(t) = C_1(0)e^{-iE_I t/\hbar} = C_1(0)e^{+i\mu B t/\hbar},$$

$$C_2(t) = C_2(0)e^{-iE_{II} t/\hbar} = C_2(0)e^{-i\mu B t/\hbar}.$$

起初我们就已说过电子自旋沿着给定方向。这意味着原先的 C_1 与 C_2 是式(10.30)所给出的两个数。当我们等待了一段时间 T 之后，新的 C_1 与 C_2 就是原先两个数分别乘以 $e^{i\mu B_z T/\hbar}$ 和 $e^{-i\mu B_z T/\hbar}$ 。那是什么态？这不难回答。这正是方位角 ϕ 减少了 $2\mu B_z T/\hbar$ ，而极角 θ 保持不变的状态。那意味着在时间 T 的终了，态 $|\psi\rangle$ 表示自旋的方向与原来方向的不同只是绕 z 轴转动了一个角度 $\Delta\phi = 2\mu B_z T/\hbar$ 。因为这个角度正比于 T ，我们也可说自旋的方向以角速度 $2\mu B_z/\hbar$ 绕 z 轴作进动。这个结果我们以前曾以不那么完全和严格的方式讨论过好几次。现在，我们已对原子磁体的进动得到了一个完整与精确的量子力学描述。

有趣的是，刚才对磁场中自旋的电子所用过的数学概念可适用于任何双态系统。这就是说，通过与自旋电子作数学类比，有关双态系统的任何问题都可用纯几何的方法加以解决。做法是，首先，移动能量的零点使得 $(H_{11} + H_{22})$ 等于零，因而有 $H_{11} = -H_{22}$ 。于是任何双态问题在形式上与处在磁场中的电子的问题相同。你必须做的一切就是把 $-\mu B_z$ 等同于 H_{11} ，把 $-\mu(B_x - iB_y)$ 等于 H_{12} 。不管原先的物理内容如何——氨分子或其他什么东西——你都可以将它转换为相应的电子的问题。所以，只要我们能够一般地解决了电子的问题，我们就能解决所有的双态问题。

而我们已经有了对电子问题的一般解答！假设电子起初在自旋对某方向“朝上”的状态，而你们指向另外某个方向施加指向的磁场 $\mathbf{B}$ 。你只要将自旋方向绕 $\mathbf{B}$ 的方向以某个角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 旋转， $\boldsymbol{\omega}(t)$

）等于一个常数乘以矢量 $\mathbf{B}$ （即 $\boldsymbol{\omega} = 2\mu\mathbf{B}/\hbar$ ）。若 $\mathbf{B}$ 随时间变化，你要始终使转轴平行于 $\mathbf{B}$ ，并改变转动速率以使它总是与 $\mathbf{B}$ 的强度成正比。参见图10-11。如果你坚持这样做，最后就会得到自旋的最终确定指向，而振幅 C_1 与 C_2 就可以由将式（10.30）在你所用坐标系内投影求得。你看，这正好是个几何学问题：跟踪着所有的转动之后到达的最终位置。尽管弄清所涉及的内容并不难，但在一般情况下直接而明了地解出这个几何问题（求出以变化的角速度矢量进行转动的最终结果）并不容易。但是，无论如何，在原则上我们已知道了任何双态问题的一般解。下一章里，我们将进一步考察用来处理自旋1/2粒子这一重要情况——也可用来处理一般的双态系统——的数学技巧。

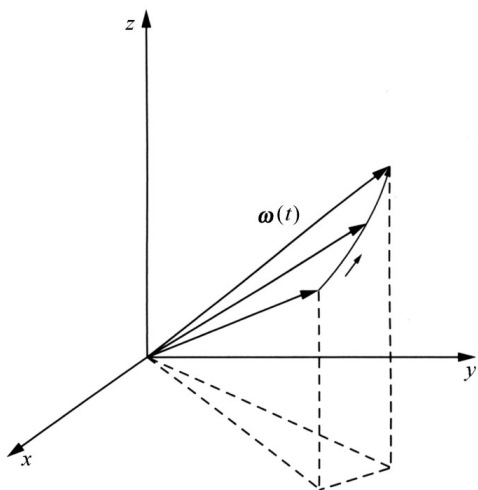


图10-11 在变化磁场 $\mathbf{B}(t)$ 中电子自旋的方向以频率 $\omega(t)$ 绕一平行于 $\mathbf{B}$ 的轴进动

[1] 只要磁场不起作用，这种情况就能满足，我们将在本章后面讨论磁场对电子的效应，第12章中讨论自旋在氢原子中的极小效应。

[2] 我们将事情稍微简单化了。原来，化学家认为应当有4种形式的二溴苯：两种形式是溴原子连在相邻的碳原子上（邻二溴苯），第三种形式是溴原子相间地连在碳原子上（间二溴苯），而第四种形式是两个溴原子彼此相对（对二溴苯）。然而，他们只找到3种形式——只有1种形式的邻位溴苯分子的形式。

[3] 我们的说法会造成一点误解。把苯作为双态系统时，紫外线的吸收很微弱，因为两种态之间的偶极矩的矩阵元是零〔两种状态是电学对称的，所以在我们的跃迁概率公式（9.55）中，偶极矩 μ 为零，因而不吸收光。〕如这些态是仅有的状态，较高能态的存在就应当用其他方式来证实。然而，取较多基础态（诸如具有相邻双键的态）的苯分子的更完全理论表明，真正的苯分子定态比我们所谈到的略有变形。最后所得的偶极矩将允许发生课文中所说的由于吸收紫外线而造成的跃迁。

[4] 我们将静止能量 $m_0 c^2$ 取作我们能量的“零点”，并且将电子的磁矩 μ 取作负数，因为 μ 的指向与自旋相反。

第11章 再论双态系统

§11-1 泡利自旋矩阵^[1]

我们现在继续讨论双态系统。上一章末了我们讨论了处在磁场中的自旋1/2粒子。我们用自旋角动量的 z 分量为 $+\hbar/2$ 的振幅 C_1 和自旋分量为 $-\hbar/2$ 的振幅 C_2 描写粒子的自旋态。在前几章中我们曾称这些基础态为 $|+\rangle$ 及 $|-\rangle$ ，现在我们再反过来用这种记号法。虽然有时我们会觉得交替使用 $|+\rangle$ 或 $|1\rangle$ ， $|-\rangle$ 或 $|2\rangle$ 较为方便。

在上一章中我们看到，当磁矩为 μ 的自旋1/2粒子在磁场 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 中，振幅 C_+ ($=C_1$) 和 C_- ($=C_2$) 由下列微分方程联系起来：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_+}{dt} &= -\mu [B_z C_+ + (B_x - iB_y) C_-], \\ i\hbar \frac{dC_-}{dt} &= -\mu [(B_x + iB_y) C_+ - B_z C_-]. \end{aligned} \quad (11.1)$$

换言之，哈密顿矩阵 H_{ij} 是

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\mu B_z, & H_{12} &= -\mu (B_x - iB_y), \\ H_{21} &= -\mu (B_x + iB_y), & H_{22} &= +\mu B_z. \end{aligned} \quad (11.2)$$

因而，（11.1）式就等同于

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j, \quad (11.3)$$

这里 i 与 j 取+与-（或1与2）。

电子自旋这一双态系统是如此重要，因而书写上使用更简洁的方法是非常有用的。我们现在要离题讲一点数学，告诉你人们通常是怎么写双态系统方程的。可以这样做：首先，注意哈密顿矩阵中的每一项都正比于 μ 以及 $\mathbf{B}$ 的某些分量，于是我们可以——纯粹形式地——写出

$$H_{ij} = -\mu [\sigma_{ij}^x B_x + \sigma_{ij}^y B_y + \sigma_{ij}^z B_z], \quad (11.4)$$

这里毫无新的物理内容，上式只意味着，系数 $\sigma_{ij}^x, \sigma_{ij}^y, \sigma_{ij}^z$ （它们共有 $4 \times 3 = 12$ 个）都可以求出来，所以式（11.4）和式（11.2）完全相同。

让我们看看它们必须取什么值。从 B_z 开始，由于 B_z 只出现在 H_{11} 与 H_{22} 中，只要取

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^z &= 1, & \sigma_{12}^z &= 0, \\ \sigma_{21}^z &= 0, & \sigma_{22}^z &= -1. \end{aligned}$$

那就一切都解决了。我们常常将矩阵 H_{ij} 写成这样一个小表格：

$$H_{ij} = \begin{matrix} & j \rightarrow \\ i \downarrow & \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

对一个处在磁场 B_z 中的自旋1/2粒子的哈密顿来说，上式就和

$$H_{ij} = \begin{matrix} & j \rightarrow \\ i \downarrow & \begin{pmatrix} -\mu B_z & -\mu(B_x - iB_y) \\ -\mu(B_x + iB_y) & +\mu B_z \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

一样。用同样方法，我们可以把系数 σ_{ij}^z 写成矩阵

$$\sigma_{ij}^z = \begin{matrix} & j \rightarrow \\ i \downarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (11.5)$$

看一下 B_x 的系数，我们得到 σ_x 的各项必须是

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^x &= 0, & \sigma_{12}^x &= 1, \\ \sigma_{21}^x &= 1, & \sigma_{22}^x &= 0; \end{aligned}$$

或简写为

$$\sigma_{ij}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.6)$$

最后，看一看 B_y ，我们得到

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^y &= 0, & \sigma_{12}^y &= -i, \\ \sigma_{21}^y &= i, & \sigma_{22}^y &= 0; \end{aligned}$$

或

$$\sigma_{ij}^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

有了这3个 σ 矩阵，式（11.2）就与式（11.4）恒等。我们将 x, y, z 作为 σ 的上标，指明哪个 σ 与哪个 $\mathbf{B}$ 的分量相对应，而将下标留给 i 与 j 。但通常 i, j 略去不写——因为不难想象它们是在哪儿——而把 x, y, z 写作下标。这样式（11.4）就写成

$$H = -\mu (\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z) . \quad (11.8)$$

因为 σ 矩阵非常重要（它们一直被专家们使用着），我们在表11-1中将它们汇总在一起。（任何打算从事量子物理学工作的人都一定得记住它们。）人们也以发明这些矩阵的物理学家们的名字将它们命名为泡利自旋矩阵。

表11-1 泡利自旋矩阵

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$1 = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11.9)$$

在这张表上我们还多加了一个 2×2 矩阵，如果我们要处理一个含有带同样能量的两个自旋态的系统，或者想选择一个不同零点能量的话，就需要那样一个矩阵。在这些情况下我们必须在式（11.1）的第一个方程中加上 $E_0 C_+$ ，而在第二个方程中加上 $E_0 C_-$ 。如果定义单位矩阵“1”为 δ_{ij} ，

并将式（11.8）改写为

$$H_{ij} = E_0 \delta_{ij} - \mu (\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z), \quad (11.10)$$

就能把以上两项包括在我们的新记法中。通常不用说明就会明白任何像 E_0 那样的常数都自动地与单位矩阵相乘，于是上式简写为

$$H = E_0 - \mu (\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z). \quad (11.11)$$

自旋矩阵之所以有用，其中一个理由是，任何 2×2 矩阵都能用它们表示。任何一个你能写出的这种矩阵中都有4个数，比方说

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

它们总可以写为4个矩阵的线性组合。例如：

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

有许多这种组合法，但有一种特殊方法是将 M 看作一定量的 σ_x 加一定量的 σ_y ，等等，形如

$$M = \alpha 1 + \beta \sigma_x + \gamma \sigma_y + \delta \sigma_z,$$

这里“数量” α ， β ， γ 与 δ 一般来说可以是复数。

既然任何 2×2 矩阵都可用单位矩阵与 σ 矩阵表示，我们就有了处理任何双态系统所需要的一切了。不管双态系统是什么——氨分子、品红染料或者其他任何东西——哈密顿方程都可用 σ 矩阵写出。虽然在

电子处于磁场中这种物理条件下可以看出 σ 矩阵具有几何意义，但也可以将它们看作只是些适用于任何双态问题的有用矩阵而已。

例如，在某种看法下，可以把质子与中子看作为处于两种状态之一的同一种粒子，我们说核子（质子或中子）是双态系统——在这种情况下，两个态是就关系到它们是否带电荷。照这种观点，态 $|1\rangle$ 可表示质子，而态 $|2\rangle$ 可表示中子。人们便说核子有两个“同位旋”状态。

由于我们要使用 σ 矩阵作为双态系统量子力学的“算术”，所以让我们很快地复习一下矩阵代数的一些规则。所谓两个或几个矩阵的“和”的意义在式（11.4）中很明显。一般说，如果将两个矩阵 A 与 B “相加”，那么它们的“和” C 就意味着其每一项 C_{ij} 由下式给出：

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

C 的每一项是 A 与 B 中同样位置的两项之和。

在§5-6中我们已接触到矩阵“积”的概念。这个概念也同样用于处理 σ 矩阵。一般而言，两个矩阵 A 和 B （按此顺序）的“积”定义为矩阵 C ，它的元素是

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}. \quad (11.12)$$

这是从 A 的第 i 行及 B 的第 j 列取出相应一对元素相乘然后求和。如果矩阵写成图11-1那样的表格形式，就有一个求出积矩阵各项很好的“系统”。假定你要计算 C_{23} ，将你的左手食指顺着 A 的第二行依次移

动，右手食指顺着 B 的第三列 向下 依次移动，将移动时所遇到的每一对相乘，再相加。我们已试着在图中说明具体做法。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

例

$$C_{23} = A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} + A_{24}B_{43}$$

图 11-1 两个矩阵相乘

当然，对2×2矩阵来说特别简单。例如，如果我们将 σ_x 乘 σ_x ，就得到

$$\sigma_x^2 = \sigma_x \cdot \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

这正是单位矩阵1。或举另一个例子，我们来算出 $\sigma_x \sigma_y$ ：

$$\sigma_x \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

参照表11-1，可看出乘积正是*i*乘上矩阵 σ_z 。（请记住一个数与矩阵相乘，就是该数与矩阵的每一项相乘。）因为一次求两个 σ 矩阵的积很重要，也相当有趣，所以我们已将这些积全部列在表11-2内。你可以像求 σ_x^2 及 $\sigma_x \sigma_y$ 那样求出它们来。

表 11-2 自旋矩阵的积

$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 1 & \sigma_y^2 &= 1 & \sigma_z^2 &= 1 \\ \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x & & & &= i\sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y & & & &= i\sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z & & & &= i\sigma_y \end{aligned}$

关于这些 σ 矩阵，还有一个十分重要而有趣之点。如果愿意，我们可以设想3个矩阵 σ_x ， σ_y 及 σ_z 类似于某个矢量的3个分量——有时把它称为“ σ 矢量”——而记为 σ 。它确实是个“矩阵矢量”或“矢量矩阵”。它是3个不同的矩阵，每一个矩阵分别和 x ， y 或 z 轴中的一个相联系。由此，我们可把系统的哈密顿以在任何坐标系内都成立的简洁形式写出：

$$H = -\mu \sigma \cdot B. \quad (11.13)$$

虽然这3个矩阵是在这样的表示中写下的，在该表示中“朝上”与“朝下”是对 z 轴而言的（因而 σ_z 特别简单）。但我们也可以求出在其他某个表示中这些矩阵的形式。尽管需要作许多代数运算，你能够证明这些矩阵之间的变换就像一个矢量的分量的变换一样。（然而，我们此刻不想去操心证明这点，如果你愿意，你可以验证这一点。）你们可以在不同的坐标系下应用 σ ，就仿佛它是个矢量一样。

你们记得在量子力学中 H 与能量有关。事实上，在只有一个态的简单状况下， H 正好等于能量。即使对电子自旋的双态系统，当我们将哈密顿写成式（11.13）那样时，它非常像一个磁矩为 μ 的小磁体处在磁场 B 中的能量的经典 公式。在经典物理学中，我们有

$$U = -\mu \cdot B, \quad (11.14)$$

这里 μ 是物体的性质， B 是外磁场。如果用哈密顿代替经典的能量，用矩阵 $\mu \sigma$ 代替经典的 μ ，我们可以看出式（11.14）能够转换为式（11.13）。于是，根据这种纯粹形式的代换，我们将结果解释为矩阵方程。有时人们说，对经典物理中的每个量，量子力学中都有一个矩

阵与之对应，实际上更确切的说法是哈密顿矩阵对应着能量，而任何可以通过能量来定义的量都有着相应的矩阵。

例如，磁矩可以通过能量来定义，只要指出它在外场 $\mathbf{B}$ 中的能量是 $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ 。这就定义了磁矩矢量 $\boldsymbol{\mu}$ 。然后我们考察处在磁场中的真实（量子）客体的哈密顿的公式，并试着去辨别这些矩阵与经典公式中相对应的各种物理量。这就是有时可以找到和经典物理量对应的量子力学物理量的技巧。

如果愿意的话，你们可以试试看去弄清一个经典矢量怎么会跟一个矩阵 $\boldsymbol{\mu} \sigma$ 相等，或许你们会发现一些东西——但切勿为之太伤脑筋。那个想法不妥当——它们并不相等。量子力学是另一种类型的描述世界的理论。只是碰巧存在着一定的对应关系，但这至多是记忆的工具——用它来帮助记忆。就是说，当你学习经典物理时，你记住了式（11.14）；因而如果你记得对应关系 $\boldsymbol{\mu} \rightarrow \boldsymbol{\mu} \sigma$ ，你就容易记住式（11.13）了。当然，自然界遵循量子力学，而经典力学只是近似；因此，毫不奇怪在经典力学中会有量子力学定律的某种影子——量子力学定律正是经典力学的基础。用任何直接方式从影子重建原物是不可能的，但影子确实会帮助你记住原物像什么样子。式（11.13）是真理，而式（11.14）是影子。因为我们先学习经典力学，所以希望能由它得到量子力学公式，但这样做时根本不存在什么肯定成功的方案。我们必须一再回到真实世界以发现正确的量子力学方程。如得到的方程跟经典物理中的某个东西相像，就是我们的幸运。

如果上述有关经典物理与量子物理之间关系的告诫显得太啰嗦，并且在你们看来都是毋庸置疑的自明之理，那就请你们原谅这位教授的条件反射吧，他通常是对进研究生院前并没听说过泡利自旋矩阵的学生讲授量子力学。这些学生总像是抱着某种希望，希望量子力学是

他们几年前已透彻学过的经典力学逻辑发展的结果。（或许他们想避免不得不学习新东西这件事吧。）你们只是在几个月前学习了经典公式（11.14）——并且接着又被提醒说它并不是合适的公式——所以你们大概不会很不愿意将量子力学公式（11.13）来作为基本的真理吧。

§11-2 作为算符的自旋矩阵

当我们正讨论数学记号这一题目时，我们想再描写一下另一种书写方法，这种写法很常用，因为它非常简洁。它直接由第8章所引进的记法得到。假定我们有个处在随时间变化的状态 $|\psi(t)\rangle$ 的系统，我们可像在式（8.34）中所做的那样把系统于时刻 $t + \Delta t$ 在态 $|i\rangle$ 的振幅写成

$$\langle i | \psi(t + \Delta t) \rangle = \sum_j \langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle \langle j | \psi(t) \rangle.$$

矩阵元 $\langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle$ 是在时间间隔 Δt 内基础态 $|j\rangle$ 转变为基础态 $|i\rangle$ 的振幅。于是我们可以写出下式来定义 H_{ij} ：

$$\langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t,$$

我们已经证明各振幅 $C_i(t) = \langle i | \psi(t) \rangle$ 之间由下列微分方程组相联系：

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j, \quad (11.15)$$

假如明确写出振幅 C_i ，那么上式成为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle i | \psi \rangle = \sum_j H_{ij} \langle j | \psi \rangle. \quad (11.16)$$

但矩阵元 H_{ij} 也是振幅，可以将它写为 $\langle i | H | j \rangle$ ；所以我们的微分方程就变为这样：

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle i | \psi \rangle = \sum_j \langle i | H | j \rangle \langle j | \psi \rangle. \quad (11.17)$$

我们看到 $(-i/\hbar) \langle i | H | j \rangle dt$ 就是在 H 所描写的物理条件下态 $|j\rangle$ 在时间 dt 内将“产生”出态 $|i\rangle$ 的振幅。（所有这些都已隐含在§8-4的讨论之中。）

现在依照§8-2的思路，我们可以丢掉式（11.17）中的公共项 $\langle i |$ ——因为此式对任何态 $|i\rangle$ 都成立——而把该方程简写为

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \sum_j H |j\rangle \langle j | \psi \rangle. \quad (11.18)$$

或再进一步，我们还可去掉 j 而写为

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle. \quad (11.19)$$

在第8章里我们曾指出，表式写成这种形式时，在 $H |j\rangle$ 或 $H |\psi\rangle$ 中的 H 称为算符。从现在开始我们要给算符戴上一顶小帽子（ $\wedge$ ）来提醒你这是个算符而不是个数字。我们以后写成 $\hat{H} |\psi\rangle$ 。虽然两个方程式（11.18）及（11.19）和式（11.17）或（11.15）的意义完全相同，我们却可以用不同的方式看待它们。例如，我们可以这样来描写式（11.18）：“态矢量 $|\psi\rangle$ 对时间的导数乘以 $i\hbar$ 等于将哈密顿算符 $\hat{H}$ 作用于每个基础态后，乘上 ψ 在某一态 j 中的振幅 $\langle j | \psi \rangle$ ，然后

再对所有 j 求和所得的结果。”而式(11.19)可以这样来描写：“态 $|\psi\rangle$ 对时间的导数(乘上 $i\hbar$)等于用哈密顿算符 $\hat{H}$ 作用在态矢量 $|\psi\rangle$ 上所得到的结果。”这只是对式(11.17)中内容的一种简短说法而已，但是，你们会看到，那是十分便利的。

如果我们高兴，还可以把“抽象”的思想再往前推进一步。方程式(11.19)对任何状态 $|\psi\rangle$ 都正确。等式左边的 $i\hbar \frac{d}{dt}$ 也是个算符——它是“对 t 求导再乘上 $i\hbar$ ”的运算。所以式(11.19)也可以认为是算符之间的一个方程，即算符方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} = \hat{H}.$$

哈密顿算符(除一个常数因子之外)作用到任何态上所得的结果与 d/dt 的作用相同。请记住这个方程——像式(11.19)一样——并非 $\hat{H}$ 算符恰与 $i\hbar d/dt$ 是恒等运算的表述。这些方程是自然界量子体系的动力学定律，即运动定律。

为用这些概念做些练习，我们给你证明可以换一种方法得到式(11.18)。你们知道，我们可以用一个态 $|\psi\rangle$ 在某一组基础态上的投影来表示这个态[参见式(8.8)]，

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\psi\rangle. \quad (11.20)$$

态 $|\psi\rangle$ 怎样随时间变化呢？只要求它的导数：

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle = \frac{d}{dt} \sum_i |i\rangle \langle i|\psi\rangle. \quad (11.21)$$

设基础态 $|i\rangle$ 不随时间变化（至少我们总是把它们取为确定不变的态），但振幅 $\langle i | \psi \rangle$ 是个可能变化的数。于是式（11.21）变为

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \frac{d}{dt} \langle i | \psi \rangle. \quad (11.22)$$

从式（11.16）可以知道 $d \langle i | \psi \rangle / dt$ ，所以我们得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \sum_i |i\rangle \sum_j H_{ij} \langle j | \psi \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{ij} |i\rangle \langle i | H | j \rangle \langle j | \psi \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_j H | j \rangle \langle j | \psi \rangle. \end{aligned}$$

这就是式（11.18）。

所以我们有多种看待哈密顿的方法。可以把一组系数 H_{ij} 看作为只是一组数字，或把哈密顿算符看作“振幅” $\langle i | H | j \rangle$ ，或看作“矩阵” H_{ij} ，或看作“算符” $\hat{H}$ 。它们全都表示同一事物。

现在让我们回到双态系统上来。假如我们用 σ 矩阵（带有适当的数值系数，如 B_x 等等）表示哈密顿，我们也能把 σ_{ij}^x 明确地看作振幅 $\langle i | \sigma_x | j \rangle$ ，或者，简言之就是算符 $\hat{\sigma}_x$ 。如果使用算符的概念，我们可以把磁场中的态 $|\psi\rangle$ 的运动方程写成

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = -\mu(B_x \hat{\sigma}_x + B_y \hat{\sigma}_y + B_z \hat{\sigma}_z) |\psi\rangle. \quad (11.23)$$

当我们想要“使用”这样一个方程时，通常必须用基矢表示态 $|\psi\rangle$ （这就像要用特定的数值来表示空间矢量就一定要求出空间矢量的分量一样）。所以我们通常把式（11.23）写成展开式：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = -\mu \sum_i (B_x \hat{\sigma}_x + B_y \hat{\sigma}_y + B_z \hat{\sigma}_z) |i\rangle \langle i|\psi\rangle. \quad (11.24)$$

现在你们会明白为什么算符概念是如此简洁了。为了利用式（11.24），我们要知道 $\hat{\sigma}$ 算符作用在各个基础态上会得到什么结果。让我们求出它们来。假定我们求 $\hat{\sigma}_z |+\rangle$ ，它是某个矢量 $|?\rangle$ ，但是，是什么矢量呢？别急，让我们在 $\hat{\sigma}_z |+\rangle$ 上左乘 $\langle +|$ ，那就有

$$\langle +| \hat{\sigma}_z |+\rangle = \sigma_{11}^z = 1.$$

（利用表11-1），所以我们知道

$$\langle +| ? \rangle = 1. \quad (11.25)$$

现在，让我们在 $\hat{\sigma}_z |+\rangle$ 上左乘 $\langle -|$ ，我们得到

$$\langle -| \hat{\sigma}_z |+\rangle = \sigma_{21}^z = 0,$$

所以

$$\langle -| ? \rangle = 0. \quad (11.26)$$

只有一个态矢量同时满足（11.25）和（11.26）两式，这就是 $|+\rangle$ 。于是我们发现

$$\hat{\sigma}_z |+\rangle = |+\rangle. \quad (11.27)$$

利用这样的论证，你们很容易证明 σ 矩阵的所有性质可以用表11-3所列的一组法则以算符记号来描写。

表 11-3

$\hat{\sigma}$ 算符的性质		
$\hat{\sigma}_z +\rangle = +\rangle$	$\hat{\sigma}_x +\rangle = -\rangle$	$\hat{\sigma}_y +\rangle = i -\rangle$
$\hat{\sigma}_z -\rangle = - -\rangle$	$\hat{\sigma}_x -\rangle = +\rangle$	$\hat{\sigma}_y -\rangle = -i +\rangle$

如果我们求 σ 矩阵的乘积，它们就变为求算符的乘积。当两个算符作为乘积一起出现时，你们要先将最靠右的算符进行运算。例如，对 $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y |+\rangle$ ，我们必须理解为 $\hat{\sigma}_x (\hat{\sigma}_y |+\rangle)$ ，由表 11-3，求得 $\hat{\sigma}_y |+\rangle = i |-\rangle$ ，所以

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y |+\rangle = \hat{\sigma}_x (i |-\rangle). \quad (11.28)$$

而对任何数——譬如 i ——只要从算符中移出就可以了（算符只作用在态矢量上），所以式（11.28）与下式相同：

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y |+\rangle = i \hat{\sigma}_x |-\rangle = i |+\rangle.$$

如果对 $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y |-\rangle$ 作同样运算，你们就得到

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y |-\rangle = -i |-\rangle.$$

查一下表11-3，你们会看出 $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y$ 作用在 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$ 上正好得到 $\hat{\sigma}_z$ 作用其上的结果再乘以 i 。所以我们可以说 $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y$ 的作用与 $i \hat{\sigma}_z$ 的作用相同，并把这个表述写为算符方程：

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i \hat{\sigma}_z. \quad (11.29)$$

注意这个方程与表11-2中所列的矩阵方程之一相同。所以我们又一次见到了矩阵观点和算符观点之间的对应性。因而表11-2中的每个方程都可以看作是关于 σ 算符的方程。你们可以验证一下它们确实可由表11-3得到。在作这些验证时，最好不要去管 σ 或 H 这些量究竟是算符还是矩阵。不论从哪种观点来看，所有的方程都相同，所以表11-2既适用于 σ 算符，也适用于 σ 矩阵，随你的便。

§11-3 双态方程的解

现在我们可用多种形式写出双态方程。例如可写为

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j,$$

也可写为

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (11.30)$$

它们表示同一回事。对处在磁场中的一个自旋1/2粒子，哈密顿 H 由式(11.8)或式(11.13)给出。

如果磁场沿 z 方向，那么——正像到现在为止我们已屡次见到的那样——解就是态 $|\psi\rangle$ （不管它是什么）绕着 z 轴进动（就好像你取一个物体，使它整个地绕着 z 轴旋转一样），它的进动角速度等于场强乘以 $\mu/\hbar$ 的两倍。当然，当磁场沿其他任何方向时，情况同样如此，因为物理规律与坐标系无关。假如有这样一种状况，磁场以复杂的方式随着时间变化，那么我们可以用下述方式加以分析。假定开始

时自旋沿着 $+z$ 方向，而磁场沿 x 方向。自旋就开始转向。接着如果 x 方向磁场撤销，自旋就停止转向。如果这时加上一个 z 方向磁场，自旋就绕着 z 轴进动，等等。所以根据磁场按时间变化的方式，你可以描绘出终态是什么——它将指向哪个轴的方向。然后你就可用第10章（或第6章）的投影公式变换回到原先的对于 z 轴的 $|+\rangle$ 态与 $|-\rangle$ 态来表示这个态。如果终态的自旋的指向沿着 (θ, ϕ) 方向，它就会有一个朝上的振幅 $\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}$ 和一个朝下的振幅 $\sin(\theta/2)e^{+i\phi/2}$ 。这就解决了任何问题。这是微分方程解法的语言描述。

刚才所述的求解方法相当普遍，可以处理任何双态系统。我们不妨取氨分子为例子——其中还包括电场的效应。假如我们用态 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 描写系统，方程式(9.38)和(9.39)就写成：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_I}{dt} &= +AC_{II} + \mu\epsilon C_{II}, \\ i\hbar \frac{dC_{II}}{dt} &= -AC_{II} + \mu\epsilon C_I. \end{aligned} \tag{11.31}$$

你们会说：“不对，我记得里面还有个电场 E_0 。”不错，但我们已移动了能量的原点，使 E_0 为0。（通过使两个振幅改变同样的因子 $e^{iE_0 T/\hbar}$ 总可做到这一点——为了去掉任何常数能量。）既然相应的方程总有相同的解，那我们实在不必再去解一次方程。假如我们看一下这些方程，再看一下方程式(11.1)，那我们就可进行下述判断。我们可称 $|I\rangle$ 为态 $|+\rangle$ ， $|II\rangle$ 为态 $|-\rangle$ 。这并不意味着我们把氨分子在空间排列起来，也不是 $|+\rangle$ 及 $|-\rangle$ 与 z 轴有任何关系。这纯粹是人为的。我们有一个人造的空间，可以称为“氨分子表示空间”或别的什么名称——一个三维的“构图”，其中的“朝上”对应于分子处在 $|I\rangle$ 态，

而沿着假想的 z 轴“朝下”则表示分子处在 $|\text{II}\rangle$ 态。这样，对这些方程就可作如下的理解。首先，你知道哈密顿可用 σ 矩阵表示为

$$H = +A\sigma_z + \mu\varepsilon\sigma_x. \quad (11.32)$$

或者，换一种方式说，式(11.1)中的 μB_z 对应于式(11.32)中的 $-A$ ，而 μB_x 对应于 $-\mu\varepsilon$ 。于是，在我们的“模型”空间中，有一个沿 z 方向的恒定 B 场。如果我们有一个随时间而变的电场 E ，那我们就有一个沿 x 方向按比例变化的 B 场。所以，处在一个 z 方向分量保持不变而 x 方向振荡分量的磁场中的电子的行为，数学上类似于并且完全对应于一个处在振动电场中的氨分子的行为。遗憾的是，我们没有时间进一步讨论这种对应的详情，也没有时间讨论任何技术细节。我们只想指出，所有双态系统，都与一个在磁场中进动的自旋 $1/2$ 粒子相类似。

§11-4 光子的偏振态

还有另外许多双态系统研究起来很有趣，我们要谈的第一个新系统是光子。为了描写一个光子，我们必须首先给出它的动量矢量。对自由光子，频率由动量决定，所以我们无须再说它的频率是多少。然而，除动量外我们还须考虑一个称为偏振的性质。设想有个确定单色频率的光子向着你射来（频率在这一讨论中始终保持不变，所以没有许多种不同的动量态）。就有两个偏振方向。在经典理论中，光可以描写为具有（譬如说）一个水平振动的电场和一个垂直振动的电场，这两类光称为 x 偏振光及 y 偏振光。光也可能沿其他某个方向偏振，这可以由沿 x 方向的场与沿 y 方向的场的叠加构成。或者，如果你使 x 分量与 y 分量之间的相位相差 90° ，就会得到一个旋转的电场——这样的

光是椭圆偏振光。（这只不过是对我们在第1卷第38章所学过的偏振光经典理论的简单回顾。）

现在假设我们有单个光子——只是一个。这里不存在可以用同样方法讨论的电场，我们所有的只是一个光子。但是光子必定有经典偏振现象的类似的性质。必定存在至少两种不同的光子。起先你可能会以为应当有无限多种——因为电矢量可以指向各种方向。但我们可以把光子的偏振作为双态系统来描写。光子可以处在 $|x\rangle$ 态或处在 $|y\rangle$ 态。 $|x\rangle$ 态指的是在经典物理学中是沿x方向振动的一束光线里的每个光子的偏振态。而 $|y\rangle$ 态指的是沿y方向振动的光束中的每个光子的偏振态。[\[2\]](#)我们可以把 $|x\rangle$ 与 $|y\rangle$ 作为具有指向你的给定动量——我们将称该指向为z方向——的光子的基础态。所以有 $|x\rangle$ 与 $|y\rangle$ 两个基础态，它们就是描写任何光子所需要的一切。

举例来说，如果我们有块偏振片，其取向能让沿x轴振动的偏振光通过，我们往这偏振片射去一个我们已知道是 $|y\rangle$ 态的光子，它将被偏振片吸收。假如射去一个我们知道是 $|x\rangle$ 态的光子，它将径直通过偏振片后仍旧是 $|x\rangle$ 。如果我们取一块方解石，它让一束偏振光分解为一个 $|x\rangle$ 光束及一个 $|y\rangle$ 光束，这块方解石完全类似于把一束银原子分裂为 $|+\rangle$ 及 $|-\rangle$ 两种状态的施特恩-格拉赫装置。所以先前我们对粒子和施特恩-格拉赫装置所做的每一件事都能重新用在光和方解石上。那么，当光透过一块透振方向角度为 θ 的偏振片时，会出现什么情况呢？是否变成另一种状态？是的，它的确是另一种状态。我们称偏振片的透振轴为 x' ，以便跟我们的基础态的轴区分开来。参见图11-2。射来的光子将处在 $|x'\rangle$ 态。但任何态都可以用基础态的线性组合来表示，这里，组合的公式是

$$|x'\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle . \quad (11.33)$$

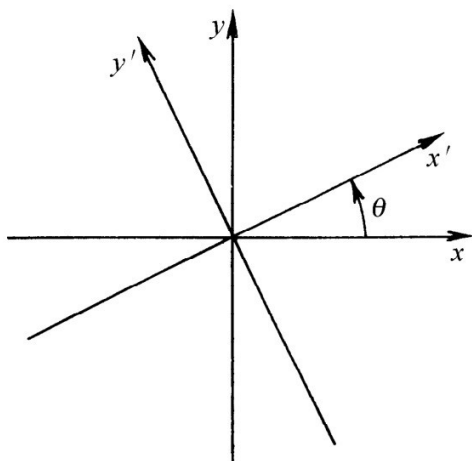


图11-2 与光子的动量矢成直角的坐标

这就是说，如果光子通过一块透振方向（和 x 轴的）夹角为 θ 的偏振片后，它仍可以（比方说，用一块方解石）分解为 $|x\rangle$ 束与 $|y\rangle$ 束。或者，如果愿意，你可以只在想象中把它分解为 x 分量与 y 分量。无论用哪种方法，你都将得到处在 $|x\rangle$ 态的振幅是 $\cos\theta$ ，处在 $|y\rangle$ 态的振幅是 $\sin\theta$ 。

现在我们问这一问题。假设一个光子通过角度为 θ 的偏振片后得到沿着 x' 方向振动的偏振光，而后到达一块角度为零的偏振片——如图11-3所示，那会发生什么情况呢？它将有多大的概率通过？答案如下：当它通过第一片偏振片后，它一定处在 $|x'\rangle$ 态，第二片偏振片只让 $|x\rangle$ 态的光子通过（吸收 $|y\rangle$ 态的光子）。所以我们要问，出现处在 $|x\rangle$ 态光子的概率有多大？我们可从 $|x'\rangle$ 态的光子在 $|x\rangle$ 态的振幅 $\langle x | x' \rangle$ 的绝对值的平方得到此概率。 $\langle x | x' \rangle$ 是什么？只要把式（11.33）左乘以 $\langle x |$ 就得到

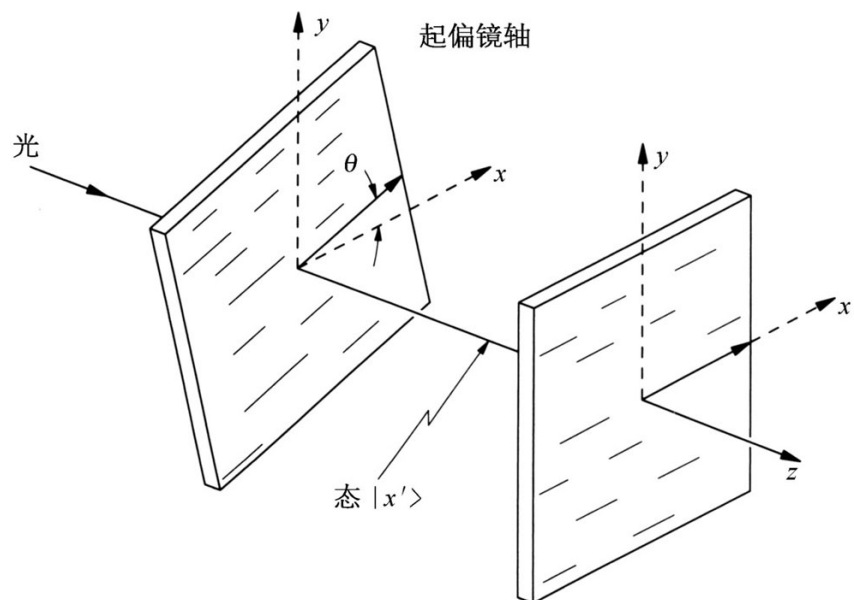


图11-3 透振方向间成 θ 角的两个偏振片

$$\langle x | x' \rangle = \cos\theta \langle x | x \rangle + \sin\theta \langle x | y \rangle .$$

而从物理意义得知， $\langle x | y \rangle = 0$ ——如果 $|x\rangle$ 和 $|y\rangle$ 是基础态的话就必须如此——而 $\langle x | x \rangle = 1$ 。所以得到

$$\langle x | x' \rangle = \cos\theta ,$$

概率就是 $\cos^2 \theta$ 。举例来说，如果第一片偏振片角度为 30° ，那么一个光子有 $3/4$ 的机会得以穿过，而有 $1/4$ 的机会光子被偏振片所吸收而将它加热。

现在我们来看一下在同样情况下按经典理论会发生什么。我们有一束光，它的电场以不定的方式变化着——我们就说这束光是“非偏振”的。当它通过第一片偏振片后，电场沿 x' 方向振动，而大小为 E ，我们可以在如图11-4那样的图上把电场画成峰值为 E_0 的振动矢量。当光到达第二片偏振片时，只有电场的 x 分量 $E_0 \cos\theta$ 得以通过。光强与

电场的平方成正比，因此与 $\mathcal{E}_0^2 \cos^2 \theta$ 成正比。所以从第二片偏振片射出时能量比进入时的能量减弱一个 $\cos^2 \theta$ 因子。

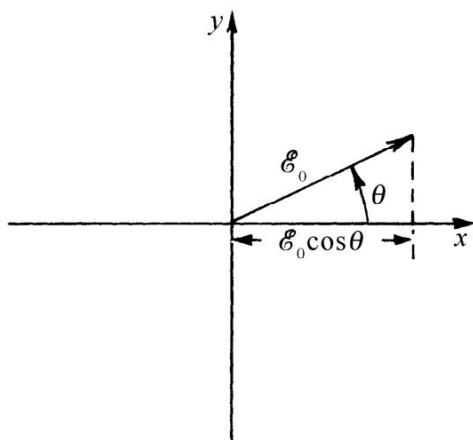


图11-4 电矢量 E 的经典图像

经典图像和量子图像给出了相同的结果。如果你往第二片偏振片注射100亿个光子，每个光子通过的平均概率比方说是3/4，那你就可以指望100亿光子中有3/4得以通过。类似地，它们所携带的能量也只是你注入能量的3/4。经典理论不说事件的统计意义——它只是说通过的能量正好是你送入的能量的3/4。当然，如果只有一个光子的话，这就不可能了，不存在3/4个光子那样的东西。它要么整个在那里，要么根本不在那里。量子力学则告诉我们，有3/4的机会 它整个在那里。两种理论的关系是清楚的。

那么，对另一类偏振呢？比方说右旋圆偏振又如何？在经典理论中，右旋圆偏振有着大小相等而相位差为 90° 的 x 振动分量及 y 振动分量。在量子理论中，右旋圆偏振（RHC）光子在偏振态 $|x\rangle$ 及 $|y\rangle$ 有相等的振幅，而振幅间相位差为 90° 。称RHC光子为 $|R\rangle$ 态，左旋圆偏振（LHC）光子为 $|L\rangle$ 态，我们可以写出（参见第1卷§33-1）

$$\begin{aligned}
|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \\
|L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle).
\end{aligned}
\tag{11.34}$$

因子 $1/\sqrt{2}$ 是为了使态归一化而引进的。用这些态并利用量子理论的定律，你可以计算任何你想研究的滤光或干涉效应。如果愿意你也可以选择 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$ 为基础态，而用它们表示任何状态。只要先证明 $\langle R | L \rangle = 0$ ——取上式中第一个方程的共轭式 [参见式 (8.13)]，然后乘以第二个方程，就可证明这一点。你可以将光分解为 x 向振动和 y 向振动，或分解为 x' 向振动和 y' 向振动，也可以分解为右旋圆偏振及左旋圆偏振等作为基础态。

作为一个例子，我们来试一下把公式掉转过来。能不能把态 $|x\rangle$ 表示为右旋态与左旋态的线性组合呢？可以，这就是

$$\begin{aligned}
|x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle), \\
|y\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle).
\end{aligned}
\tag{11.35}$$

证明：将式 (11.34) 中的两式相加与相减即可。很容易从一种基础态变到另一种基础态。

然而，必定会出现一个奇特的情况。如果光子是右旋圆偏振的，它不应跟 x 及 y 轴有任何关系。如果我们从一个绕光子飞行方向转过某一角度的坐标系来看同一个现象的话，光应当仍然是右旋圆偏振的，对左旋圆偏振光，情况也一样。右旋和左旋圆偏振光对任何转动都不变，它们的定义与 x 方向怎么选择无关（只是光子的方向业已给定）。定义左、右旋不需要定任何坐标轴，这岂非好事，这要比取定 x

和 y 方便多了。但另一方面，当你把右旋与左旋加在一起时，可以求得 x 方向，这不很奇怪吗？如果“右”旋和“左”旋丝毫不依赖于 x ，那我们把它重新放到一起时又怎么能得到 x ？在某种程度上我们可以这样来回答上述问题：在 x' ， y' 坐标系中写出表示RHC偏振光子的态矢量 $|R'\rangle$ ，在这个坐标系中，你可以写出：

$$|R'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle + i|y'\rangle).$$

这样一个态在 x ， y 坐标系中又显得怎样呢？只要用式(11.33)代 $|x'\rangle$ 并用相应的表式代 $|y'\rangle$ ——我们未曾将它写出来，但它就是 $(-\sin\theta)|x\rangle + (\cos\theta)|y\rangle$ 。于是就有

$$\begin{aligned} |R'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle - i\sin\theta|x\rangle + i\cos\theta|y\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\theta - i\sin\theta)|x\rangle + i(\cos\theta - i\sin\theta)|y\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle)(\cos\theta - i\sin\theta). \end{aligned}$$

第一项正是 $|R\rangle$ ，而第二项是 $e^{-i\theta}$ ；我们的结果就是

$$|R'\rangle = e^{-i\theta} |R\rangle. \quad (11.36)$$

态 $|R'\rangle$ 与 $|R\rangle$ 除了一个相位因子 $e^{-i\theta}$ 外完全相同。如果你对 $|L\rangle$ 作同样的计算，就会得到^[3]

$$|L'\rangle = e^{+i\theta} |L\rangle. \quad (11.37)$$

现在你看到发生了什么情况。如果我们将 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$ 相加，就得到跟 $|R'\rangle$ 与 $|L'\rangle$ 相加不同的结果。譬如说，一个 x 偏振光子是 [式 (11.35)] $|R\rangle$ 和 $|L\rangle$ 的和，但一个 y 偏振光子则是把 $|R\rangle$ 的相位后移 90° ，把 $|L\rangle$ 的相位前移 90° 后的两者之和。这正是在特殊的角度 $\theta=90^\circ$ 的情况下对 $|R'\rangle$ 与 $|L'\rangle$ 求和所得的结果。这是正确的。在带“撇”的参考系中的 x 偏振跟原来参考系的 y 偏振相同，所以，认为圆偏振光子在任何坐标系中看来都相同这种说法不完全正确。它的相位（右旋与左旋圆偏振态的相位关系）始终保持着 x 方向的关系。

§11-5 中性K介子^[4]

我们现在要来描写奇异粒子世界中的一个双态系统——一个量子力学对之作出了最令人惊异的预言的系统。要完全地描述这一系统，我们就得涉及许多有关奇异粒子的知识，所以，很遗憾，我们将不得不说得简短些。我们只能对某个发现的获得过程作出大致的描绘——把所包括的推理方式告诉你们。这是从盖尔曼（Gell-Mann）和西岛（Nishijima）发现奇异性概念以及新的奇异性守恒定律开始的。正当盖尔曼和佩斯（Pais）分析这些新概念所得的结果时，他们提出了我们正要描写的一个最令人惊异的现象的预言。然而，首先我们得谈一点“奇异性”。

我们必须从核粒子之间的所谓强相互作用开始。这种作用是强核力相互作用的根源，它和相对较弱的电磁相互作用不同。作用“强”指的是，如果两个粒子靠得足够近而产生相互作用，它们的作用非常强烈，并且很容易产生其他粒子。核粒子之间也存在着所谓的“弱相互作用”。

用”，由此也会发生某些现象，诸如 β 衰变，但是用核的时间尺度来衡量，发生作用总是非常缓慢——弱作用的大小要比强作用弱许许多多数量级，甚至比电磁相互作用还弱得多。

当人们用大型加速器对强相互作用进行研究时，惊奇地发现有些“应当”发生的事——预期会发生的事——却没有发生。譬如，在某些相互作用中，某种类型的粒子没有像原先预料的那样出现。盖尔曼和西岛注意到，如果提出一条新的守恒定律——奇异性守恒，这许多奇异现象就能马上得到解释。他们提出，每个粒子都具有一种新的属性——他们称之为“奇异”数，而在任何强相互作用过程中，“奇异性的数量”是守恒的。

举例来说，假定一个高能负K介子（譬如说带有几十亿电子伏特能量）与一个质子相碰撞。这样的相互作用会产生许多别的粒子： π 介子，K介子， Λ 粒子， Σ 粒子，即列于第1卷表2-2中的各种介子或重子。人们观察到只出现某些组合，另外一些组合则从不出现。已经知道某些守恒定律在这里是起作用的。首先，能量和动量总是守恒的，事件后的总能量和总动量必定与事件前的相同。其次，有电荷守恒，这就是说，所产生的粒子的总电荷必定等于原有粒子所带的总电荷。在我们这个K介子与质子相碰撞的例子中，以下的反应确实发生了：

$$K^- + p \longrightarrow p + K^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (11.38)$$

或

$$K^- + p \longrightarrow \Sigma^- + \pi^+.$$

由于电荷守恒，我们永远不会得到

$$K^- + p \longrightarrow p + K^- + \pi^+ \quad (11.39)$$

或

$$K^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^+.$$

我们也知道，重子数是守恒的。反应后的重子数必定等于反应前的重子数。在这条定律中，重子的反粒子作为一个负重子来计算。这意味着我们可以——也确实——见到这样的反应：

$$K^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^0 \quad (11.40)$$

或

$$K^- + p \longrightarrow p + K^- + \bar{p} + p.$$

（这里 $\bar{p}$ 是反质子，它带一个负电荷。）但是我们从没有见到

$$K^- + p \longrightarrow K^- + \pi^+ + \pi^0 \quad (11.41)$$

或

$$K^- + p \longrightarrow p + K^- + n.$$

（即使能量很大也是如此），因为上式中重子数不守恒。

然而，这些定律不能解释这样一件奇特的事实，即下列反应：

$$K^- + p \longrightarrow p + K^- + K^0$$

或

$$K^- + p \longrightarrow p + \pi^- \tag{11.42}$$

或

$$K^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + K^0$$

也从未观察到过，而这些反应初看起来跟式（11.38）或式（11.40）的某些反应并无多大的差别。对此的解释是奇异性守恒。每个粒子都有一个数，即奇异数 S ，而在任何强相互作用中，都存在着这样一条定律：反应后的总奇异数必定等于反应前的总奇异数。质子和反质子（ $p, \bar{p}$ ），中子和反中子（ $n, \bar{n}$ ），以及 π 介子（ π^+, π^0, π^- ）的奇异数全都为0， K^+ 与 K^0 介子奇异数为+1； K^- 与 $\bar{K}^0$ （ K^0 的反粒子）， Λ^0 与 Σ 粒子（ $+, 0, -$ ）奇异数为-1。还有一种粒子 Ξ 粒子（“ ξ ”的大写）的奇异数为-2，或许还有其他奇异数尚不知道的粒子。我们已把这些奇异数列在表11-4中。

表11-4 强相互作用粒子的奇异数

	S			
	-2	-1	0	+1
重 子	Ξ^0 Ξ^-	Σ^+ Λ^0, Σ^0 Σ^-	p n	
介 子		$\bar{K}^0$ K^-	π^+ π^0 π^-	K^+ K^0

注： π^- 为 π^+ 的反粒子（反之亦然）。

让我们看看在已写出的某些反应中，奇异性守恒是怎么起作用的。如果开始时是一个 K^- 和一个质子，总的奇异数为 $(-1+0)=-1$ 。奇异性守恒要求反应后 产物的奇异数的总和也必须是-1。你们看到式

(11.38) 及 (11.40) 满足这一要求。但在式 (11.42) 的反应中，右边的奇异性在三种情况中都是 $\tilde{0}$ 。这些反应前后奇异性不保持守恒，因而不会发生。为什么？没人知道，没人知道得比我们刚才告诉你的有关情况更多一些。自然界正是以这种方式运行着。

现在我们来看一看下列反应：一个 π^- 撞击一个质子。你也许（比方说）得到一个 Λ^0 粒子加一个中性K粒子——两个中性粒子。但会得到哪一种中性K？因为 Λ 粒子有奇异数-1，而 π 与 p^+ 的奇异数为0，并且由于这是个快速产生的反应，奇异性必定不变。K粒子一定要有奇异数+1，所以它必须是 K^0 。这反应是

$$\pi^- + p = \Lambda^0 + K^0,$$

而

$$S = 0 + 0 = (-1) + (+1) \text{ (守恒)}.$$

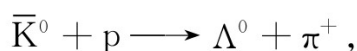
如果在这里用 $\bar{K}^0$ 代替 K^0 ，右边的奇异数就会是-2，而这是自然界所不允许的，因为左边的奇异数为0。不过， $\bar{K}^0$ 可以在别的反应中产生，诸如

$$\begin{aligned} n + n &\longrightarrow n + \bar{p} + \bar{K}^0 + K^+, \\ S &= 0 + 0 = 0 + 0 + (-1) + (+1) \end{aligned}$$

或

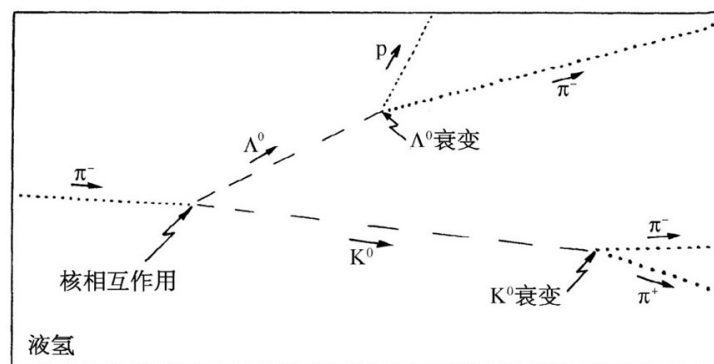
$$\begin{aligned} K^- + p &\longrightarrow n + \bar{K}^0, \\ S &= -1 + 0 = 0 + (-1). \end{aligned}$$

你们或许会想，“这完全是些废话，因为你怎么知道它是 $\bar{K}^0$ 还是 K^0 ？它们看起来完全相同。它们互为反粒子，它们有完全相等的质量，而电荷又都是0。你们怎么来区分它们？”回答是通过它们所发生的反应。例如，一个 $\bar{K}^0$ 可以跟物质作用产生一个 Λ 粒子，如

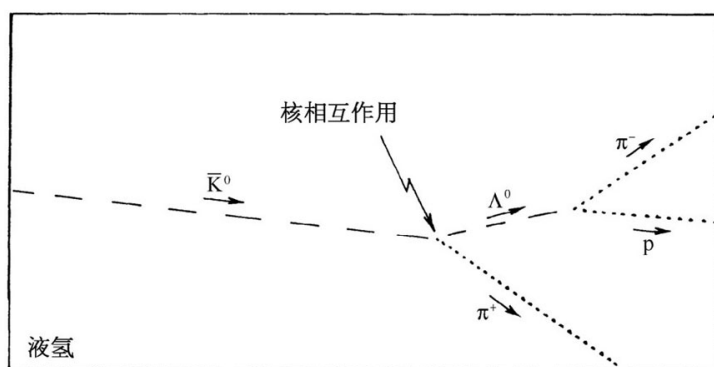


但 K^0 却不行。当 K^0 与普通的物质（质子和中子）相互作用时，不会使它产生 Λ 粒子 [5]。所以 K^0 和 $\bar{K}^0$ 之间的实验鉴别就是它们之中有一个能产生 Λ 粒子，另一个却不能。

这样，奇异性理论的预言之一就是，如果在一个高能 π 介子的实验中，产生了一个 Λ 粒子与一个中性 K 介子，然后这个中性 K 介子撞到另一些物质时决不会产生 Λ 粒子。实验可以这样来进行，把一束 π 介子射入一个巨大的氢气泡室， π 的径迹消失了，但另外某个地方出现了一对径迹（一个质子和一个 π^- ），这表明一个 Λ 粒子衰变了 [6]（见图 11-5）。这样你就知道在某个地方有个你不能看到的 K^0 。



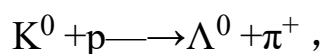
(a)



(b)

图11-5 在氢气泡室观察到的高能事件：(a) 一个 π^- 介子与一个氢核（质子）相互作用产生一个 Λ^0 粒子和一个 K^0 介子。两个粒子都在气泡室中衰变。(b) 一个 $\bar{K}^0$ 介子和一个质子相互作用产生一个 π^+ 介子和一个 Λ^0 粒子，然后 Λ^0 衰变（中性粒子没有留下径迹，它们推测出的轨迹如图中断续线所示）

但你可以利用动量和能量守恒求出它往哪里去。[它后来会衰变为两个带电粒子而显现出来，如图11-5 (a) 所示。] 当 K^0 向前飞行时，可能跟一个氢核（质子）发生相互作用，也许产生一些别的粒子。而奇异性理论的预言是，它绝不会在下述类型的简单反应中产生一个 Λ 粒子：



而 $\bar{K}^0$ 是可以发生这种反应的。这就是说，在气泡室中，一个 $\bar{K}^0$ 可以产生如图11-5（b）所描画的事件——其中的 Λ^0 由于衰变而被看到，但 K^0 却不能产生这种过程。这就是我们故事的第一部分，这就是奇异性守恒。

不过，奇异性守恒不是完美无缺的。奇异粒子可以发生极缓慢的衰变——衰变时间长到约 10^{-10} s [\[7\]](#)，这时奇异性不再守恒，这些衰变称为“弱”衰变。例如， K^0 衰变为一对寿命为 10^{-10} s 的 π 介子（+及-）。事实上，这是首次见到K粒子的方法。注意衰变反应

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

中奇异性并不守恒，所以它不可能通过强相互作用而“很快”发生，只可能通过弱衰变过程进行。

注意 $\bar{K}^0$ 也以同样方式衰变为一个 π^+ 及一个 π^- 而且也有同样的寿命，

$$\bar{K}^0 \longrightarrow \pi^- + \pi^+.$$

这这也是一个弱衰变，因为它奇异性并不保持守恒。有一条原理：对任何反应，总对应地存在一个用“反物质”代替“物质”的反应，反之亦然。由于 $\bar{K}^0$ 是 K^0 的反粒子，它应当衰变为 π^+ 与 π^- 的反粒子，但 π^+ 的反粒子是 π^- 。（或者，如果你乐意，反过来说也可以。结果发现对 π 介子来说，你们称哪一个为“物质”都无所谓。）所以作为弱衰变的一个结果， K^0 和 $\bar{K}^0$ 可以变为同样的最终产物。当我们通过衰变来“见到”它

们时——如同气泡室中那样——它们看上去是同一种粒子。只是它们的强相互作用不同。

我们终于可以来描述盖尔曼和佩斯的工作了。他们首先注意到，既然 K^0 及 $\bar{K}^0$ 都能转变成两个 π 介子的状态，必定存在某个 K^0 转变为 $\bar{K}^0$ 的振幅，并且也有一定 $\bar{K}^0$ 转变为 K^0 的振幅。像在化学中所做那样写出反应方程式，有

$$K^0 \rightleftharpoons \pi^- + \pi^+ \rightleftharpoons \bar{K}^0. \quad (11.43)$$

这些反应意味着，每单位时间内， K^0 通过弱相互作用衰变成两个 π 介子再转变为 $\bar{K}^0$ 有一定的振幅，这振幅写成 $-i/\hbar$ 乘以 $\langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle$ 。对于逆反应来说，也有相应的振幅 $\langle K^0 | W | \bar{K}^0 \rangle$ 。由于物质与反物质的行为完全相同，这两个振幅在数值上相等，我们把它们都称为 A ，

$$\langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle = \langle K^0 | W | \bar{K}^0 \rangle = A. \quad (11.44)$$

盖尔曼和佩斯说，这里出现一个有趣的情况。人们一向所说的世界的两个不同的状态—— K^0 与 $\bar{K}^0$ ——实际上应当被看作为是一个双态系统，因为从一个态到另一个态有一定的振幅。当然，做完全的处理时，必须处理两个以上的态，因为也还存在着一些像两个 π 介子的态，等等；但是既然他们主要对 K^0 与 $\bar{K}^0$ 的关系感兴趣，就不必把事情搞得太复杂，而可以作双态系统的近似。其他态在某种程度上已经考虑到，它们的效应已隐含在式（11.44）的振幅中。

因而盖尔曼和佩斯把这个中性粒子作为一个双态系统来进行分析。他们首先把 $|K^0\rangle$ 和 $|\bar{K}^0\rangle$ 态取为两个基础态。（这样，事情非

常像氨分子的情况。) 这样, 中性K粒子的任何态 $|\psi\rangle$ 就可用它处在两个基础态的振幅来描写。我们将称这两个振幅为

$$C_+ = \langle K^0 | \psi \rangle, C_- = \langle \bar{K}^0 | \psi \rangle. \quad (11.45)$$

下一步就是要写下这个双态系统的哈密顿方程。如果 K^0 与 $\bar{K}^0$ 之间没有耦合, 方程就只是

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_+}{dt} &= E_0 C_+, \\ i\hbar \frac{dC_-}{dt} &= E_0 C_-. \end{aligned} \quad (11.46)$$

但由于有 $\bar{K}^0$ 转变为 K^0 的振幅 $\langle K^0 | W | \bar{K}^0 \rangle$ 存在, 所以应当还有一项

$$\langle K^0 | W | \bar{K}^0 \rangle C_- = AC_-$$

加在第一个方程的右边。类似地, AC_+ 项应该加到 C_- 随时间变化的方程中去。

但还不止这些。当考虑到双 π 介子效应时, 还存在 K^0 通过以下过程变为自身的附加振幅,

$$K^0 \longrightarrow \pi^- + \pi^+ \longrightarrow K^0.$$

我们将用 $\langle K^0 | W | K^0 \rangle$ 来表示的这个附加振幅, 它正好等于振幅 $\langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle$, 因为对于 K^0 和 $\bar{K}^0$ 来说, 它们变为一对 π 介子与由一对 π 介子变回自身的振幅是完全相同的。如果需要, 可以详细写出这个论证。首先, 我们写下 [\[8\]](#)

$$\langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | W | 2\pi \rangle \langle 2\pi | W | K^0 \rangle$$

和

$$\langle K^0 | W | K^0 \rangle = \langle K^0 | W | 2\pi \rangle \langle 2\pi | W | K^0 \rangle.$$

由于物质和反物质的对称性，

以及

$$\begin{aligned}\langle 2\pi | W | K^0 \rangle &= \langle 2\pi | W | \bar{K}^0 \rangle, \\ \langle K^0 | W | 2\pi \rangle &= \langle \bar{K}^0 | W | 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

由此得到 $\langle K^0 | W | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle$ ，以及 $\langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle = \langle K^0 | W | \bar{K}^0 \rangle$ ，这就是我们前面所说过的。不管怎么说，两个都等于 A 的附加振幅 $\langle K^0 | W | K^0 \rangle$ 和 $\langle \bar{K}^0 | W | \bar{K}^0 \rangle$ ，应当包括在哈密顿方程中。第一个给出的一项 AC_+ 加在 dC_+/dt 的方程的右边，第二个给出的是加在 dC_-/dt 的方程右边新的一项 AC_- 。通过这样论证，盖尔曼与佩斯推断 $K^0 \bar{K}^0$ 系统的哈密顿方程应当是

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{dC_+}{dt} &= E_0 C_+ + AC_- + AC_+, \\ i\hbar \frac{dC_-}{dt} &= E_0 C_- + AC_+ + AC_-.\end{aligned}\tag{11.47}$$

现在我们必须对前几章中所说的作一些纠正：像 $\langle K^0 | W | \bar{K}^0 \rangle$ 和 $\langle \bar{K}^0 | W | K^0 \rangle$ 这样两个互相逆转的振幅总是互为复共轭。这只有在讨论中不发生衰变的粒子时才成立。而如果粒子可以衰变——因此，也就可能“消失”——那么两个振幅不一定是复共轭。所以等式（11.44）并

不意味着振幅是实数，事实上，它们是复数。所以，系数 A 是复数，这样我们不能把它归到能量 E_0 中去。

在经常跟电子自旋以及诸如此类的事情打交道后，我们的主人公看出哈密顿方程组（11.47）意味着存在另外一对基础态，它们也可用来表示 K 粒子系统，而且具有特别简单的性质。他们说：“让我们将两个方程相加与相减，并且以 E_0 为零点测量所有有关能量，并使用使 $\hbar = 1$ 的能量与时间的单位。”（这是近代理论物理学家常做的事，这样并不改变物理实质，但使方程的形式变得简单些。）他们的结果是：

$$i \frac{d}{dt}(C_+ + C_-) = 2A(C_+ + C_-), \quad i \frac{d}{dt}(C_+ - C_-) = 0. \quad (11.48)$$

显然，振幅的组合 $(C_+ + C_-)$ 与 $(C_+ - C_-)$ 互相独立地起着作用。（显然，它们相当于我们早就研究过的定态。）所以，他们断定，用 K 粒子的另一种不同的表示会更为方便。他们定义两个态

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle). \quad (11.49)$$

他们说，用 K_1 与 K_2 两个“粒子”（就是“态”）来代替 K^0 和 $\bar{K}^0$ 两个介子也同样可以。（当然，这两个态对应着我们通常称为 $|I\rangle$ 与 $|II\rangle$ 的态，我们不用老的记号是因为我们现在要用原作者的记号——你们将在物理讨论会上见到的记号。）

但盖尔曼和佩斯做所有这些并不只是为了给粒子起个不同的名称，这里还存在某种令人惊奇的新的物理内容。假设 C_1 及 C_2 是某个

态 $|\psi\rangle$ 表现为 K_1 或 K_2 介子的振幅:

$$C_1 = \langle K_1 | \psi \rangle, \quad C_2 = \langle K_2 | \psi \rangle.$$

由式 (11.49),

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-), \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - C_-). \quad (11.50)$$

于是式 (11.48) 变为

$$i \frac{dC_1}{dt} = 2AC_1, \quad i \frac{dC_2}{dt} = 0, \quad (11.51)$$

其解为

$$C_1(t) = C_1(0) e^{-i2At}, \quad C_2(t) = C_2(0). \quad (11.52)$$

显然, 这里 $C_1(0)$ 和 $C_2(0)$ 为 $t=0$ 时的振幅。

这些式子表明如果一个中性 K 粒子在时刻 $t=0$ 时从态 $|K_1\rangle$ [这样 $C_1(0)=1$ 而 $C_2(0)=0$] 出发, 那么, 在时刻 t 的振幅是

$$C_1(t) = e^{-i2At}, \quad C_2(t) = 0.$$

注意到 A 是复数, 不妨取 $2A = \alpha - i\beta$, (由于发现 $2A$ 的虚部是个负值, 我们把它写成负 $i\beta$)。代入 $C_1(t)$ 后, 可以写成

$$C_1(t) = C_1(0) e^{-\beta t} e^{-i\alpha t}. \quad (11.53)$$

在时刻 t 找到 K_1 粒子的概率是这个振幅的绝对值平方，即 $e^{-2\beta t}$ 。而由式（11.52），在任何时刻找到 K_2 态的概率为零。这就是说，如果你让一个 K 粒子起先处在 $|K_1\rangle$ 态，在同一态中找到它的概率将随时间指数下降——但你永远不会在态 $|K_2\rangle$ 中找到它。那么它跑到哪里去了呢？它以平均寿命 $\tau=1/2\beta$ 衰变为两个 π 介子了，实验测得 τ 为 10^{-10} s。我们前面说 A 是复数时就是为此作了准备。

另一方面，式（11.52）说明，如果使一个 K 粒子完全处在 K_2 态，它就将永远这样待下去。当然，这实际上是不对的。实验上观察到这个 K 粒子衰变为3个 π 介子，不过其速率要比刚才描写过的双 π 介子衰变慢600倍。可见，在我们的近似中扔掉了其他一些小项。但只要我们考虑的只是双 π 介子衰变， K_2 就将“永远”存在下去。

现在继续讲完盖尔曼和佩斯的故事。他们继续考虑在强相互作用下产生一个 K 粒子与一个 Λ^0 粒子时会发生什么事。由于 K 粒子必须具有奇异数+1，所以它产生时必须处在 K^0 态。这样，在 $t=0$ 时，它既不是 K_1 也不是 K_2 ，而是一个混合态。初始条件是

$$C_+(0)=1, C_-(0)=0.$$

但是根据式（11.50），这意味着

$$C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

而由式（11.52）和（11.53），有

$$C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\beta t} e^{-i\alpha t}, \quad C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (11.54)$$

注意 K^0 和 $\bar{K}^0$ 都是 K_1 和 K_2 的线性组合。在式(11.54)中,已选定振幅,使 $t=0$ 时 $\bar{K}^0$ 部分由于干涉而相互抵消,只留下 K^0 态。但 $|K_1\rangle$ 态随时间而变,而 $|K_2\rangle$ 态则不随时间而变。在 $t=0$ 以后, C_1 与 C_2 的干涉将使 K^0 与 $\bar{K}^0$ 都具有一定的振幅。

所有这些意味着什么?让我们回过去想一下如图11-5所示的一个实验。一个 π 介子产生一个 Λ^0 粒子和一个 K^0 介子,这个 K^0 介子嘟嘟地穿过气泡室中的氢。当它向前跑的时候,它有某种很小的但一定的机会与一个氢核碰撞。起先我们认为奇异性守恒将阻止K粒子在这样的相互作用中产生一个 Λ^0 粒子。然而,现在我们看到这是不对的。虽然K粒子开始时为 K^0 ——它不可能产生一个 Λ^0 ——但它不会永远这样。过一会儿,就有一定的振幅使它跳变到 $\bar{K}^0$ 态。所以我们可以预期沿着K粒子的踪迹有时会看到产生一个 Λ^0 。这件事发生的机会由振幅 C_- 给定,而 C_- 可以与 C_1 和 C_2 联系起来[倒过来利用式(11.50)]。它们的关系是

$$C_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 - C_2) = \frac{1}{2}(e^{-\beta t} e^{-i\alpha t} - 1). \quad (11.55)$$

当K粒子向前飞行时,它“出现像 $\bar{K}^0$ 那样行为”的概率等于 $|C_-|^2$,其值为

$$|C_-|^2 = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\beta t} - 2e^{-\beta t} \cos \alpha t). \quad (11.56)$$

真是个复杂而奇特的结果！

于是，盖尔曼和佩斯就作了这样一个惊人的预言：当一个 K^0 产生后，它转变为 $\bar{K}^0$ ——这可由能够产生一个 Λ^0 来显示——的概率按式（11.56）随时间变化。得出这个预言所用的只是纯粹的逻辑推理和量子力学的基本原理——而根本不知道 K 粒子的内部机理。由于没有人知道任何有关内部机理的情况，盖尔曼和佩斯最多也只能走到这一步。他们不能给出 α 与 β 的任何理论值。直到目前也没有能给出这两个值。他们由实验观察到的衰变为两个 π 介子的速率能得出一个 β 值（ $2\beta=10^{10} \text{ s}^{-1}$ ），但关于 α ，他们什么也说不出。

在图11-6中我们对于两个 α 值画出了式（11.56）的函数的曲线图。你们可以看到图形和 α 与 β 的比值有很大关系。起先 $\bar{K}^0$ 的概率为0，然后它增大。如果 α 大，概率将具有大的振荡。如果 α 小，振荡就小，或者没有振荡——概率只平滑地上升至1/4。

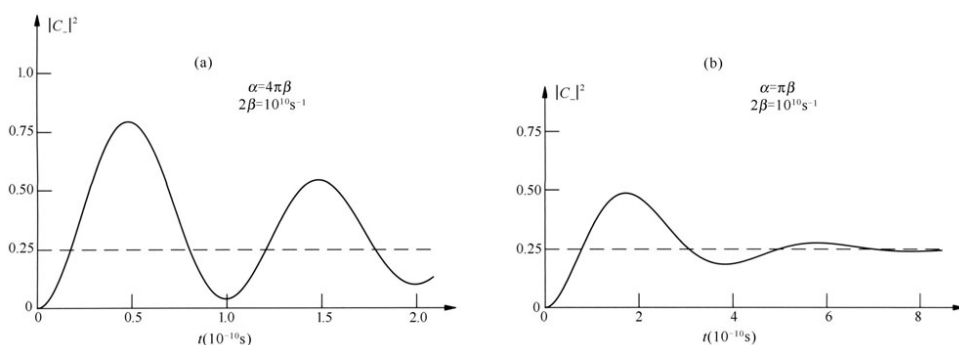


图11-6 式（11.56）的函数图像：（a）设 $\alpha = 4\pi\beta$ ，（b）设 $\alpha = \pi\beta$ （ $2\beta = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ）

通常， K 粒子以接近于光速的恒定速度飞行。图11-6的曲线因而也表示沿着轨迹观察到 $\bar{K}^0$ 的概率，其典型距离为几个厘米。你们可以看出为什么这个预言这样离奇。在产生一个粒子后，它不仅会衰变，也会发生别的事情。有时它衰变，有时它又转变为另一种粒子。它产生某种效应的特征概率随着它的行进而以一种奇特的方式变化着。在自然界里没有别的东西与它相像。而作出这个极为令人惊奇的预言所依据的只是关于振幅干涉的论证。

如果有一个地方，我们有机会以最纯粹的方式检验量子力学的主要原理——振幅的叠加原理是否成立？——这个地方就是这里。尽管这个效应的预言至今已有好几年了，还没有非常清楚的实验判决。只有一些粗略的结果表明 α 不是零，不过这种效应确实出现了，这些结果表明 α 在 2β 和 4β 之间。这些都是实验得到的。如能精确地检验一下曲线，看一看在奇异粒子这样的神秘世界中，叠加原理是否确实仍然成立，这将是件非常美妙的事情——对奇异粒子来说，我们不知它们为什么衰变，也不知它们为什么有奇异性。

我们刚才所做的分析方法表明了目前在探索解释奇异粒子的研究中所用的量子力学方法的特点。所有你们可能听到的有关的复杂理论无非都是这类利用叠加原理和同一水平的其他量子力学原理来玩的骗人把戏而已。有些人声称他们已拥有能够计算 α 和 β ，或者至少在给定 β 时能算出 α 的理论，但这些理论都是完全无用的。比方说，有个在给出 β 后能预言 α 值的理论告诉我们 α 值应是无穷大。他们开始所用的方程组包括两个 π 介子，而后又从两个 π 介子回到了一个 K^0 ，等等。在计算全都完成后，确实得到一对类似于我们这里所写的方程，但是由于两个 π 介子的动量有无穷多个状态，对所有这些可能性求积分后得出 α 值是无穷大。但是，自然界的 α 并不是无穷大。所以这个动力学

理论是错的。在奇异粒子世界中完全能被预言的现象竟能从你们现在所学到的水平的量子力学原理得出，这实在是非常惊奇的。

§11-6 对 N 态系统的推广

我们已经讲完了所有想谈的关于双态系统的问题。在下面几章里我们将继续研究具有更多状态的系统。把我们就双态所得到的概念推广到 N 态系统去是直截了当的事，可以按下面这样方式来做。

如果一个系统有 N 个不同的态，我们可把任何态 $|\psi(t)\rangle$ 表示成任何一组基础态 $|i\rangle$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的线性组合，

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\text{所有 } i} |i\rangle C_i(t). \quad (11.57)$$

系数 $C_i(t)$ 就是振幅 $\langle i | \psi(t) \rangle$ 。振幅 C_i 随时间的变化方式由下列方程组决定

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j, \quad (11.58)$$

这里能量矩阵 H_{ij} 描写问题的物理条件。这看上去和双态系统相同。只是现在 i 和 j 都必须遍及所有 N 个基础态，而能量矩阵 H_{ij} ——或者，你愿意称之为哈密顿也可——是带有 N^2 个数的 $N \times N$ 矩阵。像以前一样， $H_{ij}^* = H_{ji}$ ——只要粒子数守恒——而对角元 H_{ii} 是实数。

当能量矩阵为常数（不依赖于 t ）时，我们已经求得双态系统的系数 C 的一般解。当 H 与时间无关时，也不难解出 N 态系统的方程组

(11.58)。我们仍从寻找振幅全都有相同时间依赖性的可能解开始。
试解

$$C_i = a_i e^{-(i/\hbar)Et}, \quad (11.59)$$

在把这些 C_i 代入式(11.58)后, 导数 $dC_i(t)/dt$ 就是 $(-i/\hbar)EC_i$ 。
消掉所有各项的公共指数因子, 得到

$$Ea_i = \sum_j H_{ij}a_j, \quad (11.60)$$

这是有 N 个未知数 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 的 N 元线性代数方程组, 只有在碰巧时, 即所有 a_i 的系数行列式为零时, 才存在一个解。但是并不一定要用这种复杂的方法求解, 你们可以随便用什么方法来着手解方程组, 你们会发现只有对一定的 E 值才能解出它们。(注意 E 是我们方程组中唯一可调节的量。)

但如果你们想用规范的方法求解, 可以把式(11.60)写为

$$\sum_j (H_{ij} - \delta_{ij}E)a_j = 0. \quad (11.61)$$

接下来你们可以利用这条规则(如果你们知道的话), 即只有对那些 E 值满足下式的方程组才有解,

$$\text{Det}(H_{ij} - \delta_{ij}E) = 0. \quad (11.62)$$

行列式的每一项正好是 H_{ij} , 只是对每个对角元要减去 E 。式(11.62)就是

$$\text{Det} \begin{bmatrix} H_{11} - E & H_{12} & H_{13} & \cdots \\ H_{21} & H_{22} - E & H_{23} & \cdots \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} - E & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = 0, \quad (11.63)$$

当然，这只是 E 的代数方程的一种特殊写法，这个方程是行列式所有各项按一定方式乘积之和。这些乘积将给出 E 的所有幂次，直到 E^N 。

所以我们就有一个等于0的 N 次多项式，一般说来它有 N 个根。（但要记住其中有些可以是重根，就是说两个或更多的根彼此相等。）不妨称 N 个根为

$$E_{\text{I}}, E_{\text{II}}, E_{\text{III}}, \dots, E_n, \dots, E_N, \quad (11.64)$$

（我们将利用 n 表示第 n 个罗马数字，这样 n 取值为I, II, ..., N 。）其中有些能量可能相等，比方说 $E_{\text{II}} = E_{\text{III}}$ ，但我们仍用不同的名字称呼它们。

方程组（11.60）或（11.61）对每个 E 值有一个解。假如将任何一个 E 值（譬如 E_n ）代入式（11.60）并求解 a_i ，就得到一组属于能量 E_n 的解。我们将称这组解为 $a_i(n)$ 。

在式（11.59）中代入这些 $a_i(n)$ 值，我们就有了某确定能态中处在基础态 $|i\rangle$ 的振幅 $C_i(n)$ 。设 $|n\rangle$ 表示 $t=0$ 时这个确定能态的态矢量，我们可写出

$$C_i(n) = \langle i | n \rangle e^{-(i/\hbar)E_n t},$$

其中

$$\langle i | \mathbf{n} \rangle = a_i(\mathbf{n}). \quad (11.65)$$

于是有完全确定能量的状态 $|\psi_n(t)\rangle$ 可以写成

$$|\psi_n(t)\rangle = \sum_i |i\rangle a_i(\mathbf{n}) e^{-i E_n t / \hbar}$$

或

$$|\psi_n(t)\rangle = |\mathbf{n}\rangle e^{-i E_n t / \hbar}. \quad (11.66)$$

态矢量 $|\mathbf{n}\rangle$ 描述确定能量状态的位形，而时间相依性被提出在外。这样它们就是常矢量，如果愿意的话，它们可以用来作一组新的基。

每个态 $|\mathbf{n}\rangle$ 都有个性质，——你能很容易地予以证明——当它们被哈密顿算符 $\hat{H}$ 作用后，就正好得到 E_n 乘以同一个态：

$$\hat{H} |\mathbf{n}\rangle = E_n |\mathbf{n}\rangle. \quad (11.67)$$

这样，能量 E_n 就是描写哈密顿算符 $\hat{H}$ 的特征的一个数值。我们已经见到，一般说，一个哈密顿有几个特征能量。在数学家的术语中，这些数称为矩阵 H_{ij} 的“特征值”。物理学家常称它们为 $\hat{H}$ 的“本征值”。（“Eigen”是德文的“特征”或“本征”。）对 $\hat{H}$ 的每个本征值——换句话说对每个能量——都存在着确定能量的状态，我们已称它们为“定态”。物理学家通常称 $|\mathbf{n}\rangle$ 为“ $\hat{H}$ 的本征态”。每个本征态对应着一个特定的本征值 E_n 。

一般来说，态 $|n\rangle$ （有 N 个）也可用来作为一组基础态。要做到这点，所有的态必须相互正交，意即对其中任何两个态， $|n\rangle$ 和 $|m\rangle$ ，有

$$\langle n | m \rangle = 0. \quad (11.68)$$

如果所有能量都互不相同，那么上式将会自动满足。我们也可以将所有的 $a_i(n)$ 乘以一个适当的因子，而使所有的态归一化。归一化后对所有的 n 就有

$$\langle n | n \rangle = 1. \quad (11.69)$$

当式 (11.63) 恰巧有两个（或更多）具有相同能量的根时，问题就稍有点复杂。首先，存在两组不同的 a_i 具有相同的能量，但是它们所给出的态可能不正交。假设你们通过归一化手续找到了两个具有同样能量的定态——称它们为 $|\mu\rangle$ 及 $|\nu\rangle$ 态。不幸它们不正交，就是说

$$\langle \mu | \nu \rangle \neq 0,$$

但我们总可以造出两个新的态，我们称为 $|\mu'\rangle$ 和 $|\nu'\rangle$ ，它们具有相同的能量，而且也正交，即

$$\langle \mu' | \nu' \rangle = 0. \quad (11.70)$$

$|\mu\rangle$ 和 $|\nu\rangle$ 适当的线性组合可以作出 $|\mu'\rangle$ 和 $|\nu'\rangle$ ，并适当选择系数，使式 (11.70) 成立。做到这点总是不难的。我们一般假定这点已经做到，因而总认为我们的本征能态 $|n\rangle$ 全都相互正交。

为提高兴趣，我们来证明当两个定态有不同的能量时它们的确正交。对具有能量 E_n 的态 $|n\rangle$ ，我们有

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (11.71)$$

这个算符方程实际上表示有个数字方程。补上没写出的部分，它的意义与下式相同

$$\sum_j \langle i | \hat{H} | j \rangle \langle j | n \rangle = E_n \langle i | n \rangle. \quad (11.72)$$

如果取这式的复共轭，就得

$$\sum_j \langle i | \hat{H} | j \rangle^* \langle j | n \rangle^* = E_n^* \langle i | n \rangle^*. \quad (11.73)$$

注意振幅的复共轭是逆振幅，所以式（11.73）可以重新写为

$$\sum_j \langle n | j \rangle \langle j | \hat{H} | i \rangle = E_n^* \langle n | i \rangle. \quad (11.74)$$

因为这个方程对任何 i 成立，它的“简短形式”是

$$\langle n | \hat{H} = E_n^* \langle n |, \quad (11.75)$$

这称为式（11.71）的伴随式。

现在很容易证明 E_n 是个实数。将式（11.71）乘 $\langle n |$ 就得到

$$\langle n | \hat{H} | n \rangle = E_n, \quad (11.76)$$

因为 $\langle n | n \rangle = 1$ 。然后将式（11.75）右乘 $|n\rangle$ ，得

$$\langle n | \hat{H} | n \rangle = E_n^* . \quad (11.77)$$

比较式 (11.76) 和 (11.77)，显然可见

$$E_n = E_n^* , \quad (11.78)$$

这意味着 E_n 是个实数。我们可以擦掉式 (11.75) 中 E 上的星号。

我们终于可以证明不同的能量状态是正交的了。设 $|n\rangle$ 和 $|m\rangle$ 是任意的两个有确定能量的基础态。对 $|m\rangle$ 态应用式 (11.75)，并乘以 $|n\rangle$ ，我们得到

$$\langle m | \hat{H} | n \rangle = E_m \langle m | n \rangle .$$

但如果用 $\langle m |$ 乘以式 (11.71)，得到

$$\langle m | \hat{H} | n \rangle = E_n \langle m | n \rangle .$$

因为这两个等式左边相等，所以右边也相等，

$$E_m \langle m | n \rangle = E_n \langle m | n \rangle . \quad (11.79)$$

如果 $E_m = E_n$ ，上式没告诉我们什么。但如果两个态 $|m\rangle$ 和 $|n\rangle$ 的能量不同 ($E_m \neq E_n$)，式 (11.79) 就表明 $\langle m | n \rangle$ 必定为零，这正是我们要证明的。只要 E_n 和 E_m 在数值上不同，两个态必然正交。

[1] 在第一次阅读这本书的时候这一节可以跳过。这一节的内容比适合于第一级课程的材料要更深一些。

[2] 为明确起见，并且为符合现在国内偏振光的通用命名法则，我们将原文 x -polarized light 译成沿 x 方向振动的光，振动方向就是电磁波电场的方向。——译者注

[3] 这类似于我们（在第6章）对自旋1/2粒子所得到的结论。当我们把坐标轴绕 z 轴转动，就得到相位因子 $e^{\pm i\phi/2}$ 。事实上，这正是我们在§5-7对自旋1粒子的 $|+\rangle$ 态与 $|-\rangle$ 态所写下的结果——这并非巧合。光子是个自旋为1的粒子，但它没有“零”态。

[4] 我们现在感到这节材料对眼下的课程来说是过于冗长和困难了。我们建议你们跳过这节继续阅读§11-6节。如果你们有雄心而又有时间的话，以后也许要再回到这一节来。我们把这一节留在这里，因为这是取自高能物理新近成果的一个美妙例子，说明用我们关于双态系统的量子力学公式能够做出些什么结果来。

[5] 当然，除非它还产生两个 K^+ 或总奇异数为+2的其他一些粒子。我们可以认为在上述反应中没有足够能量来产生这些更多的奇异粒子。

[6] 自由 Λ 粒子经过一弱相互作用而缓慢衰变（故奇异性不必守恒）。衰变产物是一个 p 及一个 π^- ，或一个 n 及一个 π^0 。寿命为 2.2×10^{-10} s。

[7] 强相互作用的典型时间差不多是 10^{-23} s。

[8] 这里我们作了点简化。 2π 系统可以具有对应于不同的 π 介子动量的许多状态，所以我们应当将方程的右边写成对 π 介子的不同基态求和。完整的处理仍导致同样的结论。

第12章 氢的超精细分裂

§12-1 由两个自旋 $1/2$ 粒子组成的系统的基础态

在这一章中，我们来着手讨论氢的“超精细分裂”问题，因为这是一个我们已经能够用量子力学处理的、物理学中有兴趣的例子。这是一个具有两个以上的态的例子，可以用它说明量子力学应用到稍为复杂一些问题上的方法。这个问题也足够复杂，你懂得了处理它的方法后就能立即推广到各种问题上去。

如你们所知，氢原子包含有一个位于质子附近的电子，它可以处于许多分立的能量状态中的任何一个状态，在每一个能量状态中电子的运动图式都不相同。例如，第一激发态位于基态之上 $3/4$ 里德伯能量，或者大约 10 eV 处。但是由于电子和质子都具有自旋，即使是氢的所谓基态，其实也不是具有单一的确定能量的态。正是它们的自旋造成了能级的“超精细结构”，将所有的能级都分裂成几个靠近的能级。

电子可以具有或者“朝上”或者“朝下”的自旋，质子的自旋也可以“朝上”或者“朝下”。因此，原子的每一种动力学条件下都存在着4种可能的自旋态。这就是说，当人们谈到氢原子的“基态”时，实际上是指这“4个基态”，而不是指能量最低的态。这4种自旋态并不都具有完全相同的能量，它们对于无自旋时的能量稍有移动。但是与基态到第一激发态之间 10 eV 左右的能量差相比这种能量的移动是非常非常小的。

因此，每个动力学状态的能级都分裂成一组彼此非常靠近的能级，这就是所谓的超精细分裂。

这4个自旋态之间的能量差就是我们在本章中要计算的。超精细分裂是由电子和质子磁矩之间的相互作用引起，这种相互作用对于各个自旋态给出稍微不同的磁能。这些能量移动大约只有 10^{-7} eV——与10 eV相比实在是太小了！正因为能级之间有很大的差距，所以我们把氢原子的基态看作是一个“四态”系统，而不必为实际上有很多更高能量的状态这一事实操心。这里我们只限于研究氢原子基态的超精细结构。

就我们的目的而言，我们对电子和质子空间位置的细节丝毫不感兴趣，因为它们的位置由原子结构决定——原子进入基态本身就决定了它们的位置。我们需要知道的只是电子和质子以某种确定的空间关系彼此靠近。此外，它们的自旋可以有多种不同的相对取向。我们要研究的只是自旋的效应。

我们一定要回答的第一个问题是：这系统的基础态是什么？但这个问题表述不正确。没有规定的基础态，因为你们可选取的基础态组不是唯一的。将老的一组线性组合就可以构成新的一组。基础态总是有多种选择，这些选择都同样的合法。所以问题并不是这组基础态是什么，而是什么可以作为基础态。我们可以按我们的方便选取想要的任何一组基础态。通常最好以一组物理意义最明确的基础态作为开始。它可能不是任何问题的解，也可能不具有任何直接的意义，但它一般会使产生的物理现象易于理解。

我们选择下列4个基础态：

态1：电子和质子的自旋都“朝上”，

态2：电子自旋“朝上”，质子自旋“朝下”，

态3：电子自旋“朝下”，质子自旋“朝上”，

态4：电子和质子的自旋都“朝下”。

对于这4个态，要有一种简便的记法，为此，我们将用下面这种方式来表示它们：

态1： $|++\rangle$ ，电子朝上，质子朝上，

态2： $|+-\rangle$ ，电子朝上，质子朝下，(12.1)

态3： $| -+\rangle$ ，电子朝下，质子朝上，

态4： $| --\rangle$ ，电子朝下，质子朝下。

你一定得记住，第一个 +或-号表示电子，而第二个则表示质子。为便于参考，我们已把这些记法总结在图12-1中。有时也把这些态方便地记为 $|1\rangle$ ， $|2\rangle$ ， $|3\rangle$ 和 $|4\rangle$ 。

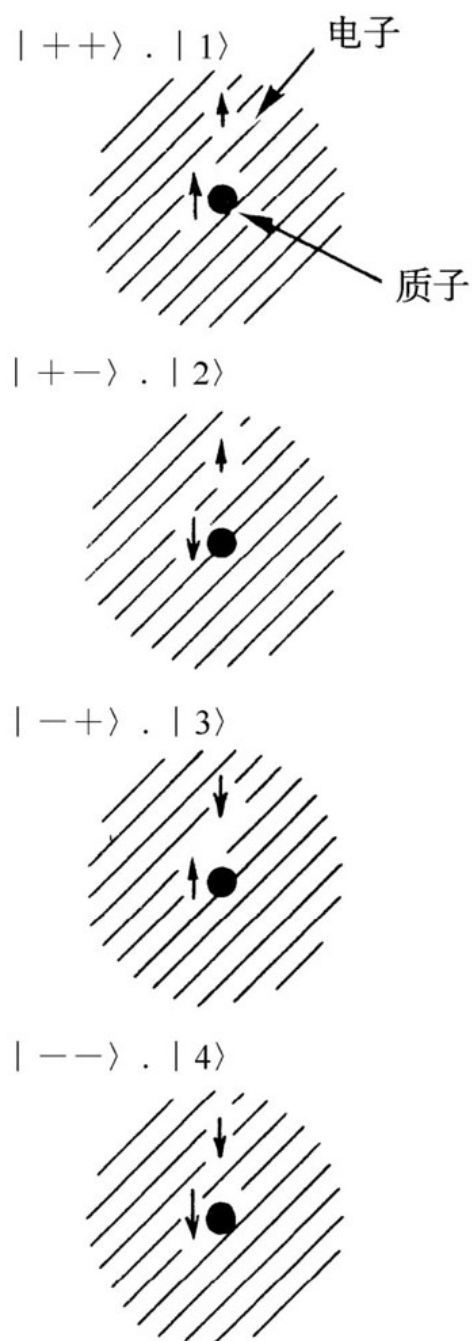


图12-1 氢原子基态的一组基础态

你或许会说：“但是这些粒子有相互作用，可能这些态不是恰当的基础态。听起来好像你把这两个粒子看作是相互独立的。”确实如此！相互作用产生了问题：系统的 哈密顿 是什么？但如何 描述 这个系统并不涉及相互作用。我们选取什么作为基础态可以不涉及以后发生的情

况。一个原子即使它一开始处于这些基础态中的一个态，它也不可能永远保持这个态。这是另外一个问题。问题是：在一个特殊（固定）基础态中的振幅如何随时间变化？选取基础态只是为我们的描述选取“单位矢量”而已。

趁讨论这个课题时，让我们来看一下在多于一个粒子的情况中如何寻求一组基础态这样一个普遍性的问题。你们已知道关于单个粒子的基础态。例如，对现实生活——不是我们这种简化的情况，而是现实生活——中的一个电子的完整描述是给出它在下列各个态中的振幅：

$| \text{动量为 } \mathbf{p} \text{ 的自旋“朝上”的电子} \rangle$

或

$| \text{动量为 } \mathbf{p} \text{ 的自旋“朝下”的电子} \rangle .$

实际上存在两组无限多态，每个 $\mathbf{p}$ 值一个态。这就是说，如果你们知道了所有的振幅

$\langle +, \mathbf{p} | \psi \rangle$ 及 $\langle -, \mathbf{p} | \psi \rangle$,

则一个电子的状态 $|\psi\rangle$ 就被完全描述了。式中+和-表示角动量沿某个轴——通常指 z 轴——的分量， $\mathbf{p}$ 为动量矢量。因此，对每个可能的动量，必定存在两个振幅（一组多重无限基础态）。对单个粒子的描述就是这些。

当存在一个以上粒子时，其基础态可用类似的方式写出。例如，若有一个电子和一个质子处在比我们考虑的更为复杂的情况下，其基

基础态可能是如下的类型：

$| \text{一个自旋“朝上”、以动量 } \mathbf{p}_1 \text{ 运动的电子和一个自旋“朝下”、以动量 } \mathbf{p}_2 \text{ 运动的质子} \rangle$ 。其他自旋组合以此类推。如果存在两个以上的粒子——同样的思路。所以，你们看到，要写出可能的基础态实际上是很容易的。唯一的问题是：哈密顿是什么？

就研究氢原子基态而言，我们不需要用到全部不同动量的基础态。当我们说“基态”时，我们是指特定的质子和电子的动量状态。组态——所有动量基础态的振幅——的细节是可以计算的，但这是另一个问题。现在所关心的只是自旋效应，因此可只取式（12.1）的4个基础态。接下来的问题是：对于这组基础态的哈密顿是什么？

§12-2 氢原子基态的哈密顿

我们马上就来回答这个问题。但首先应提醒你们一件事：任何态总能够写成基础态的线性组合。对于任何一个态 $|\psi\rangle$ 我们可以写成

$$|\psi\rangle = |++\rangle \langle ++|\psi\rangle + |+-\rangle \langle +-|\psi\rangle + |-+\rangle \langle -+|\psi\rangle + |--\rangle \langle --|\psi\rangle. \quad (12.2)$$

请记住，完整的括号只不过是复数，所以我们可以把它们写成常用的形式 C_i ，其中 $i=1, 2, 3$ 或 4 ，因而式（12.2）可以写成

$$|\psi\rangle = |++\rangle C_1 + |+-\rangle C_2 + |-+\rangle C_3 + |--\rangle C_4. \quad (12.3)$$

只要给出了4个振幅 C_i ，我们就能完整地描述自旋态 $|\psi\rangle$ 。如果这4个振幅随时间而变化，事实上也是如此，则它们的时间变化率由算符 $\hat{H}$ 给出。于是，问题在于找出 $\hat{H}$ 。

如何写出一个原子体系的哈密顿并没有一个普遍的规则可循，而找到一个正确的公式比起找到一组基础态来更需要技巧。我们可以告诉你们一个普遍规则，据此可写出任何关于一个电子和一个质子问题的一组基础态，但是在目前的水平上去描述这种组合的一般的哈密顿却是太难了。因此，我们将通过某种启发式的论证给你们导出一个哈密顿，而你们一定要承认它是正确的哈密顿，因为用它所得出的结果与实验观察一致。

你们应记得，在上一章中我们可以用 σ 矩阵——或与之完全等价的 σ 算符——来表示单个自旋1/2粒子的哈密顿。这些算符的性质概括在表12-1中。这些算符——它们只是表述 $\langle + | \sigma_z | + \rangle$ 这种类型的矩阵元的一种简略而方便的方式——适用于描述自旋1/2的单个粒子的行为。问题是：我们是否能找到一种类似的记号来描述具有两个自旋粒子的体系？答案是肯定的，而且非常简单，具体如下。我们发明一种称之为“ σ 电子”的东西，用矢量算符 σ^e 来表示，它具有 x ， y 和 z 的分量 σ_x^e ， σ_y^e ， σ_z^e 。现在我们作出一个约定，当这些算符中任何一个作用到氢原子的4个基础态之一时，它只作用于电子的自旋，而且其作用完全像电子单独存在时一样。例如， $\sigma_y^e | - + \rangle$ 是什么？由于 σ_y 作用于“朝下”电子得出 $-i$ 乘以相应的电子“朝上”的态，即

$$\sigma_y^e | - + \rangle = -i | + + \rangle.$$

表 12-1

$\sigma_z +\rangle = + +\rangle$	$\sigma_z -\rangle = - -\rangle$
$\sigma_x +\rangle = + -\rangle$	$\sigma_x -\rangle = + +\rangle$
$\sigma_y +\rangle = +i -\rangle$	$\sigma_y -\rangle = -i +\rangle$

（当 σ_y^e 作用于组合态时，它使电子的自旋倒转，而对质子不起作用，再对结果乘以 $-i$ 。） σ_y^e 作用于其他的态给出

$$\begin{aligned}\sigma_y^e |++\rangle &= i | - + \rangle, \\ \sigma_y^e |+-\rangle &= i | -- \rangle, \\ \sigma_y^e |--\rangle &= -i | + - \rangle.\end{aligned}$$

要记住算符 σ^e 只作用于第一个 自旋符号——即作用于电子 的自旋。

接着，我们定义质子的自旋相应的“ σ 质子”算符。它的3个分量 $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \sigma_z^p$ 的作用方式与 σ^e 相似，只作用在质子 自旋上。例如，如果我们把 σ_x^p 作用于4个基础态的每一个上，我们得到——仍旧利用表12-1——

$$\begin{aligned}\sigma_x^p |++\rangle &= |+-\rangle, \\ \sigma_x^p |+-\rangle &= |++\rangle, \\ \sigma_x^p |--\rangle &= |--\rangle, \\ \sigma_x^p | - + \rangle &= | - + \rangle.\end{aligned}$$

你可以看到，这并不很困难。

在最一般的情况下，事情可能更复杂一些。例如，我们可能有像 $\sigma_y^e \sigma_z^p$ 这样的两个算符的乘积。当我们碰到这种乘积的运算时，我们先作右边算符的运算，然后再作另一个算符的运算^[1]。例如，我们有

$$\sigma_x^e \sigma_z^p |+-\rangle = \sigma_x^e (\sigma_z^p |+-\rangle) = \sigma_x^e (-|+-\rangle) = -\sigma_x^e |+-\rangle = -|--\rangle.$$

注意这些算符对纯数没有任何作用——我们在写出 $\sigma_x^e(-1) = (-1)\sigma_x^e$ 时就利用了这一事实。我们说这些算符与纯数“对易”，或者说一个数“可以移到算符另一边”。作为练习，你可以证明一下乘积 $\sigma_x^e \sigma_z^p$ 对4个基础态给出下列结果：

$$\begin{aligned}\sigma_x^e \sigma_z^p |++\rangle &= +|+-\rangle, \\ \sigma_x^e \sigma_z^p |+-\rangle &= -|--\rangle, \\ \sigma_x^e \sigma_z^p |-+\rangle &= +|++\rangle, \\ \sigma_x^e \sigma_z^p |--\rangle &= -|+-\rangle.\end{aligned}$$

如果我们取所有可用的算符，每一种算符仅用一次，则有16种可能性。是的，16种——倘若我们把“么正算符” $\hat{1}$ 也包括进去。首先是3个： $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \sigma_z^e$ 。然后是 σ_x^p, σ_y^p 和 σ_z^p ，3个，总共有6个。此外，还有9个 $\sigma_x^e \sigma_y^p$ 这种形式的乘积，使总数达到15个。另外，还有一个使任何态不变的“么正算符”。总共16个。

现在注意，一个4个态的系统的哈密顿矩阵必定是一个系数的4×4矩阵——它有16项。不难证明，任何一个4×4的矩阵——特别是哈密顿矩阵——都可以写成与我们刚才写出的一组算符相对应的16个双自旋矩阵的线性组合。因此，对于一个电子与一个质子之间仅仅涉及自旋的相互作用来说，我们能预期其哈密顿算符可以写成同样的16个算符的线性组合。问题仅在于如何写。

首先，我们知道相互作用不依赖于坐标轴的选取。如果没有外界扰动——如磁场之类——来确定空间的独特方向，哈密顿就不可能与我们选取的x，y和z轴的方向有关。这意味着从哈密顿不应具有孤零

零的 σ_x^e 这样的项。否则用不同的坐标系将得出不同的结果，这显然是荒谬的。

唯一的可能性是含么正矩阵的项，例如常数 a （乘上 $\hat{1}$ ），以及不依赖于坐标的 σ 算符的某种组合——某种“不变”组合。两个矢量的唯一标量不变组合是标积，对我们的 σ 来说就是

$$\sigma^e \cdot \sigma^p = \sigma_x^e \sigma_x^p + \sigma_y^e \sigma_y^p + \sigma_z^e \sigma_z^p. \quad (12.4)$$

这个算符对坐标系的任何转动都是不变式。所以具有特定的空间对称性的哈密顿，只可能是一常数乘以么正矩阵加上一个常数乘以上述标积，即

$$\hat{H} = E_0 + A \sigma^e \cdot \sigma^p. \quad (12.5)$$

这就是我们所要求的哈密顿。只要不存在外场，根据空间对称性它是唯一的可能。常数项没有多大意义，它仅取决于我们选取来测量能量的起始能级。我们完全可以取 $E_0 = 0$ 。第二项才告诉我们求氢原子能级分裂所需知道的一切。

要是你愿意的话，你可以不同的方式来考虑这哈密顿。如果有两个磁矩为 μ_e 和 μ_p 且彼此靠得很近的磁体，相互作用能量依赖于 $\mu_e \cdot \mu_p$ ——包括在其他各种能量中。而且你记住，我们曾发现经典的 μ_e 在量子力学中以 $\mu_e \sigma_e$ 的形式出现。同样，经典理论中的 μ_p 通常在量子力学中表示为 $\mu_p \sigma_p$ （这里 μ_p 是质子的磁矩，它比 μ_e 约小 1 000 倍，且符号相反）。所以式（12.5）表明相互作用能和两个磁体之间的相互作用能相同——不过不是完全相同，因为两磁体之间的相互作

用能取决于它们之间的径向距离。但是式(12.5)是——并且事实上也确实——某种平均相互作用能。电子在原子内部各处运动，我们的哈密顿只给出平均相互作用能。总之，按照经典物理学，对于在空间以一定方式排列的电子和质子之间有一个正比于这两个磁矩之间夹角余弦的能量。这种经典的定性图像也许会帮助你们理解它的来源，但是重要的是，式(12.5)是正确的量子力学公式。

两磁体间经典相互作用能的数量级是两磁矩的乘积除以它们之间距离的立方。氢原子内电子与质子间的距离，粗略地说，为原子半径的一半，即 $0.5\text{\AA}$ 。因此我们可以作一个粗略估计：式中的常数 A 大致应等于两个磁矩 μ_e 和 μ_p 的乘积除以 $0.5\text{\AA}$ 的立方。这种估计所给出的数值还是可以的。当你们了解了氢原子全部量子理论——至今我们还没有讲到——就知道可以准确地算出 A 。实际上计算精确度已达到大约百万分之三十。所以，与氨分子的翻转常数 A 不同，它还不能由理论很好地计算出来，而氢的常数 A 可以由更为精确的理论算得。不过没关系，为了目前的目的，我们把 A 看作是一个能由实验确定的数，然后分析这种情况的物理意义。

取式(12.5)的哈密顿，我们可以将它和方程

$$i\hbar \dot{C}_i = \sum_j H_{ij} C_j \quad (12.6)$$

一同用来求出自旋相互作用对能级的影响。为此，我们需要找出与式(12.1)的4个基础态中每一对相对应的16个矩阵元 $H_{ij} = \langle i | H | j \rangle$ 。

我们先对4个基础态中的每一个求出 $\hat{H}|j\rangle$ 。例如，

$$\hat{H} |++\rangle = A \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \boldsymbol{\sigma}^p |++\rangle = A \{ \sigma_x^e \sigma_x^p + \sigma_y^e \sigma_y^p + \sigma_z^e \sigma_z^p \} |++\rangle. \quad (12.7)$$

利用稍早一些时候讲过的方法——如果已记住表12-1的话，就很容易了——我们求出每对 σ 作用于 $|++\rangle$ 的结果。答案为

$$\begin{aligned} \sigma_x^e \sigma_x^p |++\rangle &= +|--\rangle, \\ \sigma_y^e \sigma_y^p |++\rangle &= -|--\rangle, \\ \sigma_z^e \sigma_z^p |++\rangle &= +|++\rangle. \end{aligned} \quad (12.8)$$

所以式(12.7)变为

$$\hat{H} |++\rangle = A \{ |--\rangle - |--\rangle + |++\rangle \} = A |++\rangle. \quad (12.9)$$

因为我们的4个基础态都是互相正交的，立即可得

$$\begin{aligned} \langle ++ | H | ++ \rangle &= A \langle ++ | ++ \rangle = A, \\ \langle +- | H | ++ \rangle &= A \langle +- | ++ \rangle = 0, \\ \langle -+ | H | ++ \rangle &= A \langle -+ | ++ \rangle = 0, \\ \langle -- | H | ++ \rangle &= A \langle -- | ++ \rangle = 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

由于 $\langle j | H | i \rangle = \langle i | H | j \rangle^*$ ，我们已经能够写出振幅 C_1 的微分方程：

$$i\hbar \dot{C}_1 = H_{11}C_1 + H_{12}C_2 + H_{13}C_3 + H_{14}C_4$$

或

$$i\hbar \dot{C}_1 = AC_1. \quad (12.11)$$

就这些！我们仅得到一项。

为了获得哈密顿方程中的其余项，我们必须用相同的步骤把 $\hat{H}$ 作用到其他态上去。首先，作为练习，请你核对一下我们在表12-2中写出的所有 σ 的乘积，然后我们可以利用它们得出

$$\begin{aligned}\hat{H} |+-\rangle &= A\{2 | -+\rangle - |+-\rangle\}, \\ \hat{H} |-+\rangle &= A\{2 |+-\rangle - |-+\rangle\}, \\ \hat{H} |--\rangle &= A |--\rangle.\end{aligned}\tag{12.12}$$

表12-2 氢原子的自旋算符

$\sigma_x^e \sigma_x^p ++\rangle = + --\rangle$	$\sigma_y^e \sigma_y^p ++\rangle = - --\rangle$	$\sigma_z^e \sigma_z^p ++\rangle = + ++\rangle$
$\sigma_x^e \sigma_x^p +-\rangle = + -+\rangle$	$\sigma_y^e \sigma_y^p +-\rangle = + -+\rangle$	$\sigma_z^e \sigma_z^p +-\rangle = - +-\rangle$
$\sigma_x^e \sigma_x^p -+\rangle = + +-\rangle$	$\sigma_y^e \sigma_y^p -+\rangle = + +-\rangle$	$\sigma_z^e \sigma_z^p -+\rangle = - -+\rangle$
$\sigma_x^e \sigma_x^p --\rangle = + ++\rangle$	$\sigma_y^e \sigma_y^p --\rangle = - ++\rangle$	$\sigma_z^e \sigma_z^p --\rangle = + --\rangle$

然后依次对每一项在左边乘上所有其他的态矢量，我们就得到如下的哈密顿矩阵 H_{ij}

$$H_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} j \\ \rightarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 2A & 0 \\ 0 & 2A & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \end{matrix}.\tag{12.13}$$

当然，这意思仅仅是表明4个振幅 C_i 的微分方程为：

$$\begin{aligned}
i\hbar \dot{C}_1 &= AC_1, \\
i\hbar \dot{C}_2 &= -AC_2 + 2AC_3, \\
i\hbar \dot{C}_3 &= 2AC_2 - AC_3, \\
i\hbar \dot{C}_4 &= AC_4.
\end{aligned}
\tag{12.14}$$

在解这些方程之前，我们忍不住要告诉你们一个由狄拉克得出的巧妙规则——它将使你们感到自己真正获得了很大的进步——虽然我们现在的工作并不需要它。由方程式（12.9）及（12.12），我们得到

$$\begin{aligned}
\sigma^e \cdot \sigma^p \mid ++ \rangle &= \mid ++ \rangle, \\
\sigma^e \cdot \sigma^p \mid +- \rangle &= 2 \mid -+ \rangle - \mid +- \rangle, \\
\sigma^e \cdot \sigma^p \mid -+ \rangle &= 2 \mid +- \rangle - \mid -+ \rangle, \\
\sigma^e \cdot \sigma^p \mid -- \rangle &= \mid -- \rangle.
\end{aligned}
\tag{12.15}$$

请看，狄拉克说：我也可以把第一和最后的方程写成

$$\begin{aligned}
\sigma^e \cdot \sigma^p \mid ++ \rangle &= 2 \mid ++ \rangle - \mid ++ \rangle, \\
\sigma^e \cdot \sigma^p \mid -- \rangle &= 2 \mid -- \rangle - \mid -- \rangle;
\end{aligned}$$

于是这4个方程就十分相像了。现在我发明一个新的算符，我称它为 P 自旋交换，并且定义它有如下性质^[2]：

$$P_{\text{自旋交换}} \mid ++ \rangle = \mid ++ \rangle,$$

$$P_{\text{自旋交换}} |+-\rangle = |-+\rangle ,$$

$$P_{\text{自旋交换}} |-+\rangle = |+-\rangle ,$$

$$P_{\text{自旋交换}} |--\rangle = |--\rangle .$$

该算符的作用是交换两个粒子的自旋方向。这样，我就可把式（12.15）中的全部方程写成一个简单的算符方程：

$$\boldsymbol{\sigma}^e \cdot \boldsymbol{\sigma}^p = 2P_{\text{自旋交换}} - 1. \quad (12.16)$$

这就是狄拉克的公式。他的“自旋交换算符”提供了一个演算 $\boldsymbol{\sigma}^e \cdot \boldsymbol{\sigma}^p$ 的简便规则。（你们看现在你们什么都可以做了。大门打开了。）

§12-3 能级

现在我们已准备就绪，可以通过解哈密顿方程式（12.14）来算出氢原子基态的能级了。我们要求定态的能量。这就是说我们要找到那些特定的状态 $|\psi\rangle$ ，对它们来说，属于 $|\psi\rangle$ 的一组振幅 $C_i = \langle i | \psi \rangle$ 的每一个均有相同的时间依赖关系——即 $e^{-i\omega t}$ 。这个态具有能量 $E = \hbar\omega$ 。所以我们所要的一组振幅为

$$C_i = a_i e^{(-i/\hbar)Et}, \quad (12.17)$$

式中4个系数 a_i 与时间无关。为了看出能否获得这组振幅，我们把式（12.17）代入方程式（12.14），看看有何结果。方程式（12.14）中

的每个 $i\hbar dC/dt$ 变为 EC ，并且——消去共同的指数因子后——各个 C 都变成了 a ，我们得到：

$$\begin{aligned} Ea_1 &= Aa_1, \\ Ea_2 &= -Aa_2 + 2Aa_3, \\ Ea_3 &= 2Aa_2 - Aa_3, \\ Ea_4 &= Aa_4, \end{aligned} \tag{12.18}$$

我们从这些方程解出 a_1 ， a_2 ， a_3 和 a_4 。正好第一个方程与其他方程无关——这意味着我们立即可以看出一个解。若我们取 $E=A$ ，则

$$a_1=1, a_2=a_3=a_4=0,$$

是一个解。（当然，若取所有 a 的值均为零也是一个解，但这表示根本没有任何态存在。）让我们把这第一个解称为态 $|I\rangle$ [\[3\]](#)：

$$|I\rangle = |1\rangle = |++\rangle, \tag{12.19}$$

它的能量为

$$E_I = A.$$

有了这一线索，你们立即可从式（12.18）中最后一个方程看出另一个解：

$$a_1=a_2=a_3=0, a_4=1,$$

$$E=A.$$

我们称该解为态 $|II\rangle$:

$$|II\rangle = |4\rangle = |--\rangle, \quad (12.20)$$

$$E_{II}=A.$$

现在要稍微困难些了，式 (12.18) 中余下的两个方程是混合的。但是以前我们也碰到同样的情况。将此两式相加，我们得到

$$E(a_2+a_3)=A(a_2+a_3), \quad (12.21)$$

将两式相减，得

$$E(a_2-a_3)=-3A(a_2-a_3). \quad (12.22)$$

通过观察——并回忆氨的情况——我们看到存在两组解：

$$a_2=a_3, \quad E=A; \quad (12.23)$$

及

$$a_2=-a_3, \quad E=-3A.$$

它们是 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 的混合物。把这两个态称为 $|III\rangle$ 和 $|IV\rangle$ ，并乘上一个因子 $1/\sqrt{2}$ ，使这两个态归一化，我们得到

$$|III\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle),$$

$$E_{\text{III}} = A, \quad (12.24)$$

及

$$|IV\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle),$$

$$E_{\text{IV}} = -3A, \quad (12.25)$$

我们得出了4个定态及其能量。顺便提一下，注意到这4个态是相互正交的，所以如果我们愿意，也可以把它们作为基础态。我们的问题完全解决了。

上述4个态中3个态的能量为 A ，而第4个态的能量为 $-3A$ 。其平均能量为0——这意味着如果我们在式(12.5)中取 $E_0=0$ ，就是我们选择以平均能量为基准来量度所有能量。我们可以把氢原子基态能级图画在图12-2中。

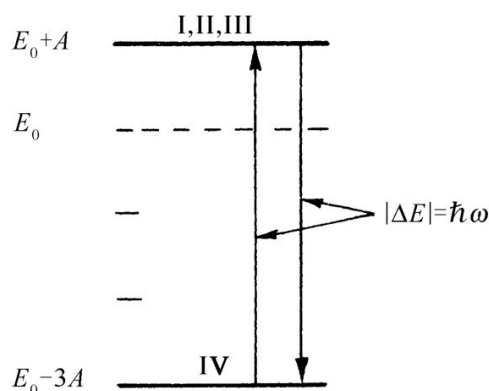


图12-2 氢原子基态的能级图

态 $|IV\rangle$ 与其他任何一个态之间的能量差为 $4A$ 。一个处于态 $|I\rangle$ 的原子，可能从该态落至态 $|IV\rangle$ 并发光。但不是光学光子，因为能量太小了——它将发射出一个微波量子。或者，若用微波照射氢气，当处在态 $|IV\rangle$ 的原子获得能量，并跃迁至上能态时，我们将发

现能量的吸收——但只吸收频率 $\omega = 4A/\hbar$ 。这个频率已经由实验测得，最近所得到的最好结果^[4]为：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = (1\,420\,405\,751.800 \pm 0.028) \text{ Hz.} \quad (12.26)$$

其误差仅为一千亿分之二！大概没有一个基本物理量测得比它还精确的了——它是物理学中最精确的测量之一。理论家对于他们能把能量计算到 $3/10^5$ 的准确度感到非常高兴，而此时它却被测量至 $2/10^{11}$ 的准确度——比理论准确100万倍。所以实验物理学家大大领先于理论家。在氢原子基态理论方面，你已不比别人差。你也完全可以从实验中求得自己的 A 值，这也是每个人最后必须做的工作。

你以前大概已听说过氢的“21 cm谱线”这件事吧，这就是氢的两个超精细态之间1 420兆周谱线的波长。星系中的氢原子气体发射或吸收这一波长的辐射。所以用调谐至21 cm波（或约1 420 MHz）的射电望远镜，我们就能观察氢原子气体浓集处的位置和速度。通过强度的测量，我们可以估计氢的数量；从测量多普勒效应引起的频移，我们可以求出星系中气体的运动情况。这是射电天文学的宏大计划之一。所以我们现在谈论的是完全真实的事情——它并不是一个臆造的问题。

§12-4 塞曼分裂

虽然我们已经完成了求氢原子基态能级的问题，但是我们还要再进一步研究这一有趣的系统。为了对此系统有更多的了解——例如，为了计算氢原子吸收和发射21 cm的射电波的速率——我们必须知道原子受到扰动时发生的情况。我们要照我们求解氨分子那样去做——在

求出能级后进一步研究氨分子在电场中的情形。于是我们就能够计算出射电波的电场所产生的效应。对氢原子来说，电场除了使所有的能级都移动一个与电场的平方成正比的常量外，别无作用——由于它并不改变能量差，故不必注意。现在重要的是磁场。所以接下来就是要写出原子处在外磁场中这种更为复杂的情况的哈密顿。

那么哈密顿是什么呢？这里我们只告诉你们答案，除了说原子的行为就是这样外不再给你们任何“证明”。

哈密顿为

$$\hat{H} = A(\boldsymbol{\sigma}^e \cdot \boldsymbol{\sigma}^p) - \mu_e \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{B} - \mu_p \boldsymbol{\sigma}^p \cdot \mathbf{B}. \quad (12.27)$$

它由三部分组成。第一项 $A \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \boldsymbol{\sigma}^p$ 表示电子和质子间的磁相互作用——即使没有磁场也同样有这一项。这是我们原来就有的项；磁场对常数 A 的影响可忽略不计。外磁场的影响反映在最后两项中。第二项 $-\mu_e \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{B}$ ，是电子单独处于外磁场中具有的能量^[5]，同样，最后一项 $-\mu_p \boldsymbol{\sigma}^p \cdot \mathbf{B}$ 是质子单独存在于磁场中具有的能量。在经典理论中两个粒子共同的总能量是它们两个的能量之和，在量子力学中也同样如此。在磁场中，由于磁场所产生的相互作用能，就是电子同外磁场的相互作用能与质子同外磁场的相互作用能之和——两者都用 σ 算符来表示。在量子力学中，这些项并不真正是能量，但是按经典的能量公式去想象它们是记住写出哈密顿规则的一种方法。不管怎样，式（12.27）是正确的哈密顿。

现在我们必须回到起点，再从头来解这一问题。但是有许多工作已经完成了——我们只需把新的项产生的效应加进去，我们令恒定磁

场 $\mathbf{B}$ 沿 z 方向，于是必须在我们的哈密顿算符中加进两个新的项——我们可以称之为 $\hat{H}'$ ：

$$\hat{H}' = -(\mu_e \sigma_z^e + \mu_p \sigma_z^p)B.$$

利用表12-1，我们立即得到

$$\begin{aligned}\hat{H}' |++\rangle &= -(\mu_e + \mu_p)B |++\rangle, \\ \hat{H}' |+-\rangle &= -(\mu_e - \mu_p)B |+-\rangle, \\ \hat{H}' |-+\rangle &= -(-\mu_e + \mu_p)B |-+\rangle, \\ \hat{H}' |--\rangle &= (\mu_e + \mu_p)B |--\rangle.\end{aligned}\tag{12.28}$$

多么方便！ $\hat{H}'$ 作用于每个态只是得到一个数乘以这个态。因此，矩阵 $\langle i | \hat{H}' | j \rangle$ 只有对角元——我们只要直接把式（12.28）中的系数加到式（12.13）中相应的对角项上去，于是哈密顿方程式（12.14）变为：

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= \{A - (\mu_e + \mu_p)B\}C_1, \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= -\{A + (\mu_e - \mu_p)B\}C_2 + 2AC_3, \\ i\hbar \frac{dC_3}{dt} &= 2AC_2 - \{A - (\mu_e - \mu_p)B\}C_3, \\ i\hbar \frac{dC_4}{dt} &= \{A + (\mu_e + \mu_p)B\}C_4.\end{aligned}\tag{12.29}$$

方程的形式并没有什么不同——只是系数不同而已。只要 B 不随时间变化，我们就可以继续照以前那样去做。将 $C_i = a_i e^{-(i/\hbar)Et}$ 代入，我们得到——式（12.18）的变形——

$$Ea_1 = A \{- (\mu_e + \mu_p) B\} a_1,$$

$$Ea_2 = -\{A + (\mu_e - \mu_p) B\} a_2 + 2Aa_3, \quad (12.30)$$

$$Ea_3 = 2Aa_2 - \{A - (\mu_e - \mu_p) B\} a_3,$$

$$Ea_4 = \{A + (\mu_e + \mu_p) B\} a_4.$$

很巧，上式中第一和第四个方程仍旧与其他方程无关，所以我们仍可用同样的技巧求解。

态 $|I\rangle$ 是一个解，对于这个解 $a_1=1, a_2=a_3=a_4=0$ ，或

$$|I\rangle = |1\rangle = |++\rangle, \quad (12.31)$$

以及

$$E_I = A - (\mu_e + \mu_p) B.$$

另一个解是

$$|II\rangle = |4\rangle = |--\rangle, \quad (12.32)$$

以及

$$E_{II} = A + (\mu_e + \mu_p) B.$$

在剩下的两个方程中，因为系数 a_2 和 a_3 不再相等，所以稍微复杂些。但是它们和我们曾得到过的氨分子的一对方程很像。回顾一下式 (9.20)，我们就能作出如下类比（记住那里的指标1和2相当于这里的2和3）

$$\begin{aligned}
H_{11} &\longrightarrow -A - (\mu_e - \mu_p) B, \\
H_{12} &\longrightarrow 2A, \\
H_{21} &\longrightarrow 2A, \\
H_{22} &\longrightarrow -A + (\mu_e - \mu_p) B.
\end{aligned} \tag{12.33}$$

于是能量由式 (9.25) 给出，它们是

$$E = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12} H_{21}}, \tag{12.34}$$

将式 (12.33) 代入上式，能量表达式就成为

$$E = -A \pm \sqrt{(\mu_e - \mu_p)^2 B^2 + 4A^2}.$$

虽然我们在第9章中把这两个能量称为 E_I 和 E_{II} ，而在目前的问题中我们把它称为 E_{III} 和 E_{IV} ，

$$\begin{aligned}
E_{III} &= A \left\{ -1 + 2\sqrt{1 + \frac{(\mu_e - \mu_p)^2 B^2}{4A^2}} \right\}, \\
E_{IV} &= -A \left\{ 1 + 2\sqrt{1 + \frac{(\mu_e - \mu_p)^2 B^2}{4A^2}} \right\}.
\end{aligned} \tag{12.35}$$

所以我们就找到了氢原子处在恒定磁场中的4个定态的能量。让我们令 B 趋向于零以核对上述结果是否与上节所得的能量相同。你们就可以看到我们会得到预期结果。当 $B=0$ 时，能量 E_I ， E_{II} 和 E_{III} 等于

$+A$ ，而 E_{IV} 等于 $-3A$ 。甚至态的标号也和以前的一致，可是当加上磁场时，各项能量以不同的方式改变。让我们来看看它们如何变化。

首先，我们必须记住，电子的 μ_e 是负值，质子的 μ_p 为正值，而且 μ_e 约比 μ_p 大1 000倍。所以 $\mu_e + \mu_p$ 和 $\mu_e - \mu_p$ 都是负数，且接近相等。让我们把它们称为 $-\mu$ 和 $-\mu'$ ：

$$\mu = -(\mu_e + \mu_p), \quad \mu' = -(\mu_e - \mu_p), \quad (12.36)$$

（这里 μ 和 μ' 两者都是正数，差不多等于 μ_e 的大小——约为一个玻尔磁子。）于是我们的4个能量分别为

$$\begin{aligned} E_I &= A + \mu B, \\ E_{II} &= A - \mu B, \\ E_{III} &= A \left\{ -1 + 2\sqrt{1 + \frac{\mu'^2 B^2}{4A^2}} \right\}, \\ E_{IV} &= -A \left\{ 1 + 2\sqrt{1 + \frac{\mu'^2 B^2}{4A^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

能量 E_I 从 A 开始，随 B 线性增加——斜率为 μ 。能量 E_{II} 也是从 A 开始，但是它随 B 的增加而线性地减少——其斜率为 $-\mu$ 。这两个能级随 B 的变化情况如图12-3所示。我们还在图中画出了能量 E_{III} 和 E_{IV} 。但它们与 B 的依赖关系不同。当 B 很小时，它们依赖于 B 的平方，所以开始时其斜率是水平的，然后变成曲线，当 B 很大时，它们趋近于斜率为 $\pm\mu'$ 的直线，该直线的斜率与 E_I 和 E_{II} 的斜率几乎相等。

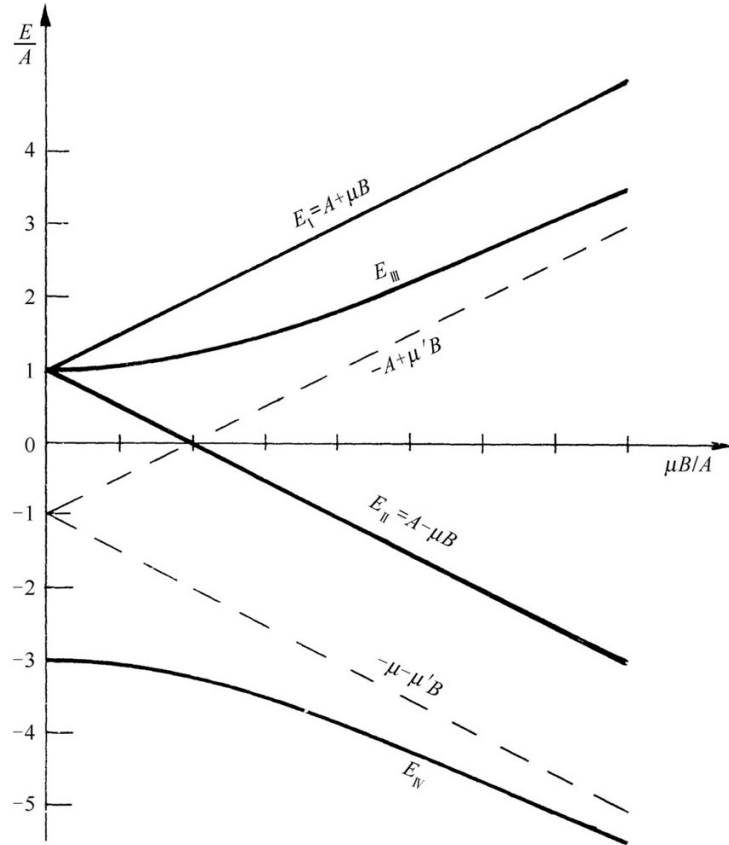


图12-3 在磁场 B 中氢的基态能级图

由于磁场而引起的原子能级的移动称为塞曼效应。我们说，图12-3中的曲线表示氢原子基态的塞曼分裂。当不存在磁场时，我们仅得到氢超精细结构的一条谱线。态 $|IV\rangle$ 与其他任何一个态之间的跃迁，会吸收或发射一个光子，其频率 1420 兆周为 $1/h$ 乘以能量差 $4A$ 。但是，当原子处在磁场 B 中时，则有更多的谱线。4个态中任何两个态之间的跃迁都是可能的。所以如果在所有4个态上都有原子，则在图12-4中6个垂直的箭头所示的任何一个吸收或发射能量的跃迁都可能发生。这其中的许多跃迁都可以用我们在第2卷§35-3所叙述的拉比（Rabi）分子束技术观察到。

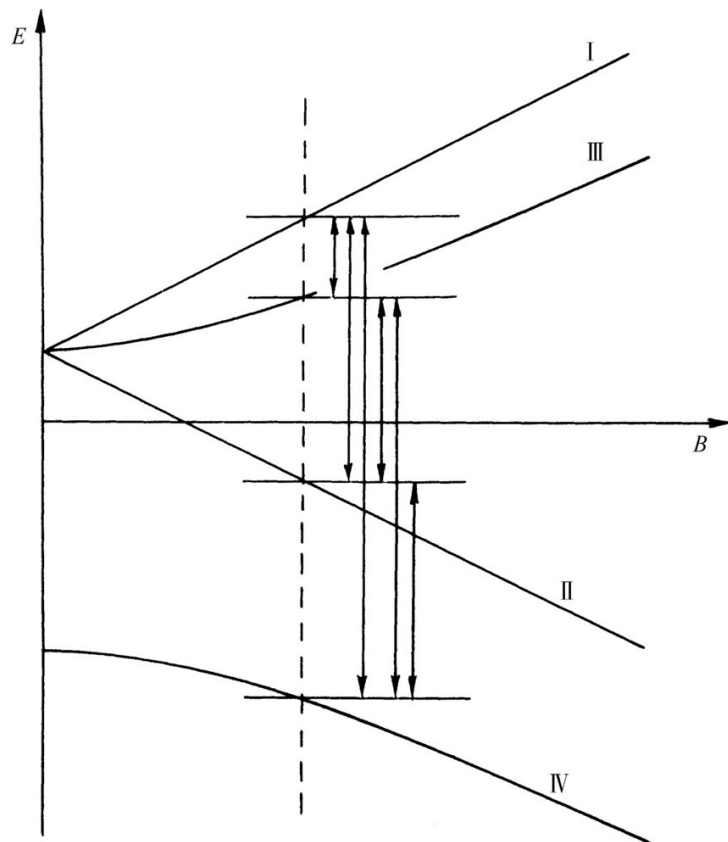


图12-4 在特定磁场 B 中氢的基态能级之间的跃迁

引起这种跃迁的原因是什么呢？如果我们在稳定的强磁场 B 中再加上一个随着时间变化的小的扰动磁场，就会发生这种跃迁。就像我们把变动着的电场加到氨分子上所看到的那样。只是这里是磁场与磁矩相耦合而变的把戏。但是理论与我们计算氨时所用的方法相同。如果我们在 xy 平面内转动微扰磁场则理论将最简单——虽然任何水平的振动磁场都行。你把这个微扰磁场作为附加项加到哈密顿中去，就得到振幅随时间变化的解——正如我们在讨论氨分子时所求得的那样。所以你可以很容易地精确计算出从一个态到另一个态的跃迁概率。你会发现它们与实验完全一致！

§12-5 在磁场中的态

现在我们要讨论图12-3中曲线的形状。首先，对于强磁场情况下的能量是易于理解的，而且相当有趣。当磁场 B 足够强时（即 $\mu B/A \gg 1$ ），我们可以忽略式（12.37）中的1。这4个能量变为

$$E_{\text{I}} = A + \mu B, \quad E_{\text{II}} = A - \mu B, \quad (12.38)$$

$$E_{\text{III}} = -A + \mu' B, \quad E_{\text{IV}} = -A - \mu' B.$$

这就是图12-3中4条直线的方程式。我们可以用下述方式去理解这些能量的物理意义。磁场为零时定态的性质完全由两个磁矩的相互作用确定。在定态 $| \text{III} \rangle$ 和 $| \text{IV} \rangle$ 中，基础态 $| + - \rangle$ 和 $| - + \rangle$ 的混合就是由于这种相互作用。但是在强的外磁场中，质子和电子几乎一点也不受对方的场影响；它们各自都像独自处在外场中一样。于是——正如我们多次看到的那样——电子的自旋不是平行于外磁场就是与外磁场相反。

假定电子的自旋“朝上”——也就是沿着磁场方向，它的能量为 $-\mu_e B$ 。而质子仍旧可以有两种不同的方向。如果质子的自旋也是“朝上”，它的能量为 $-\mu_p B$ 。两者之和为 $-(\mu_e + \mu_p) B = \mu B$ 。这正是我们所得出的 E_{I} ——很好，因为我们正在描述态 $| ++ \rangle = | \text{I} \rangle$ 。仍存在一个表示电子和质子自旋平行时的相互作用能的微小附加项 A （现在 $\mu B \gg A$ ）。（原先我们取 A 为正，因为我们所用到的理论表明它应该是正的，而实验证明它确是这样。）另一方面，质子的自旋也可以朝下，于是它在外磁场中的能量为 $+\mu_p B$ ，因此它与电子能量之和为 $-(\mu_e - \mu_p) B = \mu' B$ 。而它们的相互作用能变为 $-A$ 。两者之和正好就是式

(12.38) 中的能量 E_{III} 。所以在强磁场中态 $| \text{III} \rangle$ 必定变成态 $| + - \rangle$ 。

现在假定电子自旋“朝下”，它在外磁场中的能量为 $\mu_e B$ 。如果质子自旋也“朝下”，两者合在一起具有能量 $(\mu_e + \mu_p) B = -\mu B$ ，加上它们的相互作用能 A ——因为它们的自旋平行。这正好就是式 (12.38) 中的能量 E_{II} ，且相应于态 $| -- \rangle = | \text{II} \rangle$ ——这很妙。最后，若电子自旋“朝下”而质子自旋“朝上”，我们得到能量 $(\mu_e - \mu_p) B - A$ （相互作用能取为负 A 是因为两个自旋相反），它刚好就是 E_{IV} ，而相应的态为 $| - + \rangle$ 。

“但是，等一下！”你或许会说，“态 $| \text{III} \rangle$ 和 $| \text{IV} \rangle$ 并非 是态 $| + - \rangle$ 和 $| - + \rangle$ ；它们是后两者的混合。”有道理，但不全面。当 $B=0$ 时它们的确是两者的混合态，但是我们还没有计算出它们在强磁场 B 时的情况。我们在第9章中用推导 (12.33) 式类似的方法计算了定态能量，现在也可以用第9章的公式求相应的振幅。从式 (9.24) 得到

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{E - H_{22}}{H_{21}}.$$

当然，比值 a_2/a_3 就是 C_2/C_3 。代入式 (12.33) 给出的相应的量，得

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \frac{C_2}{C_3} &= \frac{E + A - (\mu_e - \mu_p)B}{2A} \\ \frac{C_2}{C_3} &= \frac{E + A + \mu' B}{2A}, \end{aligned} \tag{12.39}$$

式中的 E 可以采用适当的能量—— E_{III} 或 E_{IV} 。例如，对态 $| \text{III} \rangle$ 来说，我们有

$$\left(\frac{C_2}{C_3} \right)_{\text{III}} \approx \frac{\mu' B}{A}. \quad (12.40)$$

对于强磁场 B ，态 $| \text{III} \rangle$ 的 $C_2 \gg C_3$ ，该态几乎完全成了态 $| 2 \rangle = | + - \rangle$ 。同样，如果在式(12.39)中代入 E_{IV} ，则得 $(C_2/C_3)_{\text{IV}} \ll 1$ ；强场中态 $| \text{IV} \rangle$ 正好成为态 $| 3 \rangle = | - + \rangle$ 。你们看到构成定态的基础态的线性组合的系数与 B 有关。我们称为 $| \text{III} \rangle$ 的态在极弱磁场的情况下是 $| + - \rangle$ 和 $| - + \rangle$ 的50-50的混合态，但是在强场中就完全转移到 $| + - \rangle$ 。同样，态 $| \text{IV} \rangle$ 在弱场中也是 $| + - \rangle$ 和 $| - + \rangle$ （具有相反的符号）的50-50的混合态，但当自旋在强的外场中解耦合后态 $| \text{IV} \rangle$ 就趋向态 $| - + \rangle$ 。

我们还特别提请你们注意在极弱磁场下所发生的情况。有一个能级——在 $-3A$ 处——在加上弱磁场时并不发生变化。而另一个能级——在 $+A$ 处——在加上弱磁场时分裂成3个不同的能级。对于弱场，能量随 B 的变化如图12-5所示。假定我们用某种方法选出一束氢原子，它们全都具有 $-3A$ 的能量。如果我们用它们做施特恩-格拉赫实验——所用的场不太强——我们将发现它们沿直线通过实验装置。（因为它们的能量与 B 无关，根据虚功原理——它们在磁场梯度中不受力的作用。）另外，假定我们选取具有能量 $+A$ 的原子束，并使它们通过施特恩-格拉赫装置——譬如说 S 装置。（同样装置中的磁场也不应太强，不影响原子的内部。也就是说磁场应足够小，使能量随 B 线性变化。）我们将会发现出来的原子分成3束。态 $| \text{I} \rangle$ 和 $| \text{II} \rangle$ 受到相反的作用力——它们的能量随 B 以斜率 $\pm\mu$ 作线性变化，所以该力就与作

用于磁矩为 $\mu_z = \mp \mu$ 的磁偶极子的力一样。但是态 $|III\rangle$ 沿直线通过。所以我们正好回到了第5章。一个能量为 $+A$ 的氢原子是一个自旋1粒子。这个能量状态属于一个 $j=1$ 的“粒子”，它可以用第5章中用的3个基础态 $|+S\rangle$ ， $|0S\rangle$ ， $|-S\rangle$ 来描写——对于空间的一组轴。另一个方面，当氢原子具有能量 $-3A$ 时，它是一个自旋零的粒子。（记住，上面所说的情况仅对无限小的磁场才严格成立。）所以我们可以把零磁场下氢原子的态以下列方法归类：

$$\left. \begin{aligned} |I\rangle &= |++\rangle \\ |III\rangle &= \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \\ |II\rangle &= |--\rangle \end{aligned} \right\} \text{自旋 } 1 \begin{cases} |+S\rangle \\ |0S\rangle \\ |-S\rangle \end{cases} \quad (12.41)$$

$$|IV\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \text{ 自旋 } 0. \quad (12.42)$$

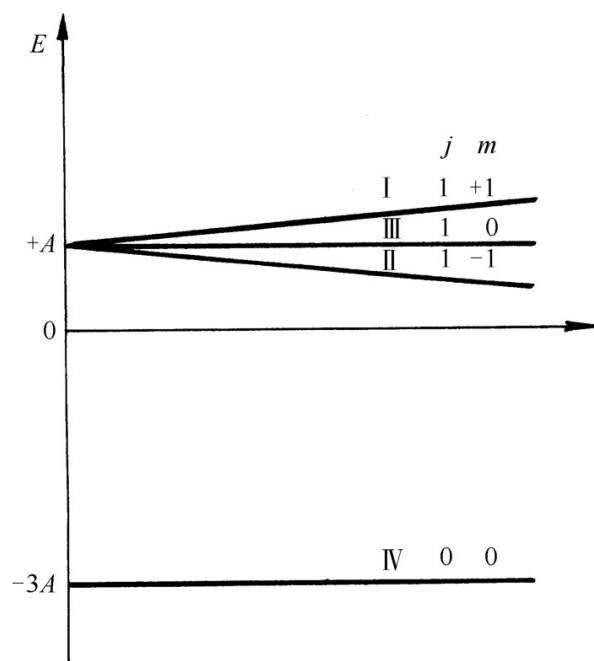


图12-5 氢原子在弱磁场中的态

我们在第2卷第35章中曾说过，任何一个粒子沿任何轴的角动量分量只可能具有相差为 $\hbar$ 的某些值。角动量的 z 分量 J_z 可以是 $j\hbar, (j-1)\hbar, (j-2)\hbar, \dots, (-j)\hbar$ ，这里 j 为粒子的自旋（可取整数或半整数）。虽然我们在这里不这么说，但人们通常写成

$$J_z = m\hbar, \quad (12.43)$$

式中 m 代表 $j, j-1, j-2, \dots, -j$ 等数中的一个。所以，你们会看到，人们在书中用所谓量子数 j 和 m [j 常称为“总角动量量子数”， m 常称为“磁量子数”] 来标记氢原子的4个基态。于是他们把状态表示成 $|j, m\rangle$ 。而不是写成我们的态符号 $|I\rangle, |II\rangle$ 等等。所以他们把磁场为零时式 (12.41) 和 (12.42) 表示的态写用表12-3中所示的符号标记。这并不是什么新的物理，它只是记号的问题。

表12-3 在零场时氢原子的态

态 $ j, m\rangle$	j	m	我们的记号
$ 1, +1\rangle$	1	+1	$ I\rangle = +\mathcal{S}\rangle$
$ 1, 0\rangle$	1	0	$ III\rangle = 0\mathcal{S}\rangle$
$ 1, -1\rangle$	1	-1	$ II\rangle = -\mathcal{S}\rangle$
$ 0, 0\rangle$	0	0	$ IV\rangle$

§12-6 自旋1粒子的投影矩阵 [6]

我们现在要用我们的氢原子的知识去解决一些特殊问题。在第5章中我们曾讨论过一个自旋1粒子对于一特定取向的施特恩-格拉赫装置——譬如说一个 $\mathcal{S}$ 装置——处于基础态 $(+, 0 \text{ 或 } -)$ 之一，则该粒子对于不同空间取向的 $\mathcal{T}$ 装置具有一定的振幅处于其3个态的各个态中。这样的振幅 $\langle jT | iS \rangle$ 有9个，它们组成投影矩阵。在§5-7中我们未加证

明地给出了 T 相对 S 具有不同取向时投影矩阵中的各项。现在我们将告诉你们一种能够推导出这些项的方法。

在氢原子中我们曾经有一个由两个自旋 $1/2$ 粒子组成的自旋 1 的系统。我们在第6章中就已经解决了如何变换自旋 $1/2$ 的振幅。我们可以利用这种知识去计算自旋 1 的变换。方法是这样的：我们有一个系统——一个能量为 $+A$ 的氢原子——其自旋为 1 。假定我们让它通过一施特恩-格拉赫过滤器 S ，因此我们知道它处于 S 的基础态中的一个，譬如说 $|+S\rangle$ 。而它对 T 装置中的某一基础态，譬如 $|+T\rangle$ 态的振幅将是什么呢？如果我们把 S 装置的坐标系称为 x, y, z 系统， $|+S\rangle$ 态就是我们曾称之为 $|++\rangle$ 的态。但是，假定另一个人把他的 z 轴取在 T 的轴上。他以我们称为 x', y', z' 的参考系来表示他的态。他的电子和质子的“朝上”和“朝下”的态将与我们的不同。他的“正-正”态——我们写成 $|++'\rangle$ ，相对于带撇参考系——是自旋 1 粒子的 $|+T\rangle$ 态。我们想要的是 $\langle +T | +S \rangle$ ，这只是振幅 $\langle ++' | ++ \rangle$ 的另一种写法。

我们可用下述方法求振幅 $\langle ++' | ++ \rangle$ 。在我们的参考系中，处在 $|++\rangle$ 态的电子具有“朝上”的自旋。这意味着在他的参考系中具有“朝上”的振幅 $\langle +' | + \rangle_e$ ，以及“朝下”的振幅 $\langle -' | + \rangle_e$ 。同样，处在 $|++\rangle$ 态的质子在我们的参考系中自旋“朝上”，而在带撇的参考系中，具有自旋“朝上”和“朝下”的振幅分别为 $\langle +' | + \rangle_p$ 和 $\langle -' | + \rangle_p$ 。既然我们现在谈论的是两个不同的粒子，因此这两个粒子在他的参考系中一同“朝上”的振幅为上述两个振幅的乘积，即

$$\langle ++' | ++ \rangle = \langle +' | + \rangle_e \cdot \langle +' | + \rangle_p. \quad (12.44)$$

为明确起见，我们在振幅 $\langle + ' | + \rangle$ 后面加上下标 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{p}$ 。但是它们都只是自旋1/2粒子的变换振幅，所以实际上它们是完全相同的数。事实上，它们就是第6章里称为 $\langle +T | +S \rangle$ 的振幅，也就是该章末尾表中所列的。

但是，现在我们在记号方面即将遇到麻烦了。我们必须能把对自旋1/2粒子的振幅 $\langle +T | +S \rangle$ 和对自旋1粒子的、我们也称为 $\langle +T | +S \rangle$ 的振幅区分开来——这两种振幅是完全不同的！我们希望它不至于过分混淆，但是至少在目前，对自旋1/2振幅，我们不得不用一种不同的符号。为简捷起见，我们将新的记号概括于表12-4中。对自旋1粒子的态，我们将继续使用记号 $| +S \rangle$ ， $| 0S \rangle$ 和 $| -S \rangle$ 。

表12-4 自旋1/2粒子的振幅

本 章	第 6 章
$a = \langle + ' + \rangle$	$\langle + T + S \rangle$
$b = \langle - ' + \rangle$	$\langle - T + S \rangle$
$c = \langle + ' - \rangle$	$\langle + T - S \rangle$
$d = \langle - ' - \rangle$	$\langle - T - S \rangle$

用我们现在的新记号，式（12.44）就变成

$$\langle + ' + ' | ++ \rangle = a^2 ,$$

而这正好就是自旋1的振幅 $\langle +T | +S \rangle$ 。现在让我们假定，另一个人的坐标系——即 T 或带“撇”的装置——相对于我们的 z 轴旋转了角度 ϕ ，那么从表6-2得：

$$a = \langle + ' | + \rangle = e^{i \phi / 2} .$$

所以由式（12.44），我们得到自旋1粒子的振幅为

$$\langle +T | +S \rangle = \langle ++' | ++ \rangle = (e^{i\phi/2})^2 = e^{i\phi}. \quad (12.45)$$

你们可以看出它是怎样得出的。

现在我们将求出对所有态的普遍情况。如果质子和电子在我们的参考系——S系——中两者都“朝上”，则在另一个人的参考系——T系——中，它处于4个可能态中任一个态的振幅为：

$$\begin{aligned} \langle ++' | ++ \rangle &= \langle +' | + \rangle_e \langle +' | + \rangle_p = a^2, \\ \langle +'-' | ++ \rangle &= \langle +' | + \rangle_e \langle -' | + \rangle_p = ab, \\ \langle -'+ ' | ++ \rangle &= \langle -' | + \rangle_e \langle +' | + \rangle_p = ba, \\ \langle -'- ' | ++ \rangle &= \langle -' | + \rangle_e \langle -' | + \rangle_p = b^2. \end{aligned} \quad (12.46)$$

于是我们可以把态 $|++\rangle$ 写成如下的线性组合：

$$|++\rangle = a^2 |++'\rangle + ab \{ |+'-' \rangle + |-'+ \rangle \} + b^2 |--'\rangle. \quad (12.47)$$

我们注意到： $|++'\rangle$ 是态 $|+T\rangle$ ， $\{ |+'-' \rangle + |-'+ \rangle \}$ 就是 $\sqrt{2}$ 乘以态 $|0T\rangle$ ——参看式 (12.41) ——而 $|--'\rangle = |-T\rangle$ 。换句话说，式 (12.47) 可以改写成

$$|+S\rangle = a^2 |+T\rangle + \sqrt{2}ab |0T\rangle + b^2 |-T\rangle. \quad (12.48)$$

用类似的方法你们可以很容易地证明：

$$|-S\rangle = c^2 |+T\rangle + \sqrt{2}cd |0T\rangle + d^2 |-T\rangle. \quad (12.49)$$

对于 $|0S\rangle$ ，要稍为复杂些，因为

$$|0S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+-\rangle + |-+\rangle\}.$$

但是，我们可以用带“撇”的态表示态 $|+-\rangle$ 和 $|-+\rangle$ ，然后取其和。这就是

$$|+-\rangle = ac |+'+\rangle + ad |+'-\rangle + bc |-' +'\rangle + bd |-' -'\rangle \quad (12.50)$$

及

$$|-+\rangle = ac |+'+\rangle + bc |+'-\rangle + ad |-' +'\rangle + bd |-' -'\rangle. \quad (12.51)$$

以 $1/\sqrt{2}$ 乘以这两者之和，得

$$|0S\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}ac |+'+\rangle + \frac{ad+bc}{\sqrt{2}}\{|+'-\rangle + |-' +'\rangle\} + \frac{2}{\sqrt{2}}bd |-' -'\rangle.$$

由之得：

$$|0S\rangle = \sqrt{2}ac |+T\rangle + (ad+bc) |0T\rangle + \sqrt{2}bd |-T\rangle. \quad (12.52)$$

现在我们已经得到了所要的全部振幅。式 (12.48)，(12.49) 及 (12.52) 中的系数就是矩阵元 $\langle jT | iS \rangle$ 。让我们把它们都放在一起：

$$\begin{array}{c} iS \\ \rightarrow \\ jT \downarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc} a^2 & \sqrt{2}ac & c^2 \\ \sqrt{2}ab & ad+bc & \sqrt{2}cd \\ b^2 & \sqrt{2}bd & d^2 \end{array} \right]. \quad (12.53)$$

我们已经用自旋1/2的振幅 a ， b ， c 和 d 表示了自旋1的振幅变换。

例如，如果 T 参考系相对于 S 系统绕 y 轴旋转 α 角——如图5-6所示——表12-4中的各个振幅正好就是表6-2中 $R_y(\alpha)$ 的矩阵元。

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{\alpha}{2}, b = -\sin \frac{\alpha}{2}, \\ c &= \sin \frac{\alpha}{2}, d = \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (12.54)$$

把这些代入式(12.53)，我们就得到(5.38)的公式，我们在那里未加证明给出了该式。

态 $|IV\rangle$ 又是怎样呢？！它是一个自旋零的系统，所以只有一个态——它在所有坐标系中都是相同的。我们可以通过取式(12.50)和(12.51)的差来核对每一个结果，我们得到：

$$|+-\rangle - |-+\rangle = (ad - bc) \{ |+'-\rangle - |-'+\rangle \}.$$

但是， $(ad - bc)$ 是自旋1/2矩阵的行列式，所以它等于1。对于两个具有任意相对取向的坐标系来说，我们得到

$$|IV'\rangle = |IV\rangle.$$

[1] 对于这几个特定的算符，你会注意到这些算符的次序是无所谓的。

[2] 这算符现在称为“泡利自旋交换算符”。

[3] 此态实际上为 $|I\rangle e^{-(i\hbar)E_I t}$ ，但我们通常用常数矢量来表示，该矢量等于 $t=0$ 时的完全矢量。

[4] Crampton, Kleppner, and Ramsey; *Physical Review Letters*, Vol.11, 338 (1963).

[5] 请记住，在经典理论中 $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ ，所以当磁矩沿着磁场方向时能量最低。对于带正电荷的粒子，磁矩平行于自旋，带负电荷的粒子则相反。所以在式（12.27）中 μ_p 是正数，而 μ_e 是负数。

[6] 凡是没有读过第6章的人也应略过本节。

第13章 在晶格中的传播

§13-1 电子在一维晶格中的状态

乍看起来，你可能以为低能电子很难穿过固态晶体。晶体中的原子挤在一起，中心相距只有几个 $\text{\AA}$ （ $1\text{\AA}=10^{-10}\text{m}$ ），而且原子对电子散射的有效直径大致也是 $1\text{\AA}$ 左右。这就是说，比起它们之间的间距来，原子是很大的。因此你可以估计出两次碰撞之间的平均自由程是几个 $\text{\AA}$ 的数量级——实际上这是微不足道的，你可能会料到电子几乎动一动就撞在这个或那个原子上。然而，自然界中普遍存在着的现象却是：假如晶格是完美的，电子能轻而易举顺畅地通过晶体——几乎和在真空中的情形一样。正是这个奇妙的事实使得金属导电如此容易，也使得许多实用器件的开发成为可能。例如，它使晶体管模拟无线电电子管成为可能。在无线电电子管中电子自由地穿过真空，而在晶体管中电子自由地穿过晶格。晶体管行为的内部机理将在这一章中叙述；而这些原理在各种实用器件中的应用则放到下一章去讲解。

电子在晶体中的传导只是一种非常普遍的现象的一个例子。不仅电子可以穿过晶体，其他的“东西”像原子的激发也能够以同样的方式运动。所以我们要讨论的现象以多种形式出现在固态物理学的研究中。

你们还记得我们曾经讨论过双态系统的许多例子。现在让我们想象一个电子可以处在两个位置中的任一位置上，在每个位置上它都是

处在相同的环境中。我们还假定电子具有一定的振幅从一个位置跑到另一个位置，当然，它也具有同样的振幅跑回来，就像我们在§10-1中对氢分子离子的讨论那样。量子力学定律给出下面的结果，对电子来说有两个可能的具有确定能量的状态。每一个状态可以用电子在这两个基础位置的振幅来描写。对于每一个能量确定的状态，振幅的大小都不随时间变化，而两者的相位以同一频率随时间变化。另一方面，如果开始时电子在一个位置，以后它会跑到另一个位置，再过一会它又会回到第一个位置。其振幅和两个耦合摆的运动相似。

现在来考虑完美晶体，我们想象其中一个电子处于某一特定原子的某种“陷阱”中，并具有某个特定的能量。还假定电子具有一定振幅运动到邻近另一个原子陷阱中。这有点像双态系统——但是更复杂些。当电子到达邻近的原子后，还可以继续运动到下一个新的位置，也可以回到原来的位置。现在的情形并不是类似两个耦合的摆，而是类似于无限个耦合在一起的单摆。这有点像你们在第一学年物理课上看到过的那种用来演示波的传播的机械——在扭转金属线上装有一长串杆棒。

假如你有一个谐振子，它被耦合到另一个谐振子上，而后者再耦合到下一个谐振子上，等等.....，假如你在某一个位置上扰动一下，这个扰动会像波一样沿线传播。假如你把一个电子放在一长串原子中的一个原子上也会出现同样的情况。

通常，分析这种力学问题最简单的方法不是去考虑在某个地点发出一个脉冲后会发生什么，而是去考虑稳态波的解。存在着某种位移的图样，它作为单一的不变频率的波在晶体中传播。基于同一理由，对电子也发生同样的情况——因为在量子力学中两者用相似的方程式描述。

然而，你必须懂一件事：电子在一个地点的振幅是振幅而不是概率。如果电子像水流过小孔那样只是简单地从一处渗漏到另一处，它的行为就会完全不同。譬如说，假如有两个水槽，我们用管子将其连通，使水能够从一个水槽流到另一个水槽中去，那么两个水槽中的水平面将会按指数规律相互趋近。但是对于电子，所发生的是振幅的流动而不是单纯的概率流动。这是虚数项——量子力学微分方程中的 i ——的特点，它使指数解变成振荡解。于是所发生的过程就完全不同于两个连通的水槽之间的渗漏。

现在我们来定量地分析这量子力学情况。设想由一长串原子组成的一维体系如图13-1（a）所示。（当然，晶体是三维的，但它们的物理原理完全相同，你一旦理解了一维的情形，就能理解三维中所发生的过程。）下一步，我们来看一下如果把一个电子放到这一串原子上将会发生什么情况。当然，在真实的晶体中原来就已经有亿万个电子了。但是它们中的大多数（对于绝缘的晶体则几乎是所有的）都以某种方式围绕着它自己的原子运动——一切都十分稳定。然而，我们现在要考虑的是放进一个额外的电子后会发生些什么。我们不考虑其他的电子正在做什么，因为我们假定改变它们的运动状态需要很高的激发能量。加上一个电子就好像制造出一个受到微弱束缚的负离子。在观察这一个额外的电子行为的时候，我们事实上取一个近似，即忽略原子内部的结构。

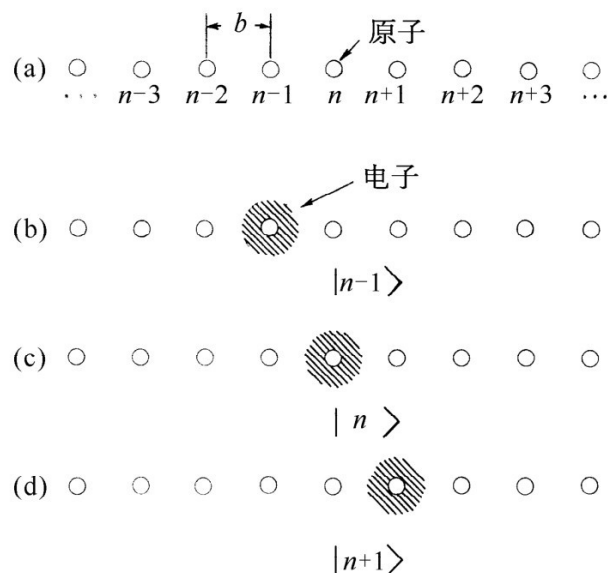


图 13-1 一维晶体中电子的基础态

当然电子可以运动到另一个原子上，从而使负离子转移到另一个地点。就像电子可以在两个质子之间跳跃一样。我们假设电子具有从一个原子跳跃到在它任何一边的相邻原子上的一定的振幅。

我们现在怎样描写这样的体系呢？合理的基础态是什么？假如你还记得当我们只有两个可能的位置时我们曾经是怎样做的，你就能猜出我们将会怎么办。假设这一原子串中各个的间距都相等，我们把原子依次编号如图13-1 (a) 所示。一个基础态是电子在第6号原子上，另一基础态是电子在第7号原子上或第8号原子上，依此类推。我们可以说电子位于第 n 个原子处就表示第 n 基础态。让我们称它为基础态 $|n\rangle$ 。图13-1表示

$$|n-1\rangle, |n\rangle, \text{ 以及 } |n+1\rangle$$

这3个基础态指的是什么。我们可以用这些基础态来描述我们的一维晶体中电子的任何状态 $|\phi\rangle$ ，只要给出 $|\phi\rangle$ 在每一基础态的振幅 $\langle n$

$|\phi\rangle$ ——即电子位于某一特定原子的振幅。于是我们可以将状态 $|\phi\rangle$ 写成所有基础态的叠加：

$$|\phi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\phi\rangle. \quad (13.1)$$

下面我们假设电子位于某一原子时具有一定的振幅渗漏到任何一边的原子中。我们将取最简单的情况，电子只能渗漏到紧邻的原子中——要到达次邻近的原子，它必须走两步。我们令电子从一个原子跳跃到下一个原子的振幅为 $iA/\hbar$ （每单位时间）。

我们目前把电子位于第 n 个原子的振幅 $\langle n|\phi\rangle$ 写成 C_n 。于是式（13.1）就要写成：

$$|\phi\rangle = \sum_n |n\rangle C_n. \quad (13.2)$$

假如我们已经在给定时刻的各个振幅 C_n 取它们的绝对值的平方，就能得到在该时刻观察第 n 个原子时发现电子的概率。

在以后的某个时刻情况将会怎样呢？与我们已经研究过的双态系统相类似，我们认为这种系统的哈密顿方程组应当由下面这样的方程式组成：

$$i\hbar \frac{dC_n(t)}{dt} = E_0 C_n(t) - AC_{n+1}(t) - AC_{n-1}(t). \quad (13.3)$$

右边的第一个系数 E_0 的物理意义是电子如果不能离开一个原子所具有的能量。（我们把什么叫作 E_0 是无所谓的，正像我们已经见到过多次，它只不过表示我们对零点能的选择。）第二项表示电子在单位

时间从第 $(n+1)$ 个陷阱漏到第 n 个陷阱的振幅，最后一项是从 $(n-1)$ 个陷阱漏入的振幅。像往常那样，我们假设 A 是常数（不依赖于 t ）。

为了完全描写任意状态 $|\phi\rangle$ 的行为，对每一个振幅 C_n 都要有像式 (13.3) 那样的一个方程。因为我们要考虑具有大量原子的晶体，我们假设有无限多数目的状态——原子在两个方向上都延伸到无限。（对于有限的情况，我们必须特别注意在端点所发生的过程。）如果基础态的数目 N 是无限大，那么全部哈密顿方程的数目也是无限大！我们只写下典型的例子：

$$\begin{aligned}
 & \vdots & & \vdots \\
 & i\hbar \frac{dC_{n-1}}{dt} = E_0 C_{n-1} - AC_{n-2} - AC_n, \\
 & i\hbar \frac{dC_n}{dt} = E_0 C_n - AC_{n-1} - AC_{n+1}, \\
 & i\hbar \frac{dC_{n+1}}{dt} = E_0 C_{n+1} - AC_n - AC_{n+2}, \\
 & \vdots & & \vdots
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

§13-2 确定能量的状态

我们可以研究许多有关晶格中电子的问题，但我们首先来试试求解有确定的能量的状态。正像我们在早先几章中所看到的，这意味着我们必须找到一种情况，如果振幅要随时间改变的话全都要以同样的频率改变。我们预料解的形式为：

$$C_n = a_n e^{-iEt/\hbar}, \tag{13.5}$$

复数 a_n 是发现电子在第 n 个原子的振幅不随时间改变的部分。假如我们把这个试解代入方程式(13.4)中去试一下, 所得结果为

$$Ea_n = E_0 a_n - Aa_{n+1} - Aa_{n-1}. \quad (13.6)$$

对于无限个未知数 a_n 我们有无限个这样的方程式——吓坏人的。

所有我们必须做的是取行列式.....可是且慢! 当有2, 3或4个方程的时候采用行列式是个好方法。但如果有大量——或无限多——的方程式, 行列式就不很方便了。我们最好试试看直接解这些方程式。首先让我们按照其位置来标记这些原子, 我们说原子 n 在 x_n 处, 原子 $n+1$ 在 x_{n+1} 处。假如原子的间距等于 b ——如图13-1中那样——我们就有 $x_{n+1} = x_n + b$ 。把原点选在第零号原子上, 我们有 $x_n = nb$ 。我们可以把式(13.5)重新写成:

$$C_n = a(x_n)e^{-iEt/\hbar}, \quad (13.7)$$

方程式(13.6)就变成

$$Ea(x_n) = E_0 a(x_n) - Aa(x_{n+1}) - Aa(x_{n-1}). \quad (13.8)$$

或者, 利用 $x_{n+1} = x_n + b$ 这个事实, 我们也可写下

$$Ea(x_n) = E_0 a(x_n) - Aa(x_n + b) - Aa(x_n - b). \quad (13.9)$$

这个方程与微分方程有点类似。它告诉我们一个量 $a(x)$ 在某一点(x_n)的数值和某些相邻点($x_n \pm b$)处的同一物理量的关系。(微分方程把一个函数在某一点上的数值和无限靠近的点上的数值联系了

起来。)或许我们经常用来解微分方程的方法在这里也有效,让我们来试试看。

常系数线性微分方程总能以指数函数作为解。这里我们可以试试同样的解法,我们取试解

$$a(x_n) = e^{ikx_n}. \quad (13.10)$$

于是方程式(13.9)变成

$$E e^{ikx_n} = E_0 e^{ikx_n} - A e^{ik(x_n+b)} - A e^{ik(x_n-b)}. \quad (13.11)$$

我们现在可以消去公因子 e^{ikx_n} , 得到

$$E = E_0 - A e^{ikb} - A e^{-ikb}. \quad (13.12)$$

最后两项正好等于 $(2 A \cos kb)$, 所以

$$E = E_0 - 2A \cos kb. \quad (13.13)$$

我们发现任意 选择一个常数 k 都可以得到一个解, 其能量由上式决定。有许多依赖于 k 的可能能量, 并且每一个 k 对应于一个不同的解。一共有无穷数目的解——这不足为奇, 因为我们开始时就有无穷数目的基础态。

我们来看一看这些解意味着什么。对于每一个 k , a 由式(13.10)给出。于是振幅 C_n 为

$$C_n = e^{ikx_n} e^{-(i\hbar E)t}, \quad (13.14)$$

这里你们应当记住按照式（13.13）能量 E 也依赖于 k 。振幅与空间有关的部分是 e^{ikx_n} 。当我们从一个原子走到下一个原子时振幅随之振荡。

我们说在空间中，振幅就像复数振荡——在每一个原子处，振幅的大小都相同，但是在某一给定的时刻的相位则是一个原子比下一个原子超前一个量（ ikb ）。像我们在图13-2中所画的那样，用竖线来表示每一个原子处振幅的实部，这样我们就可以形象地描绘发生的过程。显然，这些竖线的包络线（如虚线所示）是余弦曲线。 C_n 的虚部也是振荡函数，但相位移动了 90° ，所以绝对值的平方（就是实数部分和虚数部分的平方和）对所有的 C 都相等。

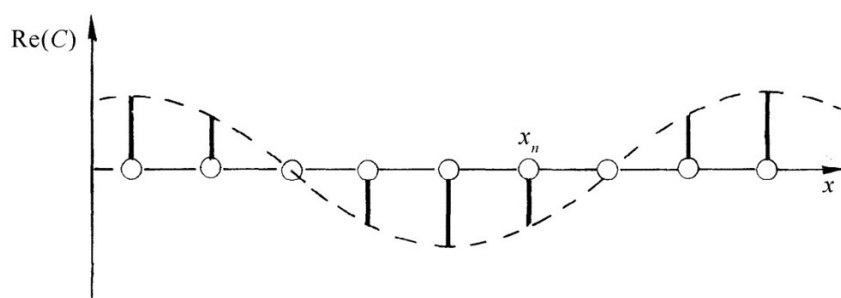


图13-2 C_n 实部随 x_n 的变化

这样，如果我们选定一个 k ，我们就得到一个具有特定能量 E 的定态。而对于任一个这样的状态，电子在每一个原子处都同样可能被发现——对于任何一个原子都不偏爱。对于不同的原子只有相位的不同。随着时间的流逝相位也在改变。由式（13.14），实数部分和虚数部分以波的形式沿着晶体传播——即表达式

$$e^{i[kx_n - (E/\hbar)t]} \quad (13.15)$$

的实数和虚数部分。此波可向正 x 或负 x 传播，取决于我们所选择的 k 的符号。

要注意，我们一直把试解式（13.10）中的数字 k 假设为一个实数。现在我们可以看出，为什么对于无限长的一串原子必须如此。假定 k 是虚数，譬如说 ik' 。那么振幅 C_n 就成为 $e^{k'x_n}$ ，这意味着当我们向正 x 方向——或者负 x 方向，如果 k' 为负数——前进时振幅会越来越大。假如我们处理的是一串有终点的原子链，这样的解倒是很好，但对于无限的原子链，它就不是有物理意义的解了。它会给出无限大的振幅——因此就是无限大的概率——它不可能是实际情况的描述，以后我们将会看到虚数 k 真的是有意义的例子。

式（13.13）所给出的能量 E 和波数 k 之间的关系画在图13-3上。从图上可以看出，能量可从 $k=0$ 处的 $(E_0 - 2A)$ 变化到 $k=\pm\pi/b$ 处的 $(E_0 + 2A)$ 。这个图是对正的 A 画的，如果 A 是负数，曲线只要颠倒过来，但范围仍相同。意味深长的结果是，在一定范围或能“带”内的任何能量都是可能的，但是不可能具有其他能量。按照我们的假设，如果电子在晶体内处于定态，除了这个带内的数值外不可能具有其他的能量值。

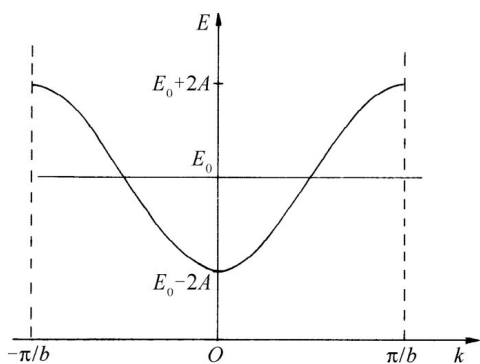


图13-3 作为参量 k 的函数的定态能量

按照式(13.13)，最小的 k 对应于低能态—— $E \approx (E_0 - 2A)$ 。当 k 的数值(向正值或负值方向)增加，能量先是增加，然后在 $k = \pm\pi/b$ 处达到最大值，如图13-3所示。当 k 大于 π/b 时，能量开始减小。但我们并不真正需要考虑 k 的这些数值，因为它们并不给出新的状态——它们只是重复我们在较小的 k 值已经得出的那些状态。用下面的方法我们可以看出这一点。考虑 $k=0$ 的最低能量状态。系数 $a(x_n)$ 对所有的 x_n 都是相同的。现在对 $k=2\pi/b$ 我们将得到同样的能量。由方程式(13.10)我们有

$$a(x_n) = e^{i(2\pi/b)x_n}.$$

然而，取 x_0 为原点，我们令 $x_n = nb$ ，于是 $a(x_n)$ 变成

$$a(x_n) = e^{i2\pi n} = 1.$$

用这些 $a(x_n)$ 描写的状态在物理上和 $k=0$ 状态完全相同。它并不代表不同的解。

作为另一个例子，假定 k 为 $-\pi/4b$ 。 $a(x_n)$ 的实部如图13-4中曲线1所表示的那样变化。如果 k 增大为7倍($k=7\pi/4b$)， $a(x_n)$ 的实部就像图中曲线2那样变化。(当然，整个余弦曲线并无任何意义，有意义的是它们在 x_n 点的数值。曲线只是帮助你了解事情是怎样的。)你看到了 k 的两个值在所有的 x_n 处都给出同样的振幅。

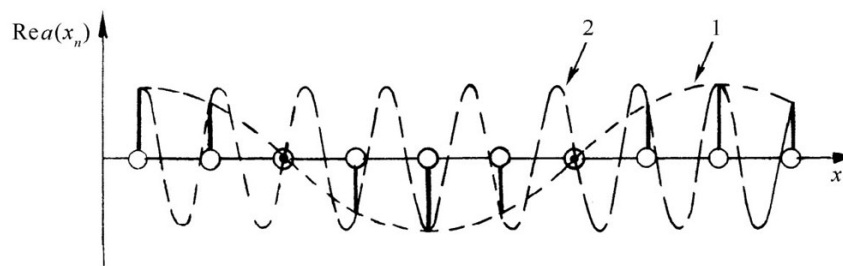


图13-4 描写同一物理情况的 k 的两个数值，曲线1是 $k = -\pi/4b$ ，曲线2是 $k = 7\pi/4b$

结论是，我们只要取某个有限范围内的 k 就得到问题的所有可能的解。我们取 $-\pi/b$ 到 $+\pi/b$ 这一范围——图13-3所示的范围。在这个范围内定态能量随 k 的大小的增加而增加。

你们会注意到一个附带的问题。假如电子不是只能以振幅 $iA/\hbar$ 跳到最靠近的原子，并且还可能以另外某个振幅 $iB/\hbar$ 直接跳到下一个近邻原子。你们会发现也可以把解写成 $a_n = e^{ikx_n}$ 的形式——这种形式的解是普适的。你们还会发现具有波数 k 的定态具有能量（ $E_0 - 2A \cos kb - 2B \cos 2kb$ ）。这表明 E 对 k 的曲线的形状不是普遍的，而取决于问题的具体假设。它并不一定是余弦曲线——甚至不一定对某一水平线对称。然而，曲线在 $-\pi/b$ 到 π/b 的区间外一定重复它在这一区间内的形状，所以你不必为其他的 k 值操心。

让我们更为仔细地考察一下 k 值很小的情形——即当振幅从一个 x_n 到下一个的变化十分缓慢的情形。假定我们通过定义 $E_0 = 2A$ 来选择能量的零点，那么图13-3中曲线的最小值就在能量为零处。对于足够小的 k ，我们可以把 $\cos kb$ 写成

$$\cos kb \approx 1 - \frac{k^2 b^2}{2},$$

式 (13.13) 的能量就变成

$$E = Ak^2 b^2. \quad (13.16)$$

我们得到状态的能量正比于波数的平方，这波数描写振幅 C_n 的空间变化。

§13-3 与时间有关的状态

在这一节中我们想较为详细地讨论一下一维晶格中的状态的行为。假如一个电子在 x_n 处的振幅是 C_n ，找到它在那儿的概率是 $|C_n|^2$ 。对于式 (13.14) 描写的定态，这个概率对所有的 x_n 都相同并且不随时间变化。我们怎样来表示一个具有确定能量的电子处在某一定的区域这样的状态呢？这个电子在某个地方比在另外的地方更容易被找到。我们可以用好几个像式 (13.14) 那样但 k 值略微不同——因而能量略微不同——的解的叠加来表示。那么由于各项之间的干涉至少在 $t=0$ 时振幅 C_n 将随位置而变。就像不同波长的波叠加时产生拍（我们在第1卷第48章已讨论过这一情形）。所以我们可以用中心占优势的 k_0 ，以及 k_0 附近的其他波数构成一个“波包”^[1]。

在我们的定态叠加中，不同 k 的振幅代表能量稍微不同的状态，也就是频率稍有不同的状态，因此总的 C_n 的干涉图样将随时间而变——就会出现“拍”的图样。我们在第1卷第48章中已经看到，拍的峰 $[|C(x_n)|^2 \text{ 大的地方}]$ 将随时间沿着 x 运动，它们以我们称之为

“群速度”的速率运动。我们发现这个群速度与 k 随频率变化的关系为：

$$v_{\text{群}} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (13.17)$$

这一关系在此同样有效。成为一“团”的电子态——即 C_n 在空间的变化像图13-5中的波包那样——沿着我们的一维“晶体”以等于 $d\omega/dk$ 的速率 v 运动，其中 $\omega = E/\hbar$ 。对能量 E 应用式（13.16），我们得到（略去 $v_{\text{群}}$ 的下标写成 v ）

$$v = \frac{2Ab^2k}{\hbar}. \quad (13.18)$$

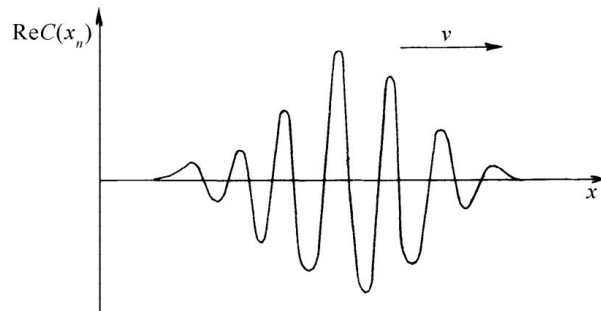


图13-5 对于能量相近的几个状态的叠加的 $C(x_n)$ 的实部作为 x 的函数（在图中 x 的标度上间隔 b 非常小。）

换句话说，电子以正比于中心 k 值的速率运动。式（13.16）表明这种电子的能量正比于它的速度的平方——它表现像个经典粒子。只要我们在足够大的尺度上进行考察而不去计较精细结构，我们的量子力学图像就开始给出经典物理那样的结果。事实上，假如我们由方程式（13.18）解出 k 并把它代入式（13.16），我们可将能量 E 写成：

$$E = \frac{1}{2} m_{\text{有效}} v^2, \quad (13.19)$$

其中 $m_{\text{有效}}$ 是一个常数。就像经典粒子那样波包中电子的额外“运动能量”取决于速度。常数 $m_{\text{有效}}$ ——称作“有效质量”——由

$$m_{\text{有效}} = \frac{\hbar^2}{2Ab^2} \quad (13.20)$$

给出。并且注意，我们可以写出

$$m_{\text{有效}} v = \hbar k. \quad (13.21)$$

如果我们把 $m_{\text{有效}} v$ 叫做“动量”，它和波数 k 的关系就和我们以前讲过的自由粒子的情况一样。

不要忘记 $m_{\text{有效}}$ 和电子的实际质量并没有什么关系，它们可以很不相同——虽然在实际晶体中，它们往往同数量级，有效质量大约是自由空间电子质量的2到20倍。

我们现在已经说明了一个奇怪而不可思议的事件——晶体中的电子（例如放进锗里的一个额外电子）怎么能一直穿过晶格运动，即使它与所有的原子碰撞也能完全自由地流动。它是这样的：电子的振幅噼叭-噼叭-噼叭地从一个原子跳到下一个原子，奋力挤过晶体。这就是固体能导电的缘故。

§13-4 三维晶格中的电子

让我们花一点时间来考察一下怎样能把同样的概念应用到三维晶格中电子的运动上。我们发现其结果与一维情况十分类似。假设我们有一原子的长方格，在3个方向上的格点间隔分别为 a ， b ， c 。（如果你要一个立方格就取3个间隔相等。）假设在 x 方向跳到相邻原子上的振幅是 $(iA_x/\hbar)$ ，在 y 方向跳跃是 $(iA_y/\hbar)$ ，在 z 方向跳跃是 $(iA_z/\hbar)$ ，现在我们应该如何描写基础态呢？就像一维情况那样，一个基础态代表电子在位于 x ， y ， z 处的原子上，这里 (x, y, z) 是晶格的一个格点。把原点选在一个原子上，所有这些点都位于

$$x=n_x a, \quad y=n_y b, \quad \text{以及} \quad z=n_z c.$$

其中 n_x ， n_y ， n_z 是任意3个整数。现在我们用 x ， y 和 z 而不用下标来表示这种点，把它们理解为只取晶格上的数值。于是，基础态由符号 $|\text{电子在}x, y, z\rangle$ 来表示，在某一状态 $|\psi\rangle$ 的电子处在此基础态中的振幅 $C(x, y, z) = \langle \text{电子在}x, y, z | \psi \rangle$ 。

像以前一样，振幅 $C(x, y, z)$ 可以随时间改变。按照我们的假设，哈密顿方程应为：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC(x, y, z)}{dt} = & E_0 C(x, y, z) - A_x C(x+a, y, z) - A_x C(x-a, y, z) \\ & - A_y C(x, y+b, z) - A_y C(x, y-b, z) \\ & - A_z C(x, y, z+c) - A_z C(x, y, z-c). \end{aligned} \quad (13.22)$$

它看起来相当长，但你能理解其中各项是怎样来的。

我们可以再来试求这样的定态，其中所有的 C 都以同样方式随时间变化。其解仍是指数式：

$$C(x, y, z) = e^{-iEt/\hbar} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (13.23)$$

如果把这个式子代入式（13.22），你就会看出它是合适的解，如果能量 E 以下面的方式和 k_x ， k_y 和 k_z 相联系就可以了：

$$E = E_0 - 2A_x \cos k_x a - 2A_y \cos k_y b - 2A_z \cos k_z c. \quad (13.24)$$

现在能量依赖于3个波数 k_x ， k_y ， k_z 。顺便提一下，它是三维矢量 $\mathbf{k}$ 的分量。事实上，我们可以用矢量记法来表示式（13.23）：

$$C(x, y, z) = e^{-iEt/\hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (13.25)$$

振幅的变化就像在 $\mathbf{k}$ 的方向上运动的三维复平面波，具有波数 $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ 。

与这些定态相联系的能量按式（13.24）给出的复杂方式依赖于 $\mathbf{k}$ 的3个分量。 E 随 $\mathbf{k}$ 变化的性质依赖于 A_x ， A_y 和 A_z 的相对的符号和大小。如果这3个数都是正的，并且我们只对小的 k 值感兴趣，它们的关系就比较简单。

像以前得出式（13.16）时所做的那样，我们把余弦展开，就能得到

$$E = E_{\min} + A_x a^2 k_x^2 + A_y b^2 k_y^2 + A_z c^2 k_z^2. \quad (13.26)$$

对于格点间隔为 a 的简单立方格，我们认为 A_x ， A_y 和 A_z 都相等——譬如说正好都是 A ——我们就有

$$E = E_{\min} + A a^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

或

$$E = E_{\min} + Aa^2 k^2, \quad (13.27)$$

这恰巧和式(13.16)相同。按照这里所采用的论据，我们断定：三维的电子波包（由近乎相等的许多能量的状态叠加而成）也像具有某一有效质量的经典粒子一样运动。

在对称性较立方形为低的晶体中（或者即使在立方晶体中但每个原子上的电子状态不对称）3个系数 A_x ， A_y 和 A_z 是不同的。那么，电子的局限在一个小范围内的“有效质量”依赖于它的运动方向。例如，它在 x 方向运动和在 y 方向运动就可能有不同的惯性。（这种情形的细节常用所谓“有效质量张量”来描写。）

§13-5 晶格中的其他状态

按照式(13.24)，我们所讨论的电子状态只能具有某一能“带”中的能量，其能量范围从最小能量

$$E_0 - 2(A_x + A_y + A_z)$$

到最大能量

$$E_0 + 2(A_x + A_y + A_z).$$

其他能量也是可能的，但它们属于另一级电子状态。对于我们已经描述过的状态，我们设想的基础态是电子位于在某种特定状态，例如最低能量状态的晶体中的一个原子上。

假定在虚空空间中有一个原子，加上一个电子就构成一个离子，这个离子可以按多种方式形成。电子的加入可以构成最低能量的状态，也可以构成离子的其他各种可能“激发态”，每一个激发态的能量都高于最低能量。同样的情形在晶体中也会发生。让我们假定上面选定的能量 E_0 相当于离子处于最低的可能能量的基础态的能量。我们也可以设想一组新的基础态，其中电子以一种不同的方式位于第 n 个原子附近——即离子的一个激发态——所以现在能量 E_0 较前高得多。像以前一样，电子有某一振幅 A （与前面的不同）从一个原子的激发态跳到相邻原子的同一激发态。整个分析过程和以前一样，我们找到中心能量较高的可能的能带。一般地说，可以有許多这样的能带，每一能带相当于一个不同的激发能级。

也有另外一些可能性。电子也可能具有一些振幅从一个原子的激发态跳到相邻原子的非激发态。（这称为能带间的相互作用。）当你计入越来越多的能带，加进越来越多的可能的状态之间的漏泄系数，其数学理论就变得越来越复杂。然而，这里并没有提出新的概念，方程式的建立仍和我们在简单的例子中所做的一样。

我们还应当指出，关于出现在上述理论中的各个系数，诸如振幅 A 等，没有更多的可说了。一般说来，这些系数是很难计算的，所以在实际情况中理论上关于这些参数所知极少，对于任何特定的实际情况，我们只能通过实验测定数值。

还有另一些情况，其中的物理和数学与我们对晶体中运动的电子所得出的几乎完全一样，但其中运动的“客体”却完全不同。例如，假定我们开始时讨论的晶体——或者更确切地说线型晶格——是排成一直线中性原子，每一个原子都有一个束缚得很松的外层电子。设想

我们去掉一个电子，哪一个原子失去了它的电子呢？用 C_n 表示从位于 x_n 的原子上失去电子的振幅。一般说来，相邻原子——譬如说第 $(n-1)$ 个原子——上的电子具有振幅 $iA/\hbar$ 跳到第 n 个原子上而留下一个失去电子的第 $(n-1)$ 个原子。这等于说“失去的电子”具有振幅 A 从第 n 个原子跳到第 $(n-1)$ 个原子。你们可以看到方程式将会完全相同——当然， A 的数值不必要和我们前面的相同。我们又会得到能级的、有关式 (13.18) 表示的群速度通过晶体运动的概率“波”，以及关于有效质量等等同样的公式。只不过现在的波描写失去的电子——就是所谓的“空穴”——的行为。所以“空穴”就像具有确定质量 $m_{\text{有效}}$ 的粒子那样行动。你们可以看出这种粒子表现出带有正电荷。关于这种空穴，在下一章我们还将进一步讨论。

作为另一个例子，我们考虑在排成一线的相同中性原子，其中有一个原子已经处在激发态——就是说它具有比正常的基态更高的能量。令 C_n 是第 n 个原子激发的振幅。它能和邻近的原子作用，把过多的能量移交给邻近的原子而回到基态。把这种过程的振幅叫做 $iA/\hbar$ 。你可以看出有关的数学和以前的完全相同。现在运动的客体被称为激子。它的行为就像一个中性“粒子”，带着激发能量穿过晶体运动。这类运动可以发生在某些生物学的过程中，像视觉或光合作用。我们猜想在视网膜中吸收了一个光子产生一个“激子”，它穿过某种周期性构造（如我们在第1卷第36章中描写的视杆细胞中的层状结构图36-5）运动，并且被积聚到某个特殊位置，能量在此地被用来引起化学反应。

§13-6 在不完整的晶格上的散射

我们现来考虑在不完美的晶体中的单个电子。我们以前的分析表明，完美晶体具有极好的传导性——电子可以无摩擦地滑过晶体，就像在真空中一样。能使不停地运动着的电子停下来的最重要因素是晶体中的不完整性或不规则性。作为一个例子，如果晶体中某一个地方少掉一个原子，或者如果某一个人在某个原子的位置上摆错了一个原子，从而比之于其他的原子位置来这里的情况就不同了。譬如说能量 E_0 或振幅 A 就会不同。那么我们怎样来描写所发生的事呢？

为明确起见，我们回到一维的情况，并且假设第“零”号原子是一个“杂质”原子。它具有和其他原子不同的 E_0 值，我们令这个能量是 $(E_0 + F)$ 。会发生些什么呢？当电子到达“零”号原子处时，电子有向后散射的概率。假设一个波包向前运动，当它来到一个情况稍有不同的地方，波包的一部分继续前进，而另一部分则被反弹回去。这一情形很难用波包来分析，因为每样东西都随时间变化。用定态解来处理就方便多了。所以我们用定态来处理，我们将发现定态可以由透射和反射两部分连续波构成。在三维空间中，我们把反射部分称为散射波，因为它可向各个方向散开。

我们从和式 (13.6) 类似的一组方程式开始，只是其中 $n=0$ 的方程式和所有其余的方程都不同。对于 $n=-2, -1, 0, +1$ 和 $+2$ 的5个方程式是这样的：

$$\begin{aligned}
& \vdots & & \vdots \\
& E a_{-2} = E_0 a_{-2} - A a_{-1} - A a_{-3}, \\
& E a_{-1} = E_0 a_{-1} - A a_0 - A a_{-2}, \\
& E a_0 = (E_0 + F) a_0 - A a_1 - A a_{-1}, \\
& E a_1 = E_0 a_1 - A a_2 - A a_0, \\
& E a_2 = E_0 a_2 - A a_3 - A a_1, \\
& \vdots & & \vdots
\end{aligned} \tag{13.28}$$

当然，所有其他方程式的 $|n|$ 都大于2。它们看起来都与式（13.6）相同。

对于一般的情况，我们对电子跳向和跳离“零”号原子的振幅实际上应该用不同的 A ，但从所有的 A 都相等的简化例子中还是能够看到所发生过程的主要面貌。

式（13.10）仍可作为所有的方程式的解，只是“零”号原子的方程式除外——它对这个方程式不适用。我们需要一个不同的解，我们能下面的方法把它打造出来。式（13.10）表示沿正 x 方向进行的波。沿负 x 方向进行的波也是同样好的解，它可以写成：

$$a(x_n) = e^{-ikx_n}.$$

式（13.6）的最普遍的解将是向前和向后的波的组合，即

$$a_n = \alpha e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n}, \tag{13.29}$$

这个解表示一振幅为 α 沿 $+x$ 方向传播的复波和一振幅为 β 沿 $-x$ 方向传播的波。

现在看一看我们新的问题的一组方程式——在式（13.28）中的以及所有其他原子的那些方程。包含 $n \leq 1$ 的 a_n 的方程式都能被式（13.29）满足，只要 k 和 E 以及和晶格间隔 b 的关系满足下述条件：

$$E = E_0 - 2A \cos kb, \quad (13.30)$$

其物理意义是，振幅为 α 的“入射”波从左边趋向“零”号原子（“散射原子”），振幅为 β 的“散射”或“反射”波向左边退回去。假如我们令入射波的振幅 α 等于1并不会失去任何普遍性。而一般说来 β 是一个复数。

关于 $n \geq 1$ 的 a_n 的解我们也可同样处理。但系数可能是不同的，所以我们有

$$a_n = \gamma e^{ikx_n} + \delta e^{-ikx_n}, \text{ 对于 } n \geq 1. \quad (13.31)$$

其中 γ 是向右传播的波的振幅， δ 是从右边来的波。我们考虑这种物理情况，波起初只从左边发出，并且从散射原子——或者说杂质原子——后面出射的只有“透射”波。我们试求 $\delta=0$ 的解。我们肯定能用下面的试解使除了式（13.28）中间的3个式子以外的所有 a_n 的方程式都满足

$$\begin{aligned} a_n(\text{对于 } n < 0) &= e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n}, \\ a_n(\text{对于 } n > 0) &= \gamma e^{ikx_n}. \end{aligned} \quad (13.32)$$

我们所谈论的情形画在图13-6中。

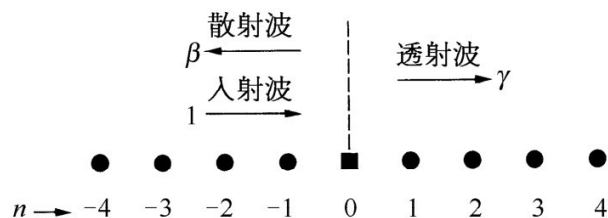


图13-6 在 $n=0$ 处有一个“杂质”原子的一维晶格中的波

将式 (13.32) 中的公式用于 a_{-1} 和 a_{+1} ，我们可以从式 (13.28) 中间的3个方程解出 a_0 和两个系数 β 和 γ 。从而我们就得到完整的解。设 $x_n = nb$ ，我们需要解3个方程式：

$$\begin{aligned} (E - E_0) \{ e^{ik(-b)} + \beta e^{-ik(-b)} \} &= -A \{ a_0 + e^{ik(-2b)} + \beta e^{-ik(-2b)} \}, \\ (E - E_0 - F) a_0 &= -A \{ \gamma e^{ikb} + e^{ik(-b)} + \beta e^{-ik(-b)} \}, \\ (E - E_0) \gamma e^{ikb} &= -A \{ \gamma e^{ik(2b)} + a_0 \}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

记住 E 是通过式 (13.30) 用 k 来表示的。如果你把 E 的这个值代入方程式，并且记住 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ，从第一个方程式得到

$$a_0 = 1 + \beta, \quad (13.34)$$

以及从第三个方程式得到

$$a_0 = \gamma, \quad (13.35)$$

要上面两个式子一致，必须：

$$\gamma = 1 + \beta. \quad (13.36)$$

这个式子表明，透射波 (γ) 正好等于原来的入射波 (1)，加上反射波 (β)。这并不总是正确的，只是对一个原子的散射碰巧如此。如

果有一群杂质原子，加到向前传播的波上的数量就不一定和反射波相同。

我们可以从式（13.33）中间的方程式得到反射波的振幅 β ，我们求得

$$\beta = \frac{-F}{F - 2iA \sin kb}. \quad (13.37)$$

我们得到了具有一个异常原子的晶格的完全解。

你可能会感到奇怪，从式（13.34）中表示出，透射波怎么会比入射波“更多”。但是记住 β 和 γ 是复数，并且波中的粒子数目（更确切地说是找到粒子的概率）正比于振幅绝对值的平方。事实上，仅当

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \quad (13.38)$$

时才会有“电子守恒”。你可以证明我们的解满足这一关系。

§13-7 被晶格的不完整性陷俘

假如 F 是负数就会出现另一个有趣的情况。如果电子的能量在杂质原子（在 $n=0$ ）中比在其他任何地方都低，那么电子可能被这个原子捕获。这就是说，如果 $(E_0 + F)$ 低于能带底 $(E_0 - 2A)$ ，那么电子可能被“陷俘”在 $E < E_0 - 2A$ 的状态中。按照我们到现在为止所讨论过的内容是得不出这样的解的。然而，如果我们在所取的试解式（13.10）中允许 k 为虚数，我们就能求得这一解。设 $k = i\kappa$ 。同样，对于 $n < 0$ 和 $n > 0$ 仍可有不同的解。对 $n < 0$ 的一个可能解是

$$a_n(\text{对于 } n < 0) = c e^{+\kappa x_n}. \quad (13.39)$$

我们应当在指数上取正号，否则 n 为大的负值时，振幅将会变为无限大。同样，对于 $n > 0$ 的一个可能解将是

$$a_n(\text{对于 } n > 0) = c' e^{-\kappa x_n}. \quad (13.40)$$

如果我们把这些试解代入式（13.28），假如

$$E = E_0 - A (e^{\kappa b} + e^{-\kappa b}), \quad (13.41)$$

则除了中间的3个式子，其余的式子都可满足。因为两个指数项的和总是大于2，这个能量在正常能带的下面，而这正是我们所要求的。如果 $a_0 = c = c'$ ，并按下式来选定 κ ：

$$A (e^{\kappa b} - e^{-\kappa b}) = -F, \quad (13.42)$$

式（13.28）中余下的3个方程式皆可满足。把这个方程式和式（13.41）结合起来，我们就能得到被陷俘的电子的能量，我们得到

$$E = E_0 - \sqrt{4A^2 + F^2}, \quad (13.43)$$

陷俘电子有单值的能量——在稍低于导带的地方。

注意，式（13.39）和式（13.40）所给出的振幅并不表示陷俘电子正好位于杂质原子上。在附近的原子中找到电子的概率正比于这些振幅的平方。对于特别选择的一组参数，它可能像图13-7中的长条图那样变化。在杂质原子上找到电子的概率最大。对于附近的原子，概率随着离开杂质原子的距离的增加指数式地下降。这是“势垒穿透”的

又一个例子。从经典物理学的观点来看，电子并没有足够的能量能从陷阱中心的能量“空穴”中跑出来。但是按照量子力学它却可以泄漏跑出一小段距离来。

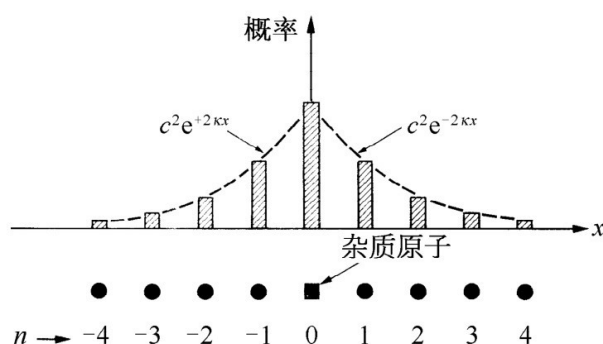


图13-7 在陷阱杂质原子附近的原子上找到陷阱电子的相对概率

§13-8 散射振幅和束缚态

最后，我们的例子可以用来说明当前在高能粒子物理学中一个很有用的观点。这牵涉到散射振幅和束缚态之间的关系问题。假定我们已经发现了——通过实验和理论分析—— π 介子被质子散射的方式。于是一个新的粒子被发现了，并且有人怀疑这是否只是 π 介子和质子结合在一起形成的某种束缚态（和电子束缚在质子周围组成氢原子的方式相似）。所谓束缚态我们指的是一种组合，具有比两个自由粒子更低的能量。

有一个普遍的理论，它告诉我们具有这样的能量将存在束缚态：如果用代数方法外推（数学名称叫“解析延拓”）到所允许能带的能量范围以外时散射振幅变为无穷大。

这一理论的物理思路如下：束缚态是这样一种状态，它只有束缚在一定位置上的波而不是由外来的波激起的，它只是自身存在着。所谓“散射”或产生的波和被“送入”的波的相对比例是无限大。我们可以在我们这个例子中检验这个观念。让我们直接用被散射粒子的能量 E （而不用 k ）来写出表示散射振幅的表式（13.37）。因为式（13.30）可以写成：

$$2A \sin kb = \sqrt{4A^2 - (E - E_0)^2},$$

散射振幅为

$$\beta = \frac{-F}{F - i \sqrt{4A^2 - (E - E_0)^2}}, \quad (13.44)$$

根据我们推导过程的要求，这个方程式只适用于真实状态——那些能量处在能带 $E = E_0 \pm 2A$ 之中的状态。但是假定我们忘记了这个事实并且把公式扩展到 $|E - E_0| > 2A$ 的“非物理的”能量区域。对于这些非物理的区域我们可以写出^[2]：

$$\sqrt{4A^2 - (E - E_0)^2} = i \sqrt{(E - E_0)^2 - 4A^2}.$$

于是“散射振幅”（不管它意味着什么）就是：

$$\beta = \frac{-F}{F + \sqrt{(E - E_0)^2 - 4A^2}}. \quad (13.45)$$

现在我们要问：有没有使得 β 变成无限大的能量（即在这个能量对 β 的表达式有一个“极点”）？有的，只要 F 是负数，当

$$(E - E_0)^2 - 4A^2 = F^2$$

时，或者

$$E = E_0 \pm \sqrt{4A^2 + F^2},$$

式（13.45）的分母就是零。由上式的负号所给出的能量正是我们在式（13.43）中得出的陷俘能量。

正号表示什么呢？由它给出的能量高于允许的能带。的确，那里有另一个束缚态，我们在求解式（13.28）时没有考虑到它。我们把求这个束缚态的能量和振幅 a_n 作为一个智力测验留给你们。

对于探求当前新的奇异粒子的实验观察的解释，散射和束缚态之间的关系提供了一个最有用的线索。

[1] 倘若我们不想使波包太窄。

[2] 这里根号前符号的选择是与式（13.39）和式（13.40）中允许的 κ 的符号有关的技术问题。我们在这里不作讨论。

第14章 半导体

§14-1 半导体中的电子和空穴 [\[1\]](#)

近年来一个引人注目的发展是把固体科学应用于像晶体管之类的电器件的技术发展。对半导体的研究导致它们的有用性质以及大量的实际应用的发现。这个领域的变化如此之快以至于我们今天告诉你们的东西到了明年就可能不再正确了。它肯定是不完善的。非常清楚，由于对这些材料的不断研究，随着时间的推移将会出现许多新的和更惊人的事物。为了学习这一卷中以后各章的内容，你们不一定非要弄懂这一章不可。但是，看到所学的内容中至少有一部分与现实世界有关时你们会感兴趣的。

已知的半导体种类很多，但我们将着重于现在有最大技术应用价值的半导体。这些也是了解得最清楚的，了解了它们，对其他许多半导体也将会得到一定的了解。今天最常用的半导体物质是硅和锗。这些元素结晶形成金刚石晶格，这是一种立方结构，其中一个原子和最靠近的4个原子形成四面体键。虽然在室温下它们多少有点导电，但在很低的温度时——近于绝对零度——它们是绝缘体，它们不是金属；它们被称作半导体。

假如我们以某种方法在处于低温的硅或锗晶体中放入一个额外的电子，我们就遇到上一章中所描写的那种情况。这个电子会在晶体中游荡，从一个原子跳到下一个原子。实际上我们只讨论过长方格中的

电子，而对于真实的硅或锗的晶格，方程式多少有点不同。不过，所有的基本特征都可用长方格的结果来说明。

正如我们在第13章中曾经看到的，这些电子只能具有某一定能带——叫做导带——中的能量。在这个带中，能量和概率幅 C 的波数 $\mathbf{k}$ 的关系（见式13.24）是

$$E = E_0 - 2A_x \cos k_x a - 2A_y \cos k_y b - 2A_z \cos k_z c. \quad (14.1)$$

式中的 A 是在 x ， y 和 z 方向上跳跃的振幅， a ， b 和 c 是这些方向上的晶格间隔。

当能量近于能带底时，可以取式（14.1）的近似（参见§13-4）：

$$E = E_{\min} + A_x a^2 k_x^2 + A_y b^2 k_y^2 + A_z c^2 k_z^2. \quad (14.2)$$

如果我们考虑电子在某个特殊方向上运动，使得 $\mathbf{k}$ 的3个分量总有相同的比例。能量是波数的二次函数——和电子的动量的关系一样。我们可以写成：

$$E = E_{\min} + \alpha k^2, \quad (14.3)$$

其中 α 是某一常数。我们可以画出 E 对 $\mathbf{k}$ 的函数图。如图14-1所示。我们把这种图称为“能量图”。一个处于特定能量和动量状态的电子可以用图上的一点（如 S 点）来表示。

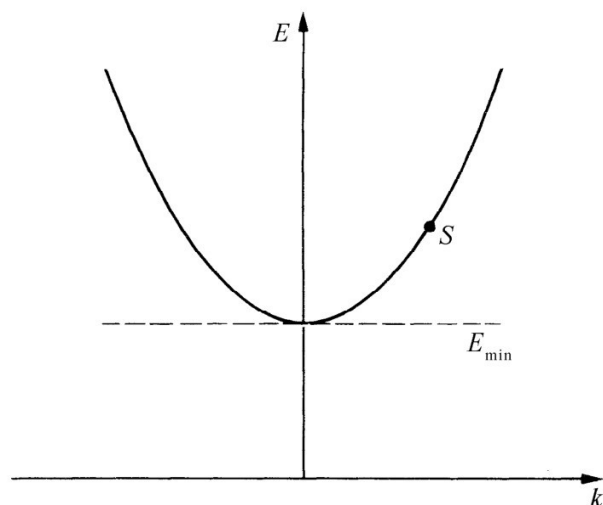


图14-1 电子在绝缘晶体中的能量图

正像我们在第13章中也曾讲过的，如果我们从中性绝缘体上取走一个电子，我们就有类似的情况。于是，一个电子可以从附近的原子上跳过来填充这个“空穴”，而在原来的原子处留下了另一个“空穴”。我们可以通过写出在任一特定原子处找到空穴的振幅，以及说明空穴可以从一个原子跳到下一个原子来描写它的行为。（显然，空穴从原子*a*跳到原子*b*的振幅*A*正好和原子*b*上的一个电子跳进原子*a*的空穴的振幅相同。）对于空穴和对于额外的电子，它们的数学式子完全相同。我们再次得出空穴的能量和它的波数的关系由和式（14.1）或式（14.2）相同的方程式表示出来。当然振幅*A_x*，*A_y*和*A_z*的数值是不同的。空穴的能量和它的概率幅的波数有关。它的能量处在有限能带中。在能带底附近，它的能量随波数——或动量——的平方变化，如图14-1所示。按照§13-3的论证，我们将发现空穴的行为也像具有一定的有效质量的经典粒子一样，——只是在非立方晶体中质量依赖于运动的方向。所以空穴就像一个在晶体中运动的带正电的粒子。空穴粒子的电荷是正的。因为它在于失去电子的位置；当它在一个方向上运动时，实际上是电子在相反的方向上运动。

假如我们在中性晶体中放进几个电子，它们将像低气压气体中的原子那样四处活动。假如电子不很多，它们之间的相互作用不十分重要。如果我们在晶体上加上电场，电子就开始运动，于是有电流流过。最终电子都被拉向晶体的一边，如果那里有一个金属电极，电子都要被电极收集，而晶体又变成中性。

同样我们可以把很多空穴放进晶体。在没有外加电场时，它们将随机地到处活动。在电场作用下它们要向负端流动并被“收集”——实际上发生的是它们被自金属电极来的电子中和。

晶体中也可以同时存在空穴和电子。如果它们的数目不多，它们将各自独立地运动。加上电场，它们都对电流作出贡献。由于明显的理由，电子被称为负载流子，空穴被称作正载流子。

到现在为止，我们考虑的电子是从外面放进晶体的，或把电子取走造成空穴。我们也可以这样来“创造”一个电子-空穴对：从一个中性原子上取走一个被束缚的电子并把它放到同一晶体中一定距离外的地方。于是我们就有一个自由电子和一个自由空穴，两者都能像我们已经描写过的那样运动。

把一个电子放进状态 S ——我们说“产生”状态 S ——所需的能量就是图14-2中所标出的能量 E^- 。它是高于 $E_{\min}^-$ 的某个能量。“产生”处于某一状态 S' 的一个空穴所需的能量是图14-3中的能量 E^+ ，它是比 $E_{\min}^+$ 大的某个能量，如果现在我们要产生在状态 S 和 S' 的电子空穴对，所需的能量就等于 E^-+E^+ 。

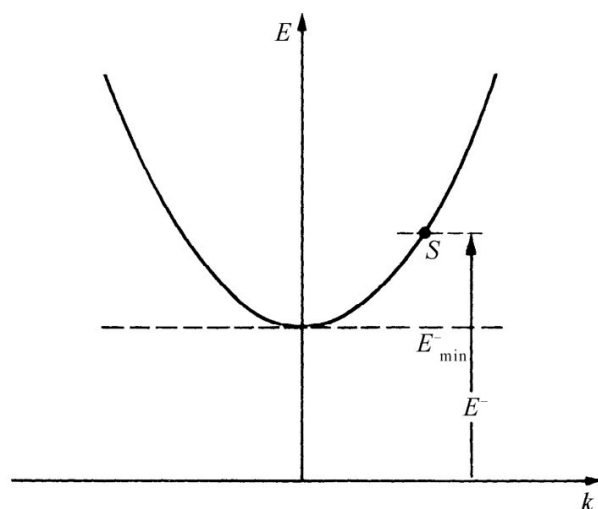


图14-2 “产生”一个自由电子需要能量 E^-

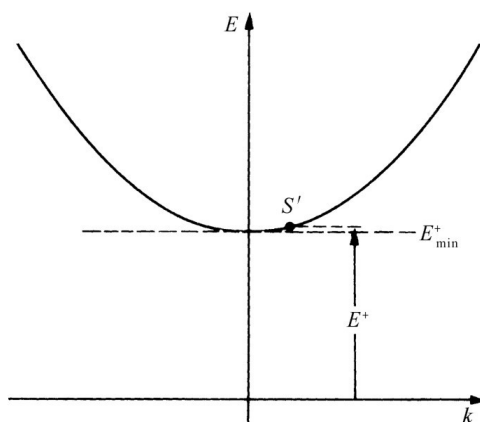


图14-3 “产生”一个在 S' 态的空穴需要能量 E^+

电子空穴对的产生是一个共生的过程（我们以后将会看到），所以很多人喜欢把图14-2和图14-3放在同一张图上——把空穴能量向下画，虽然它实际上是正能量。我们用这种方式把两个图合起来画在图14-4中。这种图的好处是产生处于 S 中的电子和处于 S' 中的空穴这一电子-空穴对所需的能量 $E_{\text{偶}} = E^- + E^+$ 正好等于 S 和 S' 间的垂直距离，如图14-4所示。产生一个电子-空穴对所需的最小能量称为“隙”能，它等于 $E_{\text{min}}^- + E_{\text{min}}^+$ 。

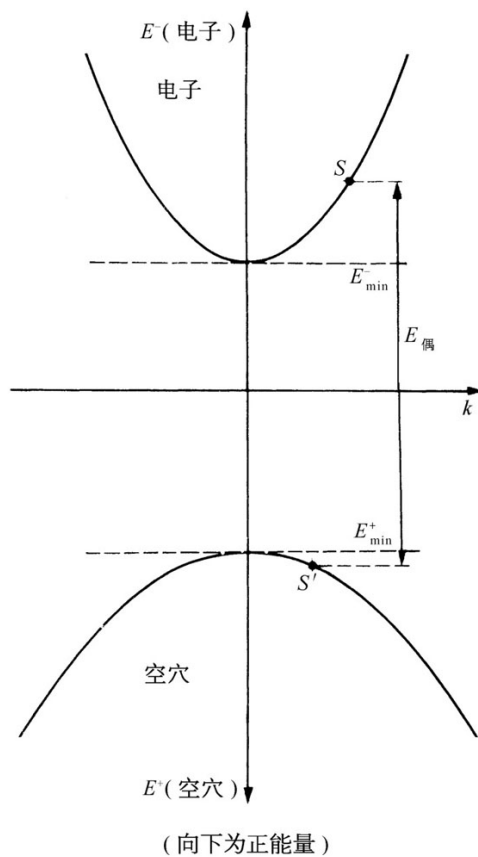


图 14-4 电子和空穴画在一起的能量图

有时你会看到一种比较简单的图，称作能级图。当人们对变量 k 不感兴趣时就画这种图。这样的图——如图14-5所示——只表示电子和空穴的可能的能量[2]。

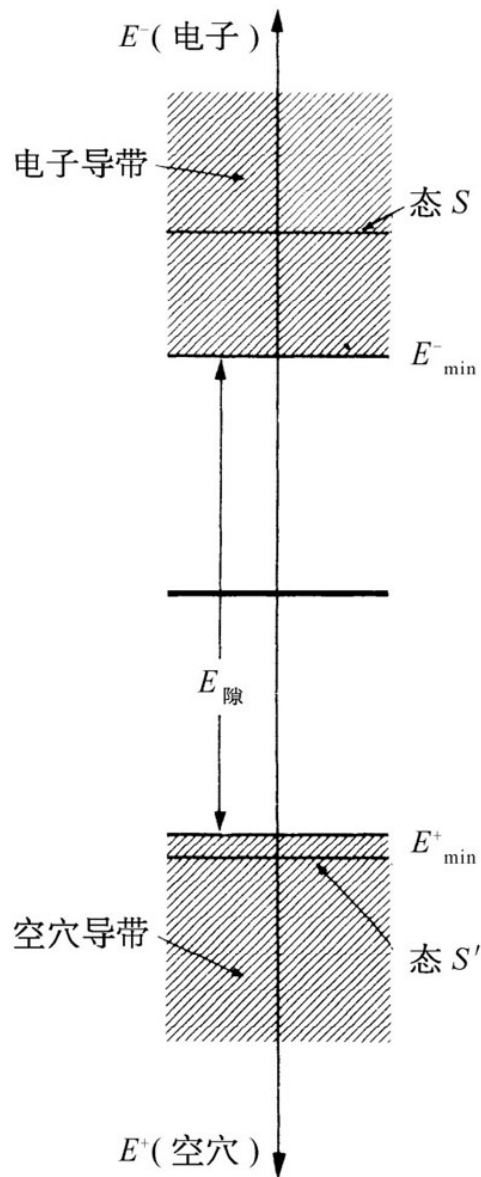


图14-5 电子和空穴的能级图

怎样创造出电子-空穴对呢？有几种方法。例如，吸收光或X射线的光子，如果光子能量高于隙的能量就会产生电子-空穴对。电子-空穴对的产生率正比于光的强度。如果在晶片两边镀上两片电极并加上“偏置”电压，电子和空穴就会被拉向电极。电路中的电流将正比于光的强度。这就是产生光电导现象和光电导管作用的机理。

电子-空穴对也可用高能粒子来产生。当快速运动的带电粒子——例如能量为几十或几百MeV的质子或 π 介子——穿过晶体时，它的电场会把电子从它的束缚态撞击出来产生电子-空穴对。在径迹的每1毫米路程上会发生几十万次这样的事件。粒子通过以后，载流子能够被收集起来，这样就得到一个电脉冲。这就是近来在核物理实验中使用的半导体计数器的作用机理。这类计数器并不一定需要半导体，也可以用晶态绝缘体制造。事实上，第一个这种计数器是用金刚石晶体制造的，它在室温下是绝缘体。如果要使电子和空穴能够自由地运动到电极上而不被陷阱，就需要非常纯的晶体。采用半导体硅和锗是因为能将它们制造成高纯度的适当大小（厘米的线度）的晶体。

迄今为止我们只涉及温度接近绝对零度的半导体晶体。在任何有限的温度下，还有另一种产生电子-空穴对的机理。产生电子-空穴对的能量可由晶体的热能提供，晶体热振动可以把它们的能量转移给电子-空穴对——引起“自发”产生。

单位时间内，像隙能 $E_{\text{隙}}$ 那样大的能量聚集到一个原子的位置上的概率正比于 $e^{-E_{\text{隙}}/kT}$ ，其中 T 是温度， k 是玻尔兹曼常数（参见第1卷第40章）。在绝对零度附近没有可以觉察的概率，但随着温度的增加，产生电子-空穴对的概率就增加。在任何有限的温度下，对的产生以恒定的速率不断继续下去，负的和正的载流子越来越多。当然，这是不会发生的，因为过了一会儿，电子和空穴会偶然地相遇——电子落进空穴并把多余的能量交给晶格。我们说电子和空穴“湮没”了。在单位时间内空穴和电子有一定的概率相遇，于是它们互相湮没。

假定单位体积的电子数为 N_n （ n 表示负载流子），正载流子的密度是 N_p 。单位时间内一个电子和一个空穴相遇并湮没的机会正比于乘

积 $N_n N_p$ 。在平衡时，这个速率必定等于电子-空穴对的产生速率。你们知道，在平衡时 N_n 和 N_p 的乘积应等于某一常数乘上玻尔兹曼因子：

$$N_n N_p = \text{常数} \cdot e^{-E_{\text{隙}}/kT}. \quad (14.4)$$

当我们说常数时，我们指的是近似于常数。更完整的理论——包含有关空穴和电子彼此如何“相遇”更多的细节——表明“常数”稍稍依赖于温度，但对温度的主要依赖是在指数上。

作为一个例子，我们考虑原来是中性的纯净材料。在有限的温度下，你会料到正的和负的载流子的数目相同， $N_n = N_p$ 。它们各自都按 $e^{-E_{\text{隙}}/2kT}$ 随温度变化。半导体的性质——例如电导率——的许多变化主要决定于指数因子，因为所有其他因子随温度的变化要慢得多。锗的隙能大约是0.72 eV，硅是1.1 eV。

在室温下 kT 大约是1 eV的1/40。在这样的温度下有足够的空穴和电子给出可观的电导率，而在譬如说30 K——室温的十分之一——电导率是难以觉察的。金刚石的隙能是6~7 eV，在室温下金刚石是好的绝缘体。

§14-2 掺杂的半导体

到现在为止我们已经谈论过将额外电子放入理想完整的晶体的晶格中的两种方法。一种方法是从外源注入电子，另一种方法从一个中性原子上敲出一个束缚电子同时产生一个电子和一个空穴。还可以用别的方法把电子放到晶体的导带里面。假定我们想象锗晶体中一个锗

原子被一个砷原子所代替。锗原子是4价，晶体的结构由4个价电子控制。另一方面，砷是5价。我们发现一个砷原子能占据锗晶格中的一个位置（因为它的大小大致合适），但这样一来它必须表现得和4价原子一样——用它的4个价电子形成晶体键，于是还有一个电子剩了下来。这个多余的电子只是很松地束缚着——结合能大约只有一个电子伏特的1/100。在室温下电子很容易从晶体的热能中获得这样多的能量，并且独自离开——像自由电子那样在晶格中运动。像砷那样的杂质原子被称作施主位，因为它能放出一个负载流子到晶体中。假如锗晶体是从加进非常少量的砷的熔融金属中生长出来的，砷施主位将分布在整个晶体中，于是在晶体中将建立起一定的负载流子密度。

你们也许认为只要对晶体加上任意小的电场，就会将这些载流子扫出去。然而，事实并非如此，因为晶体内的每个砷原子都带有正电荷。如果晶体要保持中性，负载流子电子的平均密度必须等于施主位的密度。如果你在晶体的两边加上电极，并把它们联结到电池上，就会有电流流动。但当载流电子从一端被扫出，新的传导电子必定从另一端的电极进入，结果传导电子的平均密度保持和施主位的密度差不多相等。

因为施主位带正电荷，当导电电子在晶体中扩散时有被它们俘获的趋势。所以，施主位相当于我们在上一节中讨论过的陷阱。但如果陷俘能量足够小——砷就是这样——在任一时刻被陷俘的载流子数目只是总数的一小部分。要完全理解半导体的行为，人们必须把这种陷俘作用考虑进去。然而，在我们讨论的其余部分中，我们将假定陷俘能量足够低，并且温度足够高，从而所有的施主位都已失去了它们的电子。当然这只是一种近似。

也可以在锗的晶体中掺入一些3价的杂质原子，例如铝。铝原子试图窃取一个额外的电子并表现得像4价原子那样。它从某个邻近的锗原子窃得一个电子，结果成为一个有效价数为4的带负电的原子。当然，当它从锗原子窃得一个电子后，就在那里留下一个空穴，这个空穴能作为正载流子在晶体中游荡。能用这种方法产生空穴的杂质原子称为受主，因为它“接受”一个电子。假如锗或硅晶体是从加进少量杂质铝的熔融材料中生长的，晶体内部就具有一定的内建空穴密度，空穴就相当于正载流子。

当施主或受主杂质加进半导体中后，我们说材料被“掺杂”了。

当具有内建施主杂质的锗晶体处于室温时，由激发感应产生的电子-空穴对以及施主位都贡献出一些传导电子。自然，从这两个来源产生的电子是相等的，在达到平衡的统计过程中起作用的是总数 N_n 。如果温度不太低，施主杂质原子提供的负载流子的数目大致等于晶体中的杂质原子的数目。平衡时式（14.4）必定仍旧有效；给定温度条件下，乘积 $N_n N_p$ 是一定的。这意味着，假如我们加入一些使 N_n 增加的施主杂质，正载流子的数目 N_p 必定减少一定数量以使 $N_n N_p$ 不变。如果杂质浓度足够高，负载流子数目 N_n 由施主位的数目决定并且几乎不依赖于温度——所有指数因子上的变化由 N_p 提供，虽然它比 N_n 少得多。在另一些有少量施主杂质的纯净的晶体中，大多数载流子是负载流子，这种材料叫做“ n 型”半导体。

假如在晶格中加入受主型杂质，一些新的空穴将到处漂移，并与一些由热起伏产生的自由电子发生湮没。这一过程将一直继续到式（14.4）被满足。在平衡条件下，正载流子数目将增加而负载流子数

目将减少以保持它们的乘积为常数。正载流子较多的材料称为“ p 型”半导体。

假如我们把两个电极放在一块半导体晶体上并把它们联结到电势差的电源上去。晶体中将建立起电场。电场会使正的和负的载流子运动，于是有电流流动。我们首先来考虑在 n 型材料中会发生什么过程，这种材料中绝大多数是负载流子。对于这类材料，我们可以不理睬其中的空穴，因为它们是如此之少，对电流几乎没有贡献。在理想的晶体中载流子将不受阻碍地运动。然而，在实际晶体中，在有限的温度下——特别是在有一些杂质的晶体中——电子的运动并不是完全自由的，它们不断地发生碰撞，被撞离原来的轨道，即改变它们的动量。这些碰撞就是我们在上一章中谈到的散射，在晶格中任何具有不规则性的地方都会发生这种散射。在 n 型材料中，散射主要就是由产生载流子的施主位引起的。因为传导电子在施主位上有略微不同的能量，概率波就从这些点上散射。然而，即使在完全纯净的晶体中，（在有限的温度下）热振动也要在晶格中引起不规则性。按照经典的观点，我们可以说原子并不是准确地排列在规则的晶格上，在任何瞬间由于热振动都要稍稍离开原位。在第13章所介绍的理论中，和每一格点相联系的能量 E_0 随位置变化而略有变化，所以概率振幅波并不是完全透射而是以不规则的方式被散射。在非常高的温度下，对非常纯净的材料，这种散射可能变得很重要。但在实际的器件所用的大多数掺杂材料中，在杂质原子上的散射起主要作用。我们现在要对这种材料的电导率作一个估算。

当外电场加到 n 型半导体上，每一个负载流子在电场中被加速，它的速度不断增加直到在一个施主位上被散射。这意味着平时具有热能，以随机方式运动着的载流子将沿着电场力线的方向获得一个平均

漂移速度，形成电流流过晶体的。与典型的热运动速度相比，漂移速度一般是很小的，所以我们可以通过假定载流子在两次散射之间的平均时间是常数来估算电流。我们设负载流子具有有效电荷 q_n 。在电场 E 中，作用于载流子的力是 $q_n E$ 。在第1卷§43-3中，我们曾计算了在这种情形下的平均漂移速度，并得到漂移速度由 $F\tau/m$ 给出，其中 F 是作用于电荷上的力， τ 是两次碰撞间的平均自由时间， m 是质量。我们应当用上一章算出的有效质量，但因为只要作粗略的估算，我们假定有效质量在各个方向上都是相等的。这里我们把它称作 m_n 。在这个近似下，平均漂移速度是：

$$v_{\text{漂移}} = \frac{q_n \mathcal{E} \tau_n}{m_n}. \quad (14.5)$$

知道了漂移速度我们就能求出电流。电流密度 j 等于单位体积内载流子的数目 N_n 乘以平均漂移速度，再乘以每个载流子的电荷。因此这里电流密度是

$$j = N_n v_{\text{漂移}} q_n = \frac{N_n q_n^2 \tau_n}{m_n} \mathcal{E}. \quad (14.6)$$

我们看到电流密度正比于电场，这样的半导体材料遵从欧姆定律。 j 和 E 的比例系数，即电导率 σ 是

$$\sigma = \frac{N_n q_n^2 \tau_n}{m_n}. \quad (14.7)$$

对于 n 型半导体，电导率相对地不依赖于温度。首先，多数载流子的数目 N_n 主要决定于晶体中施主的密度（只要温度不是那么低使得太多

的载流子被陷阱)。其次,碰撞之间的平均时间 τ_n 主要由杂质原子的密度控制,当然它不依赖于温度。

我们可以把完全相同的论证应用于 p 型材料,只要改变一下式(14.7)中的参量的数值。假如同时存在的负的和正的两种载流子的数目可以相比较,我们必须把两种载流子的贡献加起来。总电导率由下式给出

$$\sigma = \frac{N_n q_n^2 \tau_n}{m_n} + \frac{N_p q_p^2 \tau_p}{m_p}. \quad (14.8)$$

对于非常纯净的材料, N_p 和 N_n 近于相等,它们比掺杂材料中的要小,所以电导率要小一些。可是它们随温度变化得很快(正像我们已经看到过的按照 $e^{-E_{\text{隙}}/kT}$ 变化),所以电导率随温度而极快地变化。

§14-3 霍尔效应

只有电子是相对自由的客体的材料中,也会有行为像正粒子的空穴所运载的电流,这确实是一件难以理解的事。因此,我们要描写一个实验,这实验能十分明确地证明电流的载流子绝对肯定是正的。假设我们有一块半导体材料——也可以是金属——我们在上面加上电场,从而在某个方向引起电流,例如水平方向,如图14-6所示。现在假设我们在这块材料上再加上磁场,其指向和电流方向成直角,譬如说指向图的里面。运动着的载流子会感受到磁力 $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的作用。由于平均漂移速度不是向右就是向左——取决于载流子上电荷的符号——作用于载流子上的平均磁力不是向上就是向下。不,这是不对的!对于我们所假定的电流和磁场方向,作用于运动电荷上的磁力

总是向上的。正电荷在 j 的方向上运动（向右）会受到向上的力。如果电流由负电荷运载，它们向左运动（对于同样符号的传导电流），于是它们也会受到向上的力。然而，在稳定情况下，载流子并没有向上的运动，因为电流只能从左边流到右边。所发生的过程是，开始时有一些电荷向上流动，在半导体的上表面形成面电荷密度——在晶体的下表面上留下相等但相反的面电荷密度。电荷聚集在上表面和下表面上，直到它们作用于运动着的电荷上的电力正好和（平均的）磁力完全相抵消，因此稳恒电流照旧水平地流动。上表面和下表面上的电荷将产生一个垂直跨过晶体的电势差，可以用高电阻伏特计来测量这电势差，如图14-7所示。伏特计记录的电势差的符号取决于形成电流的载流子的电荷的符号。

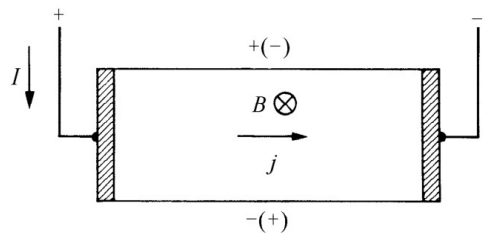


图14-6 霍尔效应来自作用于载流子的磁力

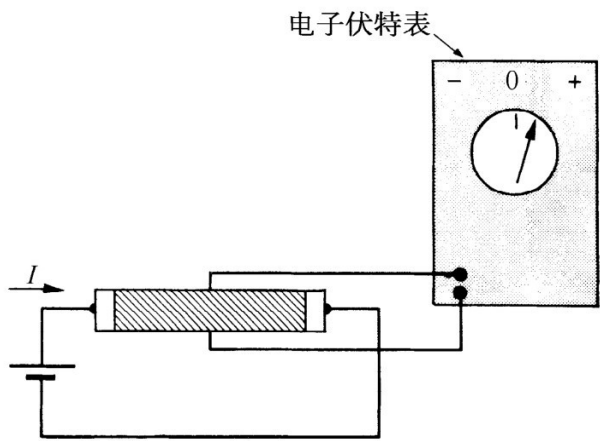


图14-7 测量霍尔效应

在第一次做此实验时，正像对负的传导电子所预期的那样，人们预期电势差的符号将是负的。因此，当人们发现对于某些材料电势差的符号与预期的相反就感到十分奇怪。这表明载流子是带正电荷的粒子。从我们关于掺杂半导体的讨论中可以理解， n 型半导体应当产生与负的载流子相应的电势差符号，而 p 型半导体应当给出相反的电势差，因为电流是由带正电的空穴负载的。

霍尔效应中电势差的反常符号最初是在金属中而不是在半导体中发现的。曾经假定金属都是电子导电的，然而，对于铍却发现其电势差的符号恰好相反。现在了解了，在金属中和在半导体中一样，这也是可能的，在一定的条件下，起传导作用的“客体”是空穴。虽然，归根结底运动的是晶体中的电子，然而动量和能量的关系以及对外场的反应却正是我们对电流由正粒子载运时所预期的那样。

我们来看一看是否能对霍尔效应预言的电势差的大小作一个定量的估计。假如图14-7的伏特计中的电流可以忽略，那么半导体内的电荷一定从左向右运动，并且垂直的磁力一定精确地被垂直的电场力抵消，我们把这垂直的电场记作 E_{tr} （“tr”表“横向”）。假如此电场抵消磁力，必须：

$$E_{\text{tr}} = -v_{\text{漂移}} \times B, \quad (14.9)$$

应用式（14.6）给出的漂移速度和电流密度的关系，我们得到

$$\mathcal{E}_{\text{tr}} = -\frac{1}{qN} j B.$$

晶体上面和下面的电势差当然等于电场强度乘以晶体的高度。晶体中的电场强度 E_{tr} 正比于电流密度和磁场强度。比例常数 $1/qN$ 称为霍尔系数，通常用符号 R_{H} 表示。霍尔系数只取决于载流子的密度——倘若某一符号的载流子是绝大多数，因此，霍尔效应的测量是一种确定半导体中载流子密度的方便的实验方法。

§14-4 半导体结

我们现在来讨论如果取两块具有不同内部特性——例如掺有不同种类或不同数量的杂质——的锗或硅，并把它们放在一起做成一个“结”，这时将发生什么情形。让我们从所谓的 p - n 结开始，在结上边界的一边是 p 型锗，边界的另一边是 n 型锗——如图14-8所示。实际上，把分开的两块晶体放在一起并使它们在原子的尺度上均匀接触是不实际的。实际上，结是在一块单晶上做出来的，将单晶做成两个分隔的区域。一个方法是当晶体生长到一半的时候在“熔体”中掺入一些适当的杂质。另一种方法是在表面上涂一点杂质元素，然后加热晶体使一些杂质原子扩散到晶体的内部。用这些方法制成的结没有明显的边界，但是边界可以做到 10^{-4} cm左右那样薄。对于下面的讨论，我们将考虑理想的情况，即晶体这两个具有不同性质的区域有明显的边界隔开。

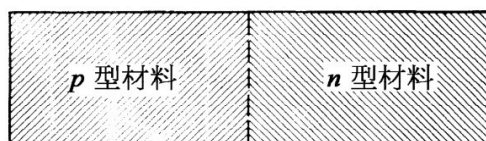


图14-8 p - n 结

在 p - n 结的 n 型一边有可以运动的自由电子，还有使总电荷平衡的固定的施主位。在 p 型的一边有自由空穴运动着，并有等量的受主位使电荷平衡。实际上这描写的是我们使两种材料相互接触之前的状况。一旦它们联结在一起，靠近交界处的情况就改变了。当 n 型材料中的电子到达边界时，它们并不像在自由表面上那样被反射回去，而可以一直进入 p 型材料。因此， n 型材料中的一些电子会扩散到电子比较少的 p 型材料中。这过程不会一直进行下去，因为当 n 型的一边失去电子后净的正电荷就要增加，直到最后建立起一个电压以阻止电子扩散到 p 型一边去。同样， p 型材料中的正载流子通过结扩散进入 n 型材料中。当它们这样做时，在后面留下了过量的负电荷。在平衡条件下，净扩散电流必定等于零。这是由电场造成的，因为所建立的电场要把正载流子拉回 p 型材料。

我们这里描写的两种扩散过程是同时进行的。你们要注意，这两个过程都使 n 型材料带正电，使 p 型材料带负电。由于半导体材料的有限的电导率，从 p 的一边到 n 的一边电势的变化只在靠近边界比较窄的区域内发生，在每块材料的主体部分中，电势仍然是均匀的。我们设 x 轴的方向垂直于边界表面。那么电势将随 x 而变化，如图14-9（b）所示。我们还在图（c）中画出了预计的 n 载流子密度 N_n 和 p 载流子密度 N_p 的变化。在离结远的地方，载流子密度 N_p 和 N_n 应当正好等于同样温度下两块材料各自的平衡密度。（图中所画的结的两边 p 型材料比 n 型材料掺杂更重。）由于结处的电势梯度，正载流子必须爬过一电势坡才能到达 n 型的一边。这意味着在平衡条件下在 n 型材料中比在 p 型材料中有较少的正载流子。回忆一下统计力学的定律，我们预期两边的 p 型载流子数目的比由下面的方程给出：

$$\frac{N_p(n \text{ 边})}{N_p(p \text{ 边})} = e^{-q_p V/kT}, \quad (14.10)$$

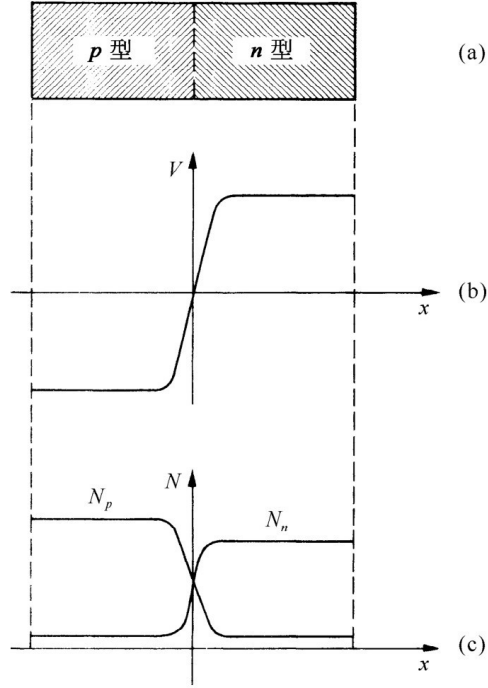


图14-9 在未加偏压的半导体结上的电势和载流子密度

指数的分子中乘积 $q_p V$ 就是使电荷 q_p 通过电势差 V 所需的能量。

对 n 型载流子密度我们有完全相同的方程式：

$$\frac{N_n(n \text{ 边})}{N_n(p \text{ 边})} = e^{-q_n V/kT}. \quad (14.11)$$

假如我们已知在两种材料内各自的平衡密度，我们可以用上面两个方程式的任何一个来测定给两边的电势差。

注意，假如方程式（14.10）和（14.11）给出同样的电势差 V 数值，乘积 $N_p N_n$ 无论在 p 的一边还是在 n 一边必定相同。（记住 $q_n = -q$

p 。然而，我们前面已经看到，这一乘积只依赖于温度和晶体的隙能。假定晶体的两边都处于同样的温度，这两个方程式中的电势差具有同一数值。

因为从结的一边到另一边有一个电势差，它看上去有些像一个电池。假如我们从 n 型的一边到 p 型一边联结一根导线或许会获得电流。真是这样的话，确实十分美妙，因为如果真是这样的话电流就会一直流下去而不会消耗掉任何材料，于是我们就有一个违背热力学第二定律的无穷无尽的能源！然而，如果你从 p 的一边接一根导线到 n 的一边，实际上不会有电流。其理由很容易看出来的。假定我们先设想一根由未掺杂的材料制成的导线。当我们把这根导线联结到 n 型的一端时，我们就有了一个结。在结的两边就会产生电势差。我们假定这正好等于从 p 型材料到 n 型材料的电势差的一半。当我们把未掺杂的导线联结到结的 p 型一边，在这个结上也有电势差——也等于 p - n 结上电势降落的一半。在所有结上，电势差会自动调整到使得电路中没有净电流。不论你用哪一种导线联结 n - p 结的两边，你都造出两个新的结，只要所有的结都在同样的温度下，在结上的电势跃变都互相补偿，从而电路中没有电流。不过——假如你仔细研究一下——如果有一些结和另一些结的温度不同，结果就会有电流流动。其中有一些结会被这电流加热而另一些将被冷却，于是热能就转化为电能。测量温度的热电偶以及温差发电机就是利用这一效应工作的。同一效应也用于制造小型制冷机。

如果我们不能测量 n - p 结两边的电势差，我们怎样才能肯定图14-9所示的电势梯度确实存在呢？一个方法是用光来照射结。光子被吸收后会产生电子-空穴对。在结处存在的强电场（等于图14-9的电势曲线的斜率）中，空穴会被驱赶到 p 型区域，而电子会被驱赶到 n 型区域。

现在如果把结的两边联结到外电路中，这些额外的电荷会产生电流。在结上，光能会转换为电能。使某些人造卫星运转的产生电功率的太阳能电池就是按照这个原理工作的。

在关于半导体结的作用的讨论中，我们一直假定空穴和电子的行为或多或少是相互独立的——除了它们以某种方式达到适当的统计平衡。当我们描写光照在结上产生电流时，我们假定在结区产生的电子或空穴在被相反极性的载流子湮没之前就进入了晶体的主体部分。在紧靠结的区域内，两种符号的载流子的密度近似地相等，电子-空穴湮没效应（也常称之为“复合”）是重要的效应，在对半导体结的详尽分析中必须认真考虑这个效应。我们还假定在结区内产生的电子或空穴在复合之前有很多的机会进入晶体体内。对于典型的半导体材料，电子或空穴找到其异号的伴侣并湮没的典型时间在 $10^{-3} \sim 10^{-7}$ s范围之内。顺便说说，这个时间远远长于我们分析电导率时所采用的与晶体中的散射中心的两次碰撞之间的平均自由时间。在典型的 n - p 结中，在结区中形成的电子或空穴被扫至晶体内部所需的时间一般大大短于复合时间。因此，大多数电子-空穴对都将对外电流作出贡献。

§14-5 半导体结的整流

下面我们要说明 p - n 结为何可以用作整流器。如果我们在结两边加上电压，当极性为某一方向时会有很大的电流流过，但在相反的方向上加上同样的电压时，却只有很小的电流。假如在结上加的是交流电压，净电流只沿一个方向流动——电流被“整流”。让我们再来看一看图14-9所描绘的平衡条件下发生些什么。在 p 型材料中有很大的正载流子浓度 N_p ，这些载流子向各处扩散并且每秒内有一定数量到达结

处。到达结的正载流子电流正比于 N_p 。然而，其中的大多数被结处高的电势坡挡了回去，只有约为 $e^{-qV/kT}$ 的一部分能通过。从另一边也有正载流子电流来到结处。这个电流也正比于 n 型区域的正载流子密度，但这里的载流子密度大大低于 p 型一边的密度。当正的载流子从 n 型一边来到结处时，它们遇到的是具有负的坡度的电势坡并立即滑下斜坡到结的 p 型一边。我们把这电流称为 I_0 。在平衡时从两个方向来的电流相等。我们认为下面的关系式成立：

$$I_0 \propto N_p (n \text{ 边}) = N_p (p \text{ 边}) e^{-qV/kT}. \quad (14.12)$$

你们会注意到这个方程实际上和式（14.10）完全一样。我们只是用了不同的方法导出它。

不过，假定我们使结的 n 边的电压降低一个数量 ΔV ——我们可以通过在结上加上外电势差来做到这一点。现在电势坡两面的电势差不再是 V 而是 $V - \Delta V$ 。从 p 边到 n 边的正载流子电流的表式中这个电势差在指数因子中出现。令这个电流为 I_1 ，我们有

$$I_1 \propto N_p (p \text{ 边}) e^{-q(V - \Delta V)/kT}.$$

这个电流比 I_0 正好大了一个因子 $e^{q\Delta V/kT}$ 。所以 I_1 和 I_0 之间有如下关系：

$$I_1 = I_0 e^{+q\Delta V/kT}. \quad (14.13)$$

来自 p 边的电流随着外加电压 ΔV 指数式地增加。然而，只要 ΔV 不太大，从 n 边来的正载流子的电流保持不变。当它们来到势垒，这些载

流子还是会发现向下的电势坡并且全部降落到 p 边。（如果 ΔV 大于自然电势差 V ，情形就不同了，但是我们不去考虑在这样高的电压下会发生些什么。）穿过结的正载流子的净电流 I 就是两边来的电流之差：

$$I = I_0 (e^{+q \Delta V / kT} - 1) . \quad (14.14)$$

空穴的净电流 I 流进 n 型区域。从那里空穴扩散到 n 型区域的体内，最终被多数 n 型载流子——电子——湮没。在这湮没过程中损失电子将由从 n 型材料外端来的电子电流补偿。

当 ΔV 为零，式（14.14）中的净电流为零。对于正的 ΔV ，电流随外加电压很快增加。对于负的 ΔV ，电流改变符号，但是指数项很快变为可忽略，并且负的电流永远不会超过 I_0 ——按照我们的假设这 I_0 是相当小的。这个反向电流 I_0 被结的 n 边少数 p 型载流子很小的密度所限制。

如果你对流过结的负载流子的电流作完全相同的分析，首先对没有电势差的情形，然后对小的外加电势差 ΔV ，你会再次得到完全和式（14.14）一样的净电子电流的方程式。因为总电流是两种载流子贡献的电流之和，倘若我们认为 I_0 是加上反向电压时可能流过的最大电流，那么式（14.14）完全可用总全电流。

式（14.14）的电压-电流特性曲线如图14-10所示。它表示固体二极管（诸如现代的计算机中用的那种二极管）的典型性质。我们应当看到式（14.14）只对小的电压是正确的。当电压和自然的内部电势差

V 不相上下或者比它更大时，其他的效应就要起作用了，电流不再遵从这一简单的式子。

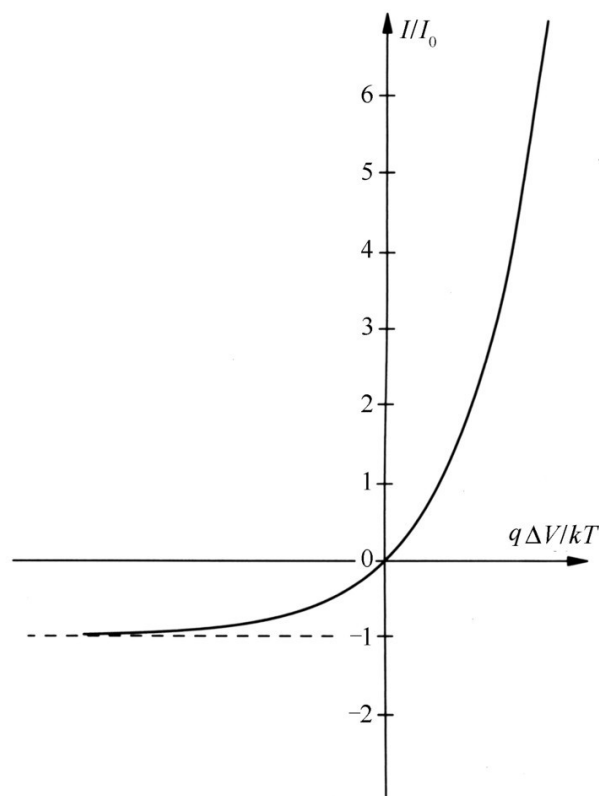


图14-10 通过结的电流作为结两端电压的函数

顺便说说，你们还记得在第1卷第46章讨论“力学整流器”——棘轮和掣爪——的时候，我们曾得到和这里得出的式（14.14）完全相同的式子。我们之所以在这两种情况中得到同样的式子是因为两者的基本物理过程十分相似。

§14-6 晶体管

或许半导体最重要的应用是晶体管。晶体管由两个互相靠得非常近的半导体结组成。它的工作原理有一部分与我们刚才描写的关于半

导体二极管即整流结的原理相同。假设我们制造一小块锗，上面有3个不同的区域，一个 p 型区域，一个 n 型区域，以及另一个 p 型区域，如图14-11（a）所示。这一组合称作 $p-n-p$ 晶体管。晶体管中的这两个结的行为都和我们在上一节中所描写的一样。特别是每一个结上都有一个电势梯度，从 n 型区域到每一个 p 型区域都有一定的电势降落。假如两个 p 型区域有同样的内部性质，我们沿着晶体观察，测量到的电势变化就如图14-11（b）所示。

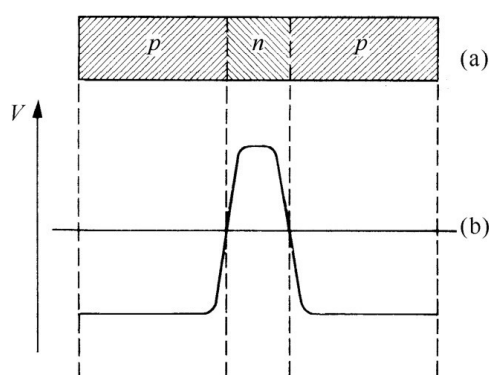


图14-11 没有加外电压时晶体管中的电势分布

现在让我们设想，把3个区域的每一个都加上外电压，如图14-12（a）所示。我们以接在左方 p 区的端点作为所有电压的参考点，所以按照定义这点为零电势。我们把这一端称为发射极。 n 型区域称为基极，它联接到小的负电势上。右方的 p 型区域称为集电极，并联接到较大的负电势上。在这样的情形下晶体上的电势变化就如图14-12（b）所示。

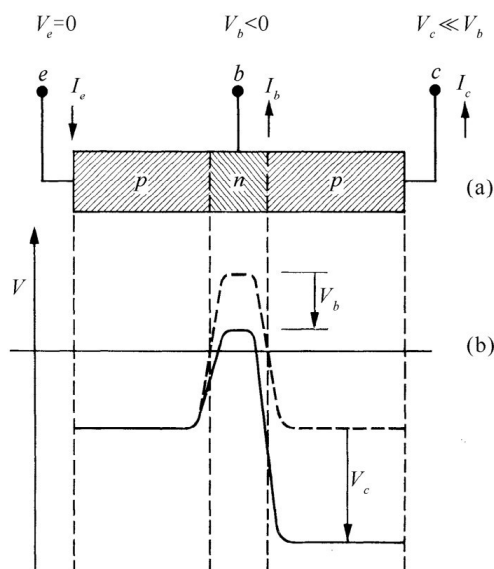


图14-12 晶体管工作时的电势分布

我们先来看一看正载流子的情形，因为主要是它的行为控制着 $p-n-p$ 晶体管的工作。既然发射极相对于基极是处在正电势，正载流子的电流就会从发射极区流入基极区。由于结在“正向电压”作用下——相应于图14-10中图的右半部分——流过的电流比较大。在这样的条件下，正载流子或空穴从 p 型区域被“发射”到 n 型区域。你可能想象这个电流会通过基极的端点 b 流出 n 型区域。然而，现在接触到了晶体管的奥秘了。 n 型区域做得非常薄——典型的厚度是 10^{-3} cm或更小，大大小于它们的横向线度。这意味着当空穴进入 n 型区域后，在和 n 型区域中的电子湮没之前有很大的机会扩散到另一个结。当它们到达 n 型区域的右方边界时，它们遇到急剧下降的电势坡并立即落入右方的 p 型区域。晶体的这一边称为集电极，因为它“收集”扩散穿过 n 型区域的空穴。在一个典型的晶体管中，除了很小的百分比以外，离开发射极并进入基极的空穴电流大多在集电极区域被收集起来，其余只有很少一部分贡献净的基极电流。基极和集电极电流之和显然等于发射极电流。

现在想象一下，假如我们稍稍改变一下基极端的电势 V_b 会发生些什么。因为我们是在图14-10的曲线的相对陡峭的部分，电势 V_b 很小的变化会引起发射极电流 I_e 很大的变化。因为集电极电压 V_c 大大负于基极电压，电势的微小变化不会显著地影响基极和集电极之间陡峭的电势坡。发射到 n 区域的大多数正载流子仍旧被集电极俘获。于是当我们改变基极电势时，集电极的电流 I_c 就会有相应的变化。不过，根本的一点是基极电流 I_b 始终只是集电极电流的一小部分。晶体管是一个放大器，基极上引入小电流 I_b 在集电极上给出大电流——大100倍左右。

迄今为止我们一直忽略了的负载流子——电子——又怎样呢？首先，我们并不认为任何值得注意的电子电流在基极和集电极之间流动。集电极上加有大的负电压时，基极中的电子不得不爬上很高的势能高坡，而这样做的概率是很小的。只有很小的电子电流流向集电极。

在另一方面，基极中的电子确实能够进入发射极区域。事实上，你可能会料到在这个方向的电子电流比得上从发射极到基极的空穴电流。但是这种电子电流不仅没有用，而且还有害，因为对于一定的集电极空穴电流，它使所需的基极总电流增大。所以，设计晶体管时要把发射极的电子电流减到最小。电子电流正比于 N_n （基极），即基极材料中的负载流子密度，而从发射极来的空穴电流取决于 N_p （发射极），即发射极区中的正载流子密度。对 n 型材料进行低掺杂， N_n （基极）可以做得比 N_p （发射极）小得多。（非常薄的基区也有很大的帮助，因为集电极扫除了这个区域内的空穴，从而大大地增加了从

发射极进入基极的平均空穴电流，而电子电流却保持不变。）最后结果是穿过发射极-基极结的电子电流比空穴电流小得多，所以在 $p-n-p$ 晶体管的运作中电子并没有起任何重要的作用。电流受空穴运动所支配，晶体管则如前所述表现得像个放大器。

将图14-11中的 p 型和 n 型材料对换也可以做成晶体管。于是我们得到所谓的 $n-p-n$ 晶体管。在 $n-p-n$ 晶体管中，大部分电流由电子携带，这些电子从发射极流入基极并由此流到集电极。显然，如果将电极的电势选取相反的符号，我们关于 $p-n-p$ 晶体管的所有论证同样适用于 $n-p-n$ 晶体管。

[1] 参考：C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, John Wiley and Sons. Inc., New York. 2nd ed, 1956 chapters 13, 14 and 18.——译者注

[2] 在很多书上以不同的方式解释这种能量图。能量标度只是对电子的能量而言。他们想象占据着空穴的电子应具有的能量而不是空穴的能量。这个能量比自由电子的能量低——事实上，所低的数值正好是你在图14-5中所看到的。按照这种对能量标度的解释，隙能是使电子从束缚态跃迁到导带所必须给予电子的最低能量。

第15章 独立粒子近似

§15-1 自旋波

在第13章中，我们已经求出了关于一个电子或某些其他“粒子”，譬如一个原子的激发，穿过晶格传播的理论。上一章，我们把这个理论应用于半导体。但是每当我们讨论有许多电子存在的情形时，我们总是忽略它们之间的相互作用，当然这样做只是一种近似。在本章里我们将进一步讨论电子间的相互作用可以忽略这一概念。我们还将趁此机会向读者进一步介绍粒子传播理论的某些应用。既然我们一般仍旧忽略粒子间的相互作用，所以在本章中除了一些新的应用以外，实际上没有什么新的内容。我们首先要考虑的例子是，当存在着一个以上的“粒子”时，仍能相当精确地写出其正确方程的情形。虽然我们不去仔细分析这个问题，但是通过这些例子我们能看出这种忽略相互作用的近似方法是如何做出的。

作为第一个例子我们考虑铁磁晶体中的自旋波。在第2卷第36章中我们讨论过铁磁性理论。在绝对零度时所有铁磁晶体内对磁性有贡献的电子自旋都是平行排列的。这些自旋之间存在着相互作用能，当所有自旋都向下时，这一相互作用能最低。但是当温度不为零时，其中一部分自旋就有机会转向上。在第2卷第36章中我们近似计算了这一概率。现在我们将叙述其量子力学理论，这样你可以看出，如果要更严格地求解这个问题，你应该做些什么。（这里我们仍旧要作一些理想

化，假设这些电子被限定在各自的原子中，而且只有相邻的自旋之间才有相互作用。）

我们考虑这样一种模型，该模型中每个原子的电子除一个以外其余都是成对的，因此所有的磁效应都来自每个原子中的一个自旋为 $1/2$ 的电子。我们进一步设想这些电子被定域在晶格的原子座上，这个模型大致对应于金属镍。

我们再假定任何两个相邻的自旋电子间有相互作用存在，这个相互作用对整个体系的能量给出了这样一项

$$E = - \sum_{i,j} K \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j, \quad (15.1)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示电子的自旋，而求和遍及所有相邻的电子对。当我们考虑氢原子中由于电子和质子磁矩的相互作用而引起的超精细分裂时，就曾经讨论过这种类型的相互作用能。那时我们把它表示为 $A \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_p$ 。现在，对于给定的一对电子，譬如说位于原子4和原子5的一对电子，其哈密顿为 $-K \boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_5$ 。对每一对这样的电子都有这样的一项，而哈密顿（正如对经典能量所预期的）就是各对相互作用项之和。由于能量含有 $-K$ 的因子，所以正 K 将相当于铁磁性，也就是说，当相邻自旋平行时总能量最低。在实际晶体中，可能还有次近邻的相互作用项等等，但在现阶段我们没有必要考虑这种复杂的情形。

有了式（15.1）的哈密顿我们就有了——在我们的近似条件下——对铁磁体的完整描述，并且应可由之导出磁化的性质，我们也应能计算由于磁化的热力学性质。如果我们能够求出全部能级，则在温度 T 时晶体的各种性质可以由下述统计力学原理求得，即系统处在给

定能量为 E 的状态的概率与 $e^{-E/kT}$ 成正比。这个问题至今尚未被完全解出。

我们举一个所有原子都排成一条直线即一维晶格的简单例子来说明一些问题。你们很容易将这些概念推广到三维的情形。在每一个原子的位置上都有一个电子，每个电子都有两个可能的状态，不是自旋朝上就是自旋朝下，整个系统可通过说明所有自旋是如何排列的来描述。我们取体系的哈密顿作为相互作用的能量算符。将式（15.1）中的自旋矢量解释为 σ 算符（或 σ 矩阵），对于线性晶格我们可写出：

$$\hat{H} = \sum_n -\frac{A}{2} \hat{\sigma}_n \cdot \hat{\sigma}_{n+1}. \quad (15.2)$$

为方便起见，在上式中我们将常数写成 $A/2$ 。（这样一来，以后的一些式子将和第13章的式子完全相同。）

现在我们要问，什么是这个体系的最低能量状态呢？体系的最低能量状态是所有自旋都平行的状态，譬如说所有自旋都向上^[1]的态。我们可以把这个态写成 $|\dots++++\dots\rangle$ ，或 $|\text{gnd}\rangle$ ，就是“基态”或最低能量态。我们不难算出这个态的能量。一种办法是用 $\hat{\sigma}_x$ ， $\hat{\sigma}_y$ 和 $\hat{\sigma}_z$ 表示出所有 σ 矢量，再仔细算出哈密顿的每一项在基态时的值，然后把结果相加。其实我们也可使用一个好而简捷的方法。在§12-2中我们已经知道， $\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j$ 可以用泡利自旋交换算符来表示，如

$$\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j = (2\hat{P}_{ij}^{\text{自旋交换}} - 1), \quad (15.3)$$

式中算符 $\hat{P}_{ij}^{\text{自旋交换}}$ 的作用是交换第 i 个电子与第 j 个电子的自旋。把这个表示式代入式（15.2），哈密顿就成为：

$$\hat{H} = -A \sum_n \left(\hat{P}_{n, n+1}^{\text{自旋交换}} - \frac{1}{2} \right). \quad (15.4)$$

现在要计算不同态的情形就容易了。例如，若*i*和*j*这两个电子的自旋同时向上，则交换自旋并不会引起任何变化，那么 $\hat{P}_{ij}$ 作用于该态上又回到同一态，这与乘以+1等价。因此表示式 $(\hat{P}_{ij} - 1/2)$ 正好等于1/2。（从现在开始我们省去 $\hat{P}$ 的上标。）

对于所有自旋都向上的基态；如果你们交换一对特定的自旋，你们仍旧回到原来的态。基态是一个定态。如果把哈密顿作用在这个态上，得到的又是这个态再乘上一个求和项，每一对自旋态提供- $A/2$ 。这就是说，在体系的基态能量中每个原子提供- $A/2$ 。

下面我们考虑某些激发态的能量。相对于基态来测量能量是很方便的，这就是说选择基态作为我们的能量零点。为了做到这一点，我们可以对哈密顿中的每一项加上能量 $A/2$ 。这样正好把式（15.4）中的“1/2”变成“1”，因此新的哈密顿为

$$\hat{H} = -A \sum_n (\hat{P}_{n, n+1} - 1). \quad (15.5)$$

使用这个哈密顿，体系最低态的能量为零，（对于基态来说）自旋交换算符相当于乘以1，正好把每一项中的“1”消去。

为了描述基态之外的其他态，我们需要一组适当的基础态。一种较方便的处理方法是这样的，按照一个电子自旋向下，或两个电子自旋向下.....对态进行分组。当然，一个电子自旋向下的态有很多，这个向下自旋可能位于原子“4”，或原子“5”，或原子“6”.....事实上我们可以选这样的态作为我们基础态，我们可以把它们写成： $|4\rangle$ ， $|5\rangle$ ， $|6\rangle$但是为了以后方便，我们也可用其坐标*x*来标记这个

具有自旋向下电子的“特别的原子”。也就是说，我们把态 $|x_5\rangle$ 定义为：除了位于 x_5 处的原子的电子自旋向下外，所有其他电子的自旋都向上（参看图15-1）。一般说来， $|x_n\rangle$ 是有一个向下自旋的态，该向下自旋位于第 n 个原子的坐标 x_n 处。

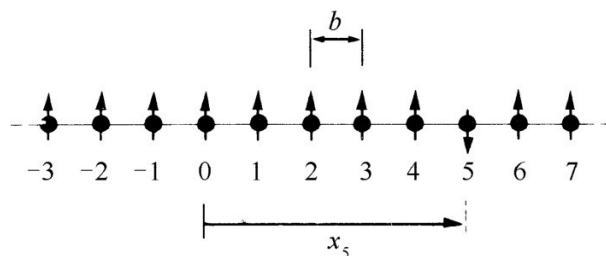


图15-1 一线性排列的自旋体系的基础态 $|x_5\rangle$ 。其中除位于 x_5 的一个自旋向下外，其余的自旋都向上

(15.5) 式的哈密顿对态 $|x_5\rangle$ 的作用结果是什么呢？譬如说哈密顿算符中 $-A(\hat{P}_{7,8} - 1)$ 这一项，其中算符 $\hat{P}_{7,8}$ 是交换7、8两个相邻原子的自旋，而在态 $|x_5\rangle$ 中这两个原子的自旋都是向上的，所以它的作用并没有改变什么， $P_{7,8}$ 只相当于乘以1：

$$\hat{P}_{7,8} |x_5\rangle = |x_5\rangle.$$

由此得到

$$(\hat{P}_{7,8} - 1) |x_5\rangle = 0.$$

于是，哈密顿中除了包含原子5的那些项以外，其余所有的项作用于 $|x_5\rangle$ 后都为0。算符 $\hat{P}_{4,5}$ 对态 $|x_5\rangle$ 的作用使原子4的自旋（向上）

和原子5的自旋（向下）作了交换，结果得到除了原子4的自旋向下外，其余所有原子的自旋都向上的态，即

$$\hat{P}_{4,5} |x_5\rangle = |x_4\rangle.$$

同理

$$\hat{P}_{5,6} |x_5\rangle = |x_6\rangle.$$

因此，哈密顿中只留下 $-A(\hat{P}_{4,5} - 1)$ 和 $-A(\hat{P}_{5,6} - 1)$ 两项，它们对 $|x_5\rangle$ 的作用，分别得到 $-A|x_4\rangle + A|x_5\rangle$ 和 $-A|x_6\rangle + A|x_5\rangle$ ，最后的结果为

$$\hat{H} |x_5\rangle = -A \sum_n (\hat{P}_{n,n+1} - 1) |x_5\rangle = -A(|x_6\rangle + |x_4\rangle - 2|x_5\rangle). \quad (15.6)$$

当哈密顿作用在态 $|x_5\rangle$ 上时，它给出了一些处在态 $|x_4\rangle$ 和 $|x_6\rangle$ 的振幅，这就意味着向下的自旋跳跃到相邻原子上具有一定振幅。由于自旋之间的相互作用，如果开始时某一个自旋向下，那么在以后的时刻，另一个原子代替它变成自旋向下就有一定的概率。将哈密顿作用在一般态 $|x_n\rangle$ 上就给出：

$$\hat{H} |x_n\rangle = -A(|x_{n+1}\rangle + |x_{n-1}\rangle - 2|x_n\rangle). \quad (15.7)$$

这里要特别注意，如果我们所取的是只有一个自旋向下的态的完全集，则它们将只在它们本身之间混合。哈密顿绝不会把这些态同其他具有多于一个自旋向下的态混合。你们只能交换自旋，你们就绝不要改变总的向下自旋的数目。

使用哈密顿的矩阵记法是方便的，譬如说 $H_{n,m} = \langle x_n | \hat{H} | x_m \rangle$ ；
方程式（15.7）等效于

$$\begin{aligned} H_{n,n} &= A, \\ H_{n,n+1} &= H_{n,n-1} = -A, \\ H_{n,m} &= 0, \text{ 当 } |n-m| > 1. \end{aligned} \quad (15.8)$$

现在我们要问，对于具有一个自旋向下的那些态的能级是怎样的呢？和往常一样，我们令 C_n 为某个态 $|\psi\rangle$ 处于态 $|x_n\rangle$ 的振幅。如果 $|\psi\rangle$ 是一个具有确定能量的态，则所有的 C_n 必定以相同的方式随时间变化，即

$$C_n = a_n e^{-iEt/\hbar}. \quad (15.9)$$

我们可以把这个试解代入通常的哈密顿方程中

$$i\hbar \frac{dC_n}{dt} = \sum_m H_{nm} C_m. \quad (15.10)$$

同时使用式（15.8）的矩阵元。当然我们得到无限多个方程，但可以把它们都写成如下形式：

$$Ea_n = 2Aa_n - Aa_{n-1} - Aa_{n+1}. \quad (15.11)$$

这样我们又得到了与在第13章中已解出的完全相同的问题，不过那里是 E_0 而现在是 $2A$ 。相应于振幅 C_n 的解（自旋向下的振幅）是以传播常量 k 和能量为

$$E=2A (1-\cos kb) \quad (15.12)$$

的沿晶格传播的波。式中 b 是晶格常数。

具有确定能量的解与自旋向下的“波”——称为“自旋波”——相对应，对于每个波长，有一个相应的能量。对于长波长（小的 k ），其能量按下式变化

$$E=Ab^2 k^2. \quad (15.13)$$

和以前一样，我们可以考虑一个定域的波包（不过其中只包含长波长），它相当于在晶格中某一部分的一个自旋向下的电子。这个向下自旋表现得像一个“粒子”。因为它的能量与 k 的关系由式（15.13）描写，这个“粒子”具有有效质量：

$$m_{\text{有效}} = \frac{\hbar^2}{2Ab^2}. \quad (15.14)$$

有时我们把这些“粒子”称为“磁波子”。

§15-2 双自旋波

现在我们讨论存在两个向下自旋的情形。我们还是要选取一组基础态，选择在两个原子的位置上有向下自旋的那些态，如图15-2所示。我们可以用两个向下自旋的位置的坐标 x 来表示这个态，图15-2中所示的态可写成 $|x_2, x_5\rangle$ 。一般说来，基础态为 $|x_n, x_m\rangle$ ，这是一个二重无限集！在这套描述体系中，态 $|x_4, x_9\rangle$ 和态 $|x_9, x_4\rangle$ 是完全相同的态，因为这两个态都只是说在位置4和位置9处各

有一个向下的自旋，它们的次序并没有什么意义。此外，态 $|x_4, x_4\rangle$ 是无意义的，并不存在这种情况。我们可以这样来描述任何一个态 $|\psi\rangle$ ：即给出它在每个基础态的振幅。如此， $C_{m, n} = \langle x_m, x_n | \psi \rangle$ 表示处于态 $|\psi\rangle$ 的系统在第 m 个原子和第 n 个原子同时具有向下自旋这种态中的振幅。现在所出现的这种复杂性并不是概念上的复杂，仅仅是簿记的复杂性而已。（量子力学的一个复杂性就在于登记号法。随着向下自旋越来越多，我们所用的记号也因含有大量标记而变得越来越复杂，方程式也总是令人望而生畏，其实概念并不比最简单的情形复杂多少。）

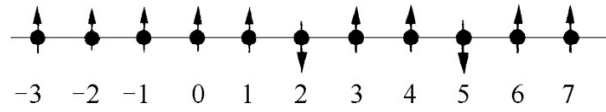


图15-2 具有两个向下自旋的状态

这个自旋系统的运动方程是一组关于 $C_{n, m}$ 的微分方程。它们是

$$i\hbar \frac{dC_{n, m}}{dt} = \sum_{ij} (H_{nm, ij}) C_{ij}. \quad (15.15)$$

假定我们希望求出该系统的定态，和往常一样，把对时间的微商变成 E 乘上振幅，而 $C_{m, n}$ 可以用系数 $a_{m, n}$ 代替。接下来我们必须仔细地算出 H 对自旋 m 和 n 向下的这个态作用的结果。这种计算并不困难。暂时假定 m 和 n 相距甚远，这样我们就不必为显而易见的麻烦而操心。对位于 x_n 处的向下自旋的交换操作是将向下自旋或者转移到第 $n+1$ 个原子或者移到第 $n-1$ 个原子上去。所以有一个振幅是现在的态来自态 $|x_m, x_{n+1}\rangle$ ，也有一个振幅来自态 $|x_m, x_{n-1}\rangle$ 。或者也可能是另一个自旋在交换，就是 $C_{m, n}$ 来自 $C_{m+1, n}$ 或 $C_{m-1, n}$ ，都有一

定的振幅。所有这些效应都应是相等的。最后关于 $C_{m, n}$ 的哈密顿方程为

$$E a_{m, n} = -A (a_{m+1, n} + a_{m-1, n} + a_{m, n+1} + a_{m, n-1}) + 4A a_{m, n}. \quad (15.16)$$

这个方程是正确的，但下面两种情况除外：如果 $m=n$ ，则方程根本不存在；如果 $m=n \pm 1$ ，则方程式 (15.16) 中有两项应去掉。我们将不去考虑这些例外情形。我们暂不理睬这些方程中有少数要稍加改动这一事实。毕竟我们假定晶体是无限的，而且我们有无限多项，所以忽略很少几个不会有多大关系。那么作为粗略的一级近似，让我们忘掉那些改动过的方程，换句话说，我们假定方程式 (15.16) 对所有 m 和 n ，即使它们相差1也无所谓。这就是我们的近似方法的本质部分。

方程的求解并不难，我们立即得到

$$C_{m, n} = a_{m, n} e^{-iEt/\hbar}, \quad (15.17)$$

而

$$a_{m, n} = (\text{常数}) e^{ik_1 x_m} e^{ik_2 x_n}, \quad (15.18)$$

式中

$$E = 4A - 2A \cos k_1 b - 2A \cos k_2 b. \quad (15.19)$$

至此我们可以想一想，如果我们有两个独立的、分别对应于 $k=k_1$ 和 $k=k_2$ 的单自旋波（如上一节中的情况），将会出现什么情况呢？根据式 (15.12)，它们具有能量

$$\epsilon_1 = (2A - 2A \cos k_1 b)$$

及

$$\epsilon_2 = (2A - 2A \cos k_2 b).$$

注意，式（15.19）中的能量 E 只是它们之和，即

$$E = \epsilon(k_1) + \epsilon(k_2). \quad (15.20)$$

换句话说，我们可以这样来考虑我们所得到的解：有两个粒子，也就是两个自旋波，一个粒子具有以 k_1 描述的动量，另一个粒子具有用 k_2 表示的动量，体系的能量就是这两个粒子能量之和，这两个粒子的作用是完全独立的。对于这个体系就只有这些。

当然，我们已经做了某些近似，但是我们现在并不想讨论答案的精确性。不过，你们也许猜想到，在一个适当大小的晶体中包含着数十亿个原子，因此在哈密顿中就有数十亿项，丢掉几项并不会造成很大的误差。要是我们有很多向下的自旋，以致向下自旋的密度相当大，那么我们就得考虑修正了。

〔有趣的是：如果只有两个向下自旋，就可以写出精确的解。这结果并不特别重要，但是引起兴趣的是对于这种情况的方程可以精确求解。这一解为：

$$a_{m,n} = \exp [ik_c (x_m + x_n)] \sin (k |x_m - x_n|), \quad (15.21)$$

而能量为：

$$E = 4A - 2A \cos k_1 b - 2A \cos k_2 b ,$$

波数 k_c ， k 与 k_1 ， k_2 的关系为：

$$k_1 = k_c - k , \quad k_2 = k_c + k . \quad (15.22)$$

这个解包含了这两个自旋的“相互作用”，它说明当两个自旋互相靠近时就有一定的散射机会，自旋表现得很像具有相互作用的粒子。但是，有关它们散射的详细理论超出了我们想要在这里讨论的范围。]

§15-3 独立粒子

在上节中，我们已经写出了两个粒子系统的哈密顿式（15.15）。然后取近似，这近似相当于忽略两个粒子间任何“相互作用”，我们求得了由式（15.17）和（15.18）所描述的定态，这个态正好就是两个单粒子态的乘积。然而，我们对于式（15.18）中 $a_{m, n}$ 的解实在并不满意。我们早就谨慎地指出，态 $|x_9, x_4\rangle$ 与 $|x_4, x_9\rangle$ 并无区别—— x_m 和 x_n 的次序没有什么意义。一般来说，如果我们交换 x_m 和 x_n 的值，振幅 $C_{m, n}$ 的代数表达式必须不变。因为这种交换并不改变状态，不管怎么说，它应代表在 x_m 处及 x_n 处各找到一个向下自旋的态的振幅。但是要注意，由于 k_1 和 k_2 通常是不同的，式（15.18）对 x_m 和 x_n 并不对称。

问题在于我们没有使式（15.15）的解一定要满足这个附加条件。幸好这个问题很容易解决。首先我们注意到，该哈密顿方程的一个解

$$a_{m,n} = K e^{ik_2 x_m} e^{ik_1 x_n} \quad (15.23)$$

与式(15.18)一样好，甚至其能量也与式(15.18)所得的能量相同。式(15.18)和(15.23)的任何线性组合也是一个很好的解，其能量仍由式(15.19)给出。由于对称性要求，我们所应选取的解就是式(15.18)和式(15.23)之和：

$$a_{m,n} = K [e^{ik_1 x_m} e^{ik_2 x_n} + e^{ik_2 x_m} e^{ik_1 x_n}]. \quad (15.24)$$

现在，给定任何 k_1 和 k_2 ，振幅 $a_{m,n}$ 和我们安置 x_m 和 x_n 的方式无关——如果我们恰巧把 x_m 和 x_n 规定反了，我们仍然得到相同的振幅。我们用“磁波子”解释方程式(15.24)结果就不同，我们不能再说该方程表示波数为 k_1 的一个粒子和波数为 k_2 的第二个粒子。振幅式(15.24)表示具有两个粒子（磁波子）的一个态。这个态的特征由两个波数 k_1 和 k_2 来表征。我们的解看上去很像是由一个动量为 $p_1 = \hbar k_1$ 的粒子和另一个动量为 $p_2 = \hbar k_2$ 的粒子组成的复合态，但是我们不能在这个态中指出哪个粒子是哪一个。

至此，读者应该从这些讨论中回忆起第4章以及我们关于全同粒子的描述。我们刚才正好证明自旋波粒子——磁波子——的行为像全同玻色子。所有的振幅对两个粒子的坐标来说必须是对称的——这等于说，如果我们“交换两个粒子”，我们将回到同样的振幅并且具有相同的符号。但是，你们可能会想，为什么我们在构成式(15.24)时选取两项相加的方式？为什么不把这两项相减？采用减号时，交换 x_m 和 x_n 只不过改变 $a_{m,n}$ 的符号，这并没有什么关系。但是交换 x_m 和 x_n 并没有引起任何改变——晶体中的所有电子仍旧位于原来的地方，甚至

振幅的符号也没有理由要改变。由此可见，磁波子的行为像玻色子^[2]。

上面的讨论主要有两点：第一，告诉你们一些有关自旋波之事；第二，向读者揭示一种态，它的振幅是两个振幅的乘积，它的能量是相应于这两个振幅的能量的和。对于独立粒子来讲，振幅相乘，能量相加。你们不难理解为什么能量是求和。能量是虚指数中 t 的系数，它与频率成正比。如果有两个粒子正在做某些事情，一个具有振幅 $e^{-iE_1 t/\hbar}$ ，而另一个具有振幅 $e^{-iE_2 t/\hbar}$ ，如果这两件事情一起发生的振幅是各个振幅之积，在这乘积中就出现一个频率，它是两个频率之和，与振幅乘积相对应的能量是两个能量之和。

我们通过相当冗长的论证来向你们说明一件简单的事情，当你们不考虑粒子间的任何作用时，就可以把每个粒子看成是独立的。这些粒子可以各自存在于它们单独存在时所具有的各种不同的状态中，每个粒子都贡献出它们单独存在时所具有的能量。然而你们必须记住，如果它们是全同粒子，则它们会表现为不是玻色子就是费米子，这由具体问题来定。例如，把两个额外的电子加到晶体里去，它们就会表现得像费米子。当交换这两个电子的位置时，其振幅必定改变符号。在相应于式（15.24）的方程中，在右边的两项中间就应该有一个负号。因而两个费米子不可能处在完全相同的情况中——具有相同的自旋和相同的 k 。这种态的振幅为零。

§15-4 苯分子

虽然量子力学提供了确定分子结构的基本定律，但是这些定律只能精确地用在最简单的化合物上。因此化学家们设计出各种近似方法

来计算复杂分子的某些性质。现在我们要对你们说明的是有机化学家们是怎样应用独立粒子近似的。我们从讨论苯分子开始。

在第10章中我们从另一种观点讨论苯分子，在那里我们对分子采用的是双态系统的近似图像，它具有如图15-3所示的两个基础态。苯分子有一个由6个碳构成的环，每个碳原子上键联着一个氢原子。按照惯用的价键图像，我们必须假设碳原子之间半数双键，而在最低能量的条件下，双键的分布有如图所示的两种可能形式。当然还有别的能量较高的态。当我们在第10章讨论苯分子时，我们只采用这两个态，并没有考虑别的态。我们发现分子的基态能量并不是图中所示的任一态的能量，而是比这个态的能量低了一个量值，该量值与从其中一个态跃迁至另一态的振幅成正比。

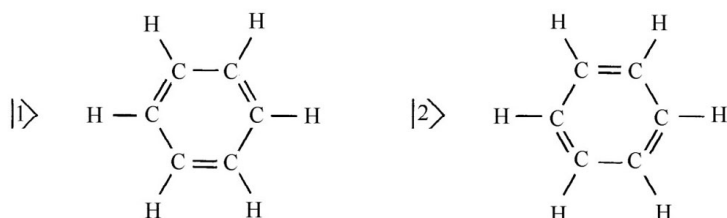


图 15-3 第10章中采用的苯分子的两个基础态

现在我们从完全不同的观点——用不同的近似方法来考察这种分子。这两种观点将会给我们不同的答案，但是如果我们改进任何一种近似方法，我们都应得到正确的结果，即对苯分子的有效描述。然而，如果我们不肯费心去改进它们，当然通常往往如此，那么你们就不应该为这两种描述不完全一致而感到惊奇。我们至少将用新的观点来证明，苯分子的最低能量比如图15-3所示的任一个三键结构要低。

现在我们采用下面的图像：我们设想苯分子的6个碳原子仅以单键相联，如图15-4所示。由于一个键代表一对电子，在上述图像中我们

已去掉了6个电子，它是一个六重电离的苯分子。现在我们来考虑把这6个电子放回去会发生什么情况，我们一次放回1个电子，并想象每个电子都可以环绕这个环自由运动。我们还假设图15-4所示的所有键都满足了，没有必要对之作进一步的考虑。

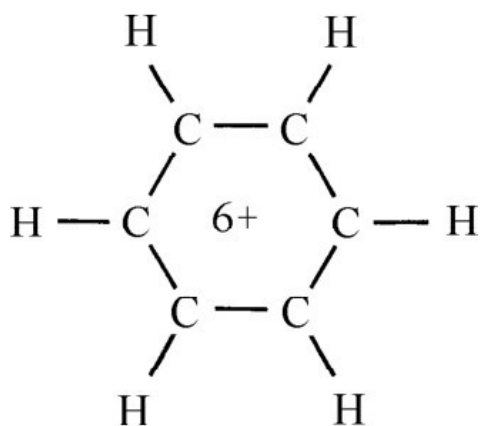


图15-4 去掉6个电子的苯环

当我们把1个电子放回到这个分子离子时会发生些什么呢？当然它可能落在环的6个位置——相当于6个基础态——中的任何一个上。它从一个位置跑到相邻的位置上去应该有一定的振幅，比方说为 A 。如果我们分析这些定态，就会有一些可能的能级。这仅仅是对一个电子而言。

接下来把第二个电子放进去，现在我们作一个你所能想象到的最荒谬的近似——一个电子的行为并不影响另一个电子的行为。当然它们实际上是有相互作用的，它们通过库仑力相互排斥，此外当这两个电子在同一位置时，它们所具有的能量必定与只有一个电子在那里时的能量的两倍有很大的差别。当只有6个位置，特别是当我们要放进第6个电子的时候，独立粒子的近似确实是不合理的。但是，有机化学家们已经能从这种近似中获得许多知识。

在我们对苯分子作出详细计算之前，让我们考虑一个更简单的例子——乙烯分子，它只有两个碳原子，在每边都各有两个氢原子，如图15-5所示。这分子有一个含有两个电子的“额外”的价键，处在两个碳原子之间。现在去掉这两个电子中的一个，我们得到什么呢？我们可以把它看成是一个两态系统——留下的一个电子可以位于这个碳原子或者另一个碳原子旁。我们可以把它作为一个双态系统来分析。这单个电子可能具有的能量是 $(E_0 - A)$ ，或 $(E_0 + A)$ ，如图15-6所示。

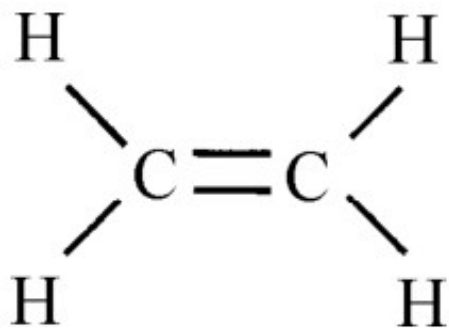


图15-5 乙烯分子

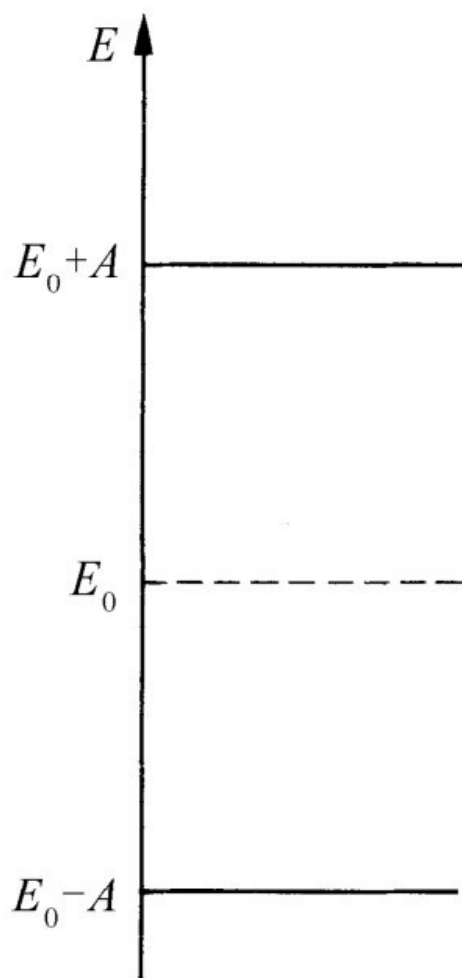


图15-6 乙烯分子中“额外”电子可能的能级

现在我们加进第二个电子。好，如果我们有二个电子，我们可以把第一个电子放在较低的态，而把第二个电子放在较高的状态。不太对，我们忘记了某些事情。每一个状态实际上是双重的。当我们说存在一个能量为 $(E_0 - A)$ 的可能状态时，实际上有两个。如果一个电子的自旋向上而另一个电子的自旋向下的话，则这两个电子可以进入同一个态。（由于不相容原理，不能再放入更多的电子。）所以实际上能量为 $(E_0 - A)$ 的可能状态有两个。我们可以画一个图，如图15-7所示，它既表明能级，又表明这些能级被占据的情况。在最低能量条

件下，两个电子以相反的自旋一同处在最低状态。如果我们忽略两个电子的相互作用，那么乙烯分子的额外价键的能量是 $2(E_0 - A)$ 。

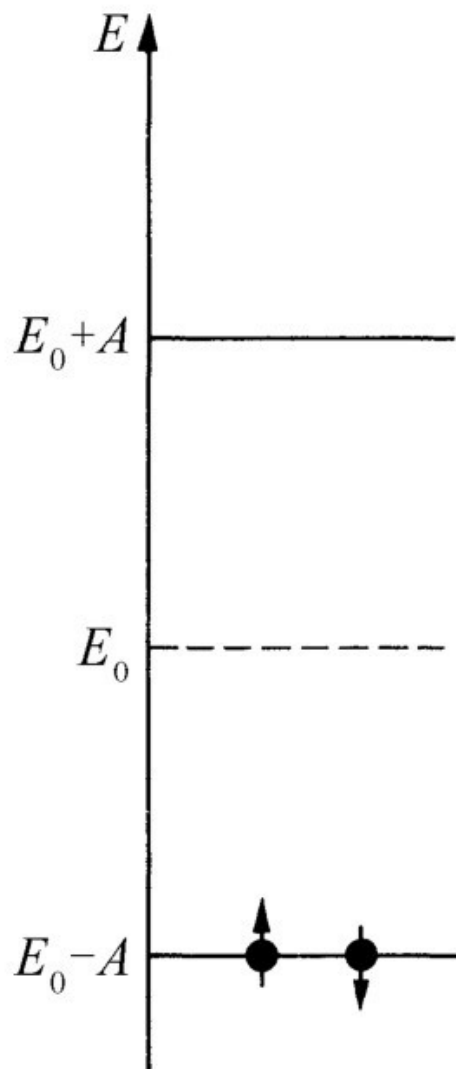


图15-7 在乙烯分子的额外价键中，可以有两个电子（一个自旋向上，一个自旋向下）占据最低能级

现在让我们回过头来讨论苯。图15-3中的两个态的每一个都有3个双键。每个双键都像乙烯中的键，每个双键贡献 $2(E_0 - A)$ 的能量。其中 E_0 是把一个电子放入苯中某个位置的能量， A 是这个电子跃迁到

相邻位置上的能量。所以能量大致应为 $6(E_0 - A)$ 。但是我们在以前研究苯分子时，得出的能量比有3个额外价键结构的能量更低。让我们来看看，根据我们的新观点，是否苯分子的能量比3个价键的更低。

我们从六重电离的苯环开始讨论，并加进一个电子。现在我们有6个态的系统。虽然我们还没有解过这类系统的问题，但是我们知道怎样去解，我们可以写出含有6个振幅的6个方程等等。但是让我们省一些劳动——我们注意到：当我们算出无限原子线列中的一个电子问题时，我们已经解决了这个问题。当然，苯并不是无限长的直线，它有6个原子组成一个环。但是我们设想打开这个环，把它拉成一直线，并且将沿此直线的原子从1到6予以编号。在无限长直线的情况下，下一个位置应是7。但是如果我们坚持认为这第七个位置和第一个位置全同，并以此类推，那么情况就和苯环完全相同了。换句话说，我们可以使用无限长直线的解，但有一个附加的要求 是这个解具有6个原子长的周期性。在第13章中我们已知道，处于一直线上的电子，当它在每个位置上的振幅为 $e^{ikx_n} = e^{ikbn}$ 时，它就具有确定能量的状态。对于每个 k ，能量为

$$E = E_0 - 2A \cos kb. \quad (15.25)$$

我们现在只要那些每6个原子就重复的解。让我们先讨论 N 个原子的环这种一般的情况。如果这个解具有 N 个原子长度的周期性，则 e^{ikbN} 必定为1，或者， kbN 必定是 2π 的整数倍。令 s 表示任一整数，于是上述条件为

$$kbN = 2\pi s. \quad (15.26)$$

以前我们就已知道，取 $\pm\pi/b$ 范围以外的 k 值是毫无意义的。这意味着：我们取 $\pm N/2$ 范围内的 s 值就得到所有可能的状态。

我们发现，对于这 N 个原子的环来说，存在 N 个确定能量的状态[3]，这些态的波数由下式给出

$$k_s = \frac{2\pi}{Nb} s, \quad (15.27)$$

每个态的能量由式（15.25）给定。我们得到了所有可能能级的一组线状谱。苯（ $N=6$ ）的能谱如图15-8（b）所示。（括号里的数字表示具有相同能量的不同状态数目。）

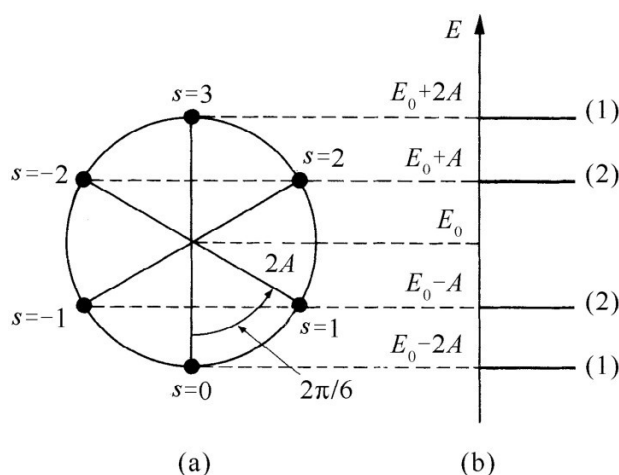


图15-8 具有6个电子位置的环的能级（例如：苯环）

有一个使这6个能级形象化的好方法，如图15-8（a）所示。想象一个圆，其圆心在能量为 E_0 的能级上，半径为 $2A$ 。如果从这圆的底部开始量出6个相等的弧（在从底点量起角度为 $k_s b = 2\pi s / N$ ，对苯来说为 $2\pi s / 6$ ），那么图上这些点的垂直高度就是式（15.25）的解。6个点代表6个可能的状态。最低能级为（ $E_0 - 2A$ ），有两个态具有相同

的能量 ($E_0 - A$)，等等^[4]。这些都是一个电子可能具有的状态。如果电子数超过1个，那么每个态可容纳具有相反自旋方向的两个电子。

对于苯分子来说，我们必须放进6个电子。对基态来说，它们要进入可能最低的能量状态——两个电子处在 $s=0$ ，两个电子处在 $s=+1$ ，另两个电子处在 $s=-1$ 。按照独立粒子近似，该基态能量为

$$E_{\text{基}} = 2(E_0 - 2A) + 4(E_0 - A) = 6E_0 - 8A. \quad (15.28)$$

这个能量的确比3个分开的双键能量要少 $2A$ 。

将苯和乙烯的能量加以比较，就可确定 A 。结果为 0.8 eV ，或者用化学家们喜欢的单位，每摩尔18千卡 ($1 \text{ 千卡} = 4186.8 \text{ J}$)。

我们可以用上面的叙述来计算或了解苯的其他性质。例如，利用图15-8，我们就可以讨论苯被光激发的情形。如果我们试着去激发苯中的一个电子，那会出现什么情况呢？这个电子可以跳到一个空着的较高的能量状态上去。最低激发能量应是从最高的被占据能级跃迁到最低空能级的能量，这需要能量 $2A$ 。当 $h\nu = 2A$ 时，苯将吸收频率为 ν 的光。苯也会吸收能量为 $3A$ 和 $4A$ 的光子。不用说，苯的吸收光谱已经测量过了，谱线图多少与我们的分析相符，只是最低的跃迁在紫外区。为了和实验数据相吻合， A 的值应选取在 $1.4 \sim 2.4 \text{ eV}$ 之间。这就是说， A 的数值比根据化学结合能预料的大两到三倍。

对于这种情况，化学家的处理方法是：分析许多同类的分子，从中得出一些经验规则。例如，他知道：为了计算结合能，要用某一个 A 值，但为了得出大致正确的吸收光谱要用另外一个 A 值。你们可能感到这听起来有点荒谬。从试图根据第一原理来理解自然界的物理学

家的观点来说，这种方法不是很令人满意的。但是化学家面临的问题却不同。对于目前尚未制造出来，或者尚未完全了解的分子，化学家在事前必须试着对它们的性质进行猜测。他所需要的是一系列经验规则，至于这些规则是哪里来的则无关紧要。所以他应用理论的方式与物理学家很不相同。他所选用的方程式中含有真理的影子，但是他必须改变其中的常数——作出经验修正。

就苯来说，与实验不一致的主要原因是我们假设电子是独立的——我们作为出发点的理论实际上并不合理。然而，它包含着某些真理的影子，因为它的结果似乎是对路的。有机化学家在选作研究对象的那些复杂事物的困境中，就是利用这样一些方程再加上某些经验规则（包括各种例外情况）奋力进行的。（不要忘记，一个物理学家之所以能够从第一原理出发真正计算一些东西，是因为选择的都只是一些简单问题，他从来没有解决过那些具有42个或者即使是只有6个电子的问题。至今，物理学家所能作出精确、合理的计算的仅仅是氢原子和氦原子。）

§15-5 其他有机化学分子

现在让我们来看看，怎样才能用这些概念来研究其他分子。考虑像丁二烯（1，3）这样的分子，在图15-9中按照通常的价键图画出了这个分子。

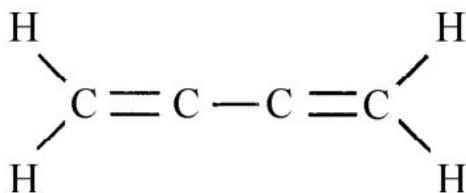


图15-9 丁二烯（1, 3）分子的价键图

对于与两个双键相对应的4个额外电子，我们可以用同样的处理方法。如果我们去掉这4个电子，就剩下位于一直线上的4个碳原子。你们已经知道如何解决一条直线的问题了。你们会说，“啊，不，我只知道如何解无限长直线的问题。”但是无限长线的解也包括有限长线段的解。注意，设在一直线上的原子数目为 N ，并将原子按1到 N 编号如图15-10所示。在写关于位置1的振幅方程中你可以不写位置0提供的项。同样，有关位置 N 的振幅方程也和无限长情况的方程不同，因为现在不存在由位置 $N+1$ 提供的任何项。但是，这要假定我们能够得到具有下述性质的无限长线的解：位于原子0处的振幅为零，位于原子 $N+1$ 处的振幅也为零。那么这些解就能满足有限长线上从1到 N 的所有位置上的方程组。你们可能认为对无限长线不存在这样的解，因为我们的解都是 e^{ikx_n} 那种样式，它在每个地方都有相同的振幅绝对值。但是你得记住：能量只和 k 的绝对值有关。因此对于相同的能量， e^{-ikx_n} 是另一个同样合理的解。这两个解的任何叠加也具有相同的能量。把上面的两个解相减，我们可以得到解 $\sin kx_n$ ，它满足在 $x=0$ 处振幅为0这一要求。这个解仍对应于能量 $(E_0 - 2A \cos kb)$ 。现在只要适当选取 k 值，我们就可使振幅在 x_{N+1} 处也为零。这要求 $(N+1) kb$ 是 π 的整数倍，或者

$$kb = \frac{\pi}{(N+1)}s, \quad (15.29)$$

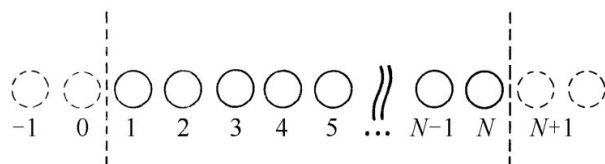


图15-10 N 个分子排成一直线

式中 s 是从1到 N 的整数。（这里我们只选取正的 k 值，因为每个解都包括 $+k$ 和 $-k$ ；改变 k 的符号又给出同样的态。）对于丁二烯分子来讲， $N=4$ ，所以有4个态，其 k 值由下式决定

$$kb = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5} \text{ 和 } \frac{4\pi}{5}. \quad (15.30)$$

我们也可用一个与苯的情形相似的圆来表示能级。这次我们用分成5个相等部分的半圆，如图15-11所示。位于底部的点对应于 $s=0$ ，它根本没有给出什么态，顶上对应于 $s=N+1$ 的一点也是如此。剩下的4点给出了4个允许的能量。一共有4个定态，我们从4个基础态出发所期望的正是这一情况，在圆图中，各个角度间隔为 $\pi/5$ 或 36° 。最低能量为 $(E_0 - 1.618A)$ 。（啊，多奇妙的数学方法！按照这个理论，希腊人^[5]的黄金分割给了我们丁二烯分子的最低能量态！）

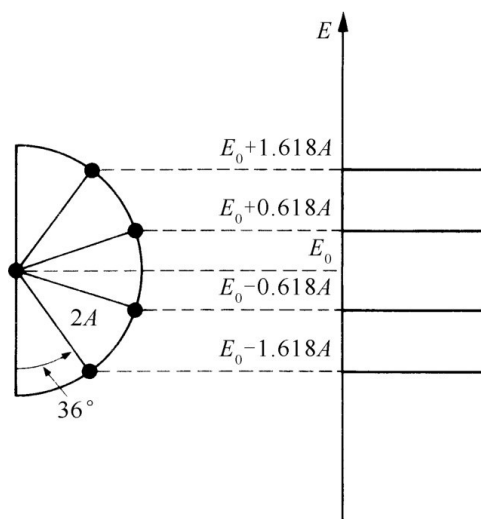


图15-11 丁二烯的能级

现在我们就可以计算出放进4个电子后丁二烯分子的能量。我们用4个电子填满最低的两个能级，每个能级上有两个自旋相反的电子。总能量为

$$E=2(E_0-1.618A)+2(E_0-0.618A)=4(E_0-A)-0.472A. \quad (15.31)$$

这个结果看来是合理的。这能量比两个简单双键的能量略低一些，但是结合力没有苯那样强。不管怎么说，这是化学家分析某些有机分子的方法。

化学家不但能够利用能量，而且能够利用概率幅来分析问题。知道了每个态的振幅以及哪些态被占据，他们就能说出在分子中任何地方找到一个电子的概率。电子最可能出现的那些地方，是适合于需要和其他原子团共有一个电子的化学取代中发生反应的地方，别的位置则更可能在取代反应中有产生额外电子给系统的倾向。

上面的这些概念也能使我们对叶绿素这样复杂的分子也有所了解，图15-12所示为叶绿素的一种结构。注意，我们用粗线画出的双键和单键构成了具有20个间隔的大闭合环，双键上的额外电子可以沿着这个环运动。用独立粒子方法，我们可以得到一整套能级，在光谱的可见光部分出现这些能级之间的跃迁所产生的强吸收线，这使这种分子具有鲜明的色彩。类似的复杂分子，诸如与使树叶等变红的叶黄素，也可以用同样的方法来研究。

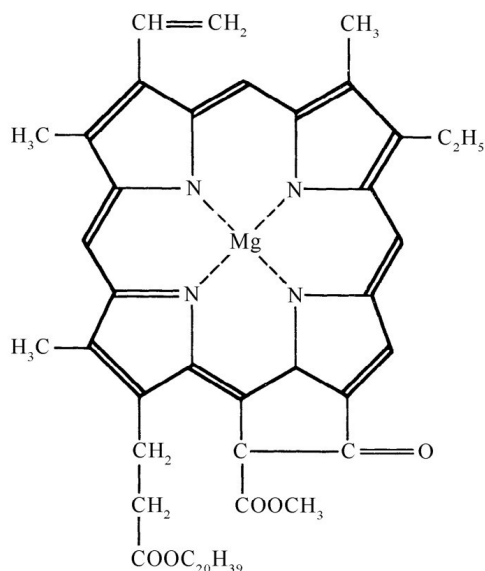


图15-12 一个叶绿素分子

另外一个概念是从这类理论在有机化学的应用中出现的。它或许是最为成功的，或者至少在某种意义上说是最精确的。这个概念和下面的问题有关：在什么条件下我们才能得到特别强的化学键联？回答是很有趣的。首先以苯为例，我们设想事件发生的次序为：从六重电离分子开始，然后逐步增加电子。于是我们会想到各种苯离子——负的或正的。假定我们把离子（或中性分子）的能量作为电子数目的函数来作图。如果我们取 $E_0=0$ （因为我们不知道 E_0 是多少），我们得到如图15-13所示的曲线。对于最早放入的两个电子，函数的斜率是一条直线，对于相继放入的每一组电子，斜率增加，而各组电子之间的斜率是不连续变化的。当我们刚好填满了一组能量相同的能级，而必须把电子填到下一组能量较高的能级上去的时候，斜率就要改变。

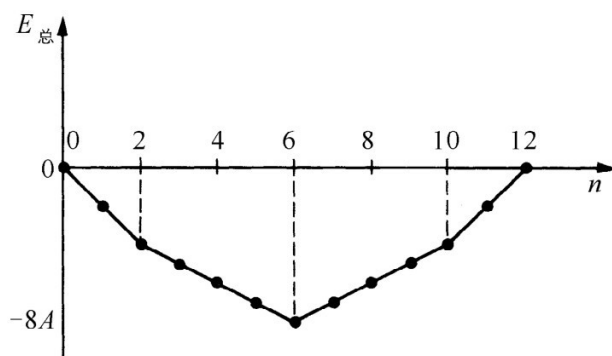


图15-13 当图15-8中的最低能态被 n 个电子占有时，所有电子能量的和（取 $E_0 = 0$ ）

实际上苯离子的能量与图15-13的曲线有很大的差异，这是因为有被我们忽略掉的电子间的相互作用和静电能存在。然而，这些修正将以颇为平稳的方式随 n 而变化。即使我们对所有这些都进行了修正，所得出的能量曲线在正好填满某一能级的 n 值处仍有拐折。

现在考虑适合于各点平均的一条非常光滑的曲线，如图15-14所示。我们可以说，这曲线上面的各点具有“比正常值高”的能量，而曲线下面各点具有“低于正常值”的能量。通常，我们可以预料，低于正常能量的那些组态有较高的平均稳定性——从化学上说。注意，那些远低于曲线的组态总是出现在直线线段的端点，换句话说，总是出现在有足够电子正好填满所谓的“能量壳层”的情况中。这是理论很准确的预言。当分子或离子中可供填充的电子刚好填满能量壳层时，这个分子或离子（与其他类似的组态相比较）就显得特别稳定。

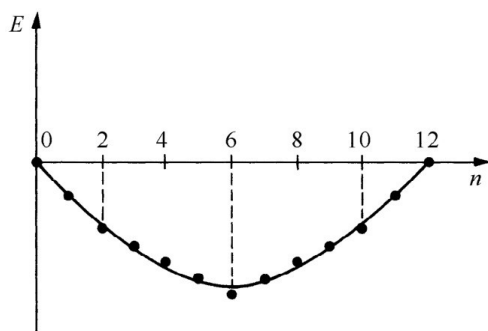


图15-14 用一条光滑曲线联结图15-13的点。具有 $n = 2, 6, 10$ 的分子比别的态更稳定

这个理论解释和预言了一些非常奇特的化学事实。作为一个非常简单的例子，我们考虑一个由3个碳原子构成的环。几乎很难令人相信，化学家能够制造出三环并且它是稳定的，但是的确已经制成了。3个电子的能量圆画在15-15中。现在如果你们把两个电子放至较低能态中，这只是3个所需的电子中的两个。第三个电子必须放在高得多的能级上，根据我们的论证，这个分子不应该特别稳定，而双电子结构应该是稳定的。事实上：中性三苯基环丙烷基分子确实很难制成，但是图15-16所示的正离子就相对地比较容易制造出来。实际上制造三环绝非易事，这是因为当一个有机分子中的键构成一个等边三角形时，总是有很大的应力。要制造一个稳定的化合物，就必须用某种方法使其结构稳定。不管怎样如果在3个角上加上3个苯环，那么就能够构成一个正离子。（加苯环的理由至今还没有真正搞懂。）

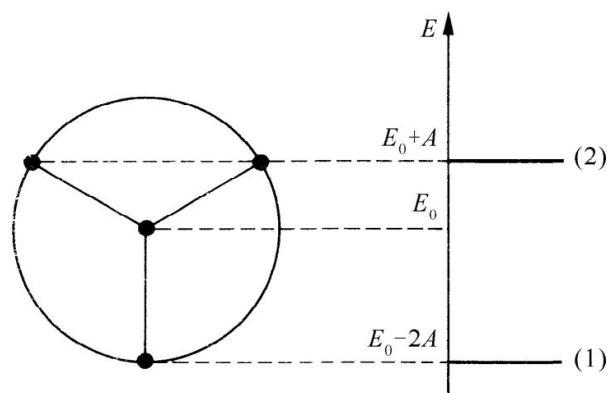


图15-15 三个原子环的能量图

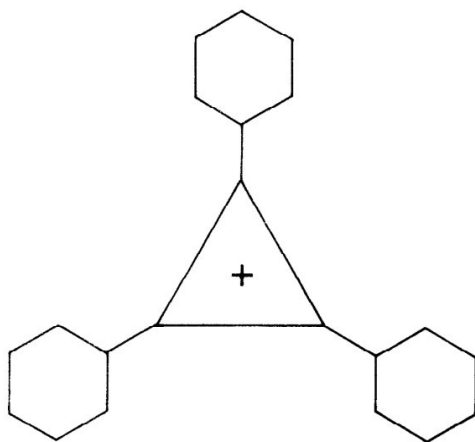


图15-16 三苯基环丙烷基正离子

具有5个边的环也可以用类似的方法来分析。如果你们画出它的能级图，就可以定性地看出6个电子的结构应是一种特别稳定的结构，所以这样一种分子应该在成为负离子时最为稳定。现在5环已为大家熟知，也容易制造，并且总是作为负离子存在。同样，你们可以很容易地证实：4环或8环并不令人很感兴趣，但是，14环或10环——类似6环——的中性分子也应该是特别稳定的。

§15-6 近似方法的其他应用

我们将对另外两种类似的情况作些简单的描述。在考虑原子的结构时，我们认为电子依次填充各个壳层。电子运动的薛定谔理论只有对单个电子在有心力场中运动的情形才能较容易地求解，所谓有心力场就是随到某一点的距离变化而变化的场。那么我们怎样才能知道在一个具有22个电子的原子中所发生的情况呢？！一种办法就是利用一种独立粒子近似法。首先你们计算只有一个电子时的情形。你会得到若干能级。把一个电子放到最低的能量状态。作为一个粗糙的模型，继续忽略电子间的相互作用，而把电子依次填入相继的壳层。但是有

一种获得更好的答案的方法是计入——至少以一种近似的方式——电子所带电荷的影响。你们每加一个电子就计算该电子处在各个不同位置的振幅，然后用此振幅去估算出一种球对称的电荷分布。用这种分布的场——加上带正电的原子核以及前面加进去的那些电子所产生的场——来计算适合下一个电子的态。这样，你就可以对中性原子以及各种离子态的能量作出合理而正确的估计。你们会发现这里也有能量壳层，就像我们曾看到的环形分子中的电子那样。当原子具有未全部填满的壳层时，该原子就表现出倾向于要获取一个或更多的额外电子，或者倾向于释出一些电子，以使它进入满壳层的最稳定的状态。

这个理论解释了元素周期表中所反映出来的隐含在基本化学性质中的机理。惰性气体就是具有刚好填满的壳层的元素，特别难以使它们发生化学反应。（当然有些惰性气体还是会同例如氟和氧等发生反应，但是这些化合物的结合非常弱，所谓的惰性气体只是近乎惰性而已，）比惰性气体原子多一个或少一个电子的原子很容易失去或者得到一个电子而进入特别稳定的（低能）状态，稳定状态来源于原子具有完全填满的壳层，这些原子是非常活泼的+1价或-1价元素。

另一种情况出现在原子核物理学中。在原子核中，质子和中子之间的相互作用相当强。即使如此，在分析原子核的结构时仍然可以用独立粒子模型。首先在实验上发现：如果原子核含有某些特殊数目——2, 8, 20, 28, 50, 82——的中子时，这些核特别稳定。含有这些数目质子的核也特别稳定。由于起先对这些数字无法作出解释，因此把它们称为原子核物理中的“幻数”。众所周知，中子和质子间存在着很强的相互作用，因此，当人们发现用独立粒子模型预言的壳层结构得出了前面几个幻数时，感到非常惊奇。这个模型假定每个核子（质子和中子）在一个有心势场中运动，这个有心势场是由所有其他

核子的平均效应产生的。但是这个模型不能给出较高幻数的正确值。后来迈耶（Maria Mayer），以及詹森（Jensen）和他的同事们各自独立地发现，只要将独立粒子模型加上所谓“自旋-轨道相互作用”，就成为一个能给出所有幻数的改进模型。（如果一个核子的自旋与它在核内运动的轨道角动量的方向相同，则自旋-轨道相互作用将使这个核子的能量降低。）该理论甚至能给出更多的东西——这个所谓原子核的“壳层结构”图像能使我们预言原子核及核反应的某些特性。

独立粒子近似在广泛的学科领域中——固态物理学，化学，生物学，原子核物理学——都得到了应用。虽然它往往只是一种粗略的近似，但是它能使我们了解为什么在壳层里会存在特别稳定的条件。由于其忽略了各单个粒子间相互作用的所有复杂性，因此，它往往完全不能正确地给出许多重要的细节，这是不足为奇的。

[1] 这里的基态实际上是“简并”的，还有其他的状态也具有同样的能量，例如所有自旋都朝下，或者都指向任意别的方向。在 z 方向上加一很小的外磁场后将使所有这些状态具有不同的能量，那么我们这里所选取的状态就是真正的基态。

[2] 一般说来，我们所讨论的这类准粒子，其行为或者像玻色子，或者像费米子，而对自由粒子来说，具有整数自旋的粒子是玻色子，具有半整数自旋的粒子是费米子。“磁波子”代表一个自旋向上的电子转成自旋向下，它自旋的变化为1。磁波子具有整数自旋，它是玻色子。

[3] 你们可能以为当 N 是偶数时会有 $N+1$ 个态。其实并非如此，因为 $s = \pm N/2$ 给出相同的态。

[4] 如果有两个态（它们具有不同的振幅分布）具有相同的能量，我们称这两个态是“简并”的。要注意，可以有4个电子具有能量 $E_0 - A$ 。

[5] 如果一个长方形可以分割成一个正方形再加上一个和原形相似的长方形，那么这个长方形的两个邻边之比就称为黄金分割。

第16章 振幅对位置的依赖关系

§16-1 一维情形的振幅

现在我们将议论量子力学的概率幅在空间是如何变化的。在前面几章中，你们可能对有些事情被忽略感到不太舒服。例如，当我们谈论氮分子时，我们选取了两个基础态来描述它。我们选择氮原子处于3个氢原子所构成的平面之“上”的情形作为一个基础态，氮原子处于3个氢原子所构成的平面之“下”的情形作为另一个基础态。为什么我们仅仅挑选这样两个基础态呢？为什么氮原子就不可能处于3个氢原子所构成平面之上 $2\text{\AA}$ （ $1\text{\AA}=10^{-10}\text{ m}$ ）处，或者 $3\text{\AA}$ 或 $4\text{\AA}$ 处呢？无疑有许多位置可供氮原子占据。又如当我们谈到氢分子离子时（在此离子中两个质子共有一个电子），我们想象了两个基础态：一个态是电子在第1号质子附近，另一个态是电子在第2号质子附近。显然我们略去了许多细节。这个电子并不是正好位于第2号质子处，而只是在它附近，它可能在这个质子上面的某个地方，或者下面、左面、右面的某个地方。

以前我们故意避免讨论这些细节。我们说，我们只是对问题的某些特征感兴趣，所以我们想象当该电子在第1号质子附近时，它就处于某种相当确定的状态。电子处于这个状态时，在质子周围找到它的概率应有某种相当确定的分布，但是我们对此细节不感兴趣。

我们也可以用另一种方法处理这个问题。在我们关于氢分子离子的讨论中，当我们用两个基础态来描述这种情况时，我们采用的是一

种近似描述法。实际上存在着许许多多这样的状态。处于质子周围的电子可以占据最低的能量状态，即基态，但是也还存在着许多激发态。对于各个激发态来说，电子在质子周围的分布各不相同。过去我们忽略了这些激发态，说是感兴趣的只是低能量的情形。然而正是这些激发态提供了电子在质子周围各种不同分布的概率。如果我们希望详细地描述氢分子离子，我们就必须把这些可能的基础态也考虑进去，要做到这一点可以有几种方法，一种方法就是去详细地考虑那些较仔细地描述电子在空间位置的状态。

现在我们准备考虑一个比较复杂的程序，通过给出在一定条件下在任何地方找到电子的概率幅，我们就能够详细地讨论电子的位置。这个比较完整的理论为我们以前讨论中所用的近似方法提供了基础。在某种意义上，我们可以把前面的方程作为这种更完整的理论的一种近似而推导出来。

你们可能会感到奇怪，为什么我们不一开始就采用较完整的理论，在讨论过程中再作近似处理。我们感到，从双态近似开始，逐步建立更完善的理论，比起用相反的方式来处理这一问题，更容易使你们理解量子力学的基本机理。正是由于这一原因，我们处理问题的次序和你们在许多书上看到的相反。

当我们深入研究本章的课题时，你们将会注意到我们正在打破我们以往一直遵循的一个规则。无论我们在研究哪一个课题时，总是试图或多或少给出完善的物理描述——尽可能详细地告诉你们这观念通向何处。我们一直既试图去描述理论的一般结果，又试图描述某些具体的细节，从而使你们能看出理论会把我们引向何方。我们现在要打破这个规则，将叙述怎样才能谈论空间的概率幅，并向你们介绍它们所满足的微分方程，而没有时间去继续讨论由这个理论导出的许多明

显包含的内容。的确，我们甚至不可能更进一步将这个理论与我们早先使用的某些近似公式（例如关于氢分子和氨分子的近似公式）联系起来。就这一次，我们只好不把讨论进行到底。我们的课程即将结束，只能满足于试图向你们介绍一般的概念以及指出我们至今一直在描述的方法和研究量子力学课题的其他方法之间的关系。我们希望给你们足够的观念，使你们能够自己进行学习，并通过阅读各种书籍学到与我们即将描述的问题有关的许多含义。我们毕竟得留些内容将来再学。

让我们再来复习一下已求出的关于一个电子如何沿原子线列运动的问题。当一个电子具有从一个原子跃迁到相邻原子的振幅时，存在着具有确定能量的状态，在这些态中找到电子的概率幅是以行波的形式沿晶格分布的。对于长波长——即对于波数 k 之值小的情况——态的能量与波数的平方成正比。对于间隔为 b 的晶格，其中电子在单位时间内从一个原子跃迁到相邻原子的振幅为 $iA/\hbar$ ，态的能量与 k （对于小的 kb ）的关系为

$$E = Ak^2 b^2. \quad (16.1)$$

（参见§13-2。）我们也已知道，具有相似能量的这样一群波会形成一个波包，这个波包的行为与一个具质量 $m_{\text{有效}}$ 的经典粒子很相似， $m_{\text{有效}}$ 为

$$m_{\text{有效}} = \frac{\hbar^2}{2Ab^2}. \quad (16.2)$$

既然晶体中的概率幅波行为像一个粒子，我们完全可以期望：一个粒子的一般量子力学描述应显现出我们对晶格观察到的相同类型的

波的行为。假定我们考虑的晶格在一直线上，并且想象晶格间隔 b 越来越小。在极限情况下我们会想到电子可以处在该直线的任何地方。我们就过渡到概率幅连续分布的情况。这样我们就有沿此直线在任何地方找到一个电子的振幅。这是描述一个电子在真空中运动情况的一种方法。换句话说，如果设想空间能够用无限个非常靠近的点标记出来，并能求得表示一点的振幅与相邻点振幅之间关系的方程，我们就得到了一个电子在空间运动的量子力学定律。

让我们先回想一下某些量子力学的一般原理。假定一个粒子可以存在于一个量子力学系统各种不同的条件中，我们把任何一个可以在其中找到电子的特殊情况称为“态”，并用态矢量例如 $|\phi\rangle$ 来表示。其他一些态可以用别的态矢量，例如 $|\psi\rangle$ 来表示。我们然后引进基础态的概念，说有一组态 $|1\rangle$ ， $|2\rangle$ ， $|3\rangle$ ， $|4\rangle$ 等等，它们具有如下性质：

第一，所有这些态都是完全不同的——我们说它们是正交的。所谓正交意思是指对于任意两个基础态 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ ，表示一个已知处在态 $|i\rangle$ 的电子同时又处在态 $|j\rangle$ 的振幅 $\langle i | j \rangle$ 等于零——当然除非 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 代表同一个态。我们将此符号表示为

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (16.3)$$

你们应记住，若 i 与 j 不等，则 $\delta_{ij}=0$ ；若 i 和 j 相等，则 $\delta_{ij}=1$ 。

第二，这些基础态 $|i\rangle$ 必定是一个完全集，所以任何态都能用它们表述。这就是说，任何态 $|\phi\rangle$ 都可以由给定的所有振幅 $\langle i | \phi \rangle$ 完整地描述， $\langle i | \phi \rangle$ 是处在态 $|\phi\rangle$ 的一个粒子也会在态 $|i\rangle$

找到的振幅。事实上，态矢量 $|\phi\rangle$ 等于各基础态乘上一个系数后的和，这系数就是态 $|\phi\rangle$ 也处在态 $|i\rangle$ 的振幅，即

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle. \quad (16.4)$$

最后，如果我们考虑任何两个态 $|\phi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ ，那么要求态 $|\psi\rangle$ 也同时处在态 $|\phi\rangle$ 的振幅，可以先将态 $|\psi\rangle$ 投影到各基础态上，然后再将每个基础态投影到态 $|\phi\rangle$ 上而求得。我们把这写成如下形式：

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi|i\rangle \langle i|\psi\rangle. \quad (16.5)$$

式中的求和当然是对整个基础态 $|i\rangle$ 的集进行的。

在第13章中，当我们计算位于一直线排列的原子中的电子情况时，我们曾选取过一组基础态，在这些态中电子总被定域于直线上的这个或那个原子上。基础态 $|n\rangle$ 代表电子被定域在第“ n ”个原子上的情形。（当然，我们把基础态称为 $|n\rangle$ 而不称为 $|i\rangle$ 并没有什么特别的意义。）接着，我们发现用原子的坐标 x_n 要比用原子在排列中的数字编号表示基础态来得方便。态 $|x_n\rangle$ 只是书写态 $|n\rangle$ 的另一种方法。然后，遵循一般规则，任何态，比方说 $|\psi\rangle$ ，处于 $|\psi\rangle$ 态的电子也可以用在态 $|x_n\rangle$ 中的一个的振幅来描述。为方便起见，我们选用符号 C_n 代表这些振幅

$$C_n = \langle x_n | \psi \rangle. \quad (16.6)$$

既然，这些基础态与直线上的位置有关，我们可把振幅 C_n 看作是坐标 x 的函数，并把它写成 $C(x_n)$ 。一般来说，振幅 $C(x_n)$ 将随时间而改变，因此它也是 t 的函数。通常我们并不费力气去把这种对时间的依赖关系明显地表示出来。

于是我们在第13章中提出：振幅 $C(x_n)$ 将以哈密顿方程〔式(13.3)〕所描述的方式随时间变化。用我们的新符号，该方程为

$$i\hbar \frac{\partial C(x_n)}{\partial t} = E_0 C(x_n) - AC(x_n + b) - AC(x_n - b), \quad (16.7)$$

上式右边最后两项代表位于第 $(n+1)$ 个原子或第 $(n-1)$ 个原子的电子可以输送至第 n 个原子的过程。

我们发现式(16.7)具有与确定能量的状态相对应的解，我们把这些解写成

$$C(x_n) = e^{-iEt/\hbar} \cdot e^{ikx_n}. \quad (16.8)$$

对于那些低能量的状态来说，波长较长（ k 较小），且能量与 k 的关系为

$$E = (E_0 - 2A) + Ak^2 b^2, \quad (16.9)$$

或者，我们这样选取能量的零点，使 $E_0 - 2A = 0$ 。那么能量就由式(16.1)给出。

现在我们来看看，要是让晶格间隔 b 趋于零，但保持波数 k 不变，可能会发生些什么。如果所发生的只是上述情况，则式(16.9)中的

最后一项正好为零，那就没有物理意义了。但是假如 A 和 b 一起变化，以至当 b 趋于零时乘积 Ab^2 保持恒定^[1]——应用式（16.2），我们将把 Ab^2 写成常数 $\hbar^2/2m_{\text{有效}}$ 。在这些情况下，方程式（16.9）将不发生变化，但是微分方程式（16.7）会出现什么情况呢？

首先，我们把方程式（16.7）改写成

$$i\hbar \frac{\partial C(x_n)}{\partial t} = (E_0 - 2A)C(x_n) + A[2C(x_n) - C(x_n + b) - C(x_n - b)]. \quad (16.10)$$

对于我们所选取的 E_0 ，上式第一项为零。其次，我们可以想象一个连续函数 $C(x)$ ，它平滑地联接每个 x_n 处 $C(x_n)$ 的固有值。当间隔 b 趋向于零时，这些点 x_n 越来越紧密地靠在一起，而（如果我们使 $C(x)$ 的变化相当平滑的话）在括号中的量正好同 $C(x)$ 的两阶微商成正比，将每一项作泰勒展开后，我们可以写出下列等式

$$2C(x) - C(x + b) - C(x - b) \approx -b^2 \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2}. \quad (16.11)$$

然后，在取 b 趋于零的极限条件下，保持 $b^2 A$ 等于 $\hbar^2/2m_{\text{有效}}$ ，则式（16.7）变成

$$i\hbar \frac{\partial C(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{有效}}} \cdot \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2}. \quad (16.12)$$

我们就得到了一个方程，它告诉我们： $C(x)$ ——在 x 处找到电子的振幅——的时间变化率与在相邻点找到电子的振幅有关，它正比于该振幅对位置的两阶微商。

关于电子在自由空间运动的正确的量子力学方程最早是由薛定谔发现的。对于沿一直线运动的电子来说，如果用该电子在自由空间的质量 m 代替 $m_{\text{有效}}$ ，则正确的量子力学方程就和式（16.12）的形式完全一样。在自由空间中沿一直线运动的电子，薛定谔方程为：

$$i\hbar \frac{\partial C(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2}. \quad (16.13)$$

我们无意使你们认为我们已经导出了薛定谔方程，而只是希望告诉你们一种思考这个问题的方法。当薛定谔第一次写出这个方程式的时候，他的推导是建立在启发性的论证和卓越的直觉猜测上的。他所使用的某些论证甚至是错误的，但是这并没有什么关系，唯一重要的是这个最终的方程给出了对自然界的正确描述。我们讨论这问题的目的，只是想告诉你们，正确的、基本的量子力学方程式（16.13）和你们在电子沿着原子线列运动的极限情况下所得到的方程具有相同的形式。这意味着我们可以把式（16.13）中的微分方程看作是描述概率幅沿此直线从一点到相邻一点的扩散。也就是说，如果一个电子在某一点具有某个振幅，则过一会，它会在邻近一点具有某个振幅。事实上，这个方程看起来有点像我们在第1卷中所用的扩散方程。但是存在着一个主要的区别：时间微商前的虚系数使得此方程的性质与普通的扩散（诸如气体沿一细管扩散的情况）完全不同。普通扩散给出实指数的解，而式（16.13）的解却是复波。

§16-2 波函数

现在你们对要讨论的将是些什么问题已有了一些概念，我们想从头再来研究描述一个电子沿一直线运动的问题，而不去考虑与晶格上

原子有关的态。我们要从头开始来看看：如果要描述一个自由粒子在空间的运动，我们必须用些什么概念。既然我们对沿一连续直线运动的粒子的行为感兴趣，那就要处理无数个可能的态，你们将会看到，对于我们为处理有限数目的态而发展起来的概念需要作出某些技术性的修正。

我们从设态矢量 $|x\rangle$ 代表一个粒子精确地定位在坐标 x 处的态着手。对于沿直线的每一个 x 值，例如1.73或9.67或10.00，都有一个相应的态，我们将取这些态 $|x\rangle$ 作为基础态，而且，要是包括直线上的所有点，我们就有了一维运动的、一个完全集。现在假定我们有一个不同类型的态，譬如 $|\psi\rangle$ ，在该态中一个电子以某种方式沿此直线分布。描述这种态的一个办法是：给出在每一个基础态 $|x\rangle$ 找到电子的所有振幅。每个 x 值一个振幅，我们必须给出这些振幅的一组无限集合。我们把这些振幅写成 $\langle x | \psi \rangle$ 。每个这样的振幅都是一个复数，由于对每个 x 值都有这样一个复数，所以振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 必定是 x 的函数，我们也把它写成 $C(x)$ ，

$$C(x) \equiv \langle x | \psi \rangle. \quad (16.14)$$

当我们在第7章中谈到振幅随时间的变化时，我们已经考虑过这种以连续的方式随坐标变化的振幅。例如，我们在那里曾证明，具有确定动量的一个粒子，它在空间的振幅必定具有特定的变化形式。如果一个粒子具有确定的动量 p 及相应确定的能量 E ，则在任何位置 x 找到该粒子的振幅就像

$$\langle x | \phi \rangle = C(x) \propto e^{+ipx/\hbar}. \quad (16.15)$$

这个方程式表达了量子力学的一个重要的普通原理，它把与空间不同位置相对应的基础态与另一个基础态系统，即所有具有确定动量的态联系了起来。对于某些类型的问题来说，使用具有确定动量的态往往比用 x 表示的态更加方便。当然，对于描述量子力学情况，这两组基础态都同样适用。我们在后面还要回过头来讨论这两种态之间的关系。目前我们希望把讨论限于用态 $|x\rangle$ 来描述的方法。

在作进一步讨论之前，我们要稍微改变一下符号，并希望不至于引起太大的混淆。式(16.14)定义的函数 $C(x)$ 的表示式当然与我们所考虑的那个态 $|\psi\rangle$ 有关，我们应该用某种方式把这种关系表示出来。我们可以用一个下标，例如 $C_\psi(x)$ ，来表明我们所讨论的是哪一个函数 $C(x)$ 。虽然这将是一个完全令人满意的符号，但是它有点麻烦，并且在大多数书中都不采用它。大多数人就直接省去字母 C ，而只用符号 ψ 来定义这个函数

$$\psi(x) \equiv C_\psi(x) = \langle x | \psi \rangle. \quad (16.16)$$

既然世界上其他人都使用这个符号，你们也会习惯它，你们在别的地方遇到它时也不会被吓住。然而要记住，我们现在有两种不同的使用 ψ 的方式。在式(16.14)中 ψ 代表我们给予电子的某一特定物理状态的标记。另一方面，在式(16.16)的左边，符号 ψ 被用来定义一个 x 的数学函数，它等于与沿直线上每一点 x 相联系的振幅。我们希望你们一旦习惯了这个概念后不会引起太多的混淆。顺便指出：函数 $\psi(x)$ 通常称为“波函数”——因为它多半具有其变量的复波形式。

既然我们已经把 $\psi(x)$ 定义为处在态 ψ 的电子在位置 x 处的振幅，那么就希望把 ψ 的绝对值平方解释为在位置 x 处找到一个电子的概率。遗憾的是，严格说来在任何特定位置上找到一个电子的概率是

零。一般说来，电子将“弥散”在线上的某个区域中，而且，由于任何一小线段上存在无数个点，因此电子在任何一点的概率不可能是有限数值。我们只能用概率分布 [2] 来描述找到一个电子的概率，概率分布给出了在直线上各个位置附近找到这个电子的相对概率。让我们用 $\text{prob}(x, \Delta x)$ 这个符号来代表位于 x 附近很小间隔 Δx 中找到电子的机会。如果我们采用在任何物理情况下都足够小的尺度，则概率就会随位置平滑地变化，而在任何小的有限线段 Δx 中找到电子的概率将与 Δx 成正比，我们可以按此考虑来修改我们的定义。

我们可以把振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 看作是表示所有基础态 $|x\rangle$ 在一小范围内的一种“振幅密度”。既然在 x 处的小间隔 Δx 中找到一个电子的概率应该与间隔 Δx 成正比，我们可以这样来选取 $\langle x | \psi \rangle$ 的定义，使下述关系成立：

$$\text{prob}(x, \Delta x) = |\langle x | \psi \rangle|^2 \Delta x.$$

因此振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 就与处在态 $|\psi\rangle$ 的一个电子在基础态 $|x\rangle$ 中被找到的振幅成正比，而比例常数这样选取，使得振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 的绝对值平方给出在任何小范围内找到一个电子的概率密度。我们可以等效地写成

$$\text{prob}(x, \Delta x) = |\psi(x)|^2 \Delta x. \quad (16.17)$$

现在我们必须对前面的某些方程作些修改，使它们与这个新定义相协调。假定一个电子处在 $|\psi\rangle$ 态，而我们希望知道在另一个不同态 $|\phi\rangle$ 中找到此电子的振幅，态 $|\phi\rangle$ 可能对应于该电子的另一个不同分布状况。以前当我们谈论一组有限的分立状态时，我们就用式 (16.5)。在修改我们的振幅定义前我们把这振幅写成

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{\text{所有 } x} \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle. \quad (16.18)$$

现在如果这些振幅按我们以前所叙述的方法来归一化，那么在 x 处小范围内所有状态的和就相当于乘以 Δx ，而对所有 x 值求和就变为对 x 的积分。用我们修改过的定义，这个振幅的正确形式为

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\text{所有 } x} \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx. \quad (16.19)$$

振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 就是我们现在所说的 $\psi(x)$ ，同样地，我们也选取 $\phi(x)$ 来表示振幅 $\langle x | \phi \rangle$ 。请记住， $\langle \phi | x \rangle$ 是 $\langle x | \phi \rangle$ 的复共轭，我们可以把式(16.19)写成

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi^*(x) \psi(x) dx. \quad (16.20)$$

按照我们的新定义，如果我们用对 x 的积分来代替对 x 的求和，则所有一切都遵从与以前相同的公式。

对上面我们所说的还应提出一个限制。如果我们要用任何一组合适的基础态来充分地描述所发生的情况，则这组基础态必须是完全的。对于一个一维电子来说，仅仅用基础态 $|x\rangle$ 来描述其实是不够完善的，因为对于每个这样的态中的电子，其自旋可以向上或向下，获得一个完全集的一种办法是在 x 处取两组态，一组对应于向上的自旋，一组对应于向下的自旋。不过，目前我们不必为这种复杂的情形而操心。

§16-3 具有确定动量的态

假定我们有一个电子，它处在用概率幅 $\langle x | \psi \rangle = \psi(x)$ 描写的态 $|\psi\rangle$ 中。我们知道电子处于这个态时以一定的分布展开在直线上，从而在位置 x 处小间隔 Δx 中找到电子的概率正好为

$$\text{prob}(x, dx) = |\psi(x)|^2 dx.$$

关于这个电子的动量，我们能讲些什么呢？我们要问，这个电子具有动量 p 的概率是多大？让我们从计算态 $|\psi\rangle$ 在另一个态 $|\text{动量 } p\rangle$ 中的振幅开始，我们定义态 $|\text{动量 } p\rangle$ 为具有确定动量 p 的态。利用关于振幅分解的基本方程式 (16.19)，我们可以求得这个振幅。按态 $|\text{动量 } p\rangle$ 的定义，我们得

$$\langle \text{动量 } p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \text{动量 } p | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx. \quad (16.21)$$

该电子具有动量 p 的概率应由这个振幅绝对值的平方给出。然而，我们又遇到了归一化的小问题。一般说来，我们所能问的只是在动量 p 附近 dp 的小范围内找到具有该动量的电子的概率。动量严格为某值 p 的概率必定为零（除非这个态 $|\psi\rangle$ 恰巧是一个具有确定动量的态）。只有当我们问到在动量 p 附近的小范围 dp 内找到这电子的概率时，我们才会得到一个确定的概率。有好几种办法适用于使它归一化，我们选一种我们认为最方便的办法，不过这在目前对你们来说可能不是显而易见的。

我们所作的归一化使概率与振幅的关系满足

$$\text{prob}(p, dp) = |\langle \text{动量 } p | \psi \rangle|^2 \frac{dp}{2\pi\hbar}, \quad (16.22)$$

振幅 $\langle \text{动量 } p | x \rangle$ 的归一化就按这个定义来确定。当然，振幅 $\langle \text{动量 } p | x \rangle$ 正好是振幅 $\langle x | \text{动量 } p \rangle$ 的复共轭，而 $\langle x | \text{动量 } p \rangle$ 又正是我们在式 (16.15) 中所写的式子。采用这种归一化，指数前面那个适当的比例常数正好为1，即

$$\langle \text{动量 } p | x \rangle = \langle x | \text{动量 } p \rangle^* = e^{-ipx/\hbar}. \quad (16.23)$$

于是式 (16.21) 变为

$$\langle \text{动量 } p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \langle x | \psi \rangle dx. \quad (16.24)$$

这个方程加上式 (16.22) 就能使我们对任何态 $|\psi\rangle$ 求出动量分布。

让我们来看一个特殊的例子——例如一个电子定域在 $x=0$ 附近某一区域内。假定我们采用如下形式的波函数：

$$\psi(x) = K e^{-x^2/4\sigma^2}. \quad (16.25)$$

那么这个波函数在 x 处的概率分布是上式绝对值的平方，即

$$\text{prob}(x, dx) = P(x)dx = K^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx. \quad (16.26)$$

式中的概率密度函数 $P(x)$ 是如图16-1所示的高斯曲线。大部分概率集中在 $x=+\sigma$ 和 $x=-\sigma$ 之间。我们说这个曲线的“半宽度”为 σ 。

(更精确地说， σ 等于某事物按此分布弥散时其坐标 x 的方均根值。) 通常，我们这样选取常数 K ，使概率密度 $P(x)$ 不仅与在 x 处单位长度内找到电子的概率成正比，而且具有这样的标度，使 $\underbrace{P(x) \Delta x}_{\text{在 } x \text{ 附近 } \Delta x \text{ 范围内找到电子的概率}}$ 等于在 x 附近 Δx 范围内找到电子的概率。可以令 $\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$ 来确定常数 K ，因为在整个区域内找到电子的概率必定为1。这里，我们得到

$K = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$ 。（我们用了公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ ，参见第1卷§40-4。）

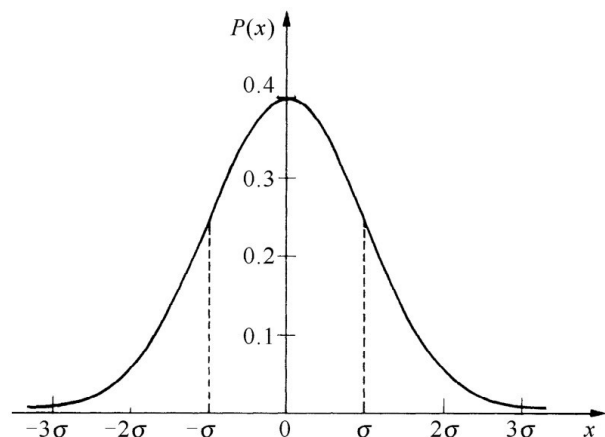


图16-1 式(16.25)中波函数的概率密度

现在我们来求动量分布。令 $\phi(p)$ 代表找到具有动量 p 的电子的振幅，

$$\phi(p) = \langle \text{动量 } p \mid \psi \rangle. \quad (16.27)$$

将式(16.25)代入式(16.24)，得：

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx/\hbar} \cdot K e^{-x^2/4\sigma^2} dx. \quad (16.28)$$

上述积分也可改写成

$$K e^{-p^2\sigma^2/\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(x+2ip\sigma^2/\hbar)^2} dx. \quad (16.29)$$

现在作代换 $u = x + 2ip\sigma^2/\hbar$ ，这个积分就为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4\sigma^2} du = 2\sigma\sqrt{\pi}. \quad (16.30)$$

（数学家们可能会反对我们在这里的推导方式，但不管怎么说，结果是正确的。）

$$\phi(p) = (8\pi\sigma^2)^{1/4} e^{-p^2\sigma^2/\hbar^2}. \quad (16.31)$$

我们得到了一个有趣的结果，即对 p 的振幅函数与 x 的振幅函数具有相同的数学形式，只是高斯分布的宽度不同。我们可以把上式写成

$$\phi(p) = (\eta^2/2\pi\hbar^2)^{-1/4} e^{-p^2/4\eta^2}, \quad (16.32)$$

式中 p 分布函数的半宽度 η 与 x 分布函数的半宽度 σ 有下列关系

$$\eta = \frac{\hbar}{2\sigma}. \quad (16.33)$$

我们所得结果表明：如果使 σ 变小，从而使对 x 的分布宽度变得很小，那么 η 就变得很大，对 p 的分布就散布得非常宽。或者反过来说，如果我们有一个对 p 的狭窄的分布，它必然对应着一个对 x 的散开的分布。要是我们愿意，可以把 η 和 σ 看作是处在我们所研究状态中的电子之位置和动量区域的不确定性的某种量度。如果我们把 η 和 σ 分别称为 Δp 和 Δx ，则式（16.33）变为：

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}. \quad (16.34)$$

有意思的是，可以证明对于 x 或 p 的任何其他形式的分布来说，乘积 $\Delta p \Delta x$ 不会比我们这里得到的小。高斯分布给出了均方根宽度乘积的最小可能值。一般我们可以说

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (16.35)$$

这就是海森伯的不确定性原理的定量表述，对此，我们以前已多次作过定性讨论。通常我们作这种近似表述：乘积 $\Delta p \Delta x$ 的最小值与 $\hbar$ 有相同的数量级。

§16-4 对 x 的态的归一化

当涉及基础态的连续问题时，就需要对我们的基本方程进行修改，现在就来讨论这个问题。当我们所讨论的是有限数目的分立态时，这一组基础态必须满足的基本条件为：

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (16.36)$$

如果一个粒子处在一个基础态中，那么它处在另一个基础态中的振幅就为零。通过选取适当的归一化条件，我们定义振幅 $\langle i | i \rangle$ 为1。这两个条件由式(16.36)描述。现在来看看，当用 $|x\rangle$ 表示在一条直线上的粒子的基础态时，这个关系应如何修改。如果已知这个粒子处在基础态之一 $|x\rangle$ 中，则它同时处在另一个基础态 $|x'\rangle$ 的振幅是多少呢？如果 x 和 x' 是沿直线上两个不同的位置，那么振幅 $\langle x | x'\rangle$ 肯定为0，从而与式(16.36)一致。但是如果 x 和 x' 相同，而振幅 $\langle x | x'\rangle$ 将不为1，则仍旧是因为老的归一化问题。为了看清楚我们必须怎样来补救这个问题，回到式(16.19)，并把此式用到态 $|\phi\rangle$ 正好是基础态 $|x'\rangle$ 的特殊情况中去。于是我们得

$$\langle x' | \phi \rangle = \int \langle x' | x \rangle \phi(x) dx. \quad (16.37)$$

振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 正好就是函数 $\psi(x)$ 。同样，既然振幅 $\langle x' | \psi \rangle$ 是指相同的态 ψ 而言的，因此它是变量 x' 的相同的函数，即 $\psi(x')$ 。于

是我们可以把式 (16.37) 改写成

$$\psi(x') = \int \langle x' | x \rangle \psi(x) dx. \quad (16.38)$$

这个方程必须对任何态 $|\psi\rangle$ 都成立，因而对任意函数 $\psi(x)$ 也成立。这个条件将完全确定振幅 $\langle x | x' \rangle$ 的性质——当然， $\langle x | x' \rangle$ 只是与 x 和 x' 有关的函数。

现在我们的任务是找到一个函数 $f(x, x')$ ，当把它乘以 $\psi(x)$ ，并对所有 x 积分后正好给出量 $\psi(x')$ 。结果发现没有一个数学函数能做到这点！至少没有一个我们通常所说的“函数”可以满足这点。

假定我们把 x' 取为一个特殊数目 0，并定义振幅 $\langle 0 | x \rangle$ 为 x 的某个函数，譬如说 $f(x)$ 。于是式 (16.36) 就为：

$$\psi(0) = \int f(x) \psi(x) dx. \quad (16.39)$$

何种类型的函数 $f(x)$ 才能够满足这个方程呢？既然这个积分必须与 x 不为 0 时 $\psi(x)$ 的值无关，所以很明显，对于 x 不为 0 的所有值， $f(x)$ 必定为 0。但是若 $f(x)$ 处处为 0，则积分也将为 0，因而式 (16.39) 不会被满足。所以我们遇到了一个不可能的情形：我们希望有一个函数，除了一点外处处为 0，但是其积分仍为有限值。既然我们找不到一个具有这种性质的函数，最方便的出路就是宣称 函数 $f(x)$ 就是由式 (16.39) 定义 的。也就是说 $f(x)$ 是能使式 (16.39) 正确成立的函数。这个函数最早是由狄拉克发明的，所以就用他的名字来命名。我们把它写成 $\delta(x)$ 。所有我们说的是函数 $\delta(x)$ 具有这样的奇怪性质，就是以它代替式 (16.39) 中的 $f(x)$ ，则积分就取 x 为

0时的 $\psi(x)$ 的值，而且既然这积分与所有 x 不等于0的 $\psi(x)$ 值无关，函数 $\delta(x)$ 必定除 $x=0$ 的点外处处为0。总括起来，我们写成：

$$\langle 0 | x \rangle = \delta(x), \quad (16.40)$$

式中 $\delta(x)$ 由下式定义

$$\psi(0) = \int \delta(x) \psi(x) dx. \quad (16.41)$$

注意，如果我们采用特殊的函数“1”作为式(16.41)中的函数 ψ ，那么我们就得到

$$1 = \int \delta(x) dx. \quad (16.42)$$

这就是说，函数 $\delta(x)$ 具有这样的性质：除了 $x=0$ 外它处处为0，但是具有等于1的有限积分。我们必须把这函数 $\delta(x)$ 想象成在某一点为奇特的无穷，使总面积等于1。

想象狄拉克 δ 函数的一种方法是设想一系列的矩形——或者你愿意想象的任何峰函数——它变得越来越窄，越来越高，但始终保持面积为1，如图16-2所示。这函数从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分恒为1。如果你们将它乘以任何函数 $\psi(x)$ ，然后对这个乘积进行积分，那么你们就会近似地得到这个函数 $\psi(x)$ 在 $x=0$ 处的值，当你使用的长方形越来越窄，这一近似就越来越好。如果你们愿意的话，就可以用这种类型的极限过程来想象 δ 函数。但是，唯一重要的事情是： δ 函数被定义为使得式(16.41)对每一个可能的函数 $\psi(x)$ 都成立。这就唯一地定义了 δ 函数。它的性质如上所述。

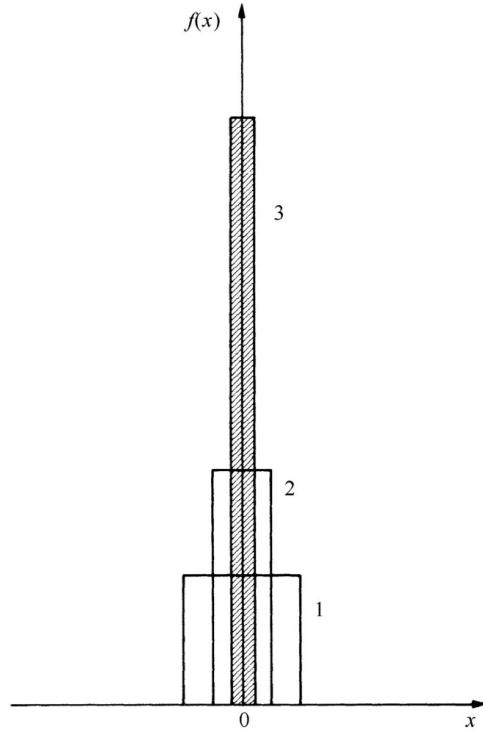


图16-2 一组面积都为1的函数，看上去越来越像 $\delta(x)$

如果我们把 δ 函数的自变量从 x 变成 $x-x'$ ，那么相应的关系式为：

$$\delta(x-x') = 0, \quad x' \neq x,$$

$$\int \delta(x-x') \psi(x) dx = \psi(x'). \quad (16.43)$$

如果我们用 $\delta(x-x')$ 来代替式(16.38)中的振幅 $\langle x | x' \rangle$ ，那么该方程被满足。于是我们的结果是：对 x 的基础态来说，与式(16.36)相对应的条件为

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x-x'). \quad (16.44)$$

现在我们已经完成了对我们的基本方程所作的必要的修改，在处理对应于直线上那些点的连续基础态问题时需要这些方程。可以直接把这种修改推广到三维的情况。首先我们用矢量 $\mathbf{r}$ 代替坐标 x ，然后

把对 x 的积分变成对 x ， y 和 z 的积分，换句话说，变成体积分。最后，一维 δ 函数必须被3个 δ 函数的乘积即 $\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$ 来代替，其中一个以 x 、一个以 y 、另一个以 z 为变量。把以上这些合在一起，我们就得到在三维空间中粒子振幅的如下一组方程：

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \langle \phi | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi \rangle d\text{Vol}, \quad (16.45)$$

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \psi(\mathbf{r}),$$

$$\langle \mathbf{r} | \phi \rangle = \phi(\mathbf{r}), \quad (16.46)$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\text{Vol}, \quad (16.47)$$

$$\langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'). \quad (16.48)$$

如果粒子多于一个将会发生什么情况呢？我们将告诉你们如何处理两个粒子系统的问题，你们就会很容易地看出，如果要处理粒子数目很多的系统时必须做些什么。假定有两个粒子，我们称之为粒子1和粒子2。用什么作为基础态呢？一组能描述这一系统的完美的态为：粒子1处在 x_1 和粒子2处在 x_2 ，我们把这个态写成 $|x_1 x_2\rangle$ 。请注意，只对一个粒子位置的描述不能定义为基础态。每个基础态必须确定整个系统的情况。我们绝不可认为每个粒子都是独立地像波一样在三维空间中运动。任何一个物理态 $|\psi\rangle$ ，可以通过给出在 x_1 和 x_2 处找到两个粒子的所有振幅 $\langle x_1, x_2 | \psi \rangle$ 而确定下来。因此这个广义振幅是两组坐标 x_1 和 x_2 的函数。你们可以看出这样的函数并不是在三维空间中传播的振动这种意义上的波。它一般也不只是两个单独的波——每个粒子一个波——的简单乘积。总的来说，它是由 x_1 和 x_2 所

定义的六维空间中的某种波。如果在自然界中存在着两个具有相互作用的粒子，那么我们无法通过试图写出其中一个粒子单独的波函数来描述它发生的过程。我们在前面几章中所讨论的这个著名的佯谬——对一个粒子作测量就可以告知另一个粒子遭遇的事情，或者会破坏两粒子的干涉——已经给人们带来了种种麻烦，因为他们只愿意考虑单独一个粒子的波函数，而不愿去想象以两个粒子的坐标为变量的正确波函数。只有用两个粒子坐标的函数，才能正确地给出完整的描述。

§16-5 薛定谔方程

到目前为止，我们只是为如何描述涉及一个可以位于空间各处的电子这样的态而操心，现在我们得为如何描述在各种情况下可能发生的物理问题而操心了。和前面一样，我们必须解决态如何随时间变化的问题。如果我们有一个态 $|\psi\rangle$ ，经一段时间后转变成了另一个态 $|\psi'\rangle$ ，那么我们只要使波函数——它就是振幅 $\langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ ——不仅是坐标的函数而且是时间的函数就可描述所有时刻的情况。于是我们可以用一个随时间变化的波函数 $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, z, t)$ 来描写在给定情况下的一个粒子。这个随时间变化的波函数描述了随着时间的进展而出现的态的相继变化。这个所谓的“坐标表象”给出了态 $|\psi\rangle$ 在基础态 $|\mathbf{r}\rangle$ 上的投影，它应用起来不一定总是最方便的，但是我们将首先讨论它。

在第8章中我们曾用哈密顿 H_{ij} 描述态如何随时间变化。我们看到各种振幅的时间变化是用矩阵方程

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j \quad (16.49)$$

给出的。这方程告诉我们：每个振幅 C_i 的时间变化与所有其他的振幅成正比，比例系数为 H_{ij} 。

当我们用连续基础态 $|x\rangle$ 时，式（16.49）是怎样的呢？首先让我们记住，式（16.49）也可写成

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle i | \psi \rangle = \sum_j \langle i | \hat{H} | j \rangle \langle j | \psi \rangle.$$

现在我们很清楚该怎么做。对 x 表象来说，我们认为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \psi \rangle = \int \langle x | \hat{H} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle dx'. \quad (16.50)$$

对基础态 $|j\rangle$ 的求和为对 x' 的积分所代替。既然 $\langle x | \hat{H} | x' \rangle$ 应是 x 和 x' 的某个函数，我们就可把它写成 $H(x, x')$ ——它相当于式（16.49）中的 H_{ij} 。于是式（16.50）与式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \int H(x, x') \psi(x') dx' \quad (16.51)$$

相同，其中

$$H(x, x') \equiv \langle x | \hat{H} | x' \rangle.$$

根据式（16.51）， ψ 在 x 处的变化率与 ψ 在所有各点 x' 处的 ψ 值有关；因子 $H(x, x')$ 是单位时间内电子从 x' 跃迁到 x 处的振幅。然而，结果是：在自然界中，除了非常靠近 x 的那些点 x' 以外，这个振幅总为0。这就意味着——正如我们在本章开始所举的原子链的例子（式

(16.12)) 中所看到的那样——式 (16.51) 的右边可以用在 x 处的 ψ 和 ψ 对 x 的微商完全表示出来。

对于一个不受力的作用和不受干扰而在空间自由运动的粒子来说，正确的物理定律是

$$\int H(x, x') \psi(x') dx' = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x).$$

这一式子我们是从什么地方得来的呢？没有地方。我们不可能从我们已知的任何事情中导出这个式子，它来源于薛定谔的头脑，是薛定谔在致力于了解对真实世界的各种实验观察的过程中发明的。你们想想我们从研究晶体中电子的传播而导出式 (16.12) 的过程，或许会获得上式为什么会是这种形式的某些线索。

当然，自由粒子并不十分令人兴奋。如果我们对粒子施以作用力，将会发生些什么呢？如果粒子所受的力可以用标势 $V(x)$ 来描写——这意味着我们考虑的是电力而不是磁力——如果我们只考虑低能的情况，从而可以忽略那些由相对论性的运动所引起的复杂性，于是适合真实世界的哈密顿给出

$$\int H(x, x') \psi(x') dx' = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x). \quad (16.52)$$

同样，要是你们回顾一下电子在晶体中的运动，你们就可以对这个方程的来源获得一些线索；而且，如果从一个原子位置到另一个原子位置电子的能量变化很慢——如果对晶体加上电场，就会出现这种情况——那么你们知道方程要如何修改。这样，式 (16.7) 中的项 E_0 将随位置缓慢变化，并与式 (16.52) 中我们所加的新项相对应。

[你们可能感到奇怪，为什么我们直接从式（16.51）到式（16.52），而不是给出关于振幅 $H(x, x') = \langle x | \hat{H} | x' \rangle$ 的正确函数形式。我们这样做是因为：虽然式（16.51）右边的整个积分用我们习惯的方式表示，但是 $H(x, x')$ 只能写成奇特的代数函数。如果你们实在好奇的话，我们可以把 $H(x, x')$ 写成如下形式：

$$H(x, x') = -\frac{\hbar^2}{2m} \delta''(x - x') + V(x) \delta(x - x'),$$

式中 δ'' 表示 δ 函数的二阶微商。这个相当陌生的函数可以用一个稍微方便些的代数微分算符来代替，它是完全等效的：

$$H(x, x') = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \delta(x - x').$$

我们不用这些形式，而直接利用式（16.52）的形式。]

现在，如果我们对式（16.50）中的积分采用式（16.52）中的表示式，那么我们就对 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ 得到下列微分方程式：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x). \quad (16.53)$$

如果我们对三维空间中的运动感兴趣，那么我们很清楚应该用什么方程来代替式（16.53）。唯一的改变是用

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

来代替 $\partial^2 / \partial x^2$ ，以及用 $V(x, y, z)$ 代替 $V(x)$ 。对于一个在势场 $V(x, y, z)$ 中运动的电子来说，其振幅 $\psi(x, y, z)$ 所遵循

的微分方程为

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi. \quad (16.54)$$

上式称为薛定谔方程，是第一个为人所知的量子力学方程。在本书中我们提到的其他量子力学方程被发现之前，薛定谔就写下了这个方程。

虽然我们是沿着完全不同的途径来探讨这一问题的，但是标志物质量子力学描述诞生的伟大历史时刻是1926年薛定谔第一次写出他的方程之时。许多年中，物质内部的原子结构曾经是个巨大的谜。没有人能理解是什么原因使物质结合在一起，为什么会有化学键联，特别是原子怎么会是稳定的。虽然玻尔已经能够描述氢原子中电子的内部运动，而且看起来也可以解释所观察到的氢原子辐射出的光谱，但是电子为什么以这种方式运动仍然是一个谜。薛定谔所发现的电子在原子尺度上正确的运动方程提供了一种理论，可以定量、精确并详细地计算原子现象。原则上，除了涉及磁和相对论的现象外，薛定谔方程能解释所有的原子现象。它解释了原子能级以及所有化学键联的事实。然而这只在原则上成立——除了对最简单的问题，有关的数学立即变得非常复杂而无法精确求解。只对氢原子和氦原子进行了高度精确的计算。但是，用了各种近似方法（有些非常粗糙）后，许多有关更为复杂的原子以及分子化学键联的事实就可以理解了。在前面几章中我们已经给你们介绍过几种这样的近似方法。

我们所写出的薛定谔方程没有把任何磁效应考虑进去。只要在薛定谔方程中加进几项，就可以近似地把这种效应考虑进去。但是正如我们在第2卷中所看到的那样，磁性本质上是一种相对论性效应，所以只有用适当的相对论性方程才能正确地描述电子在任意电磁场中的运

动，关于电子运动的正确的相对论方程是在薛定谔发明他的方程后一年由狄拉克发现的。它的形式与薛定谔方程有很大的不同。在这里我们根本无法去讨论它。

在我们进一步研究由薛定谔方程所得出的一些结果之前，我们愿向你们说明一下，对于具有大量粒子的系统，薛定谔方程是怎样的。我们并不打算应用这个方程，只是想让你们看一下这个方程，强调一下波函数 ψ 并不仅仅是空间的一个普通的波，而是一个具有许多变量的函数。如果存在许多粒子，薛定谔方程就变成

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \cdots)}{\partial t} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i^2} \right\} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \cdots) \psi. \quad (16.55)$$

式中的势函数 V 相当于经典理论中所有粒子的总势能。如果没有外力作用在粒子上，函数 V 就是所有粒子相互作用的静电能。这就是说，如果第 i 个粒子带有电荷 $Z_i q_e$ ，则函数 V 就是^[3]

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \cdots) = \sum_{\text{所有粒子对}} \frac{Z_i Z_j e^2}{r_{ij}}. \quad (16.56)$$

§16-6 量子化能级

后面有一章我们将对一个特殊例子详细讨论薛定谔方程的解。但是现在我们想告诉你们薛定谔方程的一个最不寻常的结果是怎样得出来的——即一个只包含空间连续变量的连续函数的微分方程能给出诸如原子中分立能级这样的量子效应这种惊人的事实。我们要了解的基本要点是下述情形怎样发生的：当一个电子被某种类型的势“井”束缚

在空间某区域时，它只能具有一组十分确定的分立能量中的这个或那个能量呢？

假定我们设想一个电子处在一维情况中，它的势能随 x 的变化方式如图16-3所示。我们设这个势是不变的——它不随时间变化。正如我们以前多次做过的那样，我们希望求出与确定能量、即确定频率的状态相对应的解。让我们试一下这种形式的解

$$\psi = a(x)e^{-iEt/\hbar}. \quad (16.57)$$

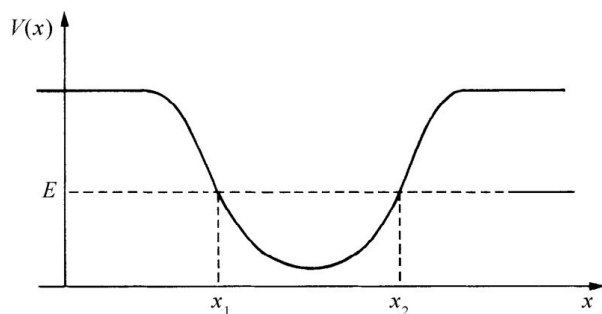


图16-3 对于一个沿 x 轴运动的粒子的势阱

如果我们把这个函数代入薛定谔方程，我们发现函数 $a(x)$ 必须满足下面的微分方程

$$\frac{d^2 a(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] a(x). \quad (16.58)$$

这个方程告诉我们：在每个 x 处， $a(x)$ 对 x 的二次微商与 $a(x)$ 成正比，比例系数是量 $\frac{2m}{\hbar^2}(V - E)$ 。 $a(x)$ 的二次微商就是它的斜率的变化率。如果势 V 比粒子的能量 E 大，则 $a(x)$ 斜率的变化率与 $a(x)$ 具有相同的符号。这就意味着， $a(x)$ 这条曲线是凹的，随 x 增大，远离 x 轴而去。也就是说，它多少具有正或负指数函数 $e^{\pm x}$ 的性

质。这意味着在图16-3中坐标轴上 x_1 左边 V 大于所设的能量 E 的区域，函数 $a(x)$ 的形状将像图16-4(a)中所示的某条曲线。

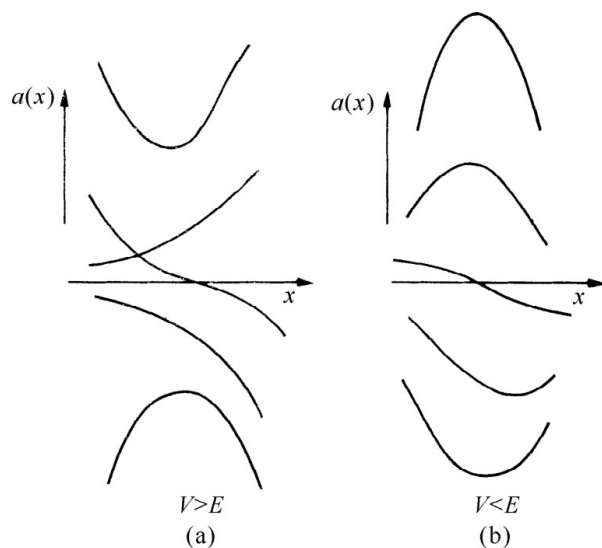


图16-4 对于 $V > E$ 和 $V < E$ 的情形，波函数 $a(x)$ 的可能形状

另一方面，如果势函数 V 小于能量 E ，则 $a(x)$ 对 x 的二次微商具有与 $a(x)$ 本身相反的符号， $a(x)$ 这条曲线将总是凹向 x 轴，与图16-4(b)中所示的那些曲线相似。在这样一个区域中的解逐渐接近于大致的正弦曲线的形状。

现在让我们来看看：我们是否能够用作图的办法求得函数 $a(x)$ 的解，它对应于能量为 E_a 的一个粒子处于如图16-3所示的势 V 中。既然我们试图描述一个粒子被束缚在势阱内的情形，因此我们所要找的解，其波振幅在势阱之外的 x 处具有很小的值。我们很容易想象出图16-5中所示的那样的曲线，对于大的负 x 值，它趋于零，当它趋于 x_1 的时候，它平滑地增长。既然在 x_1 处 V 等于 E_a ，则在该点此函数的曲率变为0。在 x_1 和 x_2 之间的区域，量 $V - E_a$ 恒为负数，所以函数 a

$\psi(x)$ 总是凹向 x 轴，而且 E_a 和 V 之间的差值越大，曲率也越大。如果我们将曲线延长至 x_1 和 x_2 之间的区域内，它多少应如图16-5所示。

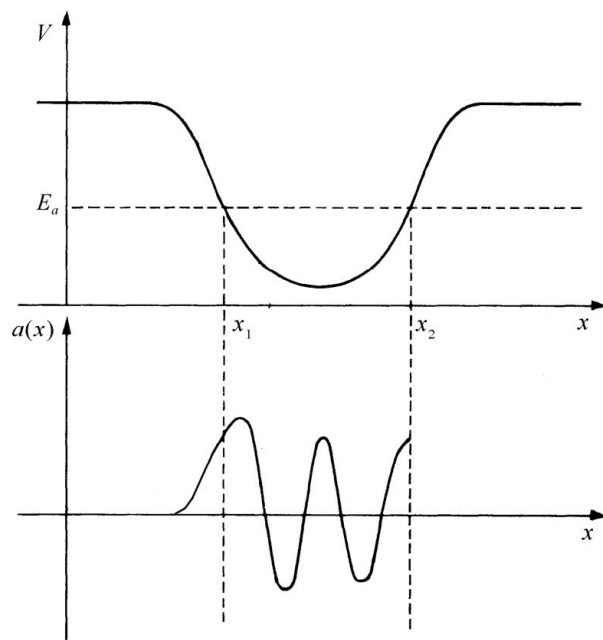


图16-5 对于能量为 E_a 的波函数，在坐标轴 $x < x_1$ 的区域，它趋近于零

现在让我们把这条曲线延伸至 x_2 右边的区域，在那里它弯曲离开坐标轴并趋向大的正值，如图16-6所示。对于我们所选取的 E_a ， $a(x)$ 的解随着 x 的增加而变得越来越大。事实上，它的曲率也在增加（如果这个势函数继续保持平坦的话）。振幅以极大的比例急剧地增长。这意味着什么呢？这表示粒子没有被“束缚”在势阱里，它在阱外找到的可能性比阱内要大得多。对于我们所制造的这个解，在 $x = +\infty$ 处找到这个电子的可能性比其他任何地方大得多。我们没能找到一个束缚粒子的解。

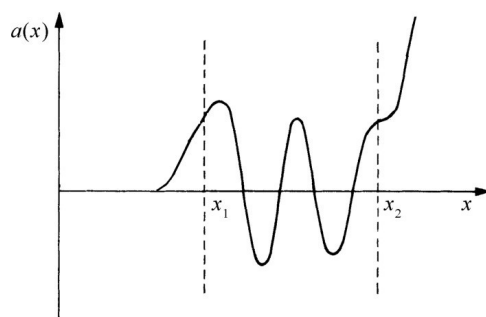


图16-6 把图16-5的波函数 $a(x)$ 继续延长到超过 x_2

让我们试试另一个能量，譬如一个稍微比 E_a 高些的能量 E_b ，如图16-7所示。如果我们在同样的情况下从左边开始，那么我们所得到的解就如图16-7的下半部分所示。初看起来，这解似乎比较好，其实它的结果与 E_a 的解一样糟——只不过现在当趋于大的 x 值时 $a(x)$ 变得越来越负。

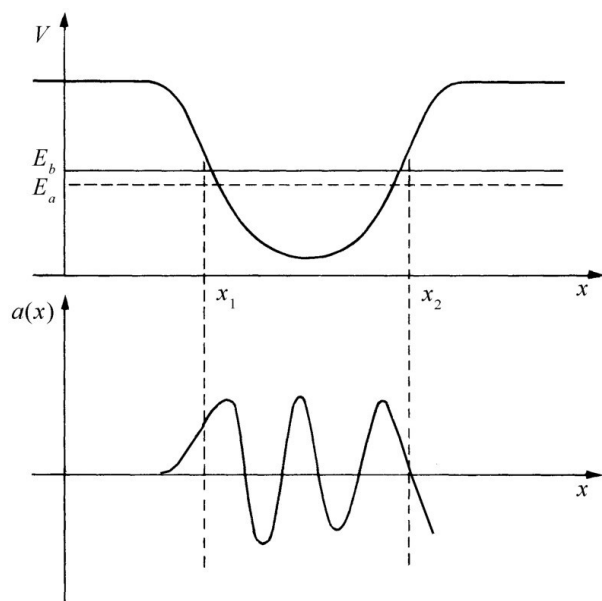


图16-7 对于能量 E_b 大于 E_a 的波函数 $a(x)$

可能这就是线索。既然，把能量 E_a 稍微改变一点到 E_b ，就使得这条曲线从坐标轴的一边跳到另一边，那么在 E_a 和 E_b 之间或许存在

某个能量，对于这一能量当 x 为很大值时曲线将趋于零。的确有这么一个能量，我们在图16-8中粗略地画出了这个解的形式。

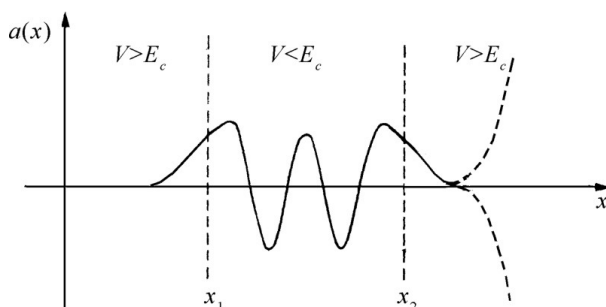


图16-8 对于在 E_a 和 E_b 之间的能量 E_c 的波函数

你们应该体会到我们在图中画出的解是一个非常特殊的解。如果我们把这个能稍微升高或降低一点，那么函数就会变成图16-8所示的两条虚线之一那样的曲线，而我们也就不会有关于一个束缚粒子的适当条件了。这样我们得到了一个结果：如果要使一个粒子被束缚在一个势阱中，只有当它具有一个完全确定的能量才行。

这是否意味着，对于一个束缚在势阱中的粒子，它只能具有一个能量呢？不，其他能量也可能，但不是非常靠近 E_c 的能量。注意，我们在图16-8中画出的波函数在 x_1 和 x_2 之间穿过坐标轴4次。如果我们所选的能量比 E_c 低相当数量的话，那么可以得到一个只与坐标轴相交3次、2次、1次或不相交的解。这些可能解画在图16-9中。（还可能其他的解，对应于比图中所示的更高的能量值。）我们的结论是：如果一个粒子被束缚在势阱中，它的能量只能取一个分立能谱中的某些特定值。你们看到了，一个微分方程是怎样描述量子物理的基本事实的。

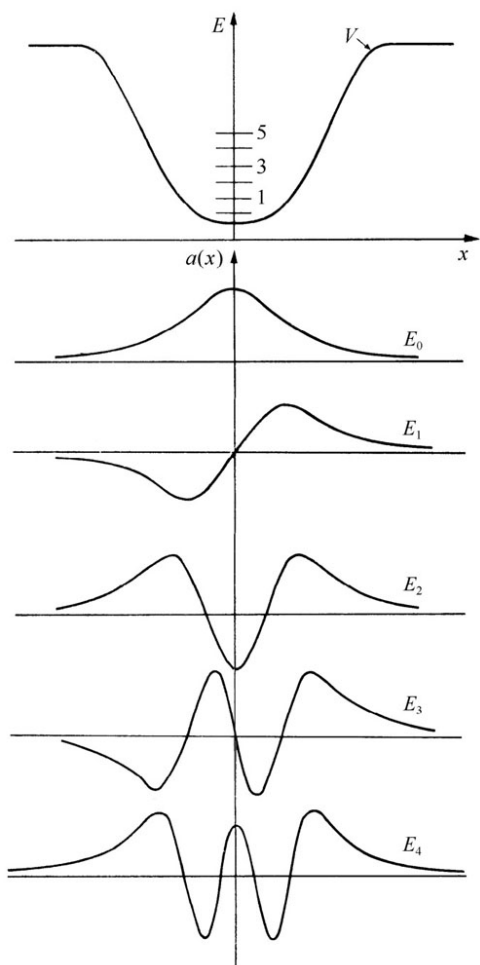


图16-9 能量最低的5个束缚态的函数 $a(x)$

我们可以提醒你们注意另一种事。如果能量 E 在这个势阱顶部以上，那么就不再有分立的解，任何可能的能量都是允许的。这种解对应于自由粒子被势阱散射的情形，在讨论晶体中杂质原子的影响时，我们就已经看到过这种解的例子了。

[1] 你们可以想象，当这些点 x_n 相互趋近时，从 $x_{n \pm 1}$ 跃迁到 x_n 的振幅 A 将增加。

[2] 关于概率分布的讨论请参看第1卷§6-4。

[3] 这里我们根据前面两卷所用的习惯，取 $e^2 \equiv q_e^2 / (4\pi\epsilon_0)$ 。

第17章 对称性和守恒定律 [1]

§17-1 对称性

在经典物理学中，许多物理量是守恒的，如动量、能量和角动量。在量子力学中也存在着对应于这些量的守恒定理。从某种意义上来说，量子力学最美妙之处在于它可以从其他一些东西导出这些守恒定理，而在经典力学中它们实际上是各定律的出发点。（在经典力学中，也有类似于我们在量子力学中用的这种处理方法，但这只有在很高深的水平上才能做到。）但是，在量子力学中，许多守恒定律与振幅的叠加原理及物理系统在各种变换下的对称性深刻关联。这就是本章的主题。虽然我们把这些概念主要应用到角动量的守恒上，但是最本质的一点在于：量子力学中所有物理量守恒的定理都与该系统的对称性有关。

因此，我们就从研究物理系统的对称性问题开始。氢分子离子是一个非常简单的例子——当然也可以氦分子为例——它们都有两个态。对氢分子离子来说，我们可把电子定域在第一个质子附近及定域在第二个质子附近这两种状态取作我们的基础态。这两个态——它们称为 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ ——重画在图17-1 (a) 上。现在，只要这两个核是完全相同的，那么在这个物理系统中就存在某种对称性。这就是说，如果我们以一个位于两质子距离的一半的中间平面来反射这个系统（所谓反射是指把平面一边的一切东西都移到另一边的对称位置

上)，则我们得到图17-1 (b) 的情形。由于两个质子是完全相同的，因此，这种反射操作 就使 $|1\rangle$ 变为 $|2\rangle$ 以及 $|2\rangle$ 变为 $|1\rangle$ 。我们把这个反射操作称为 $\hat{P}$ ，并写为

$$\hat{P} |1\rangle = |2\rangle, \quad \hat{P} |2\rangle = |1\rangle. \quad (17.1)$$

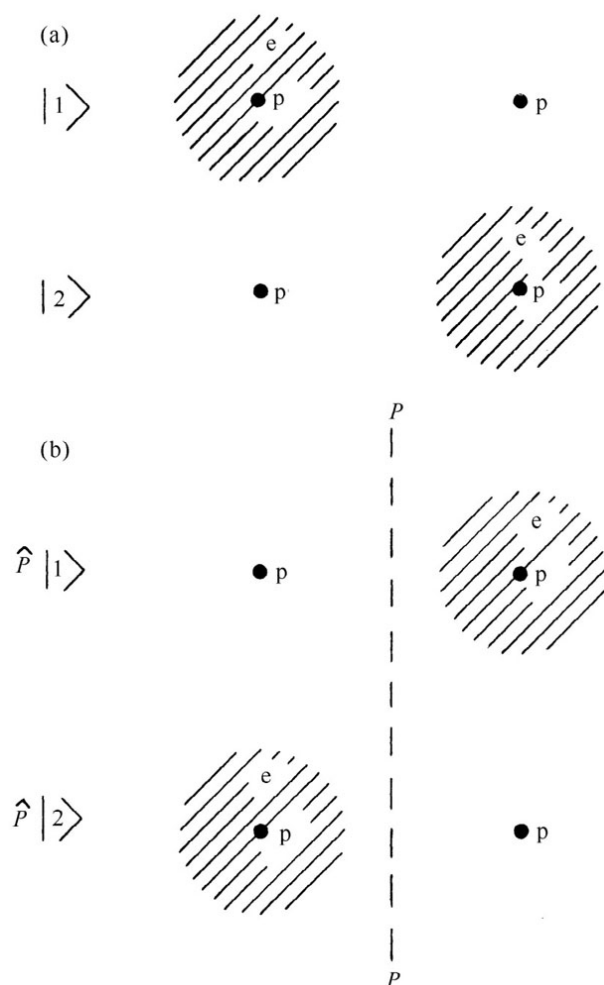


图17-1 如果态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 对平面 $P-P$ 反射，则它们分别变成态 $|2\rangle$ 和 $|1\rangle$

所以在某种意义上 $\hat{P}$ 是一个算符，它的“作用”是使一个态成为一个新的态。有趣的是 $\hat{P}$ 作用于任何一个态所产生的的是该系统的另外一个态。

与我们以前描述的任何算符一样， $\hat{p}$ 也具有矩阵元，它可以用通常的符号来定义。如果在 $\hat{p} | 1 \rangle$ 和 $\hat{p} | 2 \rangle$ 的左边乘以 $\langle 1 |$ ，就得到矩阵元

$$P_{11} = \langle 1 | \hat{p} | 1 \rangle \quad \text{以及} \quad P_{12} = \langle 1 | \hat{p} | 2 \rangle.$$

根据式 (17.1)，它们为

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{p} | 1 \rangle &= P_{11} = \langle 1 | 2 \rangle = 0, \\ \langle 1 | \hat{p} | 2 \rangle &= P_{12} = \langle 1 | 1 \rangle = 1. \end{aligned} \tag{17.2}$$

同样的方法可得 P_{21} 和 P_{22} 。 $\hat{p}$ 对于 基础态 $| 1 \rangle$ 和 $| 2 \rangle$ 的矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17.3}$$

我们再次看到在量子力学中算符和矩阵这两个词实际上是可以互相通用的。它们之间只有一些技术性的差别，就像“数字”和“数”的差别一样，但是这种差别有点学究式，我们不必为之操心。所以不论 $\hat{p}$ 定义一个操作，还是实际上用来定义一个数字矩阵，我们可以随意把它称为算符或矩阵。

现在要指出，我们假定整个氢分子离子系统的物理性质是对称的。例如，它并不一定要与邻近的别的事物有关。然而，如果这个系统是对称的话，那么下面的概念肯定是正确的。假设系统在 $t=0$ 时处于态 $| 1 \rangle$ ，经过一段时间 t 后，我们发现系统处于一个较为复杂的情况——两个基础态的某种线性组合。记得我们在第8章中用乘以算符 $\hat{U}$ 来代表“经过一段时间”。这就是说，系统过一会儿——为明确起见，

譬如说15 s——后处在另外某个态。例如，它可能是由 $\sqrt{2/3}$ 的态 $|1\rangle$ 和 $i\sqrt{1/3}$ 的态 $|2\rangle$ 组成的态，我们可写成：

$$| \text{第 15 s 时的 } \psi \rangle = \hat{U}(15, 0) |1\rangle = \sqrt{2/3} |1\rangle + i\sqrt{1/3} |2\rangle. \quad (17.4)$$

现在我们问，如果开始时系统处于对称态 $|2\rangle$ ，则在同样的条件下经15 s后系统会发生什么变化？显然，如果世界是对称的——正如我们所假定的那样——我们将得到与式（17.4）对称的态：

$$| \text{第 15 s 时的 } \psi \rangle = \hat{U}(15, 0) |2\rangle = \sqrt{2/3} |2\rangle + i\sqrt{1/3} |1\rangle. \quad (17.5)$$

图17-2表示两个同样的概念。所以如果一个系统的物理性质相对某个平面对称的，并且我们求得了一个特定态的行为，也就知道了原来的态对此对称平面反射后所得到的态的行为。

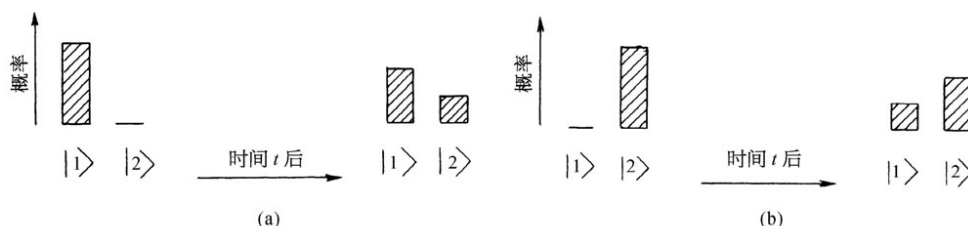


图17-2 在一对称系统中，如果纯态 $|1\rangle$ 的发展如图（a）所示，则纯态 $|2\rangle$ 的发展必将如图（b）所示

现在我们希望把同样这些事情讲得更为一般化一些——这也就意味着稍微抽象一些。设 $\hat{Q}$ 是任何一个不改变系统物理性质的操作。例如，我们可以把对氢分子的两个原子中间的平面上的反射操作 $\hat{P}$ 取作为 $\hat{Q}$ 。或者，在一个具有两个电子的系统中，我们可以把交换两个电子的操作看作 $\hat{Q}$ 。另一个可能的操作是在一个球对称系统中，整个系统绕某个轴转动有限角度的操作，这种操作并不改变系统

的物理性质。当然，我们总是对每种特定情况给 $\hat{Q}$ 以某种特殊记号。明确地讲，我们通常把系统“绕y轴旋转 θ 角”的操作定义为 $\hat{R}_y(\theta)$ 。对于 $\hat{Q}$ ，我们指的就是前面所描述过的，或者其他基本物理情况保持不变的任一操作。

让我们再考虑几个例子。如果一个原子没有加外磁场或外电场，并且如果使坐标轴绕任意一个轴旋转，则它仍然是相同的物理系统。再如氨分子，对于在平行于3个氢分子的平面上的反射是对称的——只要不存在电场。如果存在电场，并当我们作反射时，也不得不改变电场，这样就改变了物理问题。但是如果没有外场，这个分子就是对称的。

现在我们来讨论一种一般情况。假设我们由态 $|\psi_1\rangle$ 开始，在给定的物理条件下经过某段时间后，它变成了态 $|\psi_2\rangle$ 。我们可以写成

$$|\psi_2\rangle = \hat{U} |\psi_1\rangle. \quad (17.6)$$

[你可以联想到式(17.4)。] 现在设想我们对整个系统施以操作 $\hat{Q}$ ，态 $|\psi_1\rangle$ 将转变成态 $|\psi'_1\rangle$ ，我们也可把 $|\psi'_1\rangle$ 写成 $\hat{Q} |\psi_1\rangle$ ，同样态 $|\psi_2\rangle$ 变成 $|\psi'_2\rangle = \hat{Q} |\psi_2\rangle$ 。现在如果在 $\hat{Q}$ 作用下系统的物理性质是对称的（不要忘记如果，因为这并不是系统的一般性质），那么在同样的条件下经过相同的时间，我们应得

$$|\psi'_2\rangle = \hat{U} |\psi'_1\rangle. \quad (17.7)$$

[与式(17.5)相似。] 但是我们可以把 $|\psi'_1\rangle$ 写成 $\hat{Q} |\psi_1\rangle$ 并把 $|\psi'_2\rangle$ 写成 $\hat{Q} |\psi_2\rangle$ ，因此式(17.7)也可写成

$$\hat{Q} |\psi_2\rangle = \hat{U} \hat{Q} |\psi_1\rangle. \quad (17.8)$$

现在如果用 $\hat{U} |\psi_1\rangle$ 代替 $|\psi_2\rangle$ ——式 (17.6) ——我们得到

$$\hat{Q} \hat{U} |\psi_1\rangle = \hat{U} \hat{Q} |\psi_1\rangle, \quad (17.9)$$

我们不难理解上面这个式子的意义。就氢离子而言，上式告诉我们：“先反射再等一段时间” [式 (17.9) 右边所示] 与“先等一段时间然后再反射” [式 (17.9) 左边所示] 是相同的。只要在反射的情况下 U 不变，这两种情形就相同。

由于式 (17.9) 对任何 初始状态 $|\psi_1\rangle$ 均成立，所以实际上该式是一个关于算符的方程：

$$\hat{Q} \hat{U} = \hat{U} \hat{Q}. \quad (17.10)$$

这就是我们希望得出的结果——它是对称性的数学表述。当式 (17.10) 成立时，我们说算符 $\hat{U}$ 和 $\hat{Q}$ 对易。于是我们就可用下列方式来定义 对称性：当 $\hat{Q}$ 与 $\hat{U}$ （时间的转移操作）相对易时，物理系统对于操作 $\hat{Q}$ 是 对称 的。[用矩阵来表示，两个算符的乘积等价于矩阵的乘积。所以，对于在变换 Q 下是对称的物理系统，式 (17.10) 对矩阵 Q 和 U 也成立。]

顺便指出，因为对于无限小的时间 ϵ 而言， $\hat{U} = 1 - i \hat{H} \epsilon / \hbar$ ，式中 $\hat{H}$ 为通常的哈密顿（参见第8章），所以你可以看出，若式 (17.10) 成立，则下式

$$\hat{Q} \hat{H} = \hat{H} \hat{Q} \quad (17.11)$$

也成立。因此式 (17.11) 是关于一个物理情况对操作 $\hat{Q}$ 具有对称性的条件的数学表述。它定义了对称性。

§17-2 对称与守恒

在应用刚才所得到的结果之前，我们再讨论一些关于对称的概念。假设有一非常特殊的情况：当我们把 $\hat{Q}$ 作用于某一态后，仍得到相同的态。这是一个非常特殊的情形，但是让我们假定碰巧对态 $|\psi_0\rangle$ 这种情形是正确的，即 $|\psi'\rangle = \hat{Q}|\psi_0\rangle$ 在物理上和 $|\psi_0\rangle$ 是相同的态。这意味着 $|\psi'\rangle$ 和 $|\psi_0\rangle$ 除相差某个相位因子^[2]外是相等的。怎样才能发生这种情况呢？举例来说，假设我们有一个 H_2^+ 离子处于我们曾称为 $|I\rangle$ ^[3] 的态中。这个态在基础态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 中具有相同的振幅。它们的概率如图17-3 (a) 中的线条图所示。如果我们把反射算符 $\hat{P}$ 作用于 $|I\rangle$ ，它将使态翻转， $|1\rangle$ 变成 $|2\rangle$ ， $|2\rangle$ 变成 $|1\rangle$ ，其概率如图17-3 (b) 所示。但是这正好又是态 $|I\rangle$ 。如果我们从态 $|II\rangle$ 开始，反射前后的概率看上去完全相同。可是，如果考察其振幅，就有所差异了。对于态 $|I\rangle$ 来说，反射后的振幅没有改变，但对态 $|II\rangle$ 来说，振幅要反号。换句话说，

$$\begin{aligned}\hat{P}|I\rangle &= \hat{P}\left\{\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{|2\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |I\rangle, \\ \hat{P}|II\rangle &= \hat{P}\left\{\frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{|2\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = -|II\rangle.\end{aligned}\tag{17.12}$$

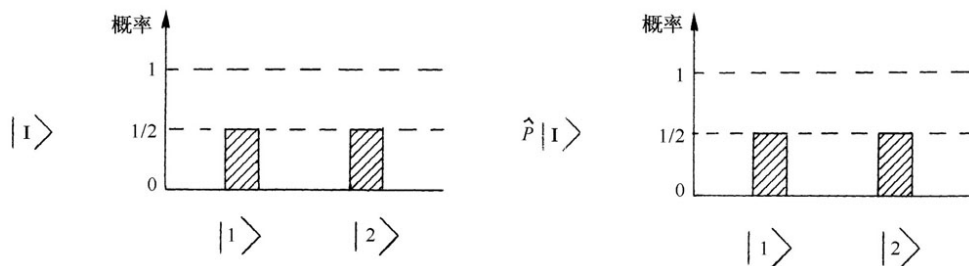


图17-3 态 $|I\rangle$ 和由 $|I\rangle$ 经中心平面反射而得到的态 $\hat{P}|I\rangle$

如果我们写成 $\hat{P}|\psi_0\rangle = e^{i\delta}|\psi_0\rangle$ ，则对态 $|I\rangle$ 来说， $e^{i\delta}=1$ ，而对态 $|II\rangle$ 来说， $e^{i\delta}=-1$ 。

让我们再看一下另一个例子。假设有一个右旋圆偏振光子沿 z 方向传播，如果我们进行绕 z 轴转动的操作，我们知道这只是对振幅乘以 $e^{i\phi}$ ，其中 ϕ 是转动的角度。所以对于这种情况下的转动操作来说， δ 就等于旋转角。

现在很清楚，如果碰巧算符 Q 在某个时候，譬如 $t=0$ ，只是改变一个态的相位，那么它永远会改变态的相位。换言之，如果态 $|\psi_1\rangle$ 在一段时间 t 后变成态 $|\psi_2\rangle$ ，即

$$\hat{U}(t, 0)|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle, \quad (17.13)$$

并且如果情况的对称性使得

$$\hat{Q}|\psi_1\rangle = e^{i\delta}|\psi_1\rangle, \quad (17.14)$$

那么下式也成立

$$\hat{Q}|\psi_2\rangle = e^{i\delta}|\psi_2\rangle. \quad (17.15)$$

显然，由于

$$\hat{Q} |\psi_2\rangle = \hat{Q} \hat{U} |\psi_1\rangle = \hat{U} \hat{Q} |\psi_1\rangle,$$

而且如果 $\hat{Q} |\psi_1\rangle = e^{i\delta} |\psi_1\rangle$ ，则

$$\hat{Q} |\psi_2\rangle = \hat{U} e^{i\delta} |\psi_1\rangle = e^{i\delta} \hat{U} |\psi_1\rangle = e^{i\delta} |\psi_2\rangle.$$

[这一系列等式来自式（17.13）、（17.14）和关于对称系统的式（17.10），以及来自 $e^{i\delta}$ 这样的数与算符对易这一事实。]

所以由于某些对称性，某个在开始时是正确的事物，在其他任何时候也是正确的。而这不就是守恒定律吗？是的！它表明如果你们考察初态，并且通过稍微作一点计算发现一个操作（系统的对称操作）仅仅导致乘以一个相位因子，那么，你们就知道终态也具有相同的性质——相同的操作使终态乘上相同的相位因子。即使我们也许一点不知道使系统从初态变化到终态的宇宙内部机理，上述结论也总是正确的。即使我们无意考察系统从一个态变到另一个态的机构的具体细节，我们仍可断言：如果一个事物原来处于具有某种对称性的状态，而且如果这一事物的哈密顿在该对称操作下是对称的，那么，这个态在任何时候都具有相同的对称特征。这就是量子力学中所有守恒定律的基础。

看一个特殊例子。让我们回到算符 $\hat{p}$ ，首先我们要稍微修正一下我们对 $\hat{p}$ 的定义。应该认为 $\hat{p}$ 不仅仅是镜面反射，因为那样需要先定义一个安放镜子的平面。有一种特殊的反射不需要这种明确的平面。假定我们这样来重新定义操作 $\hat{p}$ ：首先用在 xy 平面上的平面镜来反射，以使 z 变成 $-z$ ，而 x 仍为 x ， y 仍为 y ；然后把该系统绕 z 轴旋转

180°, 于是 x 变为 $-x$, y 变为 $-y$ 。这整个过程称为反演。每一点都通过原点而被投影到正好相对的位置上, 每一点的所有坐标都改变了符号。我们仍用符号 $\hat{P}$ 表示这种操作, 如图17-4所示。这比单纯反射要方便一点, 因为它不要求你指明用哪个坐标平面来反射, 而只要指明位于对称中心的哪个点就行了。

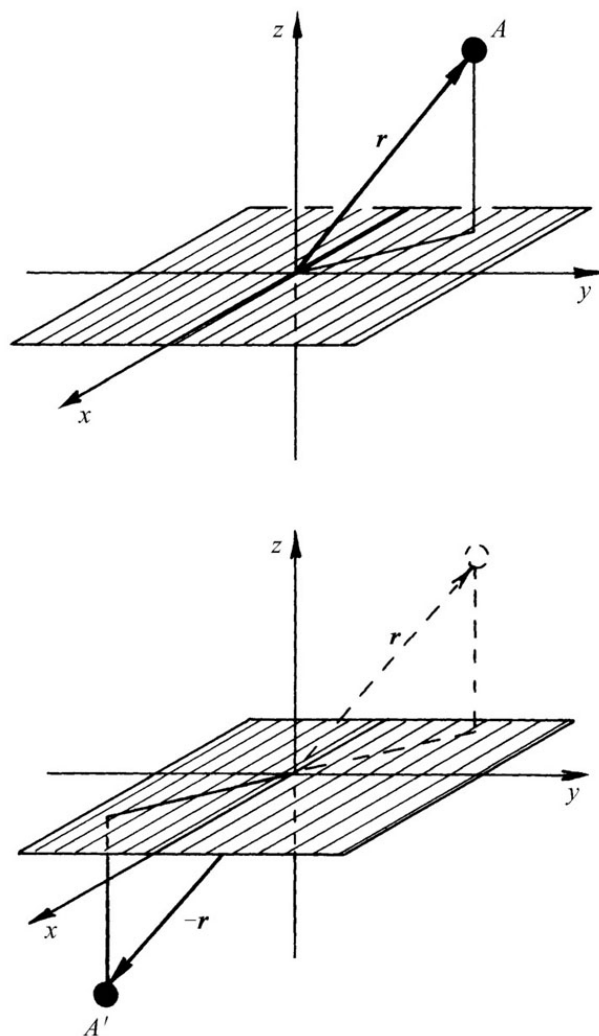


图17-4 反演操作 $\hat{P}$, 位于 (x, y, z) 处的任意点 A 被移至位于 $(-x, -y, -z)$ 处的 A' 点

现在设态 $|\psi_0\rangle$ 经反演操作后变为 $e^{i\delta}|\psi_0\rangle$ ——即

$$|\psi'_0\rangle = \hat{P} |\psi_0\rangle = e^{i\delta} |\psi_0\rangle. \quad (17.16)$$

然后假设我们再反演一次。两次反演后我们正好又回到开始的状态，根本没有发生什么变化。我们必定得到

$$\hat{P} |\psi'_0\rangle = \hat{P} \cdot \hat{P} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle.$$

但

$$\hat{P} \cdot \hat{P} |\psi_0\rangle = \hat{P} e^{i\delta} |\psi_0\rangle = e^{i\delta} \hat{P} |\psi_0\rangle = (e^{i\delta})^2 |\psi_0\rangle.$$

由之得到

$$(e^{i\delta})^2 = 1.$$

所以如果反演算符是态的一种对称运算，则 δ 只有两种可能：

$$e^{i\delta} = \pm 1,$$

这就是说

$$\hat{P} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle, \quad (17.17)$$

或

$$\hat{P} |\psi_0\rangle = -|\psi_0\rangle.$$

在经典物理学中，如果一个态在反演下是对称的，则反演操作给出原来的态。但是在量子力学中，却有两种可能性：我们得到的是原来的态或是负的原来态。当我们得到原来的态、即 $\hat{P} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$

时，我们就说态 $|\psi_0\rangle$ 具有偶宇称；当符号改变 $\hat{P}|\phi_0\rangle = -|\phi_0\rangle$ 时，我们就说该态具有奇宇称。（反演算符 $\hat{P}$ 也称为宇称算符。） H_2^+ 的态 $|I\rangle$ 具有偶宇称，而态 $|II\rangle$ 具有奇宇称——参看式（17.12）。当然也有一些态，它们在 $\hat{P}$ 的作用下没有对称性，这些是没有确定宇称的态。例如在 H_2^+ 的系统中，态 $|I\rangle$ 具有偶宇称，态 $|II\rangle$ 具有奇宇称，而态 $|1\rangle$ 的宇称不确定。

当我们谈到像反演这样的操作作用于“物理系统”时，我们可以用两种方式来考虑这个问题。我们可以想象将位于 $\mathbf{r}$ 处的任何物理的东西都移动到 $-\mathbf{r}$ 处，或者想象从新的参照系 x', y', z' 来考察同一系统，新参照系与原来的参照系 x, y, z 的关系为： $x' = -x, y' = -y, z' = -z$ 。同样，当我们考虑转动时，可以想象物理系统作实体转动，或者想象“系统”在空间固定不动，而转动我们对系统作测量的那个坐标系。一般来说，这两种看法实质上是等价的。对转动来说，如果不说系统转过 θ 角而说把参考系转过负 θ 角，这两种观点是等价的。在本讲义中我们通常讨论投影到一组新坐标轴上后发生些什么，这样得到的结果和你把坐标轴固定，而把系统反向转过同样大小的角度后得到的结果是相同的。当你这样做时，角度的符号反过来了[4]。

许多物理定律——但不是所有的定律——在坐标反射或反演下是不变的。它们对反演是对称的。例如，电动力学的定律，如果我们把所有方程中的 x 变成 $-x, y$ 变成 $-y, z$ 变成 $-z$ ，它们都是不变的。重力定律和核物理的强相互作用定律也是如此。只有弱相互作用——引起 β 衰变的相互作用——不具有这种对称性。（在第1卷第52章中我们曾详细地讨论过这个问题。）我们现在不考虑 β 衰变。那么在预料 β 衰变不会产生显著影响的任何物理系统中——原子的光发射就是一个例子——哈密顿算符 $\hat{H}$ 将和算符 $\hat{P}$ 对易。在此情形下，我们就有下述命

题：如果一个态原来具有偶宇称，并且假如你在以后某个时刻观察其物理情况，它将仍然具有偶宇称。例如，假定一个即将发射光子的原子所处的状态具有偶宇称，在发射光子后，考察包括光子在内的整个系统，它仍然具有偶宇称（如果开始时系统具有奇宇称也一样。）这个原理称为宇称守恒。你可以看出，为什么在量子力学中“宇称守恒”和“反射对称”这两个名词是紧密地互相交织在一起的。虽然直到不多几年以前，大家还认为在自然界中宇称总是守恒的，但现在我们知道这是不正确的。由于 β 衰变反应不具有其他物理定律所具有的反演对称性，才发现以前的看法是错误的。

现在我们可以来证明一个有趣的定理（只要我们能够忽略弱相互作用，这定律就是正确的）。任何具有确定能量的态，只要它不是简并的，它必定具有确定的宇称，它肯定不是具有偶宇称就是具有奇宇称。（记得我们曾看到过这种系统，其中的几个态具有相同的能量——我们称这些态是简并的。我们的定理对它们不适用。）

对于一个具有确定能量的态 $|\psi_0\rangle$ 来说，我们知道

$$\hat{H} |\psi_0\rangle = E |\psi_0\rangle, \quad (17.18)$$

式中 E 只是一个数，即这个态的能量。如果任意 算符 $\hat{Q}$ 是系统的一个对称算符，则只要 $|\psi_0\rangle$ 是确定能量的唯一的一个态，就可以证明

$$\hat{Q} |\psi_0\rangle = e^{i\phi} |\psi_0\rangle. \quad (17.19)$$

考虑经 $\hat{Q}$ 作用后所得到的新态 $|\psi'_0\rangle$ ，如果物理状态是对称的，则 $|\psi'_0\rangle$ 必定与 $|\psi_0\rangle$ 具有相同的能量。但是我们所考虑的是只有一个

态，即 $|\psi_0\rangle$ ，具有这一能量的情形，所以 $|\psi'_0\rangle$ 必定是同一个态——它与 $|\psi_0\rangle$ 只可能相差一个相位。这就是在物理上的论证。

从数学上可以得到同样的结论。式 (17.10) 或式 (17.11) 是对称性的定义（这定义对任何态都成立），

$$\hat{H} \hat{Q} |\psi\rangle = \hat{Q} \hat{H} |\psi\rangle. \quad (17.20)$$

但是我们考虑的只是一个态 $|\psi_0\rangle$ ，它是一个具有确定能量的态，所以 $\hat{H} |\psi_0\rangle = E |\psi_0\rangle$ 。由于 E 只是一个数，如果需要，可将它移到 $\hat{Q}$ 的前面，我们得

$$\hat{Q} \hat{H} |\psi_0\rangle = \hat{Q} E |\psi_0\rangle = E \hat{Q} |\psi_0\rangle.$$

因此

$$\hat{H} \{ \hat{Q} |\psi_0\rangle \} = E \{ \hat{Q} |\psi_0\rangle \}. \quad (17.21)$$

故 $|\psi'_0\rangle = \hat{Q} |\psi_0\rangle$ 也是 $\hat{H}$ 的一个具有确定能量的态——具有同样的 E 。但是根据我们的假设，只存在一个这样的态，因此，必定为 $|\psi'_0\rangle = e^{i\delta} |\psi_0\rangle$ 。

我们刚才所证明的结果，对于物理系统的任何对称算符 $\hat{Q}$ 都是正确的。所以，在我们只考虑电力和强相互作用的情况下（没有 β 衰变），反演对称是一个许可的近似，我们得 $\hat{P} |\psi\rangle = e^{i\delta} |\psi\rangle$ 。但是我们也已看到， $e^{i\delta}$ 不是+1就是-1。所以任何具有确定能量的态（非简并态），不是具有偶宇称就是具有奇宇称。

§17-3 守恒定律

现在我们转而讨论另一个操作的有趣例子：转动。考虑将原子系统绕 z 轴旋转角 ϕ 这样一种特殊的转动算符，我们称这种算符^[5]为 $\hat{R}_z(\phi)$ 。我们假定这样操作并不影响物理系统沿 x 轴和 y 轴的情况。任何电场或磁场都取成平行于 z 轴^[6]，从而，如果整个物理系统绕 z 轴旋转，外界条件不致改变。例如，如果在空间有一个原子，我们将它绕 z 轴转过 ϕ 角，仍然得出相同的物理系统。

有些特殊的状态具有这种性质：上述操作产生的新态是原来的态乘上某个相位因子。让我们顺便很快地证明一下，如果是这样，则相位的变化必定总是与角 ϕ 成正比的。假设你的角 ϕ 转动两次，这与以角 2ϕ 转动一次是一回事。如果转动 ϕ 具有态 $|\psi_0\rangle$ 乘以相位 $e^{i\delta}$ 的效果，所以

$$\hat{R}_z(\phi) |\psi_0\rangle = e^{i\delta} |\psi_0\rangle,$$

那么连续两次这样的转动应对该态乘以因子 $(e^{i\delta})^2 = e^{i2\delta}$ ，因为

$$\hat{R}_z(\phi) \cdot \hat{R}_z(\phi) |\psi_0\rangle = \hat{R}_z(\phi) e^{i\delta} |\psi_0\rangle = e^{i\delta} \hat{R}_z(\phi) |\psi_0\rangle = e^{i\delta} e^{i\delta} |\psi_0\rangle,$$

相位的变化 δ 必须正比于 ϕ ^[7]。我们接着来考虑这样的特殊状态。对该态来说

$$\hat{R}_z(\phi) |\psi_0\rangle = e^{im\phi} |\psi_0\rangle, \quad (17.22)$$

式中 m 是某个实数。

我们还知道值得注意的事实是：如果系统对于绕 z 轴的转动是对称的，并且如果原来的状态正好具有满足式(17.22)的性质，那么这个态以后也具有这一性质。所以 m 这个数很重要。如果我们开始时知道它的值，就知道了它结尾时的值。它是一个守恒的数—— m 是一个运动常数。我们特别提出 m 进行讨论是因为它与任何特殊角度 ϕ 没有任何关系，并且还因为它与经典力学中的某些量相对应。在量子力学中，对于 $|\psi_0\rangle$ 这样的态，我们决定把 $m\hbar$ 称为绕 z 轴的角动量。如果这样，我们发现在大系统的极限下，上述的量就等于经典力学中角动量的 z 分量。所以，如果有一个态，它绕 z 轴的转动正好产生了一个相位因子 $e^{im\phi}$ ，那么这个态绕该轴就有确定的角动量，而且角动量是守恒的，它现在是、并且永远是 $m\hbar$ 。当然，也可以绕任何轴转动，而且得出对不同的轴角动量守恒的结论。你们看到，角动量守恒是与下列事实密切相关的，即当你转动一下系统时你得到相同的态，该态仅具有一个新的相位因子。

我们要指出这个概念是相当普遍的。我们将把它应用到另外两个守恒定律上去，这两条守恒定律与角动量守恒定律在物理概念上是完全一致的。在经典物理中我们还有动量守恒和能量守恒，有趣的是这两个定律也同样与某种物理对称性有关。

假定有一个物理系统——一个原子、某些复杂的原子核、或一个分子或某个事物——而且假定如果我们将整个系统移动到别的地方，不会对它产生任何影响，那么该系统的哈密顿就具有这种性质：在某种意义上它仅仅与系统的内部坐标有关，而与空间的绝对位置无关。在这种情况下存在一种我们可进行的特殊对称操作，它就是空间的平移。让我们定义 $\hat{D}_x(a)$ 为沿 x 轴移动距离 a 的位移算符，这样，对任何态我们可以进行这一操作而得到一个新的态。但是也可能有一些非常

特殊的态，当把它们沿 x 轴移动 a 时，我们仍然得到与原来相同的态，只是相差一个相位因子。我们还可以像上面那样来证明，对于这一情形相位必定正比于 a 。所以对这些特殊态 $|\psi_0\rangle$ ，我们可以写下

$$\hat{D}_x(a) |\psi_0\rangle = e^{ika} |\psi_0\rangle, \quad (17.23)$$

系数 k 乘以 $\hbar$ 后称为动量的 x 分量。我们这样称呼的理由是：对于一个大的体系，它和经典动量 p_x 在数值上是相等的。普遍的表述是这样的：当一个系统位移时，若该系统的哈密顿不变，而且如果该系统开始时具有确定的 x 方向的动量，那么，随着时间的推移，系统在 x 方向的动量将一直保持不变。一个系统的总动量在碰撞或爆炸前后将是相同的。

另外还有一个与在空间的位移很相似的操作：即时间的延迟。假设有一个物理系统，不存在与时间有关的外部条件，我们使它在某一时刻从某一状态开始变化。现在在另一次实验中，例如我们在两秒钟以后，或者说延迟了时间 τ 以后开始使此物理系统作同样的变化，而且如果外界条件与绝对时间无关，其演变将相同，所得到的终态也与刚才得到的终态相同，只不过推迟了时间 τ 。在那种情形下，我们还可以发现一些特殊的状态，它们随时间的进展具有这种特性，即延迟后的态正好是原来的态乘上一个相位因子。对这些特殊状态来说其相位的变化显然又必定与 τ 成正比。我们可以写成

$$\hat{D}_t(\tau) |\psi_0\rangle = e^{-i\omega\tau} |\psi_0\rangle. \quad (17.24)$$

在定义 ω 的时候习惯上使用负号，采用这一习惯， $\omega \hbar$ 就是系统的能量，而且它是守恒的。所以具有确定能量的系统是这样的系统，它经

时间位移 τ 后仍旧是它本身再乘以 $e^{-i\omega\tau}$ 。（这就是我们在前面定义具有确定能量的量子态时所说的，因此我们是前后一致的。）这意味着，如果一个系统处在确定能量的状态，而且如果其哈密顿与时间 t 无关，那么不论发生什么情况，它在以后所有各时刻都会具有相同的能量。

至此你一定看出了守恒定律与宇宙对称性之间的关系。有关时间位移的对称性意味着能量守恒；有关空间位置 x ， y 或 z 的位移对称性意味着动量分量守恒；有关绕 x ， y 和 z 轴旋转的对称性意味着角动量的 x ， y 和 z 分量守恒；与反映有关的对称性意味着宇称守恒；与两个电子交换有关的对称性意味着某种我们还未命名的守恒，等等。这些原理中的一部分与经典物理中的类似，另一部分在经典物理中没有。量子力学中存在的守恒定律比经典力学中所用的要多，至少比经典力学中通常使用的要多。

为了使你们能够阅读其他量子力学书籍，我们有必要作些小的技术上的说明——介绍一下人们常用的符号。当然，与时间有关的位移操作，就是我们以前谈到的 $\hat{U}$ ：

$$\hat{D}_t(\tau) = \hat{U}(t+\tau, t). \quad (17.25)$$

大多数人都喜欢用无限小的时间位移、无限小的空间位移或无限小角度的转动来讨论每件事情。既然任何有限位移和角度都可以由一连串的无限小的位移和角度累积而成，所以首先来分析无限小的情况往往就比较容易。无限小时间位移 Δt 的算符（正如我们在第8章中所定义的）为

$$\hat{D}_t(\Delta t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}. \quad (17.26)$$

于是 $\hat{H}$ 和称为能量的经典物理量相类似，因为如果 $\hat{H}|\psi\rangle$ 刚好是一个常数乘上 $|\psi\rangle$ ，即 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ，则该常数就是系统的能量。

对其他操作也作同样处理。如果我们在 x 方向作一小位移，譬如 Δx ，一般说来，态 $|\psi\rangle$ 将变成另一个态 $|\psi'\rangle$ 。我们可以写成

$$|\psi'\rangle = \hat{D}_x(\Delta x)|\psi\rangle = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \Delta x\right)|\psi\rangle, \quad (17.27)$$

因为当 Δx 趋近零时， $|\psi'\rangle$ 应正好变为 $|\psi\rangle$ ，或 $\hat{D}_x(0) = 1$ ，并且对于小的 Δx 来说， $\hat{D}_x(\Delta x)$ 与 1 之差应该正比于 Δx 。按这种方式定义的算符 $\hat{p}_x$ 称为动量算符——当然指的是 x 分量。

同理，人们通常把小的转动写成

$$\hat{R}_z(\Delta\phi)|\psi\rangle = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z \Delta\phi\right)|\psi\rangle, \quad (17.28)$$

并且称 $\hat{J}_z$ 为角动量的 z 分量算符。对于那些 $\hat{R}_z(\phi)|\psi_0\rangle = e^{im\phi}|\psi_0\rangle$ 的特殊状态，我们可以对任何小角度 $\Delta\phi$ ，将该式右边展开至 $\Delta\phi$ 的第一级而得到

$$\hat{R}_z(\Delta\phi)|\psi_0\rangle = e^{im\Delta\phi}|\psi_0\rangle = (1 + im\Delta\phi)|\psi_0\rangle.$$

将此式与式 (17.28) 中 $\hat{J}_z$ 的定义相比较，我们得到

$$\hat{J}_z|\psi_0\rangle = m\hbar|\psi_0\rangle. \quad (17.29)$$

换言之，如果你们把 $\hat{J}_z$ 作用到对 z 轴具有确定角动量的态上，则得出 $m\hbar$ 乘以同样的态，其中 $m\hbar$ 为角动量的 z 分量的数值。这与把 $\hat{H}$ 作用在具有确定能量的态上得到 $E|\psi\rangle$ 十分类似。

我们现在要对象动量守恒的概念举些应用的例子，以告诉你们这些概念是怎样起作用的。其意义在于它们实在非常简单。你们以前就知道角动量是守恒的，从本章中你们真正要记住的只是如果一个态 $|\psi_0\rangle$ 具有绕 z 轴转动一角度 ϕ 后变成 $e^{im\phi} |\psi_0\rangle$ 这一性质，它的角动量的 z 分量就等于 $m\hbar$ 。这就是以后我们要做许多有趣工作时所需要的全部知识。

§17-4 偏振光

首先我们希望检验一个概念。在§11-4中我们已证明，当在绕 z 轴 [8] 转过角 ϕ 的坐标系中来观看右旋圆偏振光时，它要乘上 $e^{i\phi}$ 。这是否意味着该右旋圆偏振的光子沿 z 轴具有一个单位 [9] 的角动量呢？的确是这样。这也意味着，如果我们有一束光，它所含有的大量光子都具有同样的圆偏振——就像经典光束那样——那么这束光就具有角动量。如果在某时刻光束所具有的总能量为 W ，那么就有 $N = W/\hbar\omega$ 个光子，每个光子具有角动量 $\hbar$ ，所以总角动量为

$$J_z = N\hbar = \frac{W}{\omega}. \quad (17.30)$$

我们能否用经典的方法证明右旋圆偏振光带有与 W/ω 成正比的能量和角动量呢？如果一切都正确的话，这应该是一个经典的命题。这是一个我们可以从量子物理过渡到经典物理的例子。我们应该来看一下经典物理是否证实这一点。它将给予我们一个概念，即是否有权把 m 称为角动量。回忆一下在经典物理中右旋圆偏振光是怎样的。它用一个电场来描写，该电场具有振动的 x 分量和振动的 y 分量，两者的相

位差 90° ，所以合电场矢量 E 在如图17-5（a）所示的圆上旋转。现在假设这种光照射到一个吸收（或者至少部分吸收）它的墙壁上，并且按照经典物理的观点来考虑墙内的一个原子。我们以前通常把原子中电子的运动看成是一个可以用外场来驱使它振动的谐振子。我们假定该原子是各向同性的，从而它可以在 x 方向上和 y 方向上同样地振动。另外在圆偏振光中，其 x 位移和 y 位移相同，但是一个比另一个落后 90° 。最后的结果是该电子也在一个圆上运动，如图17-5（b）所示。该电子离开平衡位置原点有一个位移 r ，作圆运动，相对于矢量 E 它滞后某个相位。 E 和 r 之间的关系如图17-5（b）所示。随着时间的推移，电场不断旋转，而位移则以相同的频率旋转，结果它们的相对取向保持不变。现在让我们观察电场对该电子所作之功。给予这个电子的功率为电子的速度 v 乘上平行于这个速度的 qE 的分量：

$$\frac{dW}{dt} = q E_t v. \quad (17.31)$$

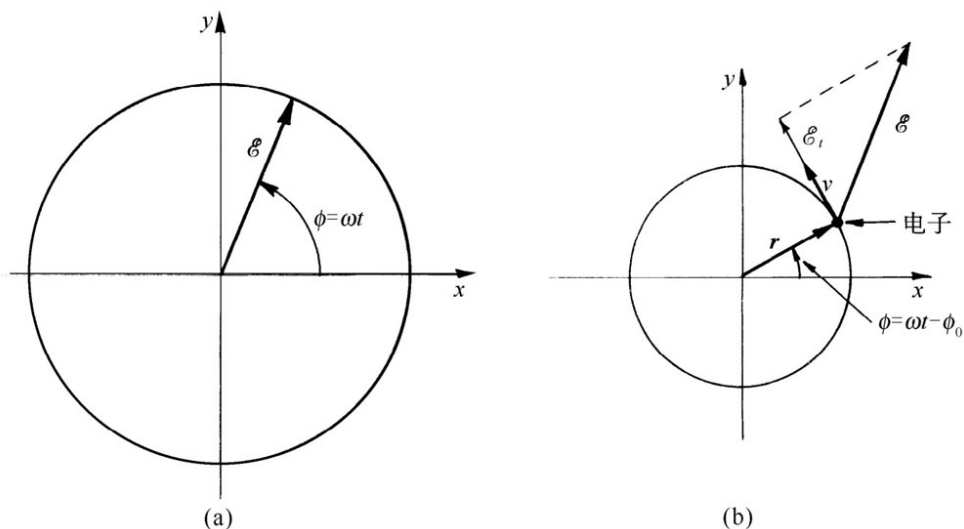


图17-5 （a）圆偏振光波的电场 E ；（b）圆偏振光驱动的电子的运动

但是注意，有角动量注入该电子，因为始终存在着对于原点的力矩。此力矩为 $qE_t r$ ，它必定等于角动量的变化率 dJ_z/dt ：

$$\frac{dJ_z}{dt} = qE_t r. \quad (17.32)$$

因 $v = \omega r$ ，所以我们得

$$\frac{dJ_z}{dW} = \frac{1}{\omega}.$$

因此，如果我们对吸收的总角动量积分，则它就正比于总能量——比例系数为 $1/\omega$ ，与式（17.30）一致。光的确带有角动量——如果光沿 z 轴是右旋圆偏振的，则为+1单位（乘以 $\hbar$ ），如果是左旋圆偏振的，则沿 z 轴为-1单位。

现在我们提出如下问题：如果光是在 x 方向线偏振的，那么它的角动量如何？ x 方向的偏振光可以用右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的叠加来表示。因此，它对角动量为 $+\hbar$ 具有一定的振幅，对角动量为 $-\hbar$ 具有另一振幅，结果它没有确定的角动量。它既有一定的振幅以 $+\hbar$ 出现，又具有相等的振幅以 $-\hbar$ 出现。这样两个振幅的干涉产生了线偏振，但它具有相同的概率以+1或-1单位的角动量出现。对一束线偏振光的宏观测量表明：它的总角动量为零。因为在大量光子中，右旋圆偏振和左旋圆偏振光子的数目接近相等，它们贡献的角动量相反——平均角动量为零。所以在经典理论中，除非存在着一定的圆偏振，否则你们就测不出角动量。

我们曾说过，任何自旋1的粒子可以具有3个 J_z 值，即+1，0，-1（即我们在施特恩-格拉赫实验中看到的3个态）。但光是螺旋型

的，它只有两个态，而没有为零的态。这一奇特的缺漏与光不能静止这个事实有关。对于一个自旋 j 的静止的粒子来说，必定有 $2j+1$ 个可能的态，其 J_z 值以1为梯级从 $-j$ 增加到 $+j$ 。但是可以证明，对某些自旋为 j 而质量为零的粒子来说，只存在沿运动方向的分量为 $+j$ 和 $-j$ 的态。例如，光没有3个态，只有两个——虽然光子仍然是一个自旋1的客体。这和我们早先根据在空间旋转条件下发生的情况证明的自旋1的粒子必须具有3个态如何相一致呢？对于一个静止的粒子来说，可以绕任何轴旋转而不改变其动量状态。静止质量为零的粒子（如光子和中微子）不可能静止下来，只有绕沿运动方向的轴旋转才不改变其动量状态。关于只绕一个轴的转动的论证不足以证明需要具有3个态，而且其中一个态在旋转角 ϕ 的情况下系按照 $e^{i\phi}$ 变化的[10]。

还有一件值得注意的事。一般说来，对于一个静止质量为零的粒子，相对其运动方向的两个自旋态（ $+j$ ， $-j$ ）中只有一个是真正必须的。例如中微子——它是自旋1/2的粒子——在自然界中只有角动量分量与其运动方向相反的那个态（ $-\hbar/2$ ）才存在〔而反中微子只有沿运动方向的态（ $+\hbar/2$ ）〕。当一个系统具有反演对称性（从而宇称守恒，光就是这样的）时，才需要有两个分量（ $+j$ 和 $-j$ ）。

§17-5 Λ^0 的衰变

现在我们想举一个例子，说明如何应用角动量守恒定理来处理一个特殊的量子物理问题。我们来看看 Λ^0 粒子的崩裂，它通过“弱”相互作用衰变为一个质子和一个 π^- 介子：

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-.$$

假定已知 π^- 介子的自旋为零，质子的自旋为 $1/2$ ， Λ^0 的自旋为 $1/2$ 。我们希望解决下列问题：假设 Λ^0 是以一种使其完全极化方式产生的——所谓极化指的是相对某个适当选取的 z 轴，它的自旋“向上”——参看图17-6（a）。我们的问题是，相对 z 轴以角度 θ 发射质子〔如图17-6（b）所示〕的衰变概率是多少？换言之，衰变的角分布如何？我们在 Λ^0 是静止的坐标系中来观察这种衰变，即在这个静止参照系中来测量角度，然后，如果需要的话，总可以把测得的结果变换到其他参照系中去。

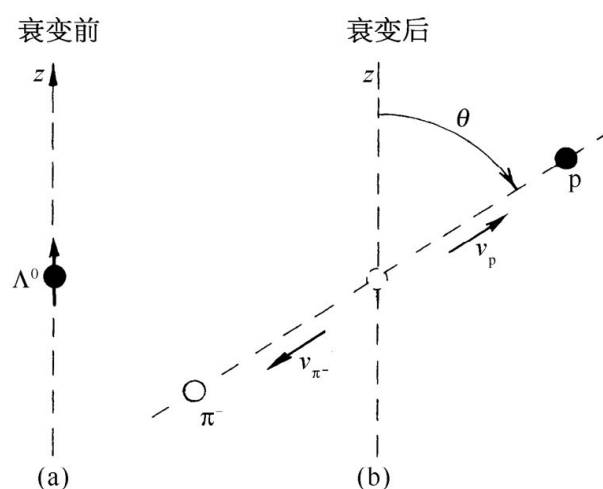


图17-6 一个自旋向上的 Λ^0 粒子衰变成一个质子和一个 π^- 介子（在质心参考系中）。在角 θ 方向发射质子的概率是多少呢？

我们从下面这个特殊情况着手，就是质子发射到沿 z 轴很小的一个立体角 $\Delta\Omega$ 中（如图17-7）。在衰变前 Λ^0 的自旋向上，如图17-7（a）所示，经过短时间后——由于至今还不知道的原因，除非与弱衰变有关，—— Λ^0 炸裂成一个质子和一个 π 介子。假定质子沿 $+z$ 轴向上运动。于是，根据动量守恒， π 介子必定向下运动。既然质子是自旋 $1/2$ 的粒子，其自旋必定不是“朝上”就是“朝下”——原则上有两种可

能，如图中（b）和（c）所示。但是角动量守恒要求质子具有“向上”的自旋。这从下面的论证中很容易明白。一个沿 z 轴运动的粒子，不可能因其运动而对沿这个轴的角动量有贡献，因此只有自旋才能对 J_z 有所贡献。衰变前对 z 轴的自旋角动量为 $+\hbar/2$ ，因此衰变后也必须是 $+\hbar/2$ 。我们可以说，既然 π 介子的自旋为零，那么质子的自旋必定“朝上”。

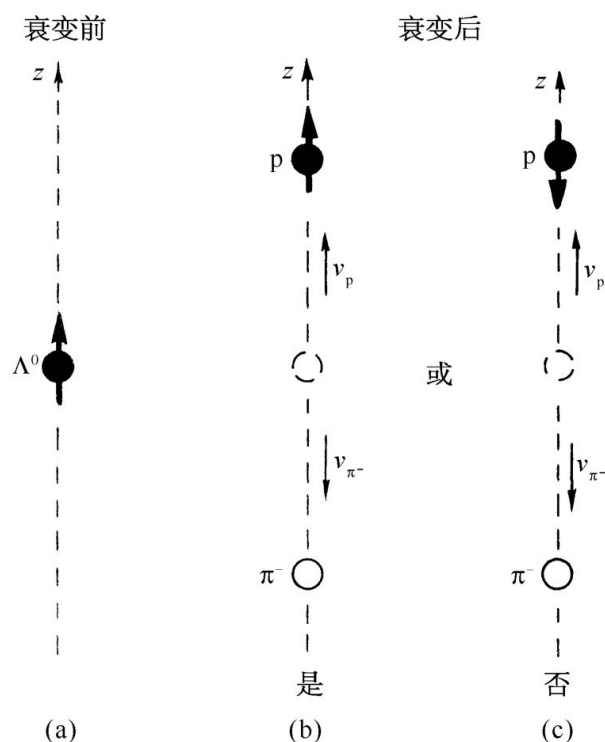


图17-7 一个自旋“朝上”的 Λ^0 粒子，以质子沿 $+z$ 方向飞出的方式衰变的两种可能性。只有（b）角动量才守恒

如果你担心这种论证在量子力学中可能不正确，那么我们可以花一点时间来证明一下这种论证是正确的。我们把初态（衰变前的态）称为 $|\Lambda^0, \text{自旋}+z\rangle$ ，它具有如下性质：如果把该态绕 z 轴旋转角 ϕ ，则态矢量将乘上相位因子 $e^{i\phi/2}$ 。（在旋转后的参考系中态矢量为 $e^{i\phi/2} |\Lambda^0, \text{自旋}+z\rangle$ 。）这就是我们所说的自旋 $1/2$ 粒子自旋“朝上”的

意思。由于自然界的行爲不取决于我们对坐标轴的选取，所以终态（质子加 π 介子）也必定具有相同的性质。譬如说，我们可以把终态写成

$$| \text{质子走向}+z, \text{自旋}+z; \pi\text{介子走向}-z \rangle .$$

但是我们实在并不需要标明 π 介子的运动，因为在我们所选取的坐标系中它的运动方向总是与质子的相反，所以我们可以把终态的描述简化为

$$| \text{质子走向}+z, \text{自旋}+z \rangle .$$

那么如果我们把坐标绕 z 轴旋转角 ϕ ，这个态矢量会发生什么变化呢？

由于质子和 π 介子都沿 z 轴运动，它们的运动并不因这种旋转而改变。（这就是我们挑选这一特殊情况的原因，否则我们就不可能作这种论证。）再有， π 介子也不受影响，因为它的自旋是0。然后，质子的自旋是1/2。如果其自旋“朝上”，它将贡献转动引起的 $e^{i\phi/2}$ 的相位变化。（若质子的自旋“朝下”，则由于质子相位变化为 $e^{-i\phi/2}$ 。）但是，如果要角动量守恒，（它必须守恒，因为没有外来因素影响系统的哈密顿。）那么激发前后由于旋转而产生的相位变化必须相同。所以唯一的可能性是质子自旋“朝上”。如果质子向上运动，它的自旋也必定“朝上”。

于是，我们得出结论，角动量守恒所允许的过程是图17-7中（b）所示的过程，而不允许图中（c）所示过程。既然我们知道，发生了衰变，对于过程（b）——质子向上运动而自旋也“朝上”——就存在某种

振幅，让我们用 a 来代表在无限小的时间间隔内以这种方式发生衰变的振幅^[11]。

现在让我们来看看，如果开始时 Λ^0 的自旋是“朝下”的，则会发生什么情况呢？我们仍旧要问质子沿 z 轴向上运动的衰变情况，如图17-8所示。你们一定知道，如果角动量守恒，则在这种情况下质子的自旋必定“朝下”。令这种衰变的振幅为 b 。

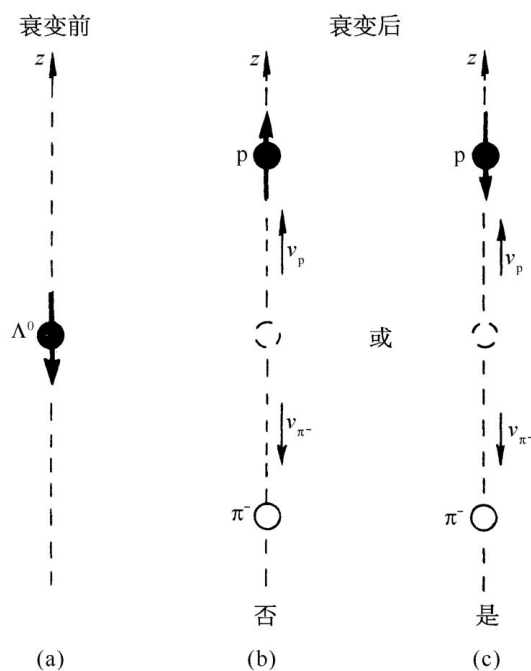


图17-8 一个自旋“朝下”的 Λ^0 粒子沿 z 轴的衰变

对于 a 和 b 这两个振幅，我们再不能多说什么了。它们与 Λ^0 的内部机理以及弱衰变有关，迄今还没有人知道如何计算这两个振幅。我们只能从实验中得到它们。但是只用这两个振幅就能够求出所有我们想要知道的衰变的角分布。不过必须始终仔细地、完整地定义我们所谈到的那些态。

我们想知道质子沿与 z 轴成 θ 角的方向（在小立体角 $\Delta\Omega$ 中）飞出去的概率，如图17-6所示。让我们在这个方向放置一个新的 z' 轴，称为 z' 轴。我们知道如何分析沿这个轴发生的情况。相对于这个新轴， Λ^0 的自旋不再肯定“朝上”，但它具有自旋“朝上”的某个振幅，还有自旋“朝下”的另一个振幅。我们在第6章以及第10章式（10.30）早已讨论过这些情形。自旋“朝上”的振幅为 $\cos\theta/2$ ，而自旋“朝下”的振幅为[12] $-\sin\theta/2$ 。当 Λ^0 的自旋沿 z' 轴为“朝上”时，它将以振幅 a 在 $+z'$ 方向发射一个质子。所以沿 z' 方向找到一个自旋“朝上”的出射质子的振幅为

$$a \cos \frac{\theta}{2}. \quad (17.33)$$

同理，沿正 z' 方向发现一个自旋“朝下”的出射质子的振幅为

$$-b \sin \frac{\theta}{2}. \quad (17.34)$$

这些振幅所代表的两个过程为图17-9所示。

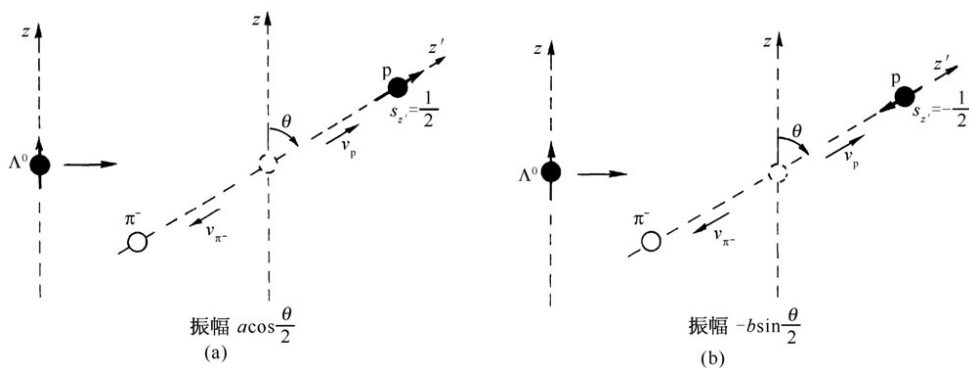


图 17-9 Λ^0 的两个可能的衰变态

现在提一个很容易的问题。假定 Λ^0 沿 z 轴自旋向上，衰变质子在 θ 角方向离开的概率是多少？这两个自旋态（沿 z' 方向“朝上”或“朝下”）是可以区分的，虽然我们不打算去观察它们。所以为了求得这个概率，我们将振幅平方，并把它们相加。在 θ 附近很小的立体角 $\Delta\Omega$ 中找到一个质子的概率 $f(\theta)$ 为

$$f(\theta) = |a|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |b|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (17.35)$$

用 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ ， $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ ，我们可将 $f(\theta)$ 写成

$$f(\theta) = \left(\frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \right) + \left(\frac{|a|^2 - |b|^2}{2} \right) \cos \theta. \quad (17.36)$$

因此角分布的形式为

$$f(\theta) = \beta (1 + \alpha \cos \theta). \quad (17.37)$$

该概率有一部分与 θ 无关，另一部分随 $\cos \theta$ 而线性变化。通过测量角分布，我们可以求得 α 和 β ，从而求得 $|a|$ 和 $|b|$ 。

现在我们可以回答许多别的问题了。我们是否只对沿原来的 z 轴自旋“朝上”的质子感兴趣呢？式（17.33）和（17.34）中的各项都给出沿 z' 轴（ $+z'$ 和 $-z'$ ）发现自旋“朝上”和自旋“朝下”的质子的振幅。相对原来的轴自旋“朝上”的态 $|+z\rangle$ 可以用基础态 $|+z'\rangle$ 和 $|-z'\rangle$ 来表示。这样，我们就可以把式（17.33）和（17.34）两个振幅用适当的系数（ $\cos \theta/2$ 和 $-\sin \theta/2$ ）组合起来，而得到总的振幅：

$$a \cos^2 \frac{\theta}{2} + b \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

它的平方就是质子以与 Λ^0 相同的自旋（沿 z 轴“朝上”）、在 θ 角方向出射的概率。

假如宇称是守恒的话，我们就可以再说一件事。图17-8中的衰变正好就是图17-7中的衰变对 xy 平面的反射^[13]。假如宇称是守恒的话，则 b 就只能等于 a 或 $-a$ 。于是式（17.37）中的系数 α 就成为零，在各个方向发生衰变的概率就要相等。

但是实验结果表明，衰变中存在着不对称性。测得的角分布的确如我们所预言的那样按 $\cos\theta$ 变化，而不是随 $\cos^2\theta$ 或 $\cos\theta$ 的任何其他幂次变化。实际上，既然角分布具有这个形式，我们从这些测量中可以推得 Λ^0 的自旋为 $1/2$ 。而且我们看到宇称并不守恒。事实上，实验上得出的系数 α 为 -0.62 ± 0.05 ，所以 b 大约为 a 的两倍，很明显，对反射来说不存在对称性。

你们看我们从角动量守恒中能够得到多少东西。在下一章中我们将列举更多的例子。

附注 本节中的振幅 a 指的是：在无限小的时间 dt 内从态 $|\Lambda, \text{自旋}+z\rangle$ 产生态 $|\text{质子走向}+z, \text{自旋}+z\rangle$ 的振幅，换言之，就是

$$\langle \text{质子走向}+z, \text{自旋}+z | H | \Lambda, \text{自旋}+z \rangle = i\pi a, \quad (17.38)$$

这里的 H 是整个宇宙、至少是引起 Λ 衰变的所有事物所构成的那部分宇宙的哈密顿。角动量守恒意味着哈密顿必须具有如下性质

$$\langle \text{质子走向}+z, \text{自旋}-z | H | \Lambda, \text{自旋}+z \rangle = 0.$$

(17.39)

对振幅 b 我们指的是

$$\langle \text{质子走向} +z, \text{自旋} -z | H | \Lambda, \text{自旋} -z \rangle = i \hbar b, \quad (17.40)$$

角动量守恒意味着

$$\langle \text{质子走向} +z, \text{自旋} +z | H | \Lambda, \text{自旋} -z \rangle = 0. \quad (17.41)$$

如果式 (17.33) 和 (17.34) 中所写出的振幅还不清楚的话，那么我们可以用更为数学化的方式把它们表示如下。对式 (17.33) 我们指的是自旋沿 $+z$ 轴的 Λ 衰变成一个沿 $+z'$ 方向运动、其自旋也沿 z' 方向的质子的振幅，即振幅

$$\langle \text{质子走向} z', \text{自旋} +z' | H | \Lambda, \text{自旋} +z \rangle. \quad (17.42)$$

根据量子力学的一般定理，这个振幅可以写成

$$\sum_i \langle \text{质子走向} +z', \text{自旋} +z' | H | \Lambda, i \rangle \langle \Lambda, i | \Lambda, \text{自旋} +z \rangle, \quad (17.43)$$

这里的求和是对静止的 Λ 粒子的各个基础态 $|\Lambda, i\rangle$ 进行的。由于 Λ 粒子为自旋 $1/2$ ，因此在任何我们希望选取的参考基础中存在两个这样的基础态。如果我们使用相对 z' ($+z'$, $-z'$) 自旋“朝上”和自旋“朝下”这两个态作为基础态，式 (17.43) 的振幅就等于下列总和：

$$\begin{aligned} & \langle \text{质子走向} +z', \text{自旋} +z' | H | \Lambda, +z' \rangle \langle \Lambda, +z' | \Lambda, +z \rangle \\ & + \langle \text{质子走向} +z', \text{自旋} +z' | H | \Lambda, -z' \rangle \langle \Lambda, -z' | \Lambda, +z \rangle. \end{aligned} \quad (17.44)$$

根据式 (17.38) 的定义，以及根据角动量守恒得到的式 (17.41)，上式第一项中的第一个因子就是 a ，第二项的第一个因子为零。第一项中剩下的因子 $\langle \Lambda, +z' | \Lambda, +z \rangle$ 正好就是一个沿一轴自旋“朝上”的自旋 $1/2$ 粒子，它沿另一成 θ 角的轴也具有“朝上”的自旋的振幅，其值为 $\cos\theta/2$ ——参看表 6-2。所以式 (17.44) 刚好为 $a \cos\theta/2$ ，与我们在式 (17.33) 所写出的一样。对自旋“朝下”的 Λ 粒子作同样的论证，即得出式 (17.34) 的振幅。

§17-6 转动矩阵概要

我们现在要把所学过的关于自旋1/2和1的粒子转动的各种情况综合到一起，以便将来参考。下面你会看到有关自旋1/2的粒子和自旋1的粒子以及光子（它是自旋1、静止质量为0的粒子）的两个转动矩阵 $R_z(\phi)$ 和 $R_y(\theta)$ 的表格。对每一个自旋，我们将给出绕 z 轴或 y 轴转动的矩阵项 $\langle j | R | i \rangle$ 。当然，它们和我们在前面几章中所用的 $\langle +T, | 0S \rangle$ 这类振幅是完全等价的。 $R_z(\phi)$ 的意思是把一个态投影到一个绕 z 轴旋转 ϕ 角的新坐标系中去——永远采用右手定则来定义转动的正指向。 $R_y(\theta)$ 表示参考系统绕 y 轴旋转 θ 角。知道了这两种转动后，你当然可以作出任何的转动。我们按惯例这样来写矩阵元，使左边的态是新（转动过）的坐标系的一个基础态，而右边的态是老的（转动前的）坐标系中的基础态。你可以用多种方式来解释表中的各项。例如，表17-1中的项 $e^{-i\phi/2}$ 表示矩阵元 $\langle - | R | - \rangle = e^{-i\phi/2}$ 。它也表示 $\hat{R} | - \rangle = e^{-i\phi/2} | - \rangle$ 或 $\langle - | \hat{R} = \langle - | e^{-i\phi/2}$ ，它们全都是一回事。

表17-1 自旋1/2的转动矩阵

两个态： $|+\rangle$ ，沿 z 轴“朝上”， $m = +1/2$
 $|-\rangle$ ，沿 z 轴“朝下”， $m = -1/2$

$R_z(\phi)$	$ +\rangle$	$ -\rangle$	$R_y(\theta)$	$ +\rangle$	$ -\rangle$
$\langle + $	$e^{+i\phi/2}$	0	$\langle + $	$\cos \frac{\theta}{2}$	$\sin \frac{\theta}{2}$
$\langle - $	0	$e^{-i\phi/2}$	$\langle - $	$-\sin \frac{\theta}{2}$	$\cos \frac{\theta}{2}$

表17-2 自旋1的转动矩阵

$$\begin{aligned} \text{三个态: } |+\rangle, m=+1 \\ |0\rangle, m=0 \\ |-\rangle, m=-1 \end{aligned}$$

$R_z(\phi)$	$ +\rangle$	$ 0\rangle$	$ -\rangle$
$\langle + $	$e^{+i\phi}$	0	0
$\langle 0 $	0	1	0
$\langle - $	0	0	$e^{-i\phi}$

续表

$R_y(\theta)$	$ +\rangle$	$ 0\rangle$	$ -\rangle$
$\langle + $	$\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$	$\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$
$\langle 0 $	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$	$\cos\theta$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$
$\langle - $	$\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$	$\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$

表 17-3 光子

$$\begin{aligned} \text{两个态: } |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad m=+1 (\text{右旋圆偏振}) \\ |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle), \quad m=-1 (\text{左旋圆偏振}) \end{aligned}$$

$R_z(\phi)$	$ R\rangle$	$ L\rangle$
$\langle R $	$e^{+i\phi}$	0
$\langle L $	0	$e^{-i\phi}$

[1] 复习：第一卷52章，物理定律的对称性。参考：

A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1957。——译者注

[2] 顺便指出，你们可以证明 $\hat{Q}$ 必定是一个么正算符，这意味着如果它作用在 $|\psi\rangle$ 上而给出某个数乘以 $|\psi\rangle$ 的话，这个数一定是 $e^{i\delta}$ 这种形式，这里 δ 是实数。这是个问题，其证明基于下述观察。诸如反射或转动这样的操作并不失去任何粒子，所以 $|\psi'\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 的归一化必定是相同的，它们只能相差一个纯虚数的相位因子。

[3] 参见10-1节，比之于前面的讨论，在本节中态 $|I\rangle$ 和 $|II\rangle$ 是反向的。

[4] 在别的书中你可能发现具有不同符号的公式，他们可能采用不同的角度定义。

[5] 我们将非常明确地把 $\hat{R}_z(\phi)$ 定义为物理系统绕 z 轴转动 $-\phi$ ，这和把坐标系转动 $+\phi$ 相同。

[6] 假如在某时刻仅有一个场，并且场的方向保持不变，我们总可以把 z 轴取为沿着场的方向。

[7] 要做更严格的证明，我们应对很小的转动角 ϵ 作这种论证。因为任何角 ϕ 都是 n 次 ϵ 角度的转动之和， $\phi = n\epsilon$ ，则 $\hat{R}_z(\phi) = [\hat{R}_z(\epsilon)]^n$ ，而总相位的改变就是小角度 ϵ 所产生的相位改变的 n 倍，所以与 ϕ 成正比。

[8] 请原谅，这个角与我们在 §11-4 中所用的角差一负号。

[9] 通常用 $\hbar$ 为单位来量度原子系统的角动量十分方便。这样，一个自旋 $1/2$ 的粒子对任意轴的角动量为 $\pm 1/2$ 。或者一般地讲，角动量的 z 分量为 m 。你不必老是去重复那个 $\hbar$ 。

[10] 对于一个质量为零的粒子，我们曾试图至少找到一个证据，以证明其沿运动方向的角动量必定是 $\hbar/2$ 的整数倍，而不是像 $\hbar/3$ 这样的值。我们甚至用遍了洛伦兹变换的所有性质，但还是失败了。或许这种想法本身就不正确。我们不得不去找维格纳（Wigner）教授谈谈，他精通这方面的事情。

[11] 我们现在假定你们对量子力学的机理已经相当熟悉，因此我们可以用物理方式来讲述有关事情，而不去花时间写出所有的数学细节。如果你们对这里所讲的不很清楚，可以在本节末尾的注释中找到略去的细节。

[12] 我们选取 z' 使其在 xz 平面内，并利用有关 $R_y(\theta)$ 的矩阵元。对于任何别的选取，也将得到同样的答案。

[13] 我们记得自旋是个轴矢量，它在反射变换中要反向。

第18章 角动量

§18-1 电偶极辐射

上一章，我们发展了量子力学中角动量守恒的概念，并且说明怎样用这些概念来预言 Λ 粒子衰变中质子的角分布。现在我们想给你们举一些其他类似的例子，来说明原子系统中角动量守恒的重要性。我们的第一个例子是原子的光辐射。角动量守恒（除了其他方面）将决定发射光子的偏振情况和角分布。

假设一个原子处于一个有确定角动量（譬如自旋为1）的激发态，当它跃迁到一个角动量为零的低能态时，发射出一个光子。问题是如何计算光子的角分布和偏振情况。（除了现在我们的粒子为自旋1而不是1/2以外，这个问题和 Λ^0 的衰变几乎完全相同。）因为原子的较高能态自旋为1，所以其角动量的 z 分量有3种可能性。 m 的值可能为+1、0或-1。在我们的例子中，取 $m=+1$ 。一旦你知道了如何处理这一情形，其他情形也就会解决了。我们设想一个原子的角动量沿着 $+z$ 轴方向，如图18-1（a）所示；并且试问它沿 z 轴向上发射右旋圆偏振光、结果原子的角动量变为零的振幅是什么，如图18-1（b）所示，我们并不知道这个问题的答案，但是我们却知道，对右旋圆偏振光，沿着它的传播方向具有一个单位角动量。所以发射光子后，情况将如图18-1（b）所示——留下的原子沿 z 轴的角动量为零，因为我们假定了原子在较低能态时自旋为零。我们用 a 代表这一事件的振幅。说得更明确些，我们令 a 为在 dt 时间内、向以 z 轴为中心的小立体角 $d\Omega$ 内发

射一光子的振幅。注意，在同一个方向发射LHC（左旋圆偏振）光子的振幅为零。沿 z 轴的净角动量对于这种光子为-1，而原子为0，总的角动量为-1，这将使角动量不守恒。

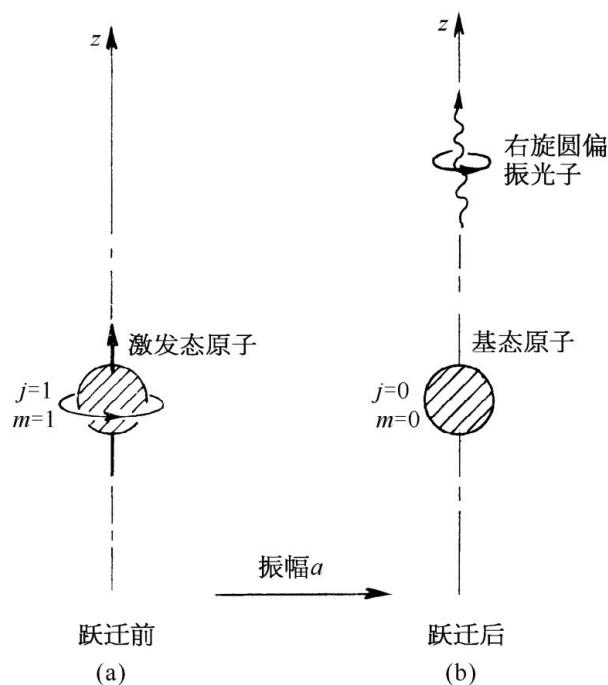


图18-1 一个 $m = +1$ 的原子沿 $+z$ 轴方向发射一个RHC光子

同样，如果原子的自旋起初是“朝下”的（沿 z 轴为-1），那它只能在 z 轴正方向发射一个LHC光子，如图18-2所示。我们用 b 代表这一事件的振幅——意义同样是光子进入某一立体角 $\Delta\Omega$ 的振幅。另一方面，如果原子处于 $m = 0$ 的状态，则它根本不能在 $+z$ 方向发射光子，因为光子沿其运动方向的角动量，只能是+1或-1。

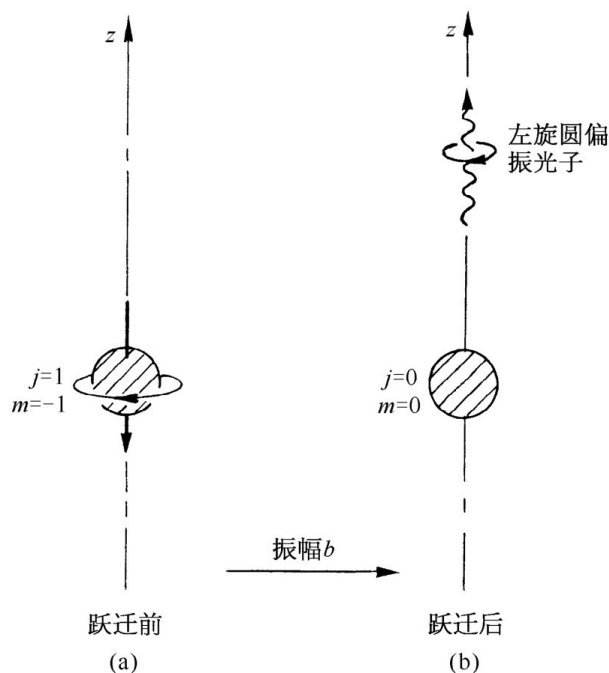


图18-2 一个 $m = -1$ 的原子沿 $+z$ 轴方向发射一个LHC光子

其次，我们可以证明 b 与 a 有关。假设我们把图18-1的情况作一反演，意思就是我们设想，如果把系统中每一部分移到原点对面的相应的点上去，该系统将会怎样。这并不意味着需要反射角动量矢量，因为它是人为的量。说得更确切些，我们应将对应于这种角动量的实际的运动特性倒转。在图18-3 (a) 和 (b) 中，我们显示了图18-1中的过程相对于原子中心反演前后的情况。注意原子转动的指向是不变的[1]，在图18-3 (b) 倒转的系统中， $m = +1$ 的原子向下发射一个LHC光子。

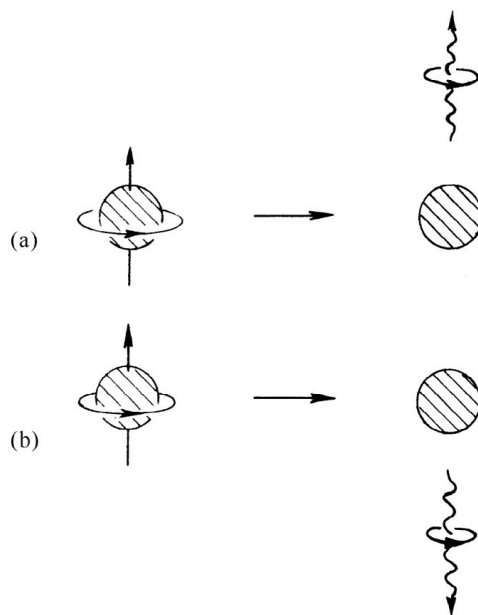


图18-3 如对（a）中的过程进行对原子中心的反演变换，就出现（b）所示的情形

如果现在我们将图18-3（b）的系统绕 x 轴或 y 轴旋转 180° ，那么它就变得和图18-2完全一样。反演和旋转的联合操作，使第二个过程成为第一个过程。由表17-2，我们知道对 y 轴旋转 180° ，恰好相当于把 $m = -1$ 的态变成 $m = +1$ 的态，所以除了由于反演可能造成符号改变外，振幅 b 必定和振幅 a 相等。反演中的符号改变将取决于原子的初态和终态的字称。

在原子的过程中，宇称是守恒的，所以整个系统的宇称在光子发射前后应该相同。所发生的情况取决于原子初态和终态的宇称是偶还是奇——对于不同的情况，辐射的角分布将不一样。我们将选取一个一般的情况，初态为奇宇称，而终态为偶宇称，这将给出所谓的“电偶极辐射”。（如果初态和终态具有相同的宇称，我们称其为“磁偶极辐射”，它具有回路中振荡电流的辐射特性。）如果初态的宇称为奇，在使系统从图18-3的（a）到（b）的反演中，它的振幅改变符号。原

子的终态具有偶宇称，所以其振幅不改变符号。如果在反应过程中宇称守恒，则振幅 b 和振幅 a 必然大小相等，符号相反。

我们推断出：如果一个 $m=+1$ 的态向上发射一个光子的振幅是 a ，那么对我们所假设的初态和终态的宇称而言， $m=-1$ 的态向上发射一个LHC光子的振幅为 $-a$ [2]。

我们已有了求出与 z 轴成任意角 θ 方向发射光子的振幅所需知道的一切。假设有一原子，原来具有 $m=+1$ 的偏振。我们可以把这个态分解为相对于新的 z' 轴的 $+1$ ， 0 ， -1 等3个态，这新的 z' 轴在光子发射的方向上。对这3个态的振幅就是表17-2下半部分所给出的。于是在 θ 方向发射出一个RHC（右旋圆偏振）光子的振幅，为 a 乘以在这个方向具有 $m=+1$ 的振幅，即

$$a\langle + | R_y(\theta) | + \rangle = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta). \quad (18.1)$$

在同一方向发射一个LHC光子的振幅为 $-a$ 乘以在此新方向具有 $m=-1$ 的振幅，利用表17-2，即为

$$-a\langle - | R_y(\theta) | + \rangle = -\frac{a}{2}(1 - \cos \theta), \quad (18.2)$$

如果你对其他的偏振感兴趣，你可以将这两种振幅的叠加得出它们的振幅。当然，为了得到作为角度的函数的任何分量的强度，你必须取振幅绝对值的平方。

§18-2 光散射

让我们利用这些结果来解决一个稍微复杂、但也较为真实的问题。假设同样的原子处于其基态 ($j=0$) 上，并将一束入射光散射出去。设光起初沿 $+z$ 轴方向传播，也就是说光子从 $-z$ 方向射向原子，如图18-4 (a) 所示。我们可以认为光的散射分成两个阶段：光子先被吸收，然后再发射出去。如果我们从一个RHC光子出发 [如图18-4 (a) 所示]，并且角动量是守恒的，则原子在吸收光子后，就会处于 $m=+1$ 的态，如图18-4 (b) 所示。我们把这过程的振幅称为 c 。原子随后能够在 θ 方向发射出一个RHC光子，如图18-4 (c) 所示。一个RHC光子被散射到 θ 方向的总振幅就是 c 乘以式 (18.1)。如将此振幅称为 $\langle R' | S | R \rangle$ ，就有

$$\langle R' | S | R \rangle = \frac{ac}{2}(1 + \cos \theta). \quad (18.3)$$

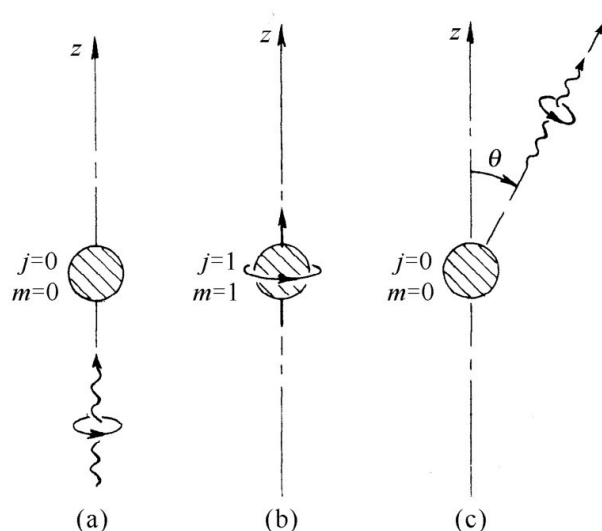


图18-4 光被原子散射可看作一个两阶段过程

同样，吸收RHC光子而发射LHC光子也具有一定的振幅。这两个振幅的乘积就是RHC光子被散射成为LHC光子的振幅 $\langle L' | S | R \rangle$ 。由式 (18.2) 得

$$\langle L' | S | R \rangle = -\frac{ac}{2}(1 - \cos \theta). \quad (18.4)$$

现在我们要问，如果射进来的是一个左旋圆偏振光子，那将出现什么情况？当它被吸收后，原子将进入 $m=-1$ 的态，根据我们在上节中所用的同样的论证，可以证明这个振幅必然是 $-c$ 。一个处在 $m=-1$ 态的原子，在角 θ 方向发射一个RHC光子的振幅是 a 乘以振幅 $\langle + | R_y(\theta) | - \rangle$ ，它就等于 $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ ，所以我们有

$$\langle R' | S | L \rangle = -\frac{ac}{2}(1 - \cos \theta). \quad (18.5)$$

最后，对于一个LHC光子被散射为一个LHC光子的振幅为

$$\langle L' | S | L \rangle = \frac{ac}{2}(1 + \cos \theta). \quad (18.6)$$

（这里的两个负号相消了。）

如果我们测量关于圆偏振的任何给定组合的散射强度，它将和这4个振幅中一个振幅的平方成正比。例如，对于一束入射的RHC光，其散射辐射中RHC光的强度将随 $(1 + \cos \theta)^2$ 而变化。

所有这一切都不错，但是假如从线偏振光出发，那会怎样呢？如果是 x 向偏振光，则它可以用RHC光和LHC光的叠加来表示。我们写作（参见§1-4）

$$| x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| R \rangle + | L \rangle). \quad (18.7)$$

如果是 y 向偏振光，则我们将有

$$|y\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle). \quad (18.8)$$

现在你想知道什么呢？你想得到 x 向偏振的光在角 θ 方向被散射为RHC光子的振幅吗？你可以由组合振幅的一般规则得到它。首先用 $\langle R' | S$ 乘式（18.7）以得出

$$\langle R' | S | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle R' | S | R \rangle + \langle R' | S | L \rangle). \quad (18.9)$$

然后对两个振幅利用式（18.3）和（18.5），得到

$$\langle R' | S | x \rangle = \frac{ac}{\sqrt{2}} \cos \theta. \quad (18.10)$$

如果你要的是 x 向偏振的光子被散射成LHC光子的振幅，你将得到

$$\langle L' | S | x \rangle = \frac{ac}{\sqrt{2}} \cos \theta. \quad (18.11)$$

最后，假设你想知道一个 x 向偏振的光子被散射后仍保持其为 x 向偏振的振幅，你所要求的就是 $\langle x' | S | x \rangle$ 。它可以写为

$$\langle x' | S | x \rangle = \langle x' | R' \rangle \langle R' | S | x \rangle + \langle x' | L' \rangle \langle L' | S | x \rangle. \quad (18.12)$$

若再用下列关系

$$|R'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle + i|y'\rangle), \quad (18.13)$$

$$|L'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle - i|y'\rangle), \quad (18.14)$$

由此得到

$$\langle x' | R' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (18.15)$$

$$\langle x' | L' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (18.16)$$

所以得到

$$\langle x' | S | x \rangle = a \cos \theta. \quad (18.17)$$

答案是，一束 x 向偏振光被散射到 θ 方向（在 xz 平面中）的强度和 $\cos^2 \theta$ 成正比。如果你要问关于 y 向偏振光的情况，你会发现

$$\langle y' | S | x \rangle = 0. \quad (18.18)$$

所以散射光在 x 方向是完全偏振的。

现在我们介绍一些有趣的事情。式（18.17）和（18.18）的结果完全和第1卷§32-6给出的光散射的经典理论相一致。在那里我们想象电子被一线性恢复力束缚于原子中，电子就像一个经典振子。也许你在想：“这问题在经典理论中要容易得多，如果经典理论给出正确的答案，为什么要用量子理论来麻烦自己呢？”有一个理由是，我们至今所考虑的只是具有 $j=1$ 的激发态及 $j=0$ 的基态的原子这一特殊——虽然普通——的情况。如果激发态的自旋为2，你将得到不同的结果。另外，我们并没有理由认为这种挂在弹簧上的电子并被振荡电场驱动模型也应对单个光子适用。但是我们发现实际上它确实是适用的，所得出的光的偏振性和强度是正确的。所以从某种意义上讲，我们正在使整个课程接近真实情况。在第1卷中，我们曾用经典理论讨论过折射率和光散射理论，现在我们证明了量子理论在最一般的情况下给出了同样

的结果。例如，我们现在实际上用量子力学论证了天上的光的偏振现象，这是唯一真正合理的方法。

当然，所有行得通的经典理论最终总得到合理的量子论据的支持。自然，我们花了很多时间来对你们解释的那些内容都是选自经典物理中对量子力学来说仍然正确的部分。你可能注意到，我们没有详细讨论过电子绕轨道运行的原子模型。这是因为这样的原子模型并不给出和量子力学相一致的结果。但是连在弹簧上的电子（原子“看上去”，根本不是这么回事）确实有用，所以我们在折射率的理论中采用了这一模型。

§18-3 电子偶素的湮没

下面我们想举一个非常漂亮的例子。它很有趣，虽然稍微复杂些，但我们希望不至于过分复杂。我们的例子是个称为电子偶素的系统，它是由一个电子和一个正电子组成的“原子”——一个 e^+ 和一个 e^- 组成的束缚态。它类似于一个氢原子，只是正电子代替了质子而已。和氢原子一样，它有许多状态。也像氢原子那样，其基态也由于磁矩的相互作用而分裂成“超精细结构”。电子和正电子的自旋都为 $1/2$ ，它们可以平行或反平行于任一给定的轴（在基态不存在由于轨道运动而产生的角动量），所以它有4个状态：其中3个是自旋1的系统的支态，它们具有相同的能量，另一个是具有不同能量、自旋为零的态。不过，能量的分裂比氢的 1.420 兆周要大得多，这是因为正电子的磁矩比质子的磁矩大得多——大 $1\,000$ 倍。

然而最重要的区别在于：电子偶素不能一直存在。正电子是电子的反粒子，它们可以互相湮没。这两个粒子完全消失——它们的静止

能量转化为辐射能，后者表现为 γ 射线（光子）。在此衰变中，两个具有有限静止质量的粒子，变成了两个或多个静止质量为零的粒子^[3]。

我们从分析处于自旋零的态的电子偶素的衰变开始。它衰变成两个寿命约为 10^{-10} s的 γ 射线（光子）。起初，正电子和电子靠近，它们的自旋反平行，构成了电子偶素系统。衰变后，有两个光子带着大小相等而方向相反的动量跑开（图18-5）。它们的动量必须大小相等而方向相反，因为，如果我们取的是处于静止状态的湮没这一情形，则衰变后的总角动量必然和衰变前一样为零。如果电子偶素不是处于静止状态，则我们可以跟着它跑，解出这一问题，然后再把每件事变换到实验室坐标系中去。（看，我们现在已经工具齐全，可以做任何事情了。）

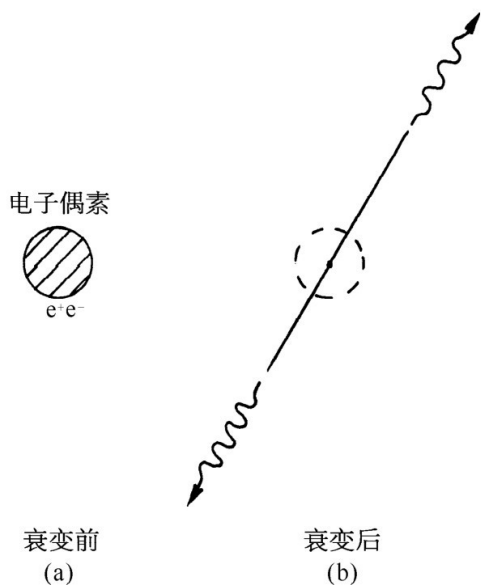


图 18-5 电子偶素的双光子湮没

首先，我们注意角分布并不是很感兴趣。因为初态的自旋为零，它没有什么特殊的轴——它对所有的转动都是对称的。于是终态对所

有的转动也应该是对称的。这意味着该衰变对每个角度都是同样可能的——光子走向任何方向的振幅都是一样的。当然，一旦我们在某个方向找到一个光子，另一个一定是在相反方向上。

剩下唯一我们要考察的问题是光子的偏振。设两个光子运动的方向为正 z 轴和负 z 轴。对于光子的偏振态，可以使用我们所需要的任何表象。我们选取右旋和左旋圆偏振（总是相对运动方向而言的）来描述它。我们可以立即看出，如果向上的光子是RHC，那么如果向下的光子也是RHC，则满足角动量守恒。每个光子相对其动量方向来说都携带了+1单位的角动量，这就是说沿 z 轴^[4]是+1和-1单位的角动量。两者的总和为零，衰变后的角动量和衰变前的相同。见图18-6。

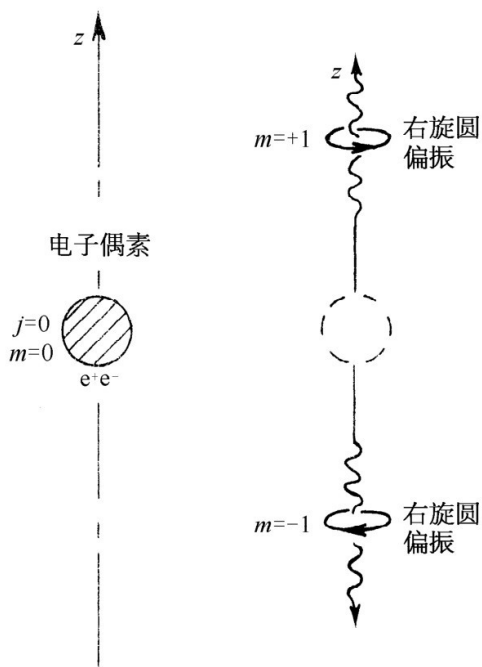


图18-6 电子偶素沿 z 轴湮没的一种可能性

同样的论证表明，如果向上的光子是RHC，则向下的光子就不可能是LHC，否则终态将具有两个单位的角动量。若初态自旋为零，这

是不允许的。注意，对于其他自旋为1的电子偶素的基态，这样的终态也是不可能的，因为在任何方向角动量的极大值是一个单位。

现在我们要证明，对自旋1的态，双光子湮没是不可能的。你可能认为，如果取 $j=1$, $m=0$ 的态——它在 z 轴上的角动量为零——它应该与自旋零的态一样，可以衰变成两个RHC光子。当然，图18-7 (a) 所示的衰变对沿 z 轴的角动量守恒。但是来看一下，如果把此体系绕 y 轴旋转 180° ，则会发生什么，我们将得到图18-7 (b) 所示的图像。它与图 (a) 完全相同。我们所做的一切只是把两个光子互换了一下。光子是玻色子，如果把它们互换一下，则振幅不变号，所以 (b) 部分衰变的振幅必定和 (a) 部分衰变的振幅相同，但是我们曾假设原来的物体自旋为1，如果我们把处于 $m=0$ 态、自旋1的物体绕 y 轴旋转 180° ，则它的振幅将改变符号（见表17-2, $\theta=\pi$ ）。所以图18-7 中 (a) 和 (b) 的振幅应具有相反的符号，自旋1的态不能衰变为两个光子。

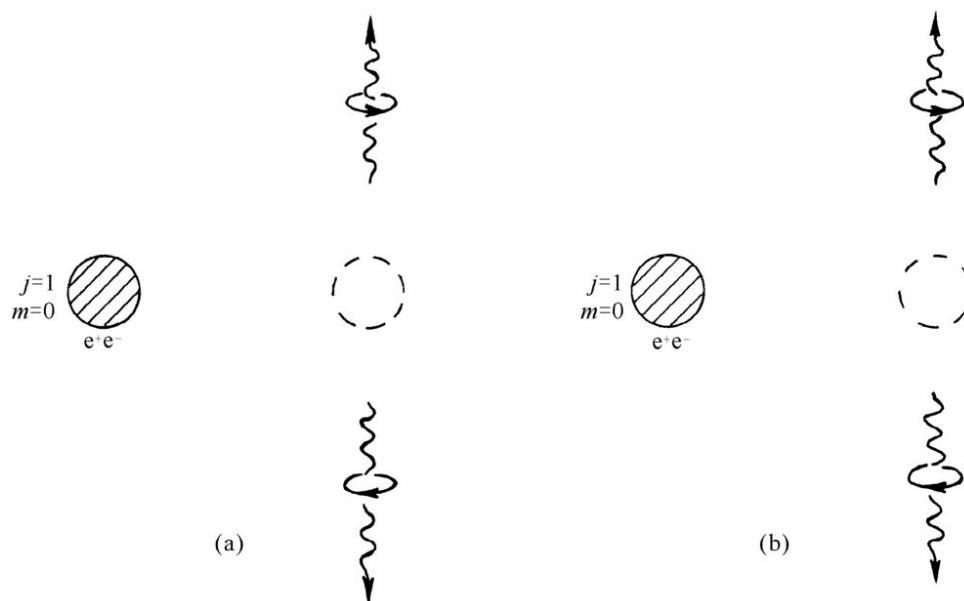


图18-7 对于电子偶素其 $j=1$ 的态，过程 (a) 和它绕 y 轴旋转 180° 后得到的过程 (b) 完全相同

当电子偶素形成时，你可能预期它有1/4的时间停留在自旋0的态，3/4的时间留在自旋1的态（包括 $m = -1, 0$ 或 $+1$ ）。所以有1/4的时间你将得到双光子的湮没；另外3/4的时间可能没有双光子湮没；但湮没仍会发生，不过将产生3个光子。这种情形较难发生，因其寿命要长1 000倍——约 10^{-7} s。这是实验观察到的结果。我们不再进一步详细讨论自旋1的粒子的湮没。

到现在为止，假如我们只考虑角动量，电子偶素自旋零的态可以变成两个RHC光子。另外还有一种可能性：它可以如图18-8所示的那样，变成两个LHC光子。接下来的问题是，这两种可能的衰变模式的振幅之间有什么关系？我们可以从宇称的守恒得出这种关系。

然而，要这样做，我们必须知道电子偶素的宇称。现在，理论物理学家在某种程度上已证明不容易解释为什么电子和正电子（电子的反粒子）的宇称必须相反，使得处于自旋零的基态的电子偶素的宇称必须为奇。我们只是假设它的宇称为奇，由此我们能得到与实验相符合的结果，我们可以把这作为充分的证据。

让我们看看，如果把图18-6所示的过程作一反演，将会发生什么情况。当我们这样做后，两个光子的方向和偏振都反过来了，反演后的情形正如图18-8所示。假设电子偶素的宇称为奇，则图18-6和图18-8中两个过程的振幅必须具有相反的符号。以 $|R_1 R_2\rangle$ 代表图18-6的终态，其中的两个光子都是RHC，而以 $|L_1 L_2\rangle$ 代表图18-8的终态，其中的两个光子都是LHC。真正的终态——让我们称它为 $|F\rangle$ ——必定是

$$|F\rangle = |R_1 R_2\rangle - |L_1 L_2\rangle . \quad (18.19)$$

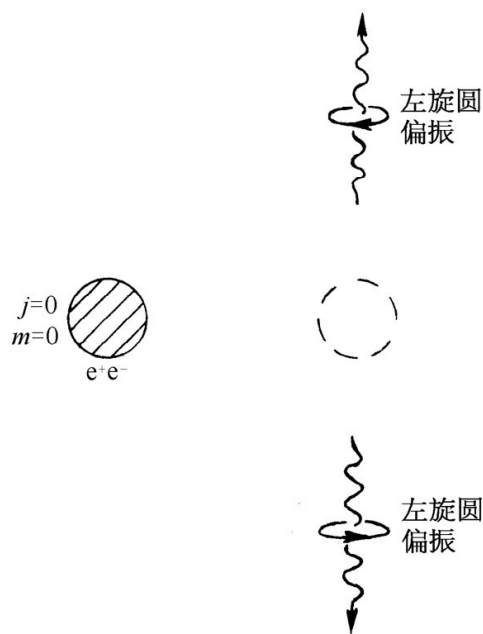


图18-8 电子偶素湮没的另一种可能过程

于是，反演把 R 变成 L ，给出

$$P | F \rangle = | L_1 L_2 \rangle - | R_1 R_2 \rangle = - | F \rangle , \quad (18.20)$$

上式正好是式（18.19）加个负号。所以，终态 $| F \rangle$ 有负的字称，和电子偶素自旋零的初态一样。这是角动量和宇称都守恒的唯一终态。衰变成这个态的振幅一定存在，但我们现在不必为此操心，因为我们只对偏振感兴趣。

式（18.19）中的终态有什么物理意义呢？一个意义是：如果我们用两个可以分别计数RHC和LHC光子探测器来观察发射出来的两种光子，我们将总是看到两个RHC光子在一起或两个LHC光子在一起。这就是说，如果你站在电子偶素的某一边，另一个人站在相反的一边，你可以测量偏振情况，并告诉另一个人他获得什么样的偏振。你有50对50的机会捕获一个RHC光子或一个LHC光子。不管你得到哪一种光子，你都能预料他也会得到同样的光子。

由于RHC或LHC偏振的机会是50对50，听起来它可能像线偏振。我们要问：如果我们用只能接收线偏振光的计数器观察光子，将会怎样呢？测量 γ 射线的偏振不像测量光的偏振那样容易。对于这样短的波长，还没有很好的检偏振器。但是为使讨论方便起见，让我们假想有这种偏振器。假设你的计数器只接受 x 偏振的光，而在另一边的一个人只寻找具有 y 偏振的线偏振光。你检测到电子偶素湮没产生的两个光子的机会是多少呢？我们所要问的是 $|F\rangle$ 在态 $|x_1 y_2\rangle$ 的振幅是多少。换句话说，我们想求振幅

$$\langle x_1 y_2 | F \rangle ,$$

当然，它就是

$$\langle x_1 y_2 | R_1 R_2 \rangle - \langle x_1 y_2 | L_1 L_2 \rangle . \quad (18.21)$$

虽然我们是在求两个光子的双粒子振幅，但由于每个粒子的行为是相互独立的，所以我们可以像以前处理单粒子振幅那样来处理。这意味着振幅 $\langle x_1 y_2 | R_1 R_2 \rangle$ 只是两个独立振幅 $\langle x_1 | R_1 \rangle$ 和 $\langle y_2 | R_2 \rangle$ 的乘积。由表17-3，这两个振幅是 $1/\sqrt{2}$ 和 $i/\sqrt{2}$ ，所以

$$\langle x_1 y_2 | R_1 R_2 \rangle = + \frac{i}{2} .$$

同理得

$$\langle x_1 y_2 | L_1 L_2 \rangle = - \frac{i}{2} .$$

按照式(18.21)，将此两振幅相减得

$$\langle x_1 y_2 | F \rangle = +i. \quad (18.22)$$

所以得到一个单位概率^[5]，如果你在 x 偏振的探测器中得到一个光子，那么另外那个人将在他的 y 偏振的探测器中得到另一个光子。

现在假定另外那一个人也用和你一样的 x 偏振的计数器。当你得到一个光子时，他绝不会有计数。如果你从头到尾算一下，就会得到

$$\langle x_1 x_2 | F \rangle = 0. \quad (18.23)$$

自然，如果你用 y 偏振的计数器，则只有当他用 x 偏振的计数器时，他才会得到和你一致的符合计数。

现在所有这一切都导致一个有趣的情况。假定你用一块像方解石那样的东西，把光分解为 x 偏振和 y 偏振的光束，并在各光束中放一计数器，我们把一个叫做 x 计数器，另一个叫做 y 计数器。如果在另一边的那个人也这样做，则你总是可以告诉他，他的光子将跑进哪一束光去，每当你和他同时记录到光子时，你可以观察你自己这边哪个计数器捕获到光子，然后告诉他，他的哪一个计数器中有一个光子。我们说：在某次衰变中，你发现一个光子进入你的 x 计数器，则你可以告诉他，他也必定在他的 y 计数器中找到一个光子。

许多按通常（老式）的方式学习量子力学的人都会发现这个困惑，他们总是认为一旦光子被发射出来，它们就像一个具有特定性质的波一样。他们以为既然“任一给定的光子”具有 x 偏振或者 y 偏振的某些“振幅”，那么就在 x 计数器或是在 y 计数器中找到它都应有某种机会，并且这个机会应该和另外那个人找到另一个完全不同光子的机会无关。他们争辩说，“另一个人所做的测量，不应该改变我找到什么的

概率。”但是，我们的量子力学告诉我们，根据你对第一号光子所做的测量，你能正确地料到，当检测到第二号光子时它是什么样的偏振。这个观点从未为爱因斯坦所接受，他对之极为烦恼——这成了著名的“爱因斯坦波多尔斯基-罗森佯谬”。但是，当像我们在这里所作的那样来描述这一情况时，就似乎根本不存在什么佯谬，并且很自然地得出在一个地方测得的结果与在另一个地方所测得的结果相关。关于该结果为佯谬的论证大致是这样的：

（1）如果你有一个计数器告诉你，你的光子是RHC还是LHC，则你可以精确地预言他将会发现哪一种类型的光子（RHC或LHC）。

（2）因此他所接收到的光子的每一个都必定是纯RHC或纯LHC，有些是这一种，有些是另一种。

（3）你不能改变你对你的光子观察的类型，来改变他的光子的物理性质。不论你对你的光子作什么测量，他的光子必定仍然不是RHC就是LHC。

（4）现在假定他用一块方解石改装的仪器，把他的光子分成两种线性偏振的光束，以至他的全部光子不是进入 x 偏振的光束，就是进入 y 偏振的光束。根据量子力学，绝对没有一个方法可以说出任一特定的RHC光子将进入哪个光束。它进入 x 光束的概率是50%，进入 y 光束的概率也是50%。对一个LHC光子来说情况也是这样。

（5）既然每一个光子不是RHC就是LHC——按照（2）和（3）——每个光子必然有50对50的机会进入 x 光束或 y 光束，那就无法预言它将走哪一条路。

(6) 然而理论却预言，如果你看见你的光子通过 x 起偏振器，则你能够肯定地预言，他的光子将通过他的 y 偏振光束。这与(5)矛盾，所以存在着佯谬。

然而大自然显然没有注意到这个“佯谬”。因为实验表明(6)中的预言实际上是对的。我们在第1卷第37章^[6]关于量子力学的行为的第一次讲课中，已经讨论了这个“佯谬”的关键。在上面的论证中，(1)，(2)，(4)和(6)都是正确的，而(3)和它的推论(5)是错误的。它们不是自然界的正确描述。论证(3)表明，由你的测量（看见一个RHC或LHC光子），你能决定在他那里发生的是可选择的两个事件中的哪一个（看到一个RHC或LHC光子），而且，甚至不做你的测量，你仍然能讲出他那里所发生的事件将是这个或那个的两者之一。但是第1卷第37章中的要点恰恰是从一开始就指出在大自然中并非如此。大自然的方式需要用干涉振幅来描述，每一个供选择的事件有一个振幅。测量实际上发生哪一个事件就破坏了这种干涉，但是如果不进行测量，你就不可能再说：“这个或另一个事件仍要发生。”

如果你对你的每一个光子都能确定它是RHC还是LHC，并且也可以确定它是否为 x 偏振（对同一光子），那就真的有佯谬了。但你办不到——这是不确定性原理的一个例子。

你仍然认为有“佯谬”吗？事实上，要证实大自然的行为的佯谬，可以设计一个假想实验。对于这个假想实验，量子力学理论通过两种不同的论证会预言两个相互矛盾的结果。否则，这“佯谬”只不过是现实和你对“现实应该如何”的感觉之间的冲突。

你认为这虽不是佯谬而仍然是非常奇特的吗？我们完全同意你们的想法。这就是物理学迷人之处。

§18-4 任意自旋的转动矩阵

至此我们希望你们能看到，角动量概念在了解原子的过程中是多么重要。到目前为止，我们只考虑了自旋（或“总角动量”）为0、1/2或1的系统。当然还存在具有更高角动量的原子系统。为了分析这种系统，我们需要有§17-6中那样的转动振幅表。这就是说，我们需要自旋为3/2，2，5/2，3等的振幅矩阵。虽然我们不去详细地计算出这些表，但我们希望告诉你们它是怎样算出的，以便你们一旦需要时能自己计算。

正如我们以前看到的，任何具有自旋或“总角动量” j 的系统能够存在于 $2j+1$ 个态中的任一个态，这些态的角动量在 z 轴上的分量，可以是 $j, j-1, j-2, \dots, -(j-1), -j$ （都以 $\hbar$ 为单位）这一系列分立值中的任何一个值。把任何一个特殊态的角动量的 z 分量称为 $m\hbar$ ，通过给定两个“角动量量子数” j 和 m 的数值，我们就能定义一个角动量状态。我们以态矢量 $|j, m\rangle$ 来表示该态，在自旋1/2粒子的情况下，其两个态就是 $|1/2, 1/2\rangle$ 和 $|1/2, -1/2\rangle$ ；而对于自旋1的系统，其状态用这种记号就被写成 $|1, +1\rangle$ 、 $|1, 0\rangle$ 及 $|1, -1\rangle$ ；当然，自旋零的粒子只有一个态 $|0, 0\rangle$ 。

现在我们想要知道，当我们把一般的态 $|j, m\rangle$ 投影到一组转过一个角度的坐标轴的表象中去时，会发生什么情形。首先我们知道， j 是一个表示该系统特征的数，所以它是不变的。如果我们转动坐标轴，我们所得到的只是关于同一 j 的各个 m 值的混合状态。通常，会有某个系统在转过角度的坐标系中处于态 $|j, m'\rangle$ 的振幅，这里 m' 是新的角动量的 z 分量。所以我们所需要的是对于各种转动的矩阵元 $\langle j, m' | R | j, m \rangle$ 。我们早已知道，如果我们绕 z 轴旋转 ϕ 角将发生

些什么。新的态只不过是把原来的态乘上 $e^{im\phi}$ 而已——它仍有相同的 m 值。我们可以把这写为

$$R_z(\phi) |j, m\rangle = e^{im\phi} |j, m\rangle, \quad (18.24)$$

或者，如果你喜欢可写成

$$\langle j, m' | R_z(\phi) | j, m \rangle = \delta_{m, m'} e^{im\phi}. \quad (18.25)$$

（式中若 $m' \neq m$ 则 $\delta_{m, m'} = 0$ ，否则为1。）

对于绕任何其他轴的转动，各个 m 态将混合。当然，我们可以尝试求出用欧拉角 β ， α 和 γ 描写的任意转动的矩阵元。但比较容易的是记住这种转动最一般的情况可以由3个转动 $R_z(\gamma)$ ， $R_y(\alpha)$ 和 $R_z(\beta)$ 组成，所以如果知道了对 y 轴旋转的矩阵元，我们所需要的一切就都有了。

对于自旋为 j 的粒子，绕 y 轴转动角 θ ，我们如何去求其转动矩阵元呢？我们无法告诉你们如何用一种基本的方法（我们已经有的方法）去求。对自旋1/2的粒子，我们通过复杂的对称性论证求得其矩阵元。接着对自旋1的情形，我们通过由两个自旋1/2的粒子组成的自旋1的系统这一特例求得其矩阵元。如果你们赞同我们的做法，并且接受这一事实：在一般情况下，答案只与自旋 j 有关，而与自旋为 j 的粒子的内部构造是怎样组合的无关，那么我们可以把自旋1的论证推广到任意自旋的情况。例如，我们可以虚构一个自旋为3/2的系统，它由3个自旋1/2的粒子构成。我们甚至可以把它们想象成它们都是可区分的粒子——如一个质子、一个电子和一个 μ 子——以避免复杂性。通过对每一个自旋1/2的粒子进行变换，我们就可以知道整个系统发生的情况

——记住对于组合态，3个振幅是相乘的，我们看看，在这种情况下该怎么做。

假定我们取3个自旋1/2的粒子，其自旋全部朝上，我们可以用 $|+++ \rangle$ 表示该态。如果我们从一个绕 z 轴转了 ϕ 角的坐标系来看这个系统，每个正号仍为正号，但要乘上 $e^{i\phi/2}$ ，我们有3个这种因子，所以

$$R_z(\phi) |+++ \rangle = e^{i3\phi/2} |+++ \rangle. \quad (18.26)$$

显然， $|+++ \rangle$ 态正是我们所说的 $m=+3/2$ 的态，或 $|3/2, +3/2 \rangle$ 态。

如果我们现在绕 y 轴转动此系统，每个自旋1/2的粒子具有某个正或负的振幅，所以现在此系统是8种可能的组合的混合态，这些态是 $|+++ \rangle$ ， $|++- \rangle$ ， $|+-+ \rangle$ ， $| -++ \rangle$ ， $|+-- \rangle$ ， $| -+- \rangle$ ， $| --+ \rangle$ 和 $| --- \rangle$ 。显然这8个态可以分成4组，每组与一个特定的 m 值相对应。首先，我们有 $|+++ \rangle$ ，其 $m=3/2$ ；接着是 $|++- \rangle$ ， $|+-+ \rangle$ 和 $| -++ \rangle$ 3个态——每个态都是两个正一个负。因为每个自旋1/2的粒子在转动下都有同样的机会变成负，所以在这3种组合的每个所占的份量应该相等。于是我们取该组合为

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \{ |++- \rangle + |+-+ \rangle + | -++ \rangle \}. \quad (18.27)$$

加入因子 $1/\sqrt{3}$ 是为了使态归一化。如将此态绕 z 轴转动，我们对每个正号得到一个因子 $e^{i\phi/2}$ ，对每个负号得到因子 $e^{-i\phi/2}$ 。式 (18.27) 中的每一项都乘上 $e^{i\phi/2}$ ，所以有一个公因子 $e^{i\phi/2}$ 。这个态满足我们对 $m=+1/2$ 态的想法，我们可以断定

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\{|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle\} = \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (18.28)$$

同理我们可以写下

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\{|+--\rangle + |-+-\rangle + |--+\rangle\} = \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (18.29)$$

它和 $m = -1/2$ 的态相对应。注意，我们只取了那些对称的组合——我们没有取带有负号的任何组合。这些组合将对应于 m 相同但 j 不同的态（这正和自旋1的情况相像，在那里我们知道 $(1/\sqrt{2})\{|+-\rangle + |-+\rangle\}$ 是 $|1, 0\rangle$ 态，而 $(1/\sqrt{2})\{|+-\rangle - |-+\rangle\}$ 是 $|0, 0\rangle$ 态）。最后，我们有

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |--\rangle. \quad (18.30)$$

我们将此4个态概括在表18-1中。

表 18-1

$ +++\rangle$	$= \left \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{3}}\{ ++-\rangle + +-+\rangle + -++\rangle\}$	$= \left \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{3}}\{ +--\rangle + -+-\rangle + --+\rangle\}$	$= \left \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$
$ --\rangle$	$= \left \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$

现在我们所要做的就是将每个态绕 y 轴转动，并看看它给出多少个其他的态——利用我们已知的关于自旋1/2的粒子的转动矩阵。我们的做法和§12-6中处理自旋1的情形完全相同（只是多一点代数运算罢了）。

了)。我们将直接按照第12章的思想，所以不必详细重复所有的说明。系统 S 中的态将记为

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}, S \right\rangle = |+++ \rangle, \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, S \right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) |++- \rangle + |+-+ \rangle + |-++ \rangle,$$

等等。系统 T 将是绕 S 的 y 轴转过 θ 角的一个系统， T 中的态记为 $|3/2, +3/2, T\rangle$ ， $|3/2, +1/2, T\rangle$ 等等。当然， $|3/2, +3/2, T\rangle$ 与 $|+, +, +\rangle$ 相同，带撇的都是指系统 T 。与此相类似， $|3/2, +1/2, T\rangle$ 等于 $(1/\sqrt{3})\{|+'+'-\rangle + |+'-'+\rangle + |-'++'\rangle\}$ 等等。在 T 坐标系中的每个 $|+\rangle$ 态都是由 S 系统中的两个态 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 通过表12-4中的矩阵元变换来的。

当我们将有3个自旋1/2的粒子时，式(12.47)可以由下式代替，

$$\begin{aligned} |+++ \rangle = & a^3 |+'+'+\rangle + a^2 b \{ |+'+'-\rangle + |+'-'+\rangle + |-'++'\rangle \} \\ & + ab^2 \{ |+'--'\rangle + |-'+'-\rangle + |--'++'\rangle \} + b^3 |--'--'\rangle. \end{aligned} \quad (18.31)$$

利用表12-4的变换，代替式(12.48)，我们得到下列方程

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}, S \right\rangle = & a^3 \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}, T \right\rangle + \sqrt{3} a^2 b \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, T \right\rangle + \sqrt{3} ab^2 \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, T \right\rangle \\ & + b^3 \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, T \right\rangle. \end{aligned} \quad (18.32)$$

这已经给了我们几个矩阵元 $\langle jT | iS \rangle$ 。为了求得 $|3/2, +1/2, S\rangle$ 的表示式，我们从有两个“+”和一个“-”的态的变换开始。例如：

$$\begin{aligned} |++-\rangle = & a^2 c |+'+'+\rangle + a^2 d |+'+'-\rangle + abc |+'-'+\rangle + bac |-'++'\rangle \\ & + abd |+'--'\rangle + bad |-'+'-\rangle + b^2 c |--'++'\rangle + b^2 d |--'--'\rangle. \end{aligned} \quad (18.33)$$

加上 $|+-\rangle$ 和 $| -++\rangle$ 的两个相似的表示式，并用 $\sqrt{3}$ 去除，我们得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, S \right\rangle &= \sqrt{3}a^2c \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}, T \right\rangle + (a^2d + 2abc) \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, T \right\rangle \\ &+ (2bad + b^2c) \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, T \right\rangle + \sqrt{3}b^2d \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, T \right\rangle. \end{aligned} \quad (18.34)$$

继续这些步骤，我们就得到列在表18-2中的所有变换矩阵元 $\langle jT | iS \rangle$ 。表中的第一列来自式（18.32），第二列来自式（18.34），最后两列也是用相同方法得到的。

表18-2 一自旋3/2粒子的旋转矩阵

(系数 a, b, c 和 d 列于表 12-4 中)

$\langle jT iS \rangle$	$\left \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}, S \right\rangle$	$\left \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, S \right\rangle$	$\left \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, S \right\rangle$	$\left \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, S \right\rangle$
$\left\langle \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}, T \right $	a^3	$\sqrt{3}a^2c$	$\sqrt{3}ac^2$	c^3
$\left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, T \right $	$\sqrt{3}a^2b$	$a^2d + 2abc$	$c^2b + 2dac$	$\sqrt{3}c^2d$
$\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, T \right $	$\sqrt{3}ab^2$	$2bad + b^2c$	$2cdb + d^2a$	$\sqrt{3}cd^2$
$\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, T \right $	b^3	$\sqrt{3}b^2d$	$\sqrt{3}bd^2$	d^3

现在假设 T 系统相对 S 绕 y 轴转过角 θ 。于是 a, b, c 和 d 的值 [参见式（12.54）] 为 $a=d=\cos\theta/2$ ，及 $c=-b=\sin\theta/2$ 。将这些值代入表18-2中，就得到与表17-2的第二部分相应的形式，只是现在是关于自旋3/2的系统。

我们刚才所做的论证很容易推广到任意自旋 j 的系统上去。 $|j, m\rangle$ 态可以由 $2j$ 个粒子组成，每个粒子都是自旋1/2（其中有 $j+m$ 个粒子在 $|+\rangle$ 态， $j-m$ 个粒子在 $|-\rangle$ 态）。对所有可以这样做的方式求

和就可以了，还要乘以适当的常数使态归一化。你们中喜爱数学的人或许能得出下式^[7]：

$$\begin{aligned} \langle j, m' | R_y(\theta) | j, m \rangle = & [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{1/2} \\ & \times \sum_k \frac{(-1)^{k+m-m'} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+m'-m-2k} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{m-m'+2k}}{(m-m'+k)!(j+m'-k)!(j-m-k)!k!}, \end{aligned} \quad (18.35)$$

其中的 k 必须取所有能使阶乘中的项 ≥ 0 的每个值。

这是一个相当杂乱的式子，但是你可以用它来核对对于 $j=1$ 的表17-2，并可以自己制定对于更大 j 值的表。有几个特殊的矩阵元特别重要，给了它们专门名称。例如 $m=m'=0$ ，而 j 为整数的矩阵元是著名的勒让德多项式，称为 $P_j(\cos\theta)$ ：

$$\langle j, 0 | R_y(\theta) | j, 0 \rangle = P_j(\cos\theta). \quad (18.36)$$

这多项式的前几项为：

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad (18.37)$$

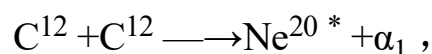
$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad (18.38)$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1), \quad (18.39)$$

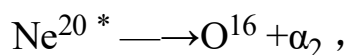
$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta). \quad (18.40)$$

§18-5 测量核自旋

我们愿意告诉你们一个应用刚才所述系数的例子，这是一个你们现在能够理解的、新而有趣的实验。有些物理学家想知道 Ne^{20} 原子核处于某激发态的自旋，为此，他们用一束加速的碳离子去轰击碳靶，从下述反应中产生想要的 Ne^{20} 激发态（称为 Ne^{20*} ），



式中 α_1 是 α 粒子或 He^4 ，用这种方式产生的 Ne^{20} 的几个激发态是不稳定的，以下面的反应而衰变



所以在实验中由上述反应产生的 α 粒子有两个，我们称它们为 α_1 和 α_2 ，因为它们以不同的能量离去，所以它们彼此是可以区分的。再有，通过对 α_1 挑选一个特定的能量，我们就可以选出 Ne^{20} 的任一特定的激发态。

实验的装置如图18-9所示。一束16 MeV的碳离子射向一片很薄的碳箔。第一个 α 粒子用标明为 α_1 的硅扩散结探测器来计数，该探测器调整成接收具有适当能量且（对 C^{12} 入射束来说）为向前运动的 α 粒子。第二个 α 粒子由对 α_1 的夹角为 θ 的计数器 α_2 来检测。来自探测器 α_1 和 α_2 的符合信号的计数率是按 θ 的函数进行测量。

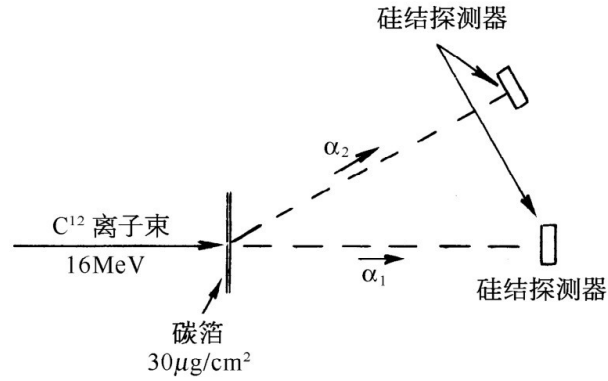


图 18-9 确定 Ne^{20} 的某些态的自旋的实验装置

上述实验的思想如下。首先，你需要知道 C^{12} ， O^{16} 和 α 粒子的自旋都为零。如果我们把初始时 C^{12} 的运动方向定为 $+z$ 方向，则我们知道 Ne^{20*} 对 z 轴的角动量必为零。没有一个其他粒子有自旋， C^{12} 沿 z 轴射来， α_1 粒子沿 z 轴离开，因此它们对 z 轴不可能有任何角动量。所以不论 Ne^{20*} 的自旋 j 是什么，我们知道它处于态 $|j, 0\rangle$ 中。那么当 Ne^{20*} 衰变成 O^{16} 和第二个 α 粒子时将发生些什么呢？这个 α 粒子由计数器测得 α_2 ，为了满足动量守恒， O^{16} 必在相反方向上离去 [8]。对通过 α_2 的新轴，不可能有角动量的分量。终态对新轴的角动量分量为零，所以只有当 Ne^{20*} 有某种使 m' 等于零的振幅时，它才能以这种方式衰变，这里 m' 是对新轴的角动量分量的量子数。实际上在 θ 方向观察到 α_2 的概率就是下面这个振幅（或矩阵元）的平方

$$\langle j, 0 | R_y(\theta) | j, 0 \rangle. \quad (18.41)$$

为了求得本问题中 Ne^{20*} 态的自旋，将第二个 α 粒子的强度作为角度的函数作图，并与不同 j 值的理论曲线相比较。正如我们在上节中所讲的，振幅 $\langle j, 0 | R_y(\theta) | j, 0 \rangle$ 就是函数 $P_j(\cos\theta)$ 。所

以可能的角分布就是 $[P_j(\cos\theta)]^2$ 的曲线。图18-10给出了两个激发态的实验结果。你们可以看到5.80 MeV态的角分布曲线与 $[P_1(\cos\theta)]^2$ 曲线重合得非常好，所以它必定是自旋1的态。另一方面，5.63 MeV态的数据却很不一样，它符合 $[P_3(\cos\theta)]^2$ 曲线。这个态的自旋为3。

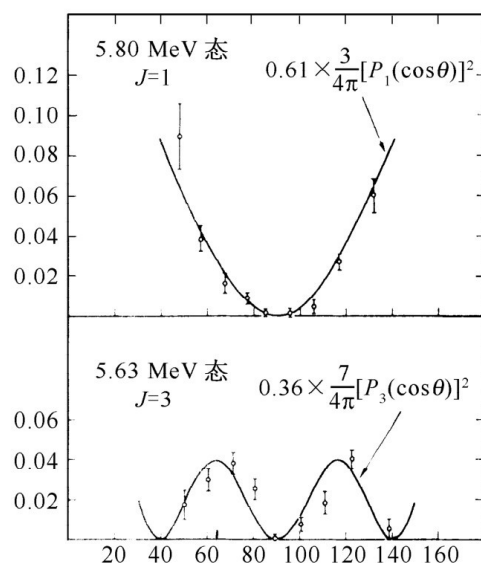


图18-10 由图18-9的装置产生的 Ne^{20*} 的两个激发态发射的 α 粒子角分布的实验结果，[引自J. A. Kuehner, *Physical Review*, Vol. 125, p. 1650, 1962.]

从这个实验，我们能求出 Ne^{20*} 的两个激发态的角动量。这个资料又可以用来试图了解该原子核内部质子和中子的位形——神秘的核力又多了一些信息。

§18-6 角动量的合成

当我们在第12章中研究氢原子的超精细结构时，我们必须算出由两个自旋都是1/2的粒子——电子和质子——组成的系统的内部状态。我们发现这样的系统的4种可能的自旋态可以分成两组——一组具有同一个能量，从外界来看它好像是一个自旋1粒子，另一个态的行为像一个自旋0粒子。这就是说，把两个自旋1/2粒子放在一起就形成一个“总自旋”为1或0的系统。在本节中我们希望用更普遍的方法来讨论由两个任意自旋的粒子组成的系统的自旋态。这是关于量子力学系统的角动量的另一个重要课题。

我们首先将第12章中关于氢原子的结果改写成比较容易推广到更为一般情况的形式。我们从两个粒子开始，把这两个粒子称为粒子 a （电子）和粒子 b （质子）。粒子 a 具有自旋 j_a （=1/2），其角动量的 z 分量 m_a 可以具有几个值（实际上有两个，即 $m_a=+1/2$ ，或 $m_a=-1/2$ ）中的一个。同样，粒子 b 的自旋态也由其自旋 j_b 以及它的角动量的 z 分量 m_b 来描述。我们可以构成两个粒子自旋态的各种组合。例如，我们可以把 $m_a=1/2$ 的 a 粒子和 $m_b=-1/2$ 的 b 粒子构成一个态 $|a, +1/2; b, -1/2\rangle$ 。一般地讲，组合态构成一个系统，其“系统自旋”，或“总自旋”，或“总角动量” J 可以是1或者0。系统可以具有角动量的 z 分量 M ，当 $J=1$ 时， M 为+1，0或-1；当 $J=0$ 时， M 为0。用这种新的语言，我们可以把式（12.41）和（12.42）改写成表18-3所示的形式。

表18-3 两个自旋1/2粒子的角动量（ $j_a=1/2$ ， $j_b=1/2$ ）的合成

$ J=1, M=+1\rangle = a, +\frac{1}{2}; b, +\frac{1}{2}\rangle$
$ J=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a, +\frac{1}{2}; b, -\frac{1}{2}\rangle + a, -\frac{1}{2}; b, +\frac{1}{2}\rangle \right\}$
$ J=1, M=-1\rangle = a, -\frac{1}{2}; b, -\frac{1}{2}\rangle$
$ J=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a, +\frac{1}{2}; b, -\frac{1}{2}\rangle - a, -\frac{1}{2}; b, +\frac{1}{2}\rangle \right\}$

表18-3中左边那一列用总角动量 J 和 z 分量 M 描述复合态，右边那一列借助于两个粒子 a 和 b 的 m 值来表明这些态是如何构成的。

现在我们把把这个结果推广到两个具有任意自旋 j_a 和 j_b 的粒子 a 和 b 所组成的态。我们从考虑 $j_a=1/2$ 和 $j_b=1$ 开始，即从氘原子着手。在氘原子中粒子 a 是电子（ e ），粒子 b 是原子核——氘核（ d ）。于是我们有 $j_a=j_e=1/2$ ，氘核由一个质子和一个中子构成，它处于总自旋为1的态，所以 $j_b=j_d=1$ 。我们想要讨论氘的超精细结构（就像对氢所做过的那样）。因为氘核具有3种可能的态 $m_b=m_d=+1, 0, -1$ ，而电子有两个态 $m_a=m_e=+1/2, -1/2$ ，所以存在如下6种可能的态（采用记号 $|e, m_e; d, m_d\rangle$ ）：

$$\begin{aligned} & \left| e, +\frac{1}{2}; d, +1 \right\rangle, \\ & \left| e, +\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle; \left| e, -\frac{1}{2}; d, +1 \right\rangle, \\ & \left| e, +\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle; \left| e, -\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle, \\ & \left| e, -\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle. \end{aligned} \tag{18.42}$$

你会注意到，我们已将态按照 m_e 与 m_d 之和的值的递减次序分了类。

现在我们问：如果把这些态投影到不同的坐标系时会发生什么情况？如果新系统只是绕 z 轴转过 ϕ 角，则对态 $|e, m_e; d, m_d\rangle$ 乘以

$$e^{im_e\phi} e^{im_d\phi} = e^{i(m_e+m_d)\phi}. \tag{18.43}$$

（该态可以想象为乘积 $|e, m_e\rangle |d, m_d\rangle$ ，每个态矢量都独立地贡献出它自己的指数因子。）因子（18.43）为 $e^{iM\phi}$ 的形式，所以态 $|e, m_e; d, m_d\rangle$ 的角动量 z 分量等于

$$M = m_e + m_d. \quad (18.44)$$

总角动量的 z 分量是各部分角动量 z 分量之和。

所以，在式（18.42）中，第一行中的态 $M=+3/2$ ，第二行中两个态 $M=+1/2$ ，再下面一行的两个态 $M=-1/2$ ，最后一行中的态 $M=-3/2$ 。我们立即看出组合态的自旋 J （总角动量）必定有一个可能值为 $3/2$ ，这就需要 $M=+3/2, +1/2, -1/2$ 和 $-3/2$ 的4个态。

对于 $M=3/2$ ，只有一个候选者，所以我们早已知道

$$|J = \frac{3}{2}, M = +\frac{3}{2}\rangle = |e, +\frac{1}{2}; d, +1\rangle. \quad (18.45)$$

但 $|J=3/2, M=1/2\rangle$ 的态是什么呢？在式（18.42）的第二行中，有两个候选者，事实上，它们的任意线性组合也是 $M=1/2$ 。所以，一般地讲，我们必然会预期有

$$|J = \frac{3}{2}, M = +\frac{1}{2}\rangle = \alpha |e, +\frac{1}{2}; d, 0\rangle + \beta |e, -\frac{1}{2}; d, +1\rangle, \quad (18.46)$$

式中 α 和 β 是两个数，它们叫做克莱布希-戈登系数（C-G系数）。我们下一个问题是求出这些系数。

如果我们还记得氘核是由一个中子和一个质子构成的，并且利用表18-3的规则更明确地写出氘核的态，则我们就可以容易地求出这些

系数。如果我们这样做了，式（18.42）列出的态就如表18-4所示。

表18-4 氘原子的角动量态

$M = \frac{3}{2}$ $\left e, \frac{1}{2}; d, +1 \right\rangle = \left e, +\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle$
$M = \frac{1}{2}$ $\left e, +\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left e, +\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle \right\}$ $\left e, -\frac{1}{2}; d, +1 \right\rangle = \left e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle$
$M = -\frac{1}{2}$ $\left e, +\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle = \left e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle$ $\left e, -\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left e, -\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle \right\}$
$M = -\frac{3}{2}$ $\left e, -\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle = \left e, -\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle$

利用表中的态，我们想形成 $J=3/2$ 的4个态。但是我们已经知道了答案，因为表18-1中已经有3个自旋为1/2的粒子形成的自旋为3/2的态。表18-1的第一个态为 $|J=3/2, M=+3/2\rangle$ ，即 $|+++ \rangle$ 态。在我们现在所用的记号中，态 $|+++ \rangle$ 与 $|e, +1/2; n, +1/2; p, +1/2\rangle$ 或表18-4中的第一个态是相同的。但这个态也和式（18.42）中所列的第一个态相同，从而证实了式（18.45）中的陈述。换成我们现在的记号，表18-1中第二行表明：

$$\begin{aligned} \left| J = \frac{3}{2}; M = +\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left| e, +\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left| e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle + \left| e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (18.47)$$

显然根据表18-4第二格中的两式可将上式右端归并为两项，第一项取 $\sqrt{2/3}$ 倍，第二项取 $\sqrt{1/3}$ 倍，这样式（18.47）等效于

$$\left| J = \frac{3}{2}, M = +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| e, +\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| e, -\frac{1}{2}; d, 1 \right\rangle. \quad (18.48)$$

于是我们就得到式（18.46）中的C-G系数 α 和 β ：

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \beta = \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (18.49)$$

按照同样的步骤，我们可得到

$$\left| J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| e, +\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| e, -\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle. \quad (18.50)$$

当然还有

$$\left| J = \frac{3}{2}, M = -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| e, -\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle. \quad (18.51)$$

这些就是关于自旋1和自旋1/2组合构成总角动量 $J=3/2$ 的规则。我们将式（18.45）、（18.48）、（18.50）及（18.51）综合于表18-5中。

表18-5 氡原子 $J=3/2$ 的态

$\left J = \frac{3}{2}, M = +\frac{3}{2} \right\rangle = \left e, +\frac{1}{2}; d, +1 \right\rangle$
$\left J = \frac{3}{2}, M = +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left e, +\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left e, -\frac{1}{2}; d, +1 \right\rangle$
$\left J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left e, +\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left e, -\frac{1}{2}; d, 0 \right\rangle$
$\left J = \frac{3}{2}, M = -\frac{3}{2} \right\rangle = \left e, -\frac{1}{2}; d, -1 \right\rangle$

然而，我们这里只有4个态，我们所考虑的系统却有6种可能的态。关于式（18.42）中第二行的两个态，我们只用了一种线性组合去形成态 $|J=3/2, M=+1/2\rangle$ ，还存在与它正交的另一种线性组合，这种组合态也具有 $M=+1/2$ ，即

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|e, +\frac{1}{2}; d, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|e, -\frac{1}{2}; d, +1\rangle. \quad (18.52)$$

同样，式（18.42）中第三行的两个态也可以组合成两个正交的态，每个态具有 $M=-1/2$ 。与式（18.52）正交的一个态为

$$\sqrt{\frac{2}{3}}|e, +\frac{1}{2}; d, -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|e, -\frac{1}{2}; d, 0\rangle. \quad (18.53)$$

它们就是剩下的两个态，其 $M=m_e+m_d=\pm 1/2$ ；而且必定是对应于 $J=1/2$ 的两个态。所以我们得到

$$\begin{aligned} |J=\frac{1}{2}, M=+\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|e, +\frac{1}{2}; d, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|e, -\frac{1}{2}; d, +1\rangle, \\ |J=\frac{1}{2}, M=-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|e, +\frac{1}{2}; d, -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|e, -\frac{1}{2}; d, 0\rangle. \end{aligned} \quad (18.54)$$

利用表18-4，将氘的各部分用质子和中子的态写出来，我们就可以证明上述两个态确实表现得像一个自旋1/2粒子的态。式（18.53）中第一个态是

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{1}{6}}\left\{|e, +\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2}\rangle + |e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2}\rangle\right\} \\ &- \sqrt{\frac{2}{3}}|e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned} \quad (18.55)$$

它也可写成

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \left| e, +\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle \right\} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \left| e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle - \left| e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle \right\} \right]. \end{aligned} \quad (18.56)$$

现在看一下第一个花括号内的项。设想把e和p放在一起。它们共同形成一个自旋零态（见表18-3末行），对角动量没有贡献。剩下的只有中子，所以在转动时式（18.54）中的第一个花括号整体的行为就像一个中子，也就是说像一个 $J=1/2$ ， $M=+1/2$ 的态一样。根据同样的论证，我们看到在式（18.56）的第二个花括号中，电子和中子结合产生了角动量为零的态，只剩下质子的贡献—— $m_p=1/2$ 。该括号内的项就像一个 $J=1/2$ 、 $M=+1/2$ 的粒子一样。所以（18.56）整个表式的变换就像 $|J=+1/2, M=+1/2\rangle$ 的态一样，这正是我们所预期的结果。与式（18.53）相对应的 $M=-1/2$ 的态，可以通过将上式中原来的 $+1/2$ 改为 $-1/2$ 而写成下式

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \left| e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| e, -\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, +\frac{1}{2} \right\rangle \right\} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \left| e, +\frac{1}{2}; n, -\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| e, -\frac{1}{2}; n, +\frac{1}{2}; p, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\} \right]. \end{aligned} \quad (18.57)$$

你可以很容易地证明上式就等于式（18.54）中的第二行，如果那两项是一个自旋1/2系统的两个态，则它就是预期的。所以我们的结果得到了证实。一个氦核和一个电子可以有6个自旋态之中，其中4个态与自

旋3/2粒子的态相像（表18- 5），而另两个态与自旋1/2粒子的态式（18.54）相同。

表18-5和式（18.54）的结果是利用氘核由一个中子和一个质子构成这一事实得到的。这些式子的真实性与那种特殊情况无关。把任何自旋1粒子与任何自旋1/2粒子放在一起，其合成法则（以及系数）都相同。表18-5中的那组公式表示，相对转动的坐标系——例如绕y轴转动，从而自旋1/2粒子和自旋1粒子的态按照表18-1和18-2变化，则对于自旋3/2粒子，表中右边的项的线性组合将以适当的方式改变。在同样的转动下，式（18.54）表示的态将像自旋1/2粒子的态那样变化。其结果仅取决于原来两个粒子的自转性质（即自旋态），而与其角动量的起因一点也没有关系。我们仅利用了这个事实，通过选择一个特殊情况来求出这些公式，在这特殊情况中，其中一个组成部分本身就是由处于对称态的两个自旋1/2粒子构成的。我们把所有的结果一起列在表18-6中，同时把记号“e”和“d”改成“a”和“b”，以强调结论的普遍性。

表18-6 一个自旋1/2粒子（ $j_a=1/2$ ）和一个自旋1粒子（ $j_b=1$ ）的合成

$\left J = \frac{3}{2}, M = +\frac{3}{2} \right\rangle = \left a, +\frac{1}{2}; b, +1 \right\rangle$ $\left J = \frac{3}{2}, M = +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left a, +\frac{1}{2}; b, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left a, -\frac{1}{2}; b, +1 \right\rangle$ $\left J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left a, +\frac{1}{2}; b, -1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left a, -\frac{1}{2}; b, 0 \right\rangle$ $\left J = \frac{3}{2}, M = -\frac{3}{2} \right\rangle = \left a, -\frac{1}{2}; b, -1 \right\rangle$
$\left J = \frac{1}{2}, M = +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left a, +\frac{1}{2}; b, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left a, -\frac{1}{2}; b, +1 \right\rangle$ $\left J = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left a, +\frac{1}{2}; b, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left a, -\frac{1}{2}; b, 0 \right\rangle$

假定我们有这样一个一般问题，就是求由两个任意自旋的粒子组成之系统的态。譬如一个粒子为 j_a （所以其 z 分量 m_a 有从 $-j_a$ 到 j_a 的 $2j_a+1$ 个值），另一个粒子为 j_b （ z 分量 m_b 有从 $-j_b$ 到 j_b 的 $2j_b+1$ 个值）。它们的组合态为 $|a, m_a; b, m_b\rangle$ ，而且有 $(2j_a+1) \cdot (2j_b+1)$ 个不同的态。那么我们可以得到总自旋为 J 的什么样的态呢？

角动量的总 z 分量 M 等于 m_a+m_b ，而且各态总可以按照 M 的次序排列〔如式（18.42）〕。最大的 M 只有一个，它对应于 $m_a=j_a$ 和 $m_b=j_b$ ，所以最大的 M 就是 j_a+j_b 。这就意味着最大的总自旋 J 也等于和 j_a+j_b ：

$$J = (M)_{\max} = j_a + j_b.$$

对于小于 $(M)_{\max}$ 的第一个 M 值，存在两个态（ m_a 或者 m_b 比它的最大值小一个单位）。其中一个态必定贡献属于 $J=j_a+j_b$ 相对应的一组态，余下的一个态则属于与 $J=j_a+j_b-1$ 相对应的一组新态。再下一个 M 值（表中从上向下数第3个）可以有3种方法得出（从 $m_a=j_a-2$ ，有 $m_b=j_b$ ； $m_a=j_a-1$ ， $m_b=j_b-1$ ；以及 $m_a=j_a$ ， $m_b=j_b-2$ ），其中两个属于上面已经提及的那些组，第3个告诉我们还必须把 $J=j_a+j_b-2$ 的各个态包括进去。这种论证一直继续到在我们的表中不再能由进一步减小这些 m 中的一个来获得新态为止。

设 j_b 是 j_a 和 j_b 中较小的一个（如果它们相等，则任取一个），那么需要的只有 $2j_b+1$ 个 J 值（从 j_a+j_b 整数级变化到 j_a-j_b 。这就是

说，当两个自旋为 j_a 和 j_b 的粒子组合时，系统的总角动量 J 可以等于下列值中的任何一个

$$J = \begin{cases} j_a + j_b \\ j_a + j_b - 1 \\ j_a + j_b - 2 \\ \vdots \\ |j_a - j_b| \end{cases} \quad (18.58)$$

（写作 $|j_a - j_b|$ 而不写 $j_a - j_b$ ，由此我们可以避免 $j_a \geq j_b$ 这个附加条件。）

对每个 J 值，有 $2J+1$ 个不同 M 值的态， M 从 $+J$ 变到 $-J$ 。每一个这种态都是由具有适当因子的原来的态 $|a, m_a; b, m_b\rangle$ 线性组合而成，这些因子就是关于每个项的C-G系数。我们可以把这些系数看作是态 $|j_a, m_a; j_b, m_b\rangle$ 在态 $|J, M\rangle$ 中所占有的“数量”。所以每个C-G系数都有6个指标来确定它在表18-3和18-6之类的公式中的位置。这就是说，把这些系数称为 $C(J, M; j_a, m_a; j_b, m_b)$ 。我们可以把表18-6中第二行的等式写成

$$C\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 1, 0\right) = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$C\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

我们在这里不去计算任何其他特殊情况下的这些系数^[9]。但是，你们可以在许多书中找到一些表。你可能想亲自试一试其他的特殊情况。接下来要做的应是两个自旋1粒子的合成，我们只把最后的结果列于表18-7中。

表18-7 两个自旋1粒子 ($j_a=1, j_b=1$) 的合成

$ J=2, M=+2\rangle = a, +1; b, +1\rangle$ $ J=2, M=+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a, +1; b, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} a, 0; b, +1\rangle$ $ J=2, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} a, +1; b, -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} a, -1; b, +1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}} a, 0; b, 0\rangle$ $ J=2, M=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a, 0; b, -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} a, -1; b, 0\rangle$ $ J=2, M=-2\rangle = a, -1; b, -1\rangle$
$ J=1, M=+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a, +1; b, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} a, 0; b, +1\rangle$ $ J=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a, +1; b, -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} a, -1; b, +1\rangle$ $ J=1, M=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a, 0; b, -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} a, -1; b, 0\rangle$
$ J=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [a, +1; b, -1\rangle + a, -1; b, +1\rangle - a, 0; b, 0\rangle]$

这些角动量的合成法则在粒子物理学中非常重要，它们有数不清的应用。遗憾的是，我们没有时间来考虑更多的例子。

§18-7 附注1：转动矩阵的推导

[10]

对那些想知道细节的人，我们在这里算出具有自旋（总角动量）为 j 的系统的一般转动矩阵。实在说，算出一般情况下的矩阵并不很重要。一旦你有了概念，你就可以在许多书中的表格里面找到一般的结果。另一方面，在学到这种课程后，你也许喜欢看到你甚至的确能够理解诸如式（18.35）这种很复杂的描述角动量的量子力学公式。

我们将§18-4中的论证推广到具有自旋 j 的系统上去，我们把该系统看作由 $2j$ 个自旋 $1/2$ 粒子组成。 $m=j$ 的态是 $|+++...+\rangle$ (j 个正号)。对于 $m=j-1$ 的情况，将有 $2j$ 个像 $|++...+-\rangle$ 、 $|++...+-\rangle$ 等这样的项。让我们来考虑具有 r 个正号和 s 个负号 ($r+s=2j$) 这种一般的情况。在绕 z 轴转动的情况下， r 个正号的每个贡献一个 $e^{i\phi/2}$ 。结果是相位改变了 $i(r/2-s/2)\phi$ 。可见

$$m = \frac{r-s}{2}, \quad (18.59)$$

正像 $J=3/2$ 的情形那样，每个具有确定 m 值的态，必定是所有具有同样 r 和 s 的态（即与 r 个正号和 s 个负号的各种可能排列相对应的态）以正号的线性组合。我们假定你们能够算出共有 $(r+s)!/r!s!$ 个这样的排列。为使各个态都归一化，我们必须将所得之和除以个数的平方根。我们可以写成

$$\left[\frac{(r+s)!}{r!s!} \right]^{-\frac{1}{2}} \{ | \underbrace{+++ \cdots +}_r \underbrace{--- \cdots -}_s \rangle + (\text{所有正负号次序的重新排列}) \} = | j, m \rangle, \quad (18.60)$$

式中

$$j = \frac{r+s}{2}, \quad m = \frac{r-s}{2}, \quad (18.61)$$

如果我们现在用另一种记号，则会有助于我们的工作。一旦我们用式（18.60）定义了该态， r 和 s 这两个数就完全同 j 和 m 一样定义一个态，如果我们写作

$$| j, m \rangle = \left| \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\rangle, \quad (18.62)$$

则有助于我们掌握有关的线索。这里，利用等式（18.61），有

$$r = j + m, \quad s = j - m.$$

其次，我们希望用新的特殊的记号把式（18.60）写成

$$| j, m \rangle = \left| \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\rangle = \left[\frac{(r+s)!}{r!s!} \right]^{+\frac{1}{2}} \cdot \{ | + \rangle^r | - \rangle^s \} \text{排列}. \quad (18.63)$$

注意，我们已把前面因子的指数改成 $+\frac{1}{2}$ 了。我们这样做是因为在花括号内正好有 $N = \frac{(r+s)!}{r!s!}$ 个项。比较式（18.63）和式（18.60），显然

$\{ |+\rangle^r |-\rangle^s \}$ 排列

就是下式的一个缩写

$$\frac{\{|++\cdots--\rangle + \text{所有的重新排列}\}}{N}.$$

式中 N 是括号内不同项的数目。这种记号之所以方便的道理在于，我们每进行一次转动，所有的正号贡献相同的因子，所以我们得到这个因子的 r 次幂。同样，不管各项排列的次序如何， s 个负号项总共贡献 s 次幂的因子。

现在假定我们把系统绕 y 轴转过 θ 角，我们想求的是 $R_y(\theta) \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix}$ 。当 $R_y(\theta)$ 作用在每一个 $|+\rangle$ 时，得到

$$R_y(\theta) |+\rangle = |+\rangle C + |-\rangle S, \quad (18.64)$$

式中 $C = \cos \frac{\theta}{2}$, $S = -\sin \frac{\theta}{2}$ 。当 $R_y(\theta)$ 作用于每一个 $|-\rangle$ 时，给出

$$R_y(\theta) |-\rangle = |-\rangle C - |+\rangle S.$$

所以我们所要求的是

$$\begin{aligned} R_y(\theta) \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix} &= \left[\frac{(r+s)!}{r!s!} \right]^{\frac{1}{2}} R_y(\theta) \{ |+\rangle^r |-\rangle^s \}_{\text{排列}} = \left[\frac{(r+s)!}{r!s!} \right]^{\frac{1}{2}} \{ (R_y(\theta) |+\rangle)^r \cdot (R_y(\theta) |-\rangle)^s \}_{\text{排列}} \\ &= \left[\frac{(r+s)!}{r!s!} \right]^{\frac{1}{2}} \{ (|+\rangle C + |-\rangle S)^r \cdot (|-\rangle C - |+\rangle S)^s \}_{\text{排列}}. \end{aligned} \quad (18.65)$$

现在每个二项式都必须展开至适当的幂次，并将这两个表式乘在一起。这样将出现 $|+\rangle$ 的从0到 $(r+s)$ 所有幂次的项。我们来看一下所有 $|+\rangle$ 的 r' 次幂的项。他们出现时总是同 $|-\rangle$ 的 s' 次幂项($s' = 2j - r'$)相乘。假定我们把所有这些项集中起来，对一种排列而言，它们有某

个包含二项式展开因子以及因子 C 和 S 的数字系数。假定我们把系数称为因子 $A_{r'}$ ，则式(18.65)等同于

$$R_y(\theta) \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix} = \sum_{r'=0}^{r+s} |A_{r'}| + \rangle^{r'} \cdot | - \rangle^{s'} \text{ 排列}, \quad (18.66)$$

现在以因子 $[(r'+s')!/r'!s'!]^{1/2}$ 除 $A_{r'}$ ，并称其商为 $B_{r'}$ 。式(18.66)就等于

$$R_y(\theta) \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix} = \sum_{r'=0}^{r+s} B_{r'} \left[\frac{(r'+s')!}{r'!s'!} \right]^{\frac{1}{2}} | + \rangle^{r'} \cdot | - \rangle^{s'} \text{ 排列}, \quad (18.67)$$

(我们说，此式定义了 $B_{r'}$ ，条件是只要式(18.67)给出与(18.65)中相同的表式。)

由 $B_{r'}$ 的这个定义，式(18.67)右边剩下的因子正好就是态 $\begin{vmatrix} r' \\ s' \end{vmatrix}$ ，所以我们有

$$R_y(\theta) \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix} = \sum_{r'=0}^{r+s} B_{r'} \begin{vmatrix} r' \\ s' \end{vmatrix}, \quad (18.68)$$

其中 s' 总是等于 $r+s-r'$ 。当然，这意味着系数 $B_{r'}$ 就是我们所要求的矩阵元。即

$$\left\langle \begin{vmatrix} r' \\ s' \end{vmatrix} \right| R_y(\theta) \left| \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix} \right\rangle = B_{r'}. \quad (18.69)$$

现在我们只需要完成代数运算来得出各个 $B_{r'}$ 。比较式(18.63)和(18.67)——并记住 $r'+s'=r+s$ ——我们看到 $B_{r'}$ 就是下式中 $a^{r'}b^{s'}$ 的系数

$$\left(\frac{r'!s'!}{r!s!} \right)^{\frac{1}{2}} (aC + bS)^r (bC - aS)^s. \quad (18.70)$$

剩下的繁琐工作是将上式依二项式定理展开，并把 a 和 b 的给定幂次的项集中起来，如果你把它全部计算出来，你就得到式(18.70)中 $a^{r'}b^{s'}$ 的系数为

$$\left(\frac{r'!s'!}{r!s!}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_k (-1)^k S^{r-r'+2k} C^{s+r'-2k} \cdot \frac{r!}{(r-r'+k)!(r'-k)!} \cdot \frac{s!}{(s-k)!k!}. \quad (18.71)$$

求和遍及所有使阶乘中的项等于或大于0的整数 k 值。于是这个表示式就是我们要求的矩阵元。

最后利用

$$r = j + m, \quad r' = j + m', \quad s = j - m, \quad s' = j - m',$$

我们可以回到原来用 j ， m 和 m' 表示的记号。作此代换，我们得到§18-4中的式（18.34）。

§18-8 附注2：光子发射中的宇称守恒

在本章§18-1中，我们曾考虑过原子从自旋1的激发态跃进到自旋0的基态时光的发射。如果激发态具有朝上的自旋（ $m=+1$ ），它能沿 $+z$ 轴发射一个RHC光子，或沿 $-z$ 轴发射一个LHC光子。我们称此光子的两种状态为 $|R_{\text{向上}}\rangle$ 及 $|L_{\text{向下}}\rangle$ ，这些态没有一个具有确定的宇称。设 $\hat{P}$ 为宇称算符， $\hat{P}|R_{\text{向上}}\rangle = |L_{\text{向下}}\rangle$ ， $\hat{P}|L_{\text{向下}}\rangle = |R_{\text{向上}}\rangle$ 。

那么我们以前关于处在确定能量状态的原子，必定具有确定的宇称，以及在原子的过程中宇称是守恒的证明又怎样了呢？是否这个问题中的终态（发射一个光子后的态）必须要有确定的宇称呢？如果我们考虑的整个终态，它包含向所有角度发射光子的振幅，那确实如此。在§18-1中，我们所考虑的只是整个终态的一个部分而已。

如果我们希望能只查看那些确实具有确定宇称的终态，例如，考虑终态 $|\psi F\rangle$ ，它具有某个振幅 α 沿 $+z$ 轴发射RHC光子以及某个振幅 β 沿 $-z$ 轴发射LHC光子，我们可以写为

$$|\psi_F\rangle = \alpha |R_{\text{向上}}\rangle + \beta |L_{\text{向下}}\rangle, \quad (18.72)$$

对这个态作宇称操作，给出

$$\hat{P} |\psi_F\rangle = \alpha |L_{\text{向下}}\rangle + \beta |R_{\text{向上}}\rangle. \quad (18.73)$$

若 $\beta = \alpha$ 或 $\beta = -\alpha$ ，则该态就是 $\pm |\psi_F\rangle$ ，所以具有偶宇称的终态是

$$|\psi_F^+\rangle = \alpha (|R_{\text{向上}}\rangle + |L_{\text{向下}}\rangle), \quad (18.74)$$

而具有奇宇称的终态是

$$|\psi_F^-\rangle = \alpha (|R_{\text{向上}}\rangle - |L_{\text{向下}}\rangle). \quad (18.75)$$

接下来我们要考虑从奇宇称的激发态到偶宇称的基态的衰变。如果宇称确定守恒，则光子的终态必定具有奇宇称，它必定是式(18.75)表示的态。如果发现 $|R_{\text{向上}}\rangle$ 的振幅是 α ，则发现 $|L_{\text{向下}}\rangle$ 的振幅为 $-\alpha$ 。

现在注意当我们绕y轴转动 180° 时会发生什么情况。原子的初始激发态变为一个 $m = -1$ 的态（根据表17-2态不改变符号）。终态的转动给出

$$R_y(180^\circ) |\psi_F^-\rangle = \alpha (|R_{\text{向下}}\rangle - |L_{\text{向上}}\rangle), \quad (18.76)$$

将此式与式(18.75)相比较，你会发现：对于假设的终态宇称而言，从 $m = -1$ 的初态得到一个沿-z轴的LHC光子的振幅，与从 $m = +1$ 的初态得到一个RHC光子的振幅相差一个负号。这就同我们在§18-1中所得到的结果相一致。

[1] 当我们把 x, y, z 变成 $-x, -y, -z$ 时，你可能认为所有矢量都反了向。对于像位移和速度这样的极矢量，这是对的，但对于像角动量或任意由两个极矢量叉乘所得的轴矢量来说，这就不对了。轴矢量在反演后有相同的分量。

[2] 你们有些人可能会根据我们所考虑的终态没有确定的宇称，而反对我们刚才所做的论证。在本章末的附注2中，你将找到另一个你可能比较满意的证明。

[3] 今天在对世界的较深的了解中，我们还没有一种容易的方法，以区分光子的能量是否比电子的能量具有较少的物质性，因为正如你们所知道的，所有粒子的行为非常相似，唯一的区别是光子的静止质量为零。

[4] 注意，我们总是分析在粒子运动方向的角动量，如果要问及关于任何其他轴的角动量，那我们就要考虑到有“轨道”角动量——来自 $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ 项。例如，我们不能说光子正好是从电子偶素中心离去的，它们可能会像从旋转的车轮边缘抛射出去的两个物体那样离去。但是当我们把轴取在运动方向上时，我们就不必担心这种可能性了。

[5] 我们还没有将我们的振幅归一化，或乘上衰变成任一特殊终态的振幅，但是我们可以知道这个结果是正确的，因为当我们考察另一种选择时，我们得到的概率为零（参见式18.23）。

[6] 也可参见本卷第一章。

[7] 你如想知道细节，可以参看本章的附录。

[8] 我们可以忽略在第一次碰撞中 Ne^{20*} 得到的反冲，或者更好的是我们把它计算出来并作出修正。

[9] 由于我们有了一般的转动矩阵式（18.35），大部分工作已经完成了。

[10] 这篇附录的材料最初包括在本讲义的正文里，我们现在觉得没有必要把这种对于一般情况的详细处理方法包括进去。

第19章 氢原子与周期表

§19-1 氢原子的薛定谔方程

在量子力学的历史上，最引人注目的成就是：对一些简单原子的光谱细节的认识，以及对化学元素表中发现的周期性的认识。在这一章中，我们的量子力学终于讲到这些重要的成就，特别是对氢原子光谱的解释。同时我们将对化学元素的神秘性质作出定性解释。我们将通过详细研究氢原子中电子的行为来做这些——这是我们第一次根据第16章所建立的概念详细地计算（振幅）在空间的分布。

为了完整地描述氢原子，我们必须描述质子和电子两者的运动。在量子力学中，也可以像经典力学那样，把每个粒子的运动描述为相对质心的运动。但我们不这样做。我们将只讨论这样一种近似情况，就是认为质子非常重，从而可把它看作固定在原子的中心。

我们还将作另一个近似，就是不考虑电子具有自旋以及不应用相对论力学规律来描述。因为我们采用非相对论性的薛定谔方程并且忽略磁效应，所以对于我们这样的处理，需要作一些小的修正。小的磁效应之所以存在是因为从电子的观点来看，质子是一个环流电荷，它产生一个磁场。在磁场中，自旋朝上的电子和自旋朝下的电子具有不同的能量。原子能量将相对于我们这里所算得的值稍有移动。我们忽略这一小的能量移动。此外，我们还得想象电子犹如一个陀螺仪在空间运动，始终保持相同的自旋方向。因为我们考虑的是一个在空间的

自由原子，所以其总角动量守恒。在我们所作的近似中，我们将假定电子自旋角动量保持恒定不变，因此其他一切原子角动量——通常所谓的“轨道”角动量——也守恒。作为一个很好的近似，电子在氢原子中像一个没有自旋的粒子那样运动——运动的角动量是一个常数。

由这些近似，在空间不同地点找到电子的振幅可以用一个空间位置 and 时间的函数来表示。设 $\psi(x, y, z, t)$ 为时刻 t 在某处找到电子的振幅。根据量子力学，这振幅随时间的变化率由哈密顿算符作用于同一函数上给出，由第16章，

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \psi, \quad (19.1)$$

而

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}). \quad (19.2)$$

式中 m 为电子质量， $V(\mathbf{r})$ 为电子在质子静电场中的势能。当电子距离质子很远时取 $V=0$ ，我们可以写出 [\[1\]](#)

$$V = -\frac{e^2}{r}.$$

波函数 ψ 必满足方程式

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi. \quad (19.3)$$

我们要求具有确定能量的状态，所以试图得到具有下述形式的解

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\hbar^{-1}Et} \cdot \psi(\mathbf{r}). \quad (19.4)$$

于是函数 $\psi(\mathbf{r})$ 必是下面方程之解：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \psi, \quad (19.5)$$

式中 E 是某个常数——原子的能量。

由于势能项只与半径有关，所以在极坐标中解这个方程比在直角坐标中简便得多。在直角坐标中拉普拉斯算符由下式定义

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

我们想改用图19-1所表示的坐标 r, θ, ϕ ，它们与坐标 x, y, z 之间的关系为

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta.$$

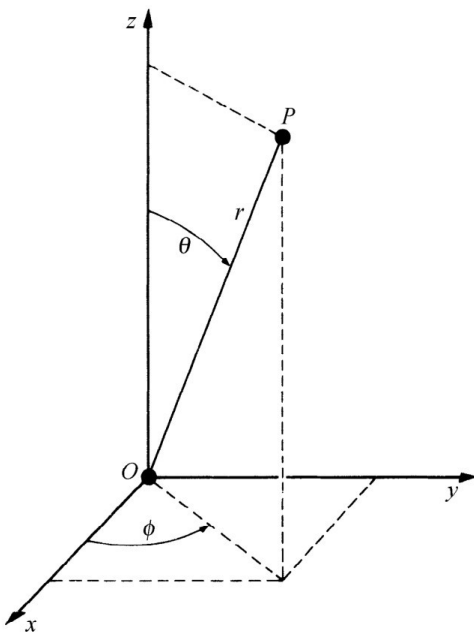


图19-1 点 P 的球极坐标 r ， θ ， ϕ

代数计算甚为冗长，但最后你可以证明对任意函数 $f(\mathbf{r}) = f(r, \theta, \phi)$ ，

$$\nabla^2 f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (19.6)$$

所以用极坐标， $\psi(r, \theta, \phi)$ 所要满足的方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right\} = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi. \quad (19.7)$$

§19-2 球对称解

让我们首先设法找出一些非常简单的函数，它们满足令人讨厌的方程式(19.7)。虽然一般说来，波函数 ψ 不仅与半径 r 有关，而且与角度 θ ， ϕ 有关，但是，我们可以看一下是否可能存在一种特殊情况，这时 ψ 与角度无关。对于与角度无关的波函数，如果你转动坐标系，振幅一点也不会改变。这就意味着角动量的所有分量为零。这样的 ψ 必定与总角动量为零的态相对应。（实际上，只是轨道角动量为零，因为电子仍有自旋，但我们忽略这部分角动量。）轨道角动量为零的状态有其特定名称，称为“ s 态”——你可以记住“ s 是（英文）球对称”的第一个字母^[2]。

现在如果 ψ 将不依赖于 θ 和 ϕ ，那么整个拉普拉斯算符只包含第一项，方程式(19.7)大为简化：

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\psi) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi. \quad (19.8)$$

在开始解这类方程之前，最好作某种标度变换，以除去多余的常数如 e^2 、 m 和 $\hbar$ 。这样，代数运算就较为简单。若我们作如下的代换：

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} \rho, \quad (19.9)$$

及

$$E = \frac{me^4}{2\hbar^2} \epsilon, \quad (19.10)$$

则式（19.8）变为（两边乘以 ρ 后）

$$\frac{d^2(\rho\psi)}{d\rho^2} = -\left(\epsilon + \frac{2}{\rho}\right)\rho\psi. \quad (19.11)$$

这些标度变换意味着，我们以“自然”原子单位的倍数来量度距离 r 及能量 E 。这就是 $\rho = r/r_B$ ，这里 $r_B = \hbar^2/me^2$ 称为“玻尔半径”，约为 $0.528 \text{ \AA}$ （ $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ ）。同样， $\epsilon = E/E_R$ ，其中 $E_R = me^4/2\hbar^2$ ，此能量称为“里德伯”能量，约为 13.6 eV 。

既然方程两边都有乘积 $\rho\psi$ ，那么计算 $\rho\psi$ 要比计算 ψ 本身来得方便。设

$$\rho\psi = f, \quad (19.12)$$

则我们得到形式上更为简单的方程

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} = -\left(\epsilon + \frac{2}{\rho}\right)f. \quad (19.13)$$

现在我们必须找到某个函数 f ，使它满足方程（19.13），——换句话说，我们必须解一个微分方程。遗憾的是，没有一个很有用的解任何微分方程的一般方法。你只能浪费时间。我们的方程并不容易解，但人们发现可以用下面的步骤来求解。首先，用两个函数的乘积来代替 f （它是 ρ 的某一函数），

$$f(\rho) = e^{-\alpha\rho} \cdot g(\rho). \quad (19.14)$$

这只是意味着从 $f(\rho)$ 中分解出因子 $e^{-\alpha\rho}$ 。无疑对任何函数 $f(\rho)$ 总可以这样做，这就是把我们的问题变为寻找恰当的函数 $g(\rho)$ 。

将式（19.14）代入式（19.13），我们得到下列关于 g 的方程

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} - 2\alpha \frac{dg}{d\rho} + \left(\frac{2}{\rho} + \epsilon + \alpha^2\right)g = 0. \quad (19.15)$$

因 α 可自由选取，所以可设

$$\alpha^2 = -\epsilon, \quad (19.16)$$

于是得到

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} - 2\alpha \frac{dg}{d\rho} + \frac{2}{\rho}g = 0. \quad (19.17)$$

你们可能认为这个方程并不比式（19.13）更好对付，但令人高兴的是新方程很容易用 ρ 的幂级数解出来。（原则上方程式（19.13）也

可以这样解，但要困难得多。）我们讲式（19.17）能为某个 $g(\rho)$ 所满足， $g(\rho)$ 可以写成下列级数：

$$g(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k, \quad (19.18)$$

式中的 a_k 是常系数。现在我们所要做的就是找出一组无限多个合适的系数！让我们来验证一下这样的解是可行的。 $g(\rho)$ 的一级微商为

$$\frac{dg}{d\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \rho^{k-1},$$

二级微商为

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(k-1) \rho^{k-2}.$$

把这些表示式用于式（19.17），得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) a_k \rho^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k a_{k+1} \rho^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k \rho^{k-1} = 0. \quad (19.19)$$

显然还看不出我们已经成功了，我们还得一步一步算下去。如果我们用一个等式来代替第一个求和项，情况会显得好些。既然这个求和中的第一项为零，我们可以将各个 k 换成 $k+1$ 而丝毫不影响这一无限级数，这样改换后，第一个求和完全可以写成

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} \rho^{k-1},$$

现在我们可以把所有的求和放在一起，得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)ka_{k+1} - 2\alpha ka_k + 2a_k] \rho^{k-1} = 0. \quad (19.20)$$

这一级数必须对所有可能的 ρ 值都为零。这只有当 ρ 的各次幂的系数分别为零时才可能。如果对所有的 $k \geq 1$ 我们能找到满足下述方程的一组 a_k ,

$$(k+1)ka_{k+1} - 2(\alpha k - 1)a_k = 0. \quad (19.21)$$

则我们将得到氢原子的解。这很容易办到。取任意 a_1 ，于是由下式产生所有其他系数

$$a_{k+1} = \frac{2(\alpha k - 1)}{k(k+1)} a_k. \quad (19.22)$$

由此式你将得出 a_2, a_3, a_4 等，每一对当然都满足式(19.21)，我们得到了一个满足式(19.17)的级数 $g(\rho)$ 。我们可以用它构成满足薛定谔方程的 ψ 。注意，这个解取决于设定的能量（由 α 表示），但对每个 ϵ 值，都有一个相应的级数。

虽然我们有了解，但它在物理上代表什么呢？通过观察远离质子（大的 ρ 值）处发生的情况，我们可以得到一些概念。在远处，级数中的高次项最为重要，所以我们应看一下对于大的 k 会出现什么情况。当 $k \gg 1$ 时，等式(19.22)近似地为

$$a_{k+1} = \frac{2\alpha}{k} a_k,$$

这意味着

$$a_{k+1} \approx \frac{(2\alpha)^k}{k!} a_1^* , \quad (19.23)$$

* 原文少 a_1 。——译者注

但这些数只是 $e^{+2\alpha\rho}$ 的级数展式中的系数。函数 g 是一个迅速增加的指数函数。即使将它与 $e^{-\alpha\rho}$ 结合以得出 $f(\rho)$ ——参看式 (19.14) ——当 ρ 大时，它给出的 $f(\rho)$ 的解仍像 $e^{\alpha\rho}$ 那样。我们找到了一个数学上的解，但它并不是一个物理解。这个解相当于电子靠近质子的可能非常小的情况！在半径 ρ 很大的地方更可能找到电子。而我们知道，当 ρ 大时束缚电子的波函数必须趋于零。

我们必须考虑是否有解决此问题的方法。有的。就是观察！如果碰巧 α 等于 $1/n$ ，这里 n 是任意整数，则式 (19.22) 将使得 $a_{n+1}=0$ 。所有更高的项也将为零。我们就不再有一个无限级数，而是一个有限的多项式。因任何多项式均比 $e^{\alpha\rho}$ 增加得慢，所以项 $e^{-\alpha\rho}$ 终将迫使 f 下降，当 ρ 大时函数 f 将为零。只有当 $\alpha=1/n$ ， $n=1, 2, 3, 4$ 等等时，才有束缚态的解。

回顾式 (19.16)，我们看到对于球对称的波动方程，只有当

$$-\epsilon = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

时，才能存在束缚态解。允许的能量就是这些分数乘以里德伯常数 $E_R = me^4/2\hbar^2$ ，或者说第 n 个能级的能量是

$$E_n = -E_R \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (19.24)$$

顺便指出，对于能量为负值并不难理解。能量之所以为负，是由于当我们选定把势能写成 $V=-e^2/r$ 时，我们把电子在远离质子处的能量取作能量的零点。当电子靠近质子时，它的能量减少，所以在零以下。当 $n=1$ 时能量最小（最负），它随 n 增加而增至零。

在量子力学发现以前，从氢原子光谱的实验研究得知氢原子的能级可以用式（19.24）来表示，从观察得出的 E_R 约为13.6 eV。于是玻尔设计了一个（原子）模型，该模型给出了同样的方程，并且预言 E_R 应为 $me^4/2\hbar^2$ ，而薛定谔理论能从电子运动的基本方程重新得到了这个结果，这是该理论的第一个巨大成就。

现在我们已经解出了第一个原子，让我们看看所得到的解的性质。把各部分合在一起，每一个解都像这样：

$$\psi_n = \frac{f_n(\rho)}{\rho} = \frac{e^{-\rho'^n}}{\rho} g_n(\rho), \quad (19.25)$$

式中

$$g_n(\rho) = \sum_{k=1}^n a_k \rho^k, \quad (19.26)$$

并且

$$a_{k+1} = \frac{2\left(\frac{k}{n} - 1\right)}{k(k+1)} a_k. \quad (19.27)$$

只要我们关心的主要是在不同位置找到电子的相对概率，那么对 a_1 可取我们想要的任何数值。我们也可令 $a_1=1$ 。（人们经常选取 a_1 以使

波函数“归一化”，使得在原子内部任何地方找到电子的概率总和等于1。目前我们没有必要去这样做。）

就最低的能量状态而言， $n=1$ ，并且

$$\psi_1(\rho) = e^{-\rho}. \quad (19.28)$$

对于处在基态（最低能量的状态）的氢原子，在任意位置找到电子的振幅随电子离开质子的距离作指数式下降。电子在质子所在处最容易被发现，其特征扩展距离大约为1个 ρ 的单位，或约为一个玻尔半径 r_B 。

。

取 $n=2$ 得到下一个较高的能级。这个状态的波函数有两项，它为

$$\psi_2(\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad (19.29)$$

再下一个能级的波函数为

$$\psi_3(\rho) = \left(1 - \frac{2\rho}{3} + \frac{2}{27} \rho^2\right) e^{-\frac{\rho}{3}}. \quad (19.30)$$

图19-2中画出了前3个能级的波函数。你们可以看出总的趋势。所有的波函数在 ρ 大时都振动几次后就很快趋近于零。事实上，“凹凸”的数目正好等于 n ——如果你愿意的话也可说 ψ_n 通过零点的次数为 $n-1$ 。

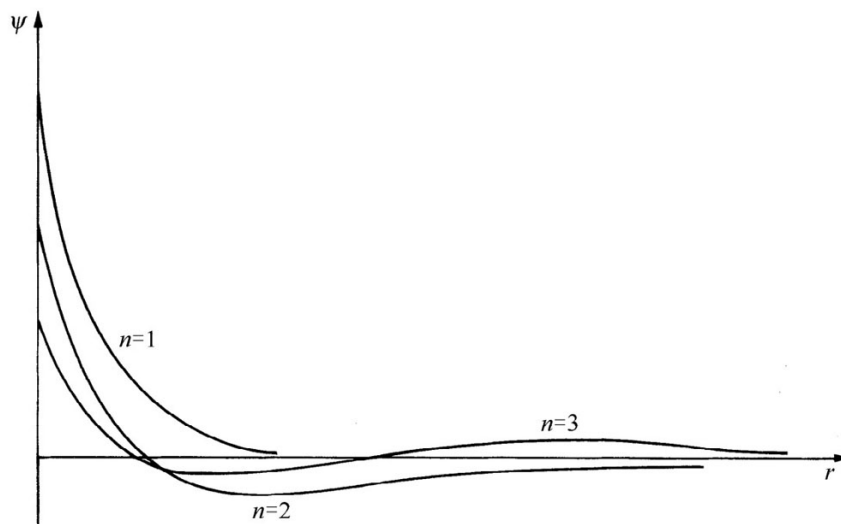


图19-2 氢原子前3个 $l=0$ 的态的波函数（标度的选择使总概率相等）

§19-3 具有角度依赖关系的状态

对 $\psi_n(r)$ 所描写的状态，我们发现找到电子的概率幅是球对称的——只取决于电子到质子的距离 r 。这些状态的轨道角动量为零。现在我们应该查问一下可能与某些角度有依赖关系的状态。

如果愿意，我们可以直接研究怎样去求满足微分方程式（19.7）的、以 r ， θ 和 ϕ 为变量的函数这一严格的数学问题——加上附加的物理条件，唯一可接受的函数是当 r 大时趋于零的函数。你们将发现在许多书中都是这样处理的。利用我们已有的关于振幅如何依赖于空间角度的知识，我们打算采取一条捷径。

处于任一特定状态的氢原子，是一个具有确定“自旋” j 的粒子， j 是总角动量量子数。该“自旋”的一部分来自电子的固有自旋，另一部分来自电子的运动。因为这两部分独立地起作用（作为一个很好的近似），所以我们仍将不理自旋部分而只考虑“轨道”角动量。然而这种

轨道运动的行为很像自旋。例如，若轨道量子数为 l ，则角动量的 z 分量可以为： $l, l-1, l-2, \dots, -l$ 。（我们照例以 $\hbar$ 为单位进行量度。）而且，我们已经得出的转动矩阵及其他性质仍旧适用。（从现在起我们真正忽略电子的自旋，当我们谈到“角动量”时，我们仅仅指轨道部分。）

鉴于电子在其中运动的势场 V 仅取决于 r ，而与 θ 或 ϕ 无关，哈密顿在所有转动下都是对称的。因此角动量及其所有分量都守恒。（这对在任何“中心力场”——只依赖于 r 的势场——中的运动来说都是正确的，因而并不是库仑势 e^2/r 的独有特性。）

现在让我们来考虑电子的一些可能状态，这些态的内在角结构由量子数 l 表征。取决于总角动量相对 z 轴的“取向”的角动量 z 分量为 m ， m 取 $+l$ 到 $-l$ 之间 $2l+1$ 个可能值中的一个。设 $m=1$ ，那么在 z 轴上某个距离 r 处找到电子的振幅是多大呢？零。一个在 z 轴上的电子不可能有任何围绕 z 轴的轨道角动量。好，假定 $m=0$ ，那么在离质子的每一个距离处找到电子的振幅可能不为零，我们称此振幅为 $F_l(r)$ ，它就是原子处在状态 $|l, 0\rangle$ 时沿 z 轴向上 r 处找到电子的振幅。态 $|l, 0\rangle$ 指的是电子具有轨道自旋 l 及 z 分量 $m=0$ 。

如果我们知道了 $F_l(r)$ ，我们就知道了一切。对于任何状态 $|l, m\rangle$ ，我们知道在原子内部任何地方找到电子的振幅 $\psi_{l, m}(r)$ 。怎么知道呢？注意，假定原子处在 $|l, m\rangle$ 状态，那么在角度 θ, ϕ 及离原点距离 r 处找到电子的振幅是什么呢？在该角度上放一个新的 z 轴（参看图19-3），设为 z' 。试问在新坐标轴 z' 上 r 处找到电子的振幅是什么呢？我们知道，除非角动量的 z' 分量（称为 m' ）为零，否则沿 z' 轴不能找到电子。但当 $m'=0$ 时，沿 z' 轴找到电子的振幅为 F_l

(r)。因此，该结果是两个因子的乘积。第一个因子是一个沿 z 轴的处于态 $|l, m\rangle$ 的原子相对于 z' 轴处于态 $|l, m'=0\rangle$ 的振幅。用 $F_l(r)$ 乘这个振幅，就得到相对原来的坐标轴在 (r, θ, ϕ) 处找到电子的振幅 $\psi_{l, m}(r)$ 。

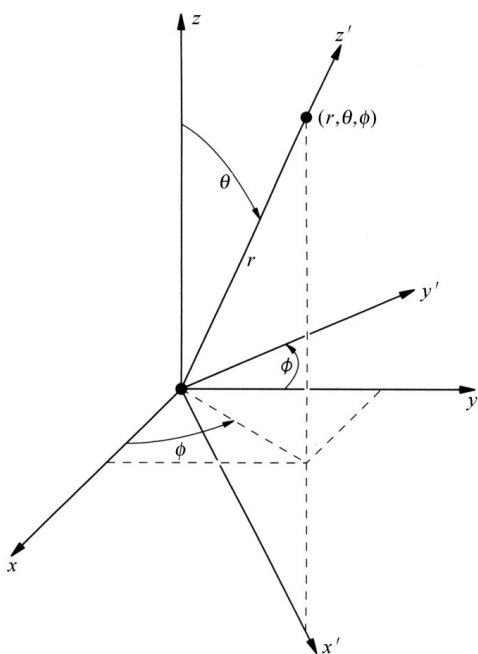


图19-3 点 (r, θ, ϕ) 位于 x', y', z' 坐标系的 z' 轴上

让我们把这个振幅写出来。我们早先已算出了转动的变换矩阵。为从坐标系 x, y, z 变换到图19-3所示的坐标系 x', y', z' ，可以先绕 z 轴旋转角度 ϕ ，然后绕新的 y 轴(y')旋转角度 θ 。这个组合转动为乘积

$$R_y(\theta) R_z(\phi).$$

转动后找到 $|l, m'=0\rangle$ 的态的振幅为

$$\langle l, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | l, m \rangle. \quad (19.31)$$

于是我们的结果为

$$\psi_{l, m}(\mathbf{r}) = \langle l, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | l, m \rangle F_l(r). \quad (19.32)$$

轨道运动只能具有整数的 l 值。（如果电子能在 $r \neq 0$ 的任何地方被找到，那么在此方向就具有 $m=0$ 的振幅，而 $m=0$ 的态仅对整数自旋才存在。）关于 $l=1$ 的转动矩阵由表17-2给出。对于更大的 l ，可以用我们在第18章所得出的一般公式。 $R_z(\phi)$ 和 $R_y(\theta)$ 的矩阵是分别列出的，但是你们知道如何把它们组合起来。一般说来，应先从态 $|l, m\rangle$ 出发，用 $R_z(\phi)$ 作用以得到新的态 $R_z(\phi) |l, m\rangle$ （它正好就是 $e^{im\phi} |l, m\rangle$ ）。然后再将 $R_y(\theta)$ 作用于这个态而得到态 $R_y(\theta) R_z(\phi) |l, m\rangle$ 。最后乘以 $\langle l, 0 |$ 就给出矩阵元式（19.31）。

转动操作的矩阵元是 θ 和 ϕ 的函数。式（19.31）所出现的特殊函数也常出现在许多类型的问题中，这些问题涉及球面几何学中的波，因此给它一个专门名称。注意，并非大家都采用相同的规定，但最常用的一个是

$$\langle l, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | l, m \rangle \equiv a Y_{l, m}(\theta, \phi). \quad (19.33)$$

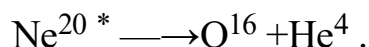
函数 $Y_{l, m}(\theta, \phi)$ 称为球谐函数，而 a 只是一个数字因子，它取决于对 $Y_{l, m}$ 所选取的定义。对于通常的定义是

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}. \quad (19.34)$$

用此记号，氢原子波函数可写成

$$\psi_{l, m}(\mathbf{r}) = a Y_{l, m}(\theta, \phi) F_l(r). \quad (19.35)$$

角度函数 $Y_{l, m}(\theta, \phi)$ 不仅在许多量子力学问题中是重要的，而且在经典物理的许多出现算符 ∇^2 的领域中，例如电磁学中，也是很重要的。作为它们在量子力学中的应用的另一例子，考虑 Ne^{20} 激发态的衰变（诸如上章所讨论的）。 Ne^{20} 通过发射一个 α 粒子而衰变为 O^{16} ，即



假定激发态具有某自旋 l （必定是整数），并且角动量的 z 分量为 m 。我们现在可以提出如下问题：给定 l 和 m ，则发现 α 粒子在与 z 轴成 θ 角、与 xz 平面成 ϕ 角的方向（如图 19-4 所示）上离去的振幅是怎样的？

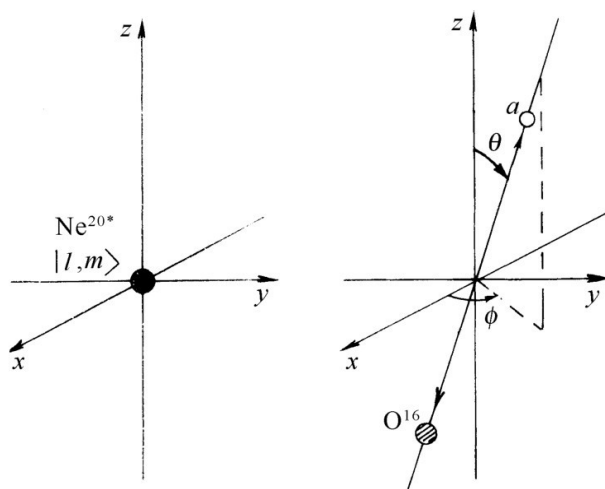


图 19-4 Ne^{20} 激发态的衰变

为了解此问题，我们首先作下述观察。 α 粒子沿 z 轴笔直向上的衰变必然来自 $m=0$ 的态。这是由于 O^{16} 和 α 粒子两者的自旋均为零的缘

故，而且其运动不能有任何对 z 轴的角动量。让我们称这种振幅为 a （单位立体角）。于是为求图19-4所示的任意角度上衰变的振幅，我们只需知道给定的初态在衰变方向具有零角动量的振幅。在 θ 和 ϕ 方向衰变的振幅是 a 乘以相对 z 轴的态 $|l, m\rangle$ 在相对 z' （衰变方向）的态 $|l, 0\rangle$ 的振幅。这后一振幅正是式（19.31）中所表示的。所以在 θ, ϕ 方向见到 α 粒子的概率是

$$P(\theta, \phi) = a^2 |\langle l, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | l, m \rangle|^2.$$

作为一个例子，考虑一个具有 $l=1$ 以及各个 m 值的初态。由表17-2可知其必需的振幅，它们是：

$$\begin{aligned} \langle 1, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | 1, +1 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi}, \\ \langle 1, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | 1, 0 \rangle &= \cos \theta, \\ \langle 1, 0 | R_y(\theta) R_z(\phi) | 1, -1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi}. \end{aligned} \quad (19.36)$$

这些就是3个可能的角分布振幅——视初始核的 m 值而定。

像式（19.36）那样的振幅是经常出现的，而且非常重要，所以有几个名称。如果角分布振幅正比于这3个函数中的任一个或者正比于它们的任何一种线性组合，我们就称“该系统的轨道角动量为1”。或者我们可以说，“ Ne^{20*} 发射一个 p 波的 α 粒子。”或者说，“ α 粒子在 $l=1$ 的状态被发射。”因为有许多方式来说明同一事情，所以最好有一本字典。如果你希望明了其他物理学家谈论些什么，你就不得不记住这些语言。表19-1给出了轨道角动量的字典。

表19-1 轨道角动量的字典（ $l=j$ = 一个整数）

轨道角动量 l	z 分量 m	振幅的角度依赖关系	名称	状态数	轨道宇称
0	0	1	s	1	+
1	$\begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{i\phi} \\ \cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{-i\phi} \end{Bmatrix}$	p	3	-
2	$\begin{Bmatrix} +2 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta e^{2i\phi} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \\ \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi} \\ \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta e^{-2i\phi} \end{Bmatrix}$	d	5	+
3	$\left. \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ \end{Bmatrix} \right\}$	$\left. \begin{aligned} &\langle l, 0 R_y(\theta) R_z(\phi) l, m \rangle \\ &= Y_{l,m}(\theta, \phi) \\ &= P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \end{aligned} \right\}$	f	$2l+1$	$(-1)^l$
4			g		
5			h		
...			...		

如果轨道角动量为零，那么当你转动坐标系时没有什么改变，而且也不随角度变化——对角度的“依赖关系”就是一常数，比方说1。这个态也称为“ s 态”，而且就角度依赖关系来说只有一个这样的态。如果轨道角动量为1，那么与角度变量有关的振幅可以为上述3个函数中的任一个——取决于 m 之值——或者可以是一个线性组合。这些态称为“ p 态”，共有3个。如果轨道角动量是2，则有5个所示的函数。任何线性组合称为“ $l=2$ ”或“ d 波”振幅，现在你们可立即猜出下一个字母——在 s , p , d 以后应出现什么呢？当然是 f , g , h 等，照字母顺序排列下去！这些字母并不代表什么意思。（它们曾代表某些意义——它们分别表示原子光谱中的“锐线”、“主线”、“漫线”及“基线”。但这是当时人们还不知道这些线的来源所定的名称。 f 之后就没有特定的名称，所以我们现在只是按 g , h 等继续下去。）

表中的角函数有几个名称——在定义中有时对前面的数字因子也采用略微不同的规定。这些函数有时称为“球谐函数”，并写为 $Y_{l, m}(\theta, \phi)$ ；有时也写作 $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ ，如果 $m=0$ ，就简单地写为 P_l

$(\cos\theta)$ 。函数 $P_l(\cos\theta)$ 称为以 $\cos\theta$ 为变量的“勒让德多项式”，而函数 $P_l^m(\cos\theta)$ 称为“连带勒让德函数”。在许多书中你们都可找到有关这些函数的表。

顺便请注意，对给定 l 的所有函数都具有这种性质，它们有相同的宇称——在反演时，对奇数 l ，它们改变符号；而对偶数 l ，它们不改变符号。所以我们可以把轨道角动量为 l 的态的宇称写成 $(-1)^l$ 。

正如我们已经知道的，这些角分布可能涉及核衰变或某种别的过程，或在氢原子中某处找到电子的振幅分布。例如，若一电子处于 p 态（ $l=1$ ），则找到它的振幅可能以多种方式依赖于角度——但都为表19-1中 $l=1$ 的3个函数的线性组合。让我们看一下 $\cos\theta$ 的情形，这是很有趣的。这意味着在上半部分（ $\theta < \pi/2$ ）振幅是正的，而在下半部分（ $\theta > \pi/2$ ）振幅是负的，当 $\theta=90^\circ$ 时振幅为0。将此振幅平方，我们看到，找到电子的概率随角 θ 的变化如图19-5所示——与 ϕ 无关。这种角分布说明了这样的事实，在分子键联中，处在 $l=1$ 的态的电子对另一个原子的吸引与方向有关——它是化学吸引的定向原子价的来源。

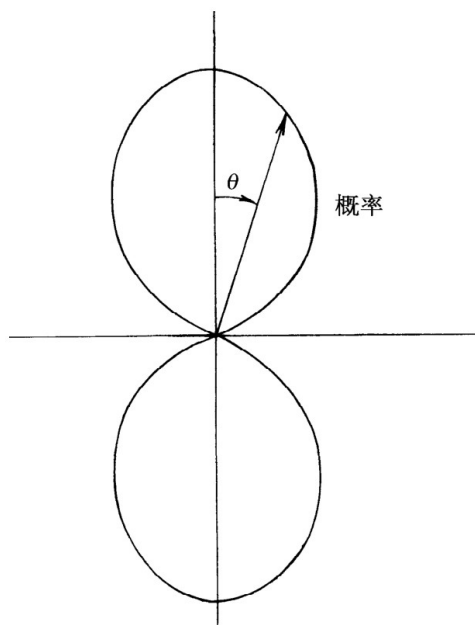


图19-5 $\cos^2 \theta$ 在极坐标中的曲线图。它是处于 $l=1$, $m=0$ 的原子态中, 在相对于 z 轴的不同角度处 (对一定的 r) 找到电子的相对概率

§19-4 氢原子的一般解

在式 (19.35) 中我们已经把氢原子的波函数写为

$$\psi_{l, m}(\mathbf{r}) = a Y_{l, m}(\theta, \phi) F_l(r). \quad (19.37)$$

这些波函数必定是微分方程式 (19.7) 的解。让我们看看这意味着什么。将式 (19.37) 代入 (19.7), 得:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{l, m}}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r F_l) + \frac{F_l}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{l, m}}{\partial \theta} \right) + \frac{F_l}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{l, m}}{\partial \phi^2} \\ = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) Y_{l, m} F_l. \end{aligned} \quad (19.38)$$

现用 r^2/F_l 与上式相乘并重新整理, 结果为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \phi^2} \\ & = - \left\{ \frac{r^2}{F_l} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r F_l) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) F_l \right] \right\} Y_{l,m}. \end{aligned} \quad (19.39)$$

此方程的左边部分仅与 θ ， ϕ 有关，而与 r 无关。不论我们对 r 取什么值，左边部分都不变。右边也必然是这样。虽然方括号内的量到处都包含 r ，但整个量并不取决于 r 。否则此等式就不会对所有的 r 都成立。正如你们可看到的，方括号内的函数也与 θ 及 ϕ 无关。它必为某个常数。该常数的值很可能与我们所研究的态的 l 值有关，因为函数 F_l 必定是一个适合此状态的函数。我们称此常数为 K_l 。因此方程（19.35）与两个方程等价：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \phi^2} = -K_l Y_{l,m}, \quad (19.40)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r F_l) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) F_l = K_l \cdot \frac{F_l}{r^2}. \quad (19.41)$$

现在来看看我们做了些什么。对于任意的由 l 和 m 描述的态，函数 $Y_{l,m}$ 是知道的，我们可以用式（19.40）来确定常数 K_l 。将 K_l 代入式（19.41）就得到一个关于函数 $F_l(r)$ 的微分方程。若能解出关于 $F_l(r)$ 的方程，（19.37）中的所有部分都有了，我们就可给出 $\psi(r)$ 。

K_l 是什么呢？首先，注意到对各个 m （对应于一个特定的 l ） K_l 必然相同，所以对 $Y_{l,m}$ 我们可以随意选取任一 m ，并把它代入式（19.40）以解得 K_l 。选用 $Y_{l,l}$ 可能最为简单。由式（18.24）可得

$$R_z(\phi) |l, l\rangle = e^{il\phi} |l, l\rangle. \quad (19.42)$$

$R_y(\theta)$ 的矩阵元也很简单：

$$\langle l, 0 | R_y(\theta) | l, l \rangle = b (\sin\theta)^l, \quad (19.43)$$

式中 b 为某个数^[3]。把两式合并，得

$$Y_{l, -l} \propto e^{il\phi} \sin^l\theta. \quad (19.44)$$

将此函数代入式 (19.40) 得

$$K_l = l(l+1). \quad (19.45)$$

K_l 一旦确定，式 (19.41) 就告诉我们径向函数 $F_l(r)$ 。当然，式 (19.41) 就是角度部分被 $K_l F_l / r^2$ 所代替的薛定谔方程。让我们重新将式 (19.41) 写成式 (19.8) 的形式，即

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rF_l) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E + \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right\} F_l. \quad (19.46)$$

势能中增加了很神秘的一项。虽然此项是由数学把戏得到的，但它有一个简单的物理起源。我们可用半经典的论证来给你们一些关于它的出处的概念。这样或许你们就不会觉得它太神秘了。

想象一经典粒子围绕某个力心运动。总能量守恒，并且为势能与动能之和，

$$U = V(r) + \frac{1}{2}mv^2 = \text{常数}.$$

通常可将 v 分解成径向分量 v_r 和切向分量 $r\dot{\theta}$ ，于是

$$v^2 = v_r^2 + (r\dot{\theta})^2.$$

那么角动量 $mr^2\dot{\theta}$ 也是守恒的，设其等于 L ，于是我们可写成

$$mr^2\dot{\theta} = L \quad \text{或} \quad r\dot{\theta} = \frac{L}{mr},$$

而能量为

$$U = \frac{1}{2}mv_r^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

如果没有角动量，上式仅有前两项，加进角动量 L 对能量的影响就相当于在势能中加进了项 $L^2/2mr^2$ ，但这几乎正是式(19.46)中的额外项，唯一的差别是看来角动量为 $l(l+1)\hbar^2$ 而不是我们所期望的 $l^2\hbar^2$ 。但我们在前面（例如第2卷§34-7）就已经看到，要使准经典的论证同正确的量子力学计算结论相一致通常就得作这个替代。于是，我们可以把这新的项理解为“赝势”，它给出转动系统中出现在径向运动方程中的“离心力”项（参考第1卷§12-5有关“赝力”的讨论）。

我们现在就来解关于 $F_l(r)$ 的方程式(19.46)。它与式(19.8)很相像，所以能用相同的技巧来解。每一步都与以前的做法一样，一直到式(19.19)，此时将多出一项

$$-l(l+1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^{k-2}. \quad (19.47)$$

这一项也可写为

$$-l(l+1)\left\{\frac{a_1}{\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \rho^{k-1}\right\}. \quad (19.48)$$

（我们提出第一项，并将求和指数 k 向后移动1。）代替式（19.20）的是

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\{k(k+1) - l(l+1)\} a_{k+1} - 2(\alpha k - 1) a_k] \rho^{k-1} - \frac{l(l+1)a_1}{\rho} = 0. \quad (19.49)$$

只有一项包含 ρ^{-1} ，所以这项必为零。系数 a_1 必为零（除非 $l=0$ ，而 $l=0$ 时我们就得到以前的解）。令方括号对每个 k 皆为零，则其他各项都为零（取代式（19.21））的条件为

$$a_{k+1} = \frac{2(\alpha k - 1)}{k(k+1) - l(l+1)} a_k, \quad (19.50)$$

这是对球对称情况的唯一有意义的改变。

与前相同，如果我们要能有能描述束缚电子的解，则级数必须中断。若 $\alpha n = 1$ ，则级数将在 $k = n$ 处终止。我们又得到关于 α 的相同条件， α 必须等于 $1/n$ ，这里 n 是某个整数。然而式（19.50）还给出一个新限制，指数 k 不能等于 l ，否则分母为零， a_{l+1} 为无限大。这样，因 $a_1 = 0$ ，由式（19.50）可知所有相继的 a_k 也都为零，直到不为零的 a_{l+1} 。这就意味着 k 必须从 $l+1$ 开始到 n 终止。

我们的最终结果为：对任一 l 存在许多可能的解，我们称这些解为 $F_{n, l}$ ，而 $n > l+1$ 。每个解具有能量

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (19.51)$$

具有此能量且角量子数为 l 及 m 的状态，其波函数为

$$\psi_{n, l, m} = a Y_{l, m}(\theta, \phi) F_{n, l}(\rho), \quad (19.52)$$

而

$$\rho F_{n, l}(\rho) = e^{-a\rho} \sum_{k=l+1}^n a_k \rho^k, \quad (19.53)$$

系数 a_k 由式(19.50)得到。我们最终对氢原子的状态有了一个完整的描述。

§19-5 氢原子波函数

让我们回顾一下我们所发现的结果。满足电子在库仑场中的薛定谔方程的状态，由3个都为整数的量子数 n, l, m 来表征。电子振幅的角分布只能具有某些确定的形式，称之为 $Y_{l, m}$ 。它们用总角动量量子数 l ，及磁量子数 m 来标记，磁量子数 m 可以从 $-l$ 变到 $+l$ 。对于每一种角位形，电子振幅的多种径向分布 $F_{n, l}(r)$ 都是可能的，它们用主量子数 n 来标记—— n 可以从 $l+1$ 变化到 ∞ 。状态的能量只与 n 有关，并随 n 的增大而增加。

能量最低的状态，或基态，为 s 态。对这个态 $l=0, n=1, m=0$ ，它是一个“非简并”态——具有此能量的状态只有一个，其波函数是球对称的。在中心处发现电子的振幅最大，随着离中心的距离增加而单

调地减小，我们可以把电子的振幅想象为如图19-6（a）所示的一个球。

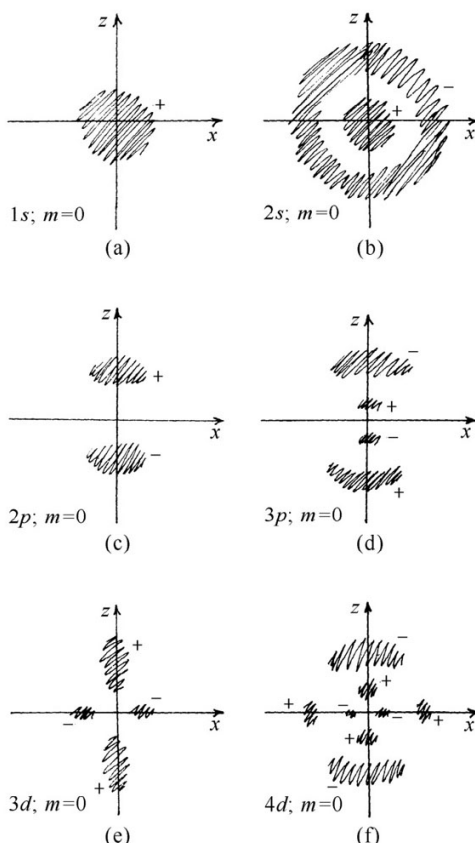


图19-6 表示氢原子一些波函数的一般性质粗略的草图。暗区表示振幅大的地方。各区正负号表示该区振幅的相对符号

对 $n=2, 3, 4, \dots$ 较高的能量还有其他 s 态。对于每一个能量只有一种形式（ $m=0$ ），且都为球对称。随着 r 的增加，这些态的振幅一次或多次改变符号。这些振幅有 $n-1$ 个球形节面—— ψ 趋于零的地方。例如 $2s$ 态（ $l=0, n=2$ ）看上去将如图19-6（b）中所画的那样。（暗区表示振幅大的地方，正负号表示振幅的相对相位。）图19-7中第一列所示即为 s 态的能级。

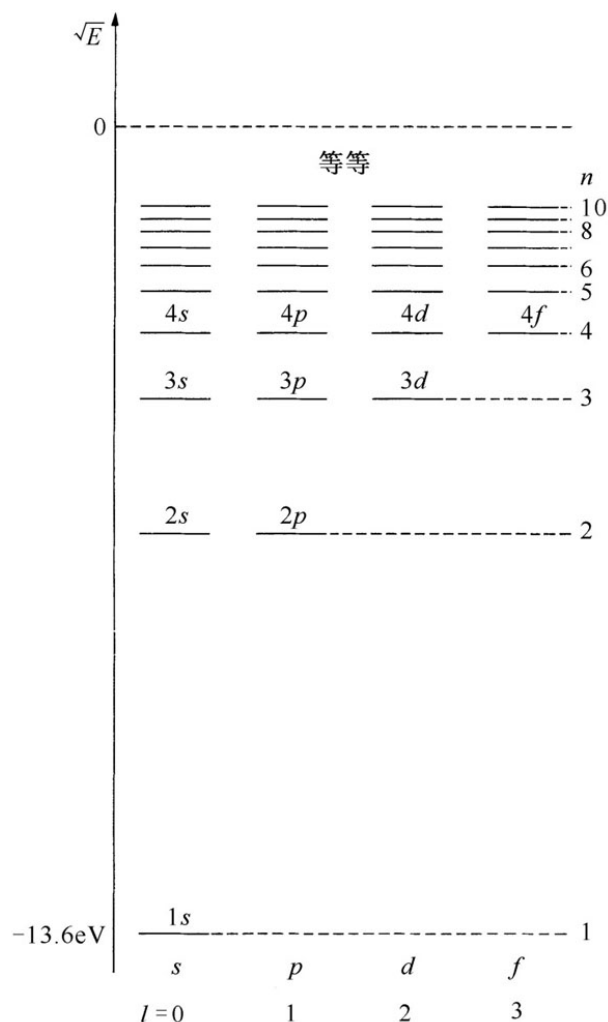


图19-7 氢原子能级图

此外尚有 $l=1$ 的 p 态。对每个 n （ n 必须为2或更大），有3个能量相同的状态，对 $m=+1$ ， $m=0$ 和 $m=-1$ 各有一个。能级如图19-7所示。这些态的角度依赖关系列在表19-1中。例如，对于 $m=0$ ，如果当 θ 接近 0° 时振幅为正，则 θ 接近 180° 时，振幅将为负。所以存在一个与 xy 平面重合的节面。对于 $n > 2$ ，也有球形节面。图19-6（c）画出了 $n=2$ ， $m=0$ 振幅的大致情形，图19-6（d）画出了 $n=3$ ， $m=0$ 波函数的大致情形。

你们可以想象，既然 m 表示在空间中的某种“取向”，那么应该有振幅峰值沿 x 轴或 y 轴的类似的分布。这些可能是 $m = +1$ 和 $m = -1$ 的态吗？不是。但是既然这3个状态的能量相同，那么这3个态的任意线性组合也将是具有相同的能量的定态。结果，“ x ”态——对应于“ z ”态或图19-6（c）的 $m = 0$ 的态，是 $m = +1$ 及 $m = -1$ 的态的线性组合。相应的“ y ”态为另一组合。明确地讲，我们意指

$$\begin{aligned}\text{“}z\text{”} &= |1, 0\rangle, \\ \text{“}x\text{”} &= -\frac{|1, +1\rangle - |1, -1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ \text{“}y\text{”} &= -\frac{|1, +1\rangle + |1, -1\rangle}{i\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

当以它们的特定坐标轴为参考轴时，这些态都看上去是一样的。

对每一个能量， d 态（ $l=2$ ）有5个可能的 m 值，最低能量为 $n=3$ 。其能级如图19-7所示，其对角度的依赖关系更加复杂。例如 $m=0$ 的态有两个圆锥形的节，所以当你们由北极绕至南极时，波函数的相位从+到-再变到+。它们分别对于 $n=3$ 以及 $n=4$ 的 $m=0$ 的状态，振幅的大致形式画在图19-6的（e）及（f）中。同样较大的 n 的振幅具有球形节。

我们准备再描述可能的状态了。你们可在许多书中找到有关氢原子波函数的更为详细的描述。有两本很好的参考书，一本是鲍林（L. Pauling）和威尔逊（E.B. Wilson）的《量子力学导论》，另一本是莱顿（R.B. Leighton）的《近代物理原理》。在这些书中你们都会找到一些函数的图形及许多态的表示图。

我们希望提一下，对较高的 l ，波函数有一个特点：对 $l > 0$ 的情形，在中心处的振幅为零。这并不奇怪，因为当电子的轨道半径非常小时，它很难具有角动量。根据这个道理， l 越大，振幅被“推离”中心的就越远。如果你观察 r 很小时径向函数 $F(r)$ 的变化方式，则由式（19.53）发现

$$F_{n, l}(r) \approx r^l.$$

这种对 r 的依赖关系意味着，对于较大的 l ，必须在远离 $r=0$ 的地方才会有可观的振幅，顺便指出，这种性质取决于径向方程中的离心力项，所以同样的结论适用于任何在 r 很小时变化比 $1/r^2$ 更慢的势——大多数原子的势都是这种势。

§19-6 周期表

我们现在要以近似的方式应用氢原子的理论来了解一下化学家的元素周期表。原子序数为 Z 的元素，有 Z 个电子被核的电吸引力聚集在一起，而电子之间又互相排斥。为了得到严格的解，我们需求解 Z 个电子在库仑场中的薛定谔方程。对于氦，其方程为

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 \psi + \nabla_2^2 \psi) + \left(-\frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi,$$

式中 ∇_1^2 是作用于 $\mathbf{r}_1$ 的拉普拉斯算符， $\mathbf{r}_1$ 是一个电子的坐标， ∇_2^2 作用于 $\mathbf{r}_2$ ，而 $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ （我们再次忽略电子的自旋）。为了得到定态和能级，我们要求如下形式的解

$$\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-i(V/\hbar)Et}.$$

几何关系包含在 f 中，它是6个变量——两个电子同时的位置——的函数。虽然最低能量状态的解已用数值法求得，但没人能得出解析形式的解。

对具有3, 4或5个电子的原子，想要得到严格解是没有希望的，至于说量子力学已经对周期表给出了精密的解释，那是太过分了。但是，至少可用它——甚至是一种粗糙近似，还要加上一些修正——定性地了解周期表中揭露出来的许多化学性质。

原子的化学性质主要决定于它的最低能量状态。我们可以利用下面的近似理论来求这些态及其能量。首先，除了采纳不相容原理，即任一特定的电子态只能由一个电子占据外，其余情况下我们忽略电子的自旋。这意味着任一特定的轨道组态最多只能有两个电子——一个自旋朝上，另一个自旋朝下。其次在我们的第一级近似中，不考虑电子之间相互作用的细节，而认为每一个电子都在核及其他电子共同组成的有心力场中运动。例如氖，它有10个电子，我们说一个电子感受到的平均势是由核加上其他9个电子所产生的。于是我们可想象在薛定谔方程里，对每个电子我们给予一个势 $V(r)$ ，它是来自其他电子的球对称电荷密度修正后的 $1/r$ 势场。

在此模型中，每个电子像独立粒子那样行动。它的波函数对角度的依赖关系与氢原子中的情形完全相同。它有 s 态、 p 态等等，并且它们将具有各种可能的 m 值。因为 $V(r)$ 不再与 $1/r$ 相同，所以波函数的径向部分将稍有不同，但在定性方面将相同，所以我们有相同的径向量子数 n 。状态的能量也会有点不同。

氢

让我们来看看根据这些概念可得到些什么。氢的基态具有 $l=m=0$ 及 $n=1$ ，我们称该电子的组态为 $1s$ 态。能量为 -13.6 eV 。这意味着把电子拉出原子需要 13.6 eV 能量。我们称此能量为“电离能”，用符号 W_I 表示。电离能越大，就越难使电子脱离，一般说来，电离能大的材料其化学性质就不大活泼。

氦

现在来看氦。它的两个电子可处于同一个能量最低的状态（一个自旋朝上，另一个朝下）。在此最低能量状态，电子在一势场中运动，这个势对小的 r 就像 $z=2$ 的库仑场，而对大的 r ，就像 $z=1$ 的库仑场。结果是一个“类氢”的 $1s$ 态，它的能量稍低。两个电子占据同一 $1s$ 态（ $l=0, m=0$ ）。所观察到的电离能（移去一个电子）为 24.6 eV 。因为现在 $1s$ 壳层已填满了——只允许两个电子占据该壳层——因此电子被其他原子吸引去的趋势实际上并不存在。氦在化学上是惰性的。

锂

锂原子核有3个单位的电荷。电子态又是类氢的，3个电子占据最低的3个能级。两个电子进入 $1s$ 态，第三个电子进入 $n=2$ 的态。但 $l=0$ 呢还是 $l=1$ ？在氢原子中这两个态的能量相同，但在其他原子中则不然，原因如下，还记得 $2s$ 态在核附近有一定的振幅，而 $2p$ 态则没有。这就意味着 $2s$ 态的电子感受到部分锂核的三重电荷，但 $2p$ 电子却待在外面，该处的电场很像单个电荷所形成的库仑场。这额外的吸引力使得 $2s$ 态的能量相对于 $2p$ 态能量有所降低，能级大致如图19-8所示——你们应将此图与氢原子相应的能级图19-7比较。所以锂原子有两个电

子在 $1s$ 态，一个电子在 $2s$ 态。因 $2s$ 电子比 $1s$ 电子具有较高的能量，所以 $2s$ 电子比较容易脱离。锂的电离能仅为 5.4 eV ，其化学性质非常活泼。

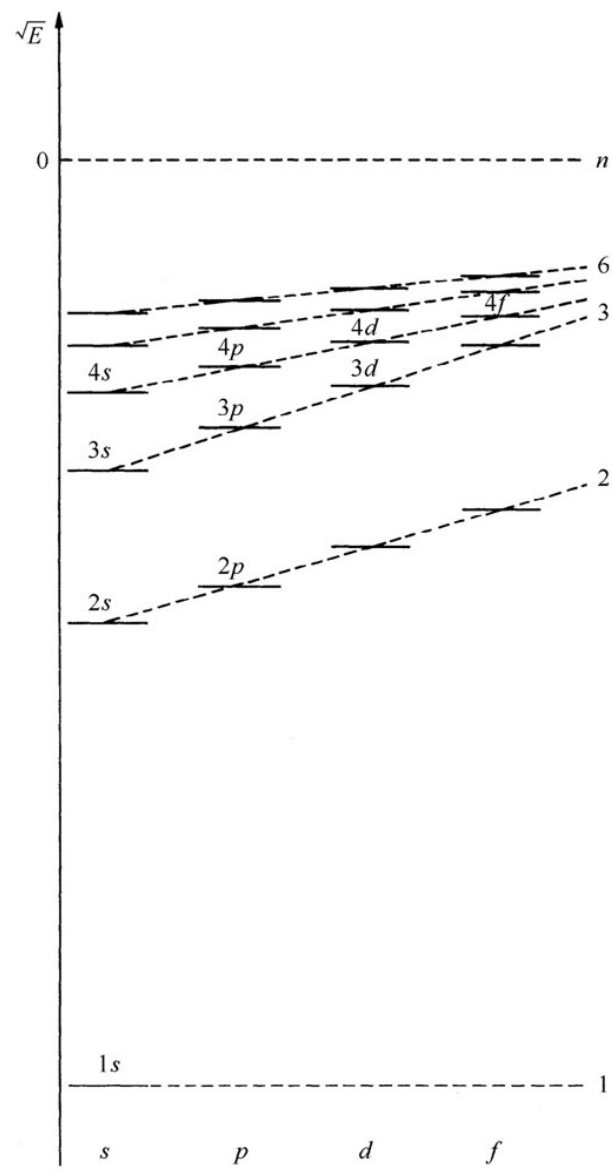


图19-8 当有其他电子存在时原子中电子能级示意图（标度与图19-7不同）

由此你们能够看出逐步显现出来的模式了；我们在表19-2中列出了前面36种元素，表明每个原子处于基态时电子所占据的状态。表中给出了束缚得最松的电子的电离能以及占据各个“壳层”的电子数，这

里，壳层指的是 n 相同的状态。因为不同 l 的态具有不同的能量，每个 l 值与一个有 $2(2l+1)$ 个可能状态（不同的 m 及电子自旋）的支壳层相对应。除了一些我们忽略的微弱的效应之外，这些态都具有相同的能量。

表19-2 周期表中前36个元素的电子组态

原子序数 Z	元素	电离能 W_I (eV)	电 子 组 态										
			1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	
1	H 氢	13.6	1	处于各个态的电子数									
2	He 氦	24.6	2										
3	Li 锂	5.4	满壳层 (2)	1									
4	Be 铍	9.3		2									
5	B 硼	8.3		2							1		
6	C 碳	11.3		2							2		
7	N 氮	14.5		2							3		
8	O 氧	13.6		2							4		
9	F 氟	17.4		2							5		
10	Ne 氖	21.6		2							6		
11	Na 钠	5.1	满壳层 (2)	满壳层 (8)		1							
12	Mg 镁	7.6				2							
13	Al 铝	6.0				2					1		
14	Si 硅	8.1				2					2		
15	P 磷	10.5				2					3		
16	S 硫	10.4				2					4		
17	Cl 氯	13.0				2					5		
18	Ar 氩	15.8				2					6		
19	K 钾	4.3	满壳层 (2)	满壳层 (8)		满壳层 (8)			1				
20	Ca 钙	6.1							2				
21	Sc 钪	6.5							1				2
22	Ti 钛	6.8							2				2
23	V 钒	6.7							3				2
24	Cr 铬	6.8							5				1
25	Mn 锰	7.4							5				2
26	Fe 铁	7.9							6				2
27	Co 钴	7.9							7				2
28	Ni 镍	7.6							8				2
29	Cu 铜	7.7							10				1
30	Zn 锌	9.4							10				2
31	Ga 镓	6.0	满壳层 (2)	满壳层 (8)		满壳层 (18)			2	1			
32	Ge 锗	7.9							2	2			
33	As 砷	9.8							2	3			
34	Se 硒	9.7							2	4			
35	Br 溴	11.8							2	5			
36	Kr 氙	14.0							2	6			

铍

铍与锂相似，除了在 $2s$ 态有两个电子，还有两个电子在充满的 $1s$ 壳层。

硼到氖

硼有5个电子，第五个电子必然进入 $2p$ 态。因为 $2p$ 态有 $2 \times 3 = 6$ 个不同的状态，所以我们可不断增加电子直到总数达到8个电子。这样就得到氖。当电子增加时，原子序数 Z 也增加，所以整个电子的分布越来越接近原子核，以至 $2p$ 态的能量下降。到氖时电离能增至 21.6 eV 。氖不易失去电子。它已没有多余的低能空位供电子填充，因此它不会试图攫取额外的电子。在化学性质上氖是惰性的。另一方面，氟确实有一个空的可供电子填入的低能状态，所以氟在化学反应中很活泼。

钠到氩

对钠来说，第11个电子必须开启一个新的壳层——进入 $3s$ 态。这个态的能级很高，电离能急剧下降，因此钠是一个活泼的化学元素。从钠到氩， $n=3$ 的 s 态和 p 态完全按照从锂到氖那样的次序来填充，在外面空的壳层里，电子的角度组态具有相同的次序，电离能的变化情况也很相似。由此可以看出为什么随着原子序数的增加化学性质会重复，镁在化学性质上非常像铍，硅像碳，氯像氟，氩像氖那样是惰性的。

你们可能已经注意到，在锂与氖之间，电离能的次序略微有点异常，钠和氟之间也有类似的情况。氧原子对最后一个电子的束缚比我们预期的要稍微弱一些。硫也有类似的情况。这是什么原因呢？如果我们加进一点各个电子之间的相互作用效应，对这一情形就能理解了。考虑一下将第一个 $2p$ 态的电子放进硼原子的情况。有6种可能

——3种可能的 p 态，每个 p 态有两种自旋。想象一自旋朝上的电子进入 $m=0$ 的状态，这一状态也称为“ z ”态，因为它紧靠 z 轴。碳的情况将如何呢？现有2个 $2p$ 电子。如果其中一个进入“ z ”态，第二个电子将进入什么态？如果它远离第一个电子，它具有较低的能量，譬如说它进入 $2p$ 壳层的“ x ”态就行。（记住，这个态就是 $m=+1$ 及 $m=-1$ 态的线性组合。）接下来，轮到氮，如果3个 $2p$ 态电子分别处于“ x ”，“ y ”和“ z ”组态，则它们将具有最低的相互排斥能。但是对氧就不同了，第四个电子必须以相反的自旋进入一个已被填充的态。于是它受到已经在这个态的电子的强烈排斥，所以它的能量不如在其他情况下可以达到的那样低，因而更容易被移去。这就解释了出现在氮和氧之间以及磷和硫之间的结合能次序上的中断现象。

钾到锌

在氩以后，你们首先可能认为新加的电子将开始填充 $3d$ 态。但并非如此。根据前面的描述——以及图19-8中说明的——角动量较高的状态其能量要上移。到 $3d$ 态时，其能量已比 $4s$ 态的能量高出一些。所以在钾中，最后一个电子进入 $4s$ 态。这个壳层到钙原子被填满后（有两个电子），就开始对钪、钛、钒填 $3d$ 态。

$3d$ 和 $4s$ 态的能量十分接近，所以很小的影响就能使两者的差额由正变负或由负变正。当我们把4个电子放入到 $3d$ 时，它们的排斥作用使 $4s$ 态的能量上升到刚好高于 $3d$ 态能量，所以一个电子移回来了。对于铬，我们不是得到预期的4、2组合，而是5、1组合。增加一个新电子就得到锰，此电子重新填入 $4s$ 壳层，此后 $3d$ 态壳层被一一填满，直到铜为止。

因锰、铁、钴和镍中最外面的壳层具有相同的组态，所以它们都倾向于具有相似的化学性质。（此效应对稀土元素更为明显，它们都具有相同的外壳层，而其逐步填充对化学性质的影响很小的内壳层。）

在铜原子中，一个电子从 $4s$ 态壳层中被夺走，最后将 $3d$ 壳层填满。然而，铜的 $10, 1$ 组态的能量与 $9, 2$ 组态的能量是如此接近，只要附近有另一个原子存在，就能改变两者的平衡。由于这个原因，铜的最后两个电子差不多是相等的，所以铜可以是1价也可以是2价。（它有时表现出好像其电子处于 $9, 2$ 组态。）在其他地方也发生类似的情况，这说明了其他金属，如铁，在化合时具有两种原子价的事实。到锌为止， $3d$ 和 $4s$ 两壳层都完全填满了。

镓到氩

从镓到氩，填充次序重又正常地继续下去，对 $4p$ 壳层进行填充。外壳层、能量和化学性质重复着从硼到氦及从铝到氩的模式。

氩像氦和氖一样，是有名的“稀有”气体，在化学上这三者都是“惰性的”。这只是意味着，由于能量相对较低的壳层已填满，在与其他元素进行简单化合时，它们在能量上具有优势的情况是很少的。具有一个满壳层是不够的。铍和镁具有填满的 s 壳层，但这些壳层的能量太高，不能使得元素稳定。同样，我们会期望在镍的位置上出现另一个“稀有”元素，假如其 $3d$ 壳层的能量更低些（或 $4s$ 壳层能量更高些）的话。另一方面，氩并非完全惰性，它和氯会形成一弱键化合物。

既然我们所举实例已说明了周期表的大多数主要性质，我们就讨论到第36号元素为止——还有70多个元素！

我们想再指出一点：我们不仅能在一定程度上了解原子价，而且也可以讲些关于化学键的方向性质。取一个原子，如氧，它有4个 $2p$ 电子。前3个电子处于“ x ”，“ y ”，“ z ”态，而第四个电子将重复这些态中的一个，留下两个态——譬如说“ x ”和“ y ”——空着。接下来考虑 H_2O 的情形。每一个氢原子都乐意与氧共有一个电子，从而帮助氧填满壳层。这两个电子倾向于进入“ x ”和“ y ”的空位。所以水分子应有相对氧原子中心成直角的两个氢原子。实际上这个角度为 105° 。我们甚至能理解为什么这一角度大于 90° 。由于共有电子，结果氢原子有了净的正电荷。电的排斥作用使波函数“变了形”，把角度扩大到 105° 。在 H_2S 中也出现同样的情况。但由于硫原子较大，两个氢原子隔得较远，排斥作用较小，所以角度仅扩大到 93° 。硒原子更大，故在 H_2Se 中角度非常接近 90° 。

我们可以用同样的论证来理解氨（ H_3N ）的几何结构。氮有再容纳3个 $2p$ 电子的空位，对“ x ”，“ y ”，“ z ”这三种态各一个。3个氢原子应彼此联成直角。但构成的角度稍大于 90° ——又是电斥力的缘故——但至少我们看到为什么 H_3N 不是扁平的。磷化氢（ H_3P ）的角度接近 90° ，而在 H_3As 中角度更接近 90° 。当我们把 H_3N 描述为一个两态系统时，我们假定它不是扁平的。正是由于这种非扁平性才使氨微波激射器成为可能。现在我们已经看到从我们的量子力学也可以理解分子的形状。

薛定谔方程是物理学的巨大成就之一，由于它提供了解原子结构的根本机理的钥匙，从而对原子光谱、化学以及物质的本性作出了解释。

[1] 电量 e 与国际单位制电量 q_e （库仑）的关系是， $e^2 = q_e^2 / 4\pi\epsilon_0$ 。

[2] 因为这些特定名称是原子物理学常用词汇的一部分，所以你必须记住这些词汇。在本章末，我们将其汇集成一个小“字典”，帮助你们记忆。

[3] 你们可以费些功夫来证明这个数来自式（18.35），但按照§18-4的概念也很容易从第一性原理得出这一结果。态 $|l, l\rangle$ 可以由 $2l$ 个自旋 $1/2$ 并且全部朝上的粒子组成，而态 $|l, 0\rangle$ 应有 l 个自旋朝上， l 个自旋朝下。在转动下，朝上自旋继续保持朝上的振幅为 $\cos\theta/2$ ，而自旋由朝上变为朝下的振幅为 $-\sin\theta/2$ 。我们要问的是 l 个朝上自旋仍朝上，而其余的 l 个朝上自旋变为朝下的振幅是多少。这一情况的振幅为 $(-\cos\theta/2 \cdot \sin\theta/2)^l$ ，与 $\sin^l\theta$ 成正比。

第20章 算符

§20-1 操作与算符

到目前为止，虽然我们不时地告诉你们量子力学量和方程的一些特殊写法，但是我们在量子力学中所做的全部工作都可以用普通代数来处理。现在我们想再讲一些描述量子力学事件的有趣而有用的数学方法。处理量子力学问题有许多不同的方法，而大多数书本所采用的方法都与我们所用的不同。当你们继续阅读其他书籍时，你们可能不会立即看出这些书中所讲的方法与我们所用的方法之间的联系。虽然我们也能得出一些有用的结果，但本章的主要目的在于告诉你们一些描写相同物理事件的不同方法。知道了这些方法，你们就能更好地理解别人所讲的了。当人们最初提出经典力学时，他们总是用 x ， y 和 z 分量来写出所有的方程式。以后有人指出，发明矢量记号可以使所有的写法大为简化。的确，当你要计算什么时，常常需要将矢量变换成它的分量。但是当你使用矢量时，一般很容易看出发生些什么，而且许多计算也容易得多。在量子力学中，使用“态矢量”的概念可以用比较简单的方法写出许多事情。当然，“态矢量” $|\psi\rangle$ 并非三维空间中的几何矢量，而是代表物理状态的一种抽象符号，此状态用“标记”或“名字” ψ 来识别。这种概念之所以有用，是因为量子力学的规律可以用这些符号写成代数方程。例如，任何状态都可由基础态的线性组合来构成，这个基本定律就可以写成

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |i\rangle, \quad (20.1)$$

式中 C_i 是一组普通的（复）数——振幅 $C_i = \langle i | \psi \rangle$ ——而 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ 、 $|3\rangle$ ……代表在某个基或表象中的基础态。

如果取某个物理状态并对它作些变动——如转动或等候一段时间 Δt ——则得到不同的态。我们说，“对一个状态进行一次操作产生了一个新的态。”我们可以用一个方程式来表示同一概念：

$$|\phi\rangle = \hat{A} |\psi\rangle. \quad (20.2)$$

对态的一次操作产生另一个态。算符 $\hat{A}$ 代表某个特定的操作。当这一操作作用于任一态，譬如态 $|\psi\rangle$ 上，它产生某个其他的态 $|\phi\rangle$ 。

式（20.2）表示什么意思呢？我们这样来定义它，如果用 $\langle i |$ 乘以式（20.2），并将 $|\psi\rangle$ 按式（20.1）展开，则得到

$$\langle i | \phi \rangle = \sum_j \langle i | \hat{A} | j \rangle \langle j | \psi \rangle. \quad (20.3)$$

（态 $|j\rangle$ 取自和 $|i\rangle$ 相同的一组。）这正是一个代数式。数 $\langle i | \phi \rangle$ 给出了在态 $|\phi\rangle$ 中找到的每个基础态的量，它是以 $|\psi\rangle$ 在各个基础态中的振幅 $\langle j | \psi \rangle$ 的线性叠加表示的。数 $\langle i | \hat{A} | j \rangle$ 正是表明有多少 $\langle j | \psi \rangle$ 进入每个求和中的系数。算符 $\hat{A}$ 可用一组数或“矩阵”以数字来描述

$$A_{ij} \equiv \langle i | \hat{A} | j \rangle. \quad (20.4)$$

所以式 (20.2) 是式 (20.3) 的高级写法。实际上还不止这样，它含有更多的东西。在式 (20.2) 中我们完全没有提到一组基础态。式 (20.3) 是式 (20.2) 在某一组基础态中的映像，但是，如你们所知，你们可以选用你们想要的任意一组态，而式 (20.2) 就含有这种概念。算符的写法避免了作任意特定的选择。当然，当你想要得到明确的表示时，你必须选择一组基础态，当你选定后，你就用式 (20.3)。因此算符 方程式 (20.2) 是代数方程式 (20.3) 的更为抽象的写法。这两种写法之间的区别，类似于下面两种写法的差别

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

及

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y,$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z,$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

第一种写法要方便得多。然而，当你想要计算结果时，你终究必须相对某组坐标轴给出各分量。同样地，如果你想要说出 $\hat{A}$ 真正表示什么意思，你必须准备根据某组 基础态给出矩阵 A_{ij} 。只要你心中有一组 $|i\rangle$ ，式 (20.2) 就与式 (20.3) 相同。（你们还应记住，一旦你知道了对一组特定的基础态的矩阵，你总可以算出相对于任何别的基础态的相应矩阵。你可以将矩阵从一个“表象”变换到另一个“表象”。）

式 (20.2) 的算符方程也可以用一种新的观点来考虑。如果我们设想某个算符 $\hat{A}$ ，我们就可用它跟任意态 $|\psi\rangle$ 来产生一个新的态

$\hat{A}|\psi\rangle$ 。有时用这种方法得到的“态”可能是很特殊的——它也许不代表我们在自然界中可能遇到的任何物理情况（例如，我们可能得到一个态，它描述单个电子而不归一化）。换言之，我们有时可能得到数学上人为的“态”，这种人为的“态”可能仍然有用，或许作为某些计算过程的中间阶段可能是有用的。

我们已经告诉你们许多有关量子力学算符的例子。我们已有了转动算符 $\hat{R}_y(\theta)$ ，它作用于状态 $|\psi\rangle$ 就产生一个新态，从转动后的坐标系来看，新的态就是原来的态。我们已有了宇称（或反演）算符 $\hat{P}$ ，它通过将所有的坐标反向来得到新的态。我们对自旋1/2粒子已有算符 $\hat{\sigma}_x$ 、 $\hat{\sigma}_y$ 和 $\hat{\sigma}_z$ 。

算符 $\hat{J}_z$ 在第17章中是根据小角度 ϵ 的转动算符来定义的

$$\hat{R}_z(\epsilon) = 1 + \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{J}_z. \quad (20.5)$$

当然这意味着

$$\hat{R}_z(\epsilon)|\psi\rangle = |\psi\rangle + \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{J}_z |\psi\rangle. \quad (20.6)$$

在这个例子中， $\hat{J}_z|\psi\rangle$ 是把态 $|\psi\rangle$ 转动一个小角 ϵ 后所得的态减去原来的态后再乘以 $\hbar/i\epsilon$ 。它代表的态是两个态之差。

再举一个例子。我们有一个算符 $\hat{p}_x$ ——称为动量算符（ x 分量），由类似（20.6）的式子定义。如果 $\hat{D}_x(L)$ 是使一个态沿 x 方向移动距离 L 的算符，则 $\hat{p}_x$ 定义为

$$\hat{D}_x(\delta) = 1 + \frac{i}{\hbar} \delta \hat{p}_x, \quad (20.7)$$

式中 δ 是一个小位移。将状态 $|\psi\rangle$ 沿 x 移动一小距离 δ 得出一个新的态 $|\psi'\rangle$ ，我们说这一新态比原来的态增加了一点新的东西

$$\frac{i}{\hbar} \delta \hat{p}_x |\psi\rangle.$$

我们所讨论的算符作用于像 $|\psi\rangle$ 这样的态矢量上，而 $|\psi\rangle$ 是物理状况的抽象描述。它们与作用在数学函数上的代数算符大不相同。例如， d/dx 是一个算符，它作用于 $f(x)$ 使 $f(x)$ 变成一个新函数 $f'(x) = df/dx$ 。另一个例子是代数算符 ∇^2 。你们可以看出为什么在两种情况下使用相同的名词。然而你应当记住这两类算符是不同的。量子力学算符 $\hat{A}$ 不作用于代数函数上，而作用于 $|\psi\rangle$ 那样的态矢量上。不久你们就会看到两类算符都用于量子力学中，而且常用于相似类型的方程中。当你们初次学习这一课题时，最好一直记住这些差别，以后对这课题比较熟悉时，你们就会发现保留这两种算符之间的明显区别并不是很重要的。的确如此，你们会发现大多数教科书对这两类算符通常使用相同的记号。

我们现在接下去看看用算符能做些什么有用的事情。但是，首先有一点要特别注意，假设我们有一个算符 $\hat{A}$ ，对于某基础态的矩阵为 $A_{ij} \equiv \langle i | \hat{A} | j \rangle$ 。态 $\hat{A}|\psi\rangle$ 又在另一态 $|\phi\rangle$ 中的振幅为 $\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle$ 。这个振幅的共轭复数是否有意义呢？你们应该能够证明

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \phi \rangle, \quad (20.8)$$

式中 $\hat{A}^\dagger$ （读作“ A 剑号”）是一个算符，其矩阵元为

$$A_{ij}^\dagger = (A_{ji})^*. \quad (20.9)$$

为了得到 $A^\dagger$ 的 i, j 元素，你们可以先求 $\hat{A}$ 的 j, i 元素（要颠倒一下指数），再取它的复数共轭。态 $\hat{A}^\dagger|\phi\rangle$ 处于 $|\psi\rangle$ 中的振幅为态 $\hat{A}|\psi\rangle$ 处于 $|\phi\rangle$ 中的振幅的复数共轭。算符 $\hat{A}^\dagger$ 称为 $\hat{A}$ 的“厄米伴随”。量子力学中的许多重要算符都具有一种特殊的性质，即当取它们的厄米伴随时仍回到原来的算符。若 $\hat{B}$ 是这种算符，则

$$\hat{B}^\dagger = \hat{B},$$

我们称这种算符为“自伴”算符或“厄米”算符。

§20-2 平均能量

到目前为止，我们主要是使你回忆一下已经知道的东西。现在我们想要讨论一个新问题，如何求一个系统——譬如一个原子——的平均能量？如果一个原子处于某个确定能量的特殊状态，并且你去测量这个能量，则你将得到一个确定的能量 E 。如果你继续重复测量所有选定、处在相同状态的每一个原子，则所有测量结果都将是 E ，你多次测量的“平均”当然也就是 E 。

但是，现在如果你对某个非定态 $|\psi\rangle$ 进行测量，那么会发生什么情况呢？既然系统没有确定的能量，因此一次测量将给出一个能量，对处于同样状态的其他原子所作的相同测量将给出不同的能量，等等。对整个一系列的能量测量求平均，你会得出什么呢？

通过把态 $|\psi\rangle$ 投影到一组具有确定能量的态上，我们就能回答这个问题。为了提醒你这是一组特殊的基础态，我们将这些态称为 $|\eta$

$i\rangle$ 。态 $|\eta_i\rangle$ 中的每一个都有确定的能量 E_i ，在这个表象中，

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |\eta_i\rangle. \quad (20.10)$$

当你进行一次能量测量并得到某数值 E_i 时，你会发现系统处于态 $|\eta_i\rangle$ 。但是对每一次测量，你可能得到不同的数值。有时得到 E_1 ，有时得到 E_2 ，有时为 E_3 ，等等。观察到能量 E_1 的概率 就是该系统处于状态 $|\eta_1\rangle$ 的概率，这当然就是振幅 $C_1 = \langle \eta_1 | \psi \rangle$ 的绝对值的平方。找到各个可能的能量 E_i 的概率为

$$P_i = |C_i|^2. \quad (20.11)$$

这些概率与整个一系列能量测量的平均值有何关系呢？设想我们得到这样一系列的测量结果： $E_1, E_7, E_{11}, E_9, E_1, E_{10}, E_7, E_2, E_3, E_9, E_6, E_4$ ，等等；我们继续测量，譬如说测量了1 000次。当我们测完后，把所有的能量相加并用1 000去除，这就是我们所说的平均。把所有的数加起来也有一条捷径。你可以把得出 E_1 的次数加起来，譬如说为 N_1 ，然后把得出 E_2 的次数加起来，称之为 N_2 ，等等，所有能量的总和必定为

$$N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 + \cdots = \sum_i N_i E_i.$$

平均能量为此总和除以测量的总次数，总次数就是所有 N_i 之和，记为 N ，

$$E_{\text{平均}} = \frac{\sum_i N_i E_i}{N}. \quad (20.12)$$

我们已相当接近答案了。我们所指的发生某事的概率，正是我们期望发生的次数除以总的测试次数。对于大的 N ，比值 N_i/N 会非常接近于 P_i ，即非常接近于找到态 $|\eta_i\rangle$ 的概率；由于统计涨落， N_i/N 不会严格地等于 P_i 。让我们把这预测（或期望）的平均能量记为 $\langle E \rangle_{\text{平均}}$ ，则有

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \sum_i P_i E_i. \quad (20.13)$$

同样的论证适用于任何测量。测量的量 A 的平均值应等于

$$\langle A \rangle_{\text{平均}} = \sum_i P_i A_i,$$

式中 A_i 是被观察量的各种可能值， P_i 是得到该值的概率。

让我们回到量子力学状态 $|\psi\rangle$ ，它的平均能量为

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \sum_i |C_i|^2 E_i = \sum_i C_i^* C_i E_i. \quad (20.14)$$

注意这里的奥妙！首先，我们将该和写为

$$\sum_i \langle \psi | \eta_i \rangle E_i \langle \eta_i | \psi \rangle. \quad (20.15)$$

其次，把左边的 $\langle \psi |$ 当作公“因子”，我们可以把这个因子提到求和号外面，并把它写为

$$\langle \psi | \{ \sum_i | \eta_i \rangle E_i \langle \eta_i | \psi \rangle \},$$

这个表示式具有下列形式：

$$\langle \psi | \phi \rangle ,$$

这里 $|\phi\rangle$ 是由下式定义的某个“虚构”的态：

$$|\phi\rangle = \sum_i |\eta_i\rangle E_i \langle \eta_i | \psi \rangle. \quad (20.16)$$

换言之，如果你按数量 $E_i \langle \eta_i | \psi \rangle$ 选取各个基础态 $|\eta_i\rangle$ ，你就得到这个态。

现在回想一下态 $|\eta_i\rangle$ 是什么意思。它们假定是定态——所谓定态我们的意思是对每一个态

$$\hat{H} |\eta_i\rangle = E_i |\eta_i\rangle.$$

因 E_i 只是一个数，所以上式右边与 $|\eta_i\rangle E_i$ 相同，因而式 (20.16) 中的求和与下式一样，

$$\sum_i \hat{H} |\eta_i\rangle \langle \eta_i | \psi \rangle.$$

现在 i 只出现在缩并为1的熟知的组合中，所以

$$\sum_i \hat{H} |\eta_i\rangle \langle \eta_i | \psi \rangle = \hat{H} \sum_i |\eta_i\rangle \langle \eta_i | \psi \rangle = \hat{H} |\psi\rangle.$$

真是奇迹！式 (20.16) 与下式相同：

$$|\phi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (20.17)$$

态 $|\psi\rangle$ 的平均能量可以非常优美地写为

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle. \quad (20.18)$$

为了得到平均能量，就用 $\hat{H}$ 作用于 $|\psi\rangle$ 上，然后再乘以 $\langle \psi |$ ，结果很简单。

我们所得到的求平均能量的新公式不仅漂亮，而且也很有用。因为现在我们一点也不必提及任何特定的一组基础态了。我们甚至没有必要知道所有可能的能级。当进行计算时，我们需要用某组基础态来描述我们的态，但是如果我们知道了对于这组基础态的哈密顿矩阵 H_{ij} ，我们就能得到平均能量。式 (20.18) 表明，对任何 一组基础态 $|i\rangle$ ，平均能量可以由下式求得

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \sum_{ij} \langle \psi | i \rangle \langle i | \hat{H} | j \rangle \langle j | \psi \rangle, \quad (20.19)$$

式中振幅 $\langle i | \hat{H} | j \rangle$ 就是矩阵元 H_{ij} 。

让我们对具有确定能量的态 $|i\rangle$ 这种特殊情况来检验一下这个结果。对这种态， $\hat{H} |j\rangle = E_j |j\rangle$ ，所以 $\langle i | \hat{H} | j \rangle = E_j \delta_{ij}$ ，而

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \sum_{ij} \langle \psi | i \rangle E_j \delta_{ij} \langle j | \psi \rangle = \sum_i E_i \langle \psi | i \rangle \langle i | \psi \rangle,$$

这一表示式是正确的。

顺便指出，式 (20.19) 可以推广到其他物理量测量上，只要这些量可以用一个算符来表示。例如， $\hat{L}_z$ 是角动量 $\mathbf{L}$ 的 z 分量算符。态 $|$

$\psi\rangle$ 的 z 分量平均值为

$$\langle L_z \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{L}_z | \psi \rangle.$$

证明上式的一种方法是，想象某种情况，其能量正比于角动量。于是所有的论证用上述相同的步骤进行。

概括地讲，如果一个物理可观察量 A 与一个适当的量子力学算符 $\hat{A}$ 相联系，对态 $|\psi\rangle$ 来说 A 的平均值为

$$\langle A \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (20.20)$$

我们说这个式子表示

$$A_{\text{平均}} = \langle \psi | \phi \rangle, \quad (20.21)$$

而

$$|\phi\rangle = \hat{A} |\psi\rangle. \quad (20.22)$$

§20-3 原子的平均能量

假定我们想要知道一原子处在由波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 所描述的状态的平均能量，我们怎样去求呢？首先让我们来考虑一维的情况，此时态 $|\psi\rangle$ 由振幅 $\langle x | \psi \rangle = \psi(x)$ 来定义。我们要求用坐标表象的式(20.19)的特殊情况。依我们常用的步骤，我们用 $|x\rangle$ 和 $|x'\rangle$ 来代替态 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ ，并且把求和改成积分，得

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \iint \langle \psi | x \rangle \langle x | \hat{H} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle dx dx'. \quad (20.23)$$

如果愿意，我们可将这积分写为

$$\int \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle dx, \quad (20.24)$$

而

$$\langle x | \phi \rangle = \int \langle x | \hat{H} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle dx'. \quad (20.25)$$

式(20.25)中对 x' 的积分与第16章中式(16.50)及(16.52)的积分相同，并且等于

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x).$$

因此有

$$\langle x | \phi \rangle = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi(x). \quad (20.26)$$

记住 $\langle \psi | x \rangle = \langle x | \psi \rangle^* = \psi^*(x)$ ，利用这一等式，式(20.23)中的平均能量可写成

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^*(x) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi(x) dx. \quad (20.27)$$

给定波函数 $\psi(x)$ ，你就可通过完成这个积分而得到平均能量。现在你可以开始看出从态矢量的概念发展到波函数概念是怎样来回变换的。

式 (20.27) 括号中的量是一个代数算符 [1]，我们将其写成 $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

用这种记号，式 (20.23) 变为

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \int \phi^*(x) \hat{\mathcal{H}} \phi(x) dx. \quad (20.28)$$

这里所定义的代数算符 $\hat{\mathcal{H}}$ 当然与量子力学算符 $\hat{H}$ 不同。新算符作用于位置函数 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ 以给出一个 x 的新函数 $\phi(x) = \langle x | \phi \rangle$ ，而 $\hat{H}$ 作用于态矢量 $|\psi\rangle$ 给出另一态矢量 $|\phi\rangle$ ，根本不涉及坐标表象或任何特殊表象。即使在坐标表象中， $\hat{\mathcal{H}}$ 和 $\hat{H}$ 也不严格相同。如果我们选定在坐标表象中进行计算，我们将以矩阵 $\langle x | \hat{H} | x' \rangle$ 来解释 $\hat{H}$ ， $\langle x | \hat{H} | x' \rangle$ 以某种方式取决于两个“指标” x 和 x' ，即按照式 (20.25)，我们期望 $\langle x | \phi \rangle$ 通过积分而与所有的振幅 $\langle x | \psi \rangle$ 联系起来。另一方面，我们发现 $\hat{\mathcal{H}}$ 是一个微分算符。在 §16-5 中我们就已得出 $\langle x | \hat{H} | x' \rangle$ 和代数算符 $\hat{\mathcal{H}}$ 之间的联系。

我们应对我们所得的结果作一限制。我们业已假定振幅 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ 是归一化的。这个假定的意思是指标度的选取应使

$$\int |\psi(x)|^2 dx = 1,$$

所以，发现电子在 整个 x 区域内 的概率是 1。如果你用了未归一化的 $\psi(x)$ 来计算，则应当写成

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \frac{\int \psi^*(x) \hat{\mathcal{H}} \psi(x) dx}{\int \psi^*(x) \psi(x) dx}. \quad (20.29)$$

结果相同。

注意，式（20.28）与式（20.18）在形式的相似性，当你使用 x 表象时，这两种描写相同结果的方式是经常出现的。使用任何一个局域算符 $\hat{A}$ ，你就可以从第一种形式转变到第二种形式。所谓局域算符，是一个在积分

$$\int \langle x | \hat{A} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle dx'$$

中可以写成 $\hat{A}\psi(x)$ 的算符，这里 $\hat{A}$ 是一个微分代数算符。但是，有的算符就不是这样的；对于这种算符，你必须用式（20.21）和（20.22）的基本方程。

你们可以很容易地把这种推导推广到三维的情况，结果为^[2]

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^*(\mathbf{r}) \hat{\mathcal{H}} \psi(\mathbf{r}) d\text{Vol}, \quad (20.30)$$

而

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}), \quad (20.31)$$

并且要知道

$$\int |\psi|^2 d\text{Vol} = 1. \quad (20.32)$$

同样的这些式子可以直截了当地推广到具有几个电子的系统上去，而这里我们不再费心去写出这些结果。

应用式(20.30)，即使我们不知道原子的能级也能计算原子态的平均能量，我们所需要的只是波函数。这是一个重要的规律。我们将告诉你们一个有趣的应用。假定你们想知道某个系统的基态能量——譬如说氢原子，但因变量太多，所以由解薛定谔方程来求波函数太困难了。然而，假如你猜一下波函数——随便挑选一个函数——而计算其平均能量。这就是说，如果原子真的处在用这个波函数所描述的状态，则你们就可用式(20.29)——推广到三维情况——求出平均能量。这个能量肯定比基态能量高，因为基态能量是原子所可能具有的最低能量^[3]。现在选取另一个函数并计算它的平均能量。要是它低于你第一次选取的波函数所得到的能量，它就比较接近真正的基态能量了。如果你继续试用各种人为的状态，你就可能获得越来越低的能量，它越来越接近基态的能量。如果你很聪明，你会试用某种具有几个可调参量的函数，所算得的能量将以这些参量来表示，通过改变这些参量来得出最低的可能的能量，你试了整个一类函数。你终于发现，要得到更低的能量将越来越困难，并且开始相信已经相当接近最低的可能能量了。氢原子就是用这种方法解出的——不是解一个微分方程，而是造出一个具有许多可调参量的特殊函数，通过选择这些参量最终得出平均能量的最低可能值。

§20-4 位置算符

原子中电子位置的平均值是什么呢？对任何特定的态 $|\psi\rangle$ 坐标 x 的平均值是什么呢？我们将计算一维情况，而由你们自己把这种概念

推广到三维情况以及多于一个粒子的系统。设有一以 $\psi(x)$ 描述的状态，我们一次又一次地不断地测量 x ，平均值是什么呢？它是

$$\int x P(x) dx,$$

式中 $P(x) dx$ 为在 x 处的小范围 dx 内找到电子的概率。假定概率密度 $P(x)$ 随 x 的变化如图20-1所示，则此电子最可能在曲线的峰值附近被发现。 x 的平均值也在靠近峰值附近的地方，实际上，它就是曲线所围面积的重心（位置）。

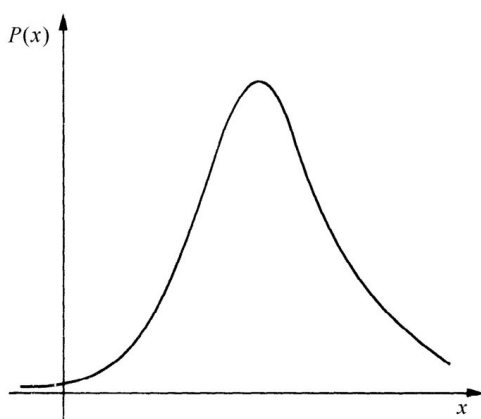


图20-1 表示一个定域粒子的概率密度曲线

早先我们已看到 $P(x)$ 就是 $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$ ，所以我们可以把对 x 的平均写成

$$\langle x \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^*(x) x \psi(x) dx. \quad (20.33)$$

我们所得的 $\langle x \rangle_{\text{平均}}$ 的式子与式(20.28)有相同的形式。对于平均能量，能量算符 $\hat{\mathcal{H}}$ 出现在两个 ψ 之间，而对于平均位置，正好是 x 。（如果愿意，你可以把 x 当作一个“用 x 相乘”的代数算符。）我们

可以把这种对比再加引申，用与式（20.18）相应的形式来表示平均位置。假设我们写出

$$\langle x \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \alpha \rangle \quad (20.34)$$

而

$$| \alpha \rangle = \hat{x} | \psi \rangle, \quad (20.35)$$

然后看看是否能找到这个产生状态 $| \alpha \rangle$ 的算符 $\hat{x}$ ，以使式（20.34）与式（20.33）相一致。这就是说，我们必须找到一个 $| \alpha \rangle$ ，使得

$$\langle \psi | \alpha \rangle = \langle x \rangle_{\text{平均}} = \int \langle \psi | x \rangle x \langle x | \psi \rangle dx. \quad (20.36)$$

首先，把 $\langle \psi | \alpha \rangle$ 在 x 表象中展开，它为

$$\langle \psi | \alpha \rangle = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \alpha \rangle dx. \quad (20.37)$$

现在比较上面最后两式的积分，你们看到在 x 表象中

$$\langle x | \alpha \rangle = x \langle x | \psi \rangle. \quad (20.38)$$

将 $\hat{x}$ 作用于 $| \psi \rangle$ 上以得到 $| \alpha \rangle$ ，相当于用 x 乘 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ 以得到 $\alpha(x) = \langle x | \alpha \rangle$ 。这样，我们就有了 $\hat{x}$ 在坐标表象中的定义^[4]。

[我们并没有费心去设法得出算符 $\hat{x}$ 在 x 表象中的矩阵。如果你有兴趣，你可设法证明

$$\langle x | \hat{x} | x' \rangle = x \delta(x - x'), \quad (20.39)$$

那么你能得到令人高兴的结果

$$\hat{x} | x \rangle = x | x \rangle. \quad (20.40)$$

算符 $\hat{x}$ 具有有趣的性质，当它作用于基础态 $|x\rangle$ 时，它相当于用 x 相乘。]

你想要知道 x^2 的平均值吗？它为

$$\langle x^2 \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^*(x) x^2 \psi(x) dx, \quad (20.41)$$

或者，如果你喜欢，可以写为

$$\langle x^2 \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \alpha' \rangle,$$

并且

$$| \alpha' \rangle = \hat{x}^2 | \psi \rangle. \quad (20.42)$$

这里 $\hat{x}^2$ 的意思是 $\hat{x} \cdot \hat{x}$ ——两个算符一个接一个地使用。有了第二种形式，你就可以用你想用的任何表象（基础态）来计算 $\langle x^2 \rangle_{\text{平均}}$ 。如果你想计算 x^n 或任何 x 的多项式的平均值，你会知道如何去求。

§20-5 动量算符

现在我们要计算电子的平均动量——仍限于一维的情形。设 $P(p) dp$ 为测得动量在 p 到 $p+dp$ 之间的概率。于是

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \int p P(p) dp. \quad (20.43)$$

现在设 $\langle p | \psi \rangle$ 为态 $|\psi\rangle$ 在确定动量的态 $|p\rangle$ 中的振幅，这就是我们在§16-3中称为 $\langle \text{动量 } p | \psi \rangle$ 的振幅，它是 p 的函数，就像 $\langle x | \psi \rangle$ 是 x 的函数一样。在该处，我们选取归一化的振幅，使得

$$P(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle p | \psi \rangle|^2. \quad (20.44)$$

于是我们有

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \int \langle \psi | p \rangle p \langle p | \psi \rangle \frac{dp}{2\pi\hbar}. \quad (20.45)$$

这个形式和 $\langle x \rangle_{\text{平均}}$ 非常相似。

要是我们愿意，我们完全可用求 $\langle x \rangle_{\text{平均}}$ 同样的方法来处理。首先，我们可以把上面的积分写成

$$\int \langle \psi | p \rangle \langle p | \beta \rangle \frac{dp}{2\pi\hbar}. \quad (20.46)$$

你们现在应该看出，此式就是振幅 $\langle \psi | \beta \rangle$ 的展开式——用确定动量的基础态来展开。由式 (20.45)，态 $|\beta\rangle$ 在动量表象中由下式定义

$$\langle p | \beta \rangle = p \langle p | \psi \rangle. \quad (20.47)$$

这样，我们可写出

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle, \quad (20.48)$$

并且

$$| \beta \rangle = \hat{p} | \psi \rangle, \quad (20.49)$$

上式中算符 $\hat{p}$ 是根据 p 表象而由式 (20.47) 定义的。

[再者，如果你愿意，可以证明 $\hat{p}$ 的矩阵形式为

$$\langle p | \hat{p} | p' \rangle = p \delta(p - p'), \quad (20.50)$$

而

$$\hat{p} | p \rangle = p | p \rangle, \quad (20.51)$$

结果与 x 的情况相同。]

现在出现了一个有趣的问题。虽然我们能像我们对式 (20.45) 和式 (20.48) 所做的那样来写出 $\langle p \rangle_{\text{平均}}$ ，并且知道算符 $\hat{p}$ 在动量表象中的意义，但我们应如何在坐标表象中解释 $\hat{p}$ 呢？就是说，当我们有了某个波函数 $\psi(x)$ 而想要求其平均动量必须知道什么。明白地讲，如果 $\langle p \rangle_{\text{平均}}$ 由式 (20.48) 给出，我们可以根据动量表象将该式展开而回到式 (20.46)。如果我们给出了态的 p 描述——振幅 $\langle p | \psi \rangle$ ，它是动量 p 的代数函数——则我们可以从式 (20.47) 得到 $\langle p | \beta \rangle$ ，再进一步算出积分。现在问题是：倘若我们给出了态在 x 表象

中的描述，即给出了波函数 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ ，那我们怎样处理呢？

我们首先将式（20.48）在 x 表象中展开，它为

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \beta \rangle dx. \quad (20.52)$$

然而，我们需要知道在 x 表象中态 $|\beta\rangle$ 是什么，如果我们能求出它，就可算出此积分。所以我们的问题在于求出函数 $\beta(x) = \langle x | \beta \rangle$ 。

我们可用下面的办法求得它。在§16-3中我们已知 $\langle p | \beta \rangle$ 与 $\langle x | \beta \rangle$ 的关系，根据式（16.24）

$$\langle p | \beta \rangle = \int e^{-ipx/\hbar} \langle x | \beta \rangle dx. \quad (20.53)$$

如果我们知道了 $\langle p | \beta \rangle$ ，那就可由此式解出 $\langle x | \beta \rangle$ 。当然，我们所希望的是以某种方式将结果用 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ 表示出来， $\psi(x)$ 是假定已知的。假设我们由式（20.47）开始，再次利用式（16.24）后写出

$$\langle p | \beta \rangle = p \langle p | \psi \rangle = p \int e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx. \quad (20.54)$$

既然上式是对 x 积分，就可以把 p 放到积分号里去，并写为

$$\langle p | \beta \rangle = \int e^{-ipx/\hbar} p \psi(x) dx. \quad (20.55)$$

把此式与式（20.53）相比较，你们会说 $\langle x | \beta \rangle$ 等于 $p\psi(x)$ 。不，不对！波函数 $\langle x | \beta \rangle = \beta(x)$ 仅与 x 有关，而与 p 无关，这就是整个问题之所在。

但是，某个机灵的人发现式（20.55）中的积分可用分部积分法来进行。 $e^{-i\mu x/\hbar}$ 对 x 的微商是 $(-i/\hbar)p e^{-i\mu x/\hbar}$ ，所以式（20.55）中的积分等于

$$-\frac{\hbar}{i} \int \frac{d}{dx} (e^{-i\mu x/\hbar}) \psi(x) dx.$$

如果进行分部积分，它成为

$$-\frac{\hbar}{i} [e^{-i\mu x/\hbar} \psi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\hbar}{i} \int e^{-i\mu x/\hbar} \frac{d\psi}{dx} \cdot dx.$$

只要我们讨论的是束缚态，所以当 $x = \pm\infty$ 时 $\psi(x)$ 趋向0，则括号内就为0，因而有

$$\langle p | \beta \rangle = \frac{\hbar}{i} \int e^{-i\mu x/\hbar} \frac{d\psi}{dx} dx. \quad (20.56)$$

现在把这结果与式（20.53）比较，你们看到

$$\langle x | \beta \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x). \quad (20.57)$$

至此，我们已有了能完成式（20.52）积分所必需的关系式。答案为

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) dx. \quad (20.58)$$

我们求得了式（20.48）在坐标表象中的形式。

现在你应开始看出一个有趣的图式展开。当我们问及态 $|\psi\rangle$ 的平均能量时，我们说它是

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle, \text{而} | \phi \rangle = \hat{H} | \psi \rangle.$$

在坐标表象中同样的事件被写为

$$\langle E \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^*(x) \hat{H} \psi(x) dx, \text{而} \phi(x) = \hat{H} \psi(x).$$

式中 $\hat{H}$ 为作用于 x 的函数的代数算符。当我们问及 x 的平均值时，我们发现它也能够写成

$$\langle x \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle, \text{而} | \alpha \rangle = \hat{x} | \psi \rangle.$$

在坐标表象中相应的方程式为

$$\langle x \rangle_{\text{平均}} = \int \psi^*(x) x \psi(x) dx, \text{而} \alpha(x) = x \psi(x).$$

当我们问及 p 的平均值时，我们写成

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle, \text{而} | \beta \rangle = \hat{p} | \psi \rangle.$$

在坐标表象中其等价的表示式为

$$\langle p \rangle_{\text{平均}} = \int \psi(x) \beta(x) dx, \text{而} \beta(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x).$$

在上面3个例子中，我们都从态 $|\psi\rangle$ 开始，由量子力学算符产生另一个（假设的）态。在坐标表象中，我们将代数算符作用在波函数 $\psi(x)$ 上来生成相应的波函数。有如下——对应关系（对一维问题）：

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &\longrightarrow \hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \\
 \hat{x} &\longrightarrow x, \\
 \hat{p}_x &\longrightarrow \hat{\mathcal{P}}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{20.59}$$

表 20-1

物 理 量	算 符	坐标形式
能 量	$\hat{H}$	$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r})$
位 置	$\hat{x}$	x
	$\hat{y}$	y
	$\hat{z}$	z
动 量	$\hat{p}_x$	$\hat{\mathcal{P}}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
	$\hat{p}_y$	$\hat{\mathcal{P}}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$
	$\hat{p}_z$	$\hat{\mathcal{P}}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$

在这个表中，我们对代数算符 $(\hbar/i)\partial/\partial x$ 引入符号 $\hat{\mathcal{P}}_x$ ：

$$\hat{\mathcal{P}}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x},
 \tag{20.60}$$

我们对 $\hat{\mathcal{P}}$ 加上下标 x 是为了提醒你们，我们只是与动量的 x 分量打交道。

你们很容易地把这结果推广到三维的情况，其余两个动量分量为

$$\begin{aligned}
 p_y &\longrightarrow \hat{\mathcal{P}}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \\
 p_z &\longrightarrow \hat{\mathcal{P}}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

如果愿意，你们甚至可以想到矢量 动量的算符，并写为

$$\hat{p} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}} = \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

式中 $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ 及 $\mathbf{e}_z$ 为3个坐标方向的单位矢量。如果我们写成如下形式, 则看起来更为漂亮,

$$\hat{p} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}} = \frac{\hbar}{i} \nabla. \quad (20.61)$$

总的结果是: 至少对某些量子力学算符, 在坐标表象中有相应的代数算符。我们把到目前为止所得的结果——推广到三维情况——总结列入表20-1中。对每一个算符, 我们有两个等价的形式^[5]:

$$|\phi\rangle = \hat{A} |\psi\rangle \quad (20.62)$$

或

$$\phi(\mathbf{r}) = \hat{A} \psi(\mathbf{r}). \quad (20.63)$$

现在我们举一些例子来说明这些概念的应用。第一个例子就是指出 $\hat{\mathcal{P}}$ 和 $\hat{\mathcal{H}}$ 之间的关系。如果使用 $\hat{\mathcal{P}}_x$ 两次, 则得

$$\hat{\mathcal{P}}_x \hat{\mathcal{P}}_x = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

这就意味着我们能够写出等式

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \{ \hat{\mathcal{P}}_x \hat{\mathcal{P}}_x + \hat{\mathcal{P}}_y \hat{\mathcal{P}}_y + \hat{\mathcal{P}}_z \hat{\mathcal{P}}_z \} + V(\mathbf{r}),$$

或者用矢量符号, 上式为

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \hat{\mathcal{P}} \cdot \hat{\mathcal{P}} + V(\mathbf{r}). \quad (20.64)$$

（在代数算符中，任何没有算符符号（ $\wedge$ ）的项就表示直接相乘。）此式很妙，因为要是你还没有忘记经典物理，就很容易记住它。每个人都知道（粒子的）能量（非相对论性）就是动能 $p^2/2m$ 加势能，而 $\hat{\mathcal{H}}$ 是总能量算符。

这结果给人们留下了很深的印象，所以他们在教学生量子力学之前，试图教给学生的都是经典物理学。（我们的想法不同！）但是这种类比常常引起误解。举个例说，当使用算符时，各种因子的顺序很重要，但在经典方程式中却不是这样的。

在第17章中，我们根据位移算符 $\hat{D}_x$ 用下式〔参见式（17.27）〕定义了算符 $\hat{p}_x$ ：

$$|\psi'\rangle = \hat{D}_x(\delta) |\psi\rangle = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \delta\right) |\psi\rangle, \quad (20.65)$$

式中 δ 是一小位移。我们应证明这个式子中的定义与我们新的定义是等价的。按照我们刚才所得出的，上式应与下式

$$\psi'(x) = \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \delta$$

有相同的意义。但此式右边正好是 $\psi(x+\delta)$ 的泰勒展开式，如果使态向左移动 δ （或将坐标向右移动相同的数量），你所得到的无疑就是 $\psi(x+\delta)$ 。所以 $\hat{p}$ 的两个定义相一致！

让我们用这个事实来说明另一些事情。假设有一群粒子处于某个复杂系统中，我们把它们记为1, 2, 3, ...。（为了简便起见仍限于一

维。)描述此状态的波函数是所有坐标 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 的函数。我们可把它写成 $\psi(x_1, x_2, x_3, \dots)$ 。现再将此系统(向左)移动 δ , 新的波函数

$$\psi'(x_1, x_2, x_3, \dots) = \psi(x_1 + \delta, x_2 + \delta, x_3 + \delta, \dots)$$

可以写成

$$\psi'(x_1, x_2, x_3, \dots) = \psi(x_1, x_2, x_3, \dots) + \left\{ \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \dots \right\}. \quad (20.66)$$

根据式(20.65), 态 $|\psi\rangle$ 的动量算符(我们称其为总动量)等于

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{总}} = \frac{\hbar}{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \dots \right\},$$

但此式就是

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{总}} = \hat{\mathcal{P}}_{x_1} + \hat{\mathcal{P}}_{x_2} + \hat{\mathcal{P}}_{x_3} + \dots. \quad (20.67)$$

动量算符也遵从总动量为各部分动量之和的规律。一切都很好地联系起来了, 并且我们所讲过的许多事情都是相互一致的。

§20-6 角动量

让我们随便看一下另一种运算——轨道角动量的运算。在第17章中, 我们根据 $\hat{R}_z(\phi)$ 定义了算符 $\hat{J}_z$, $\hat{R}_z(\phi)$ 是绕 z 轴旋转角度 ϕ 的算符。这里我们考虑只用一个波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 所描述的系统, $\psi(\mathbf{r})$ 只是坐

标的函数，并不考虑电子是否有朝上或朝下的自旋。这就是说，我们想暂时不去考虑电子的内禀角动量，而只考虑其轨道部分。为了区分清楚，我们称轨道算符为 $\hat{L}_z$ ，并且根据转动无限小角 ϵ 的算符由下式将它定义：

$$\hat{R}_z(\epsilon) |\psi\rangle = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{L}_z\right) |\psi\rangle.$$

（记住，这个定义仅适用于不包含内在的自旋变量的态 $|\psi\rangle$ ，它只与坐标 $\mathbf{r}=x, y, z$ 有关。）如果我们在绕 z 轴转过小角 ϵ 后的新坐标系中来看态 $|\psi\rangle$ ，我们所看到新的态为

$$|\psi'\rangle = \hat{R}_z(\epsilon) |\psi\rangle.$$

如果我们愿意在坐标表象中描写此态 $|\psi\rangle$ ——也就是用它的波函数 $\psi'(\mathbf{r})$ 来描写，我们可以把它写为

$$\psi'(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{L}_z\right) \psi(x). \quad (20.68)$$

$\hat{L}_z$ 是什么呢？从图20-2可以看出，在新坐标系中 x 和 y （实际上应是 x' 和 y' ，但我们把撇号省略了）处的一点 P 以前是在 $x - \epsilon y$ 和 $y + \epsilon x$ 处。因为电子位于 P 点的振幅不因坐标转动而改变，我们可以写出

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, z) &= \psi(x - \epsilon y, y + \epsilon x, z) \\ &= \psi(x, y, z) - \epsilon y \frac{\partial \psi}{\partial x} + \epsilon x \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned}$$

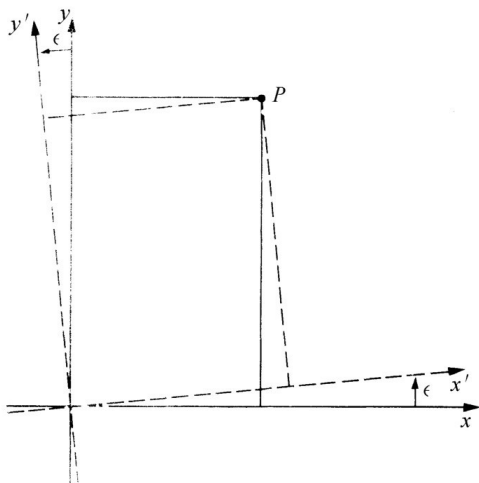


图20-2 坐标绕 z 轴转动一小角度 ϵ

(记住 ϵ 为小角度。)这意味着

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (20.69)$$

这就是我们的答案。但是注意，它等价于

$$\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x. \quad (20.70)$$

回到量子力学算符，我们可写为

$$\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x. \quad (20.71)$$

这公式很容易记忆，因为它很像经典力学中熟知的公式，即它很像

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (20.72)$$

的 z 分量。

算符问题的一个有趣的方面是把许多经典方程转变为量子力学的形式。哪些方程并非如此呢？最好有一些不成立，因为如果每个式子

都这样，则量子力学就没有什么区别了，也就没有新的物理学了。这里有一个式子就不一样，在经典物理中，

$$xp_x - p_x x = 0,$$

在量子力学中它是什么呢？即

$$\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = ?$$

让我们在 x 表象中把它算出来。为了明确起见，我们代入某个波函数 $\psi(x)$ ，于是有

$$x \hat{p}_x \psi(x) - \hat{p}_x x \psi(x),$$

或

$$x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} x \psi(x).$$

注意微商作用于它右边的每个部分。我们得出

$$x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \psi(x) - \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\hbar}{i} \psi(x). \quad (20.73)$$

结果不为零。整个运算就等于乘以 $-\hbar/i$ ：

$$\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = -\frac{\hbar}{i}. \quad (20.74)$$

假如普朗克常数为零，则经典结果和量子结果就会相同，那就不必要学量子力学了。

顺便提一下，如果任意两个算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ ，如下组合起来

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

而不为零时，则我们说“这两个算符不对易”，而像式（20.74）那样的等式称为它们的“交换定则”。你可以看出 $\hat{p}_x$ 和 $\hat{y}$ 的交换定则为

$$\hat{p}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{p}_x = 0.$$

还有另一个与角动量有关的非常重要的交换定则，它为

$$\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x = i\hbar\hat{L}_z. \quad (20.75)$$

作为练习，你可以用算符 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 自己来证明它。

有趣的是在经典物理中也有不对易的算符。当我们讨论在空间中的转动时就已见到过这种情况。如果你把某物体，例如一本书，先绕x轴旋转90°，然后绕y轴转90°，所得的结果与先绕y轴旋转90°、然后绕x轴转90°的结果不同。事实上式（20.75）的根源正是空间的这种性质。

§20-7 平均值随时间的变化

现在我们要向你们说明一些别的事情。平均值如何随时间变化呢？现在假定有一个算符 $\hat{A}$ ，它本身并不以明显的方式包含时间，我们的意思是指像 $\hat{x}$ 或 $\hat{p}$ 那样的算符。（我们不考虑像随时间而变化

的某种外来势的算符，诸如 $V(x, t)$ 。）现在我们计算在某态 $|\psi\rangle$ 的 $\langle A \rangle_{\text{平均}}$ ，它为

$$\langle A \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (20.76)$$

$\langle A \rangle_{\text{平均}}$ 与时间的关系怎样呢？它为何与时间有关呢？一个原因可能是算符本身明显地与时间有关——例如，如果它涉及像 $V(x, t)$ 这样的随时间变化的势。但是，即使算符与时间 t 无关，譬如说算符 $\hat{A} = \hat{x}$ ，其相应的平均值也可能与时间有关。粒子的平均位置当然可以移动。如果 $\hat{A}$ 与时间无关，这种运动如何由式 (20.76) 得出呢？态 $|\psi\rangle$ 可能随时间而变化。对于非定态，我们往往把该态写成 $|\psi(t)\rangle$ ，以明确地表示它对时间的依赖关系。我们要证明 $\langle A \rangle_{\text{平均}}$ 的变化率是由一个称为 $\hat{A}$ 的新算符给出的。记住 $\hat{A}$ 是一个算符，所以在 $\hat{A}$ 上加一点并不表示它对时间取微商，而仅为新算符 $\hat{A}$ 的一种写法，其定义为

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\text{平均}} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (20.77)$$

我们的问题是找出算符 $\hat{A}$ 。

首先，我们知道状态的变化率由哈密顿给出，明确地讲为

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (20.78)$$

这正是对我们哈密顿原来的定义的抽象写法：

$$i \hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_{ij} H_{ij} C_j \quad (20.79)$$

如果取式（20.78）的复数共轭，它等价于：

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = \langle \psi(t) | \hat{H}. \quad (20.80)$$

其次，看看如果我们将式（20.76）对 t 求微商，其结果将如何。既然 ψ 与 t 有关，则有

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\text{平均}} = \left(\frac{d}{dt} \langle \psi | \right) \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \left(\frac{d}{dt} | \psi \rangle \right). \quad (20.81)$$

最后，用（20.78）及（20.79）两式来代替上式中的微商，我们得到

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\text{平均}} = \frac{i}{\hbar} \{ \langle \psi | \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} \hat{H} | \psi \rangle \}.$$

此式与下式相同：

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\text{平均}} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) | \psi \rangle.$$

将此式与式（20.77）相比较，可看到

$$\hat{\dot{A}} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}). \quad (20.82)$$

这就是我们感兴趣的表述，它对任何算符 $\hat{A}$ 都成立。

顺便提一下，如果算符 $\hat{A}$ 本身就与时间有关，则必定有

$$\hat{\dot{A}} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (20.83)$$

现在让我们用几个例子来试一下式(20.82)，看它是否真的有意义。例如，什么算符与 $\hat{x}$ 相对应？我们说，它应该是

$$\hat{x} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H}). \quad (20.84)$$

这是什么呢？找出其意义的一种办法是，用 $\hat{\mathcal{H}}$ 的代数算符在坐标表象中把它算出来。在坐标表象中，对易式为

$$\hat{\mathcal{H}}x - x\hat{\mathcal{H}} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} x - x \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\}.$$

如果把它作用在任意波函数 $\psi(x)$ 上，并算出所有的微分，经过简单运算，最后可得

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d\psi}{dx}.$$

然而这正好与

$$-i \frac{\hbar}{m} \hat{\mathcal{P}}_x \psi$$

相同。所以我们得到

$$\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H} = -i \frac{\hbar}{m} \hat{p}_x, \quad (20.85)$$

或

$$\hat{x} = \frac{\hat{p}_x}{m}. \quad (20.86)$$

这是一个奇妙的结果，它意味着，如果 x 的平均值随时间而改变，则重心的移动等同于平均动量除以 m 。与经典力学完全相似。

再举一个例子。一个态的平均动量的变化率是什么？同样处理。它的算符是

$$\hat{p} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{p} - \hat{p} \hat{H}). \quad (20.87)$$

你仍然可以在 x 表象中运算。记住这时 $\hat{p}$ 变为 d/dx ，而且这意味着你将取势能 V （在 $\hat{\mathcal{H}}$ 中）的微商——但仅在 $\hat{\mathcal{H}}$ 的第二项中。结果这一项是唯一不被消去的一项，你得到

$$\hat{\mathcal{H}} \hat{p} - \hat{p} \hat{\mathcal{H}} = -i \hbar \frac{dV}{dx},$$

或

$$\hat{p} = - \frac{dV}{dx}. \quad (20.88)$$

又是经典的结果。式子的右边是力，所以我们已导出了牛顿定律！但是要记住——这些是关于算符的定律，只给出平均的量，它们并不描述原子内部运动的细节。

量子力学具有 $\hat{p} \hat{x}$ 不等于 $\hat{x} \hat{p}$ 这一本质上的差别，它们只差一点点——差一个很小的数值 $\hbar$ 。但是所有如干涉、波动等奇异复杂的现象都来自 $\hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x}$ 不完全为零这一点点事实。

有关这个概念的历史也是很有趣的。在1926年的几个月时间里，海森伯及薛定谔各自独立地发现描述原子力学的正确定律。薛定谔发

明了他的波函数 $\psi(x)$ 并找到了他的方程。另一方面，海森伯发现自然界可以用经典方程来描述，只是 $xp - px$ 应等于 $\hbar/i$ ，这结果可以通过用特殊的矩阵对它们定义而得到。用我们的话来讲，他使用了能量表象及其矩阵。海森伯的矩阵代数和薛定谔的微分方程都能解释氢原子。几个月以后，薛定谔就能证明这两种理论是等价的——如同我们在这里所看到的。但是量子力学的这两个不同的数学形式是各自独立地发明的。

[1] “算符” $V(x)$ 表示“用 $V(x)$ 相乘”。

[2] 我们把体积元写成 $dVol$ 。当然，它就是 $dx dy dz$ ，而对所有3个坐标积分都从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。

[3] 你也可以这样来考虑，你选用的任何函数（即态）都可写成具有确定能量的基础态的线性组合。既然在此组合中存在最低能量的态与许多较高能量的态的混合，则平均能量就要比基态能量高。

[4] 式(20.38)并不意味着 $|\alpha\rangle = x |\psi\rangle$ 。你们不可以把 $\langle x |$ 当作“因子”提出来，因为在 $\langle x | \psi \rangle$ 前面的乘子 x 是一个数，它对各个态 $\langle x |$ 都是不同的，它是电子在态 $|x\rangle$ 中的坐标值。参看式(20.40)。

[5] 在很多书中，对 $\hat{A}$ 及 $\hat{Q}$ 使用相同的符号，这是因为它们都代表相同的物理量，而且也因为写成不同的字母不方便。你们通常可以从上下文知道该用哪一个。

第21章 经典情况下的薛定谔方程：关于超导电性的讨论会

§21-1 磁场中的薛定谔方程

这一讲只是供消遣的。我想用稍微不同的方式来讲这章——看看怎样解决问题。不要以为我在尽最后一分钟的努力教你们一些新东西，在这种意义上说，这章内容并不是整个课程的一部分。相反，我设想我在对程度较高的听众，对那些已经受过量子力学训练的人，就这个题目举行一次讨论会或作一次研究报告。讨论会和正规讲课之间的主要区别在于，讨论会的报告人不必给出所有的步骤，或者所有的数学运算。他只说：“如果你这样那样去做，这就是所得的结果”，而不给出所有的详细证明。所以在这一章里，我将始终叙述概念，并且只给你计算的结果。你应该认识到并不期望你立刻理解每一件事，但相信（或多或少）如果你完成了这些步骤，就会算出这些结果。

撇开这些不谈，以下是一个我想要讲的课题，这是最近的、现代的，并且完全是一个正统的研究讨论班上的报告。我的题目是经典背景中的薛定谔方程——超导情形。

通常，出现在薛定谔方程中的波函数只适用于一个或两个粒子。而且波函数本身并不是具有经典意义的某种东西——不同于电场，或矢势或这种类型的东西。单个粒子的波函数是一种“场”——从它作为位置的函数意义上来说——但一般说来它并不具有经典的意义。然

而，在有些情况下，一个量子力学的波函数的确具有经典意义，这就是我想要讲的。物质在小尺度范围内所特有的量子力学行为，在大尺度范围通常感觉不到，除非在标准的方式中它得出牛顿定律——所谓经典力学定律。但是在某些情况中，量子力学的独特性能以特殊的方式在大尺度范围内呈现出来。

在低温情况下，当一个系统的能量减至非常非常低时，所牵涉的只是靠近基态的非常非常少的态，而不是大量的态。在这种情况下，基态的量子力学特征可以在宏观尺度上显示出来。这一讲的目的就是要说明量子力学与大尺度效应之间的联系——不是通常那种由量子力学平均而重新得出牛顿力学的讨论，而是一种特殊情况，在这种情况下，量子力学将在大的或“宏观”的尺度上产生它自己的特征效应。

作为开始，我将使你们想起某些薛定谔方程的性质^[1]。我想用薛定谔方程来描述一个粒子在磁场中的行为，因为超导现象涉及磁场。外磁场用矢势来描写，而问题在于：在矢势的情况下量子力学的定律是什么？描述矢势情况下的量子力学行为的原理是很简单的。有场存在时，粒子沿一定的路线从一处到另一处的振幅等于无场时沿同一路线的振幅乘以矢势的线积分乘上电荷除以普朗克常数^[2]后的指数（见图21-1）：

$$\langle b | a \rangle_{\text{在 } \mathbf{A} \text{ 中}} = \langle b | a \rangle_{A=0} \cdot \exp \left\{ \frac{iq}{\hbar} \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right\}. \quad (21.1)$$

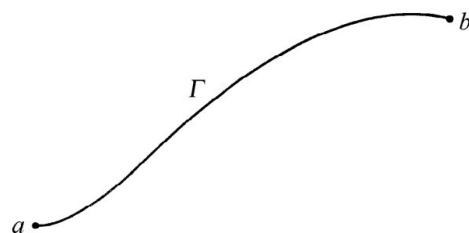


图21-1 沿路径 Γ 由 a 至 b 的振幅与 $\exp\left(\frac{iq}{\hbar} \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right)$ 成正比

它是量子力学的一个基本陈述。

在没有矢势时，带电粒子的薛定谔方程（非相对论性，无自旋）为

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \psi = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi + q\phi\psi, \quad (21.2)$$

式中 ϕ 是电势，从而 $q\phi$ 是势能^[3]。式（21.1）相当于下列陈述：在磁场中，哈密顿中的梯度在每一种情况下都用此梯度减去 $q\mathbf{A}$ 来代替，所以式（21.2）变为

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \psi = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi + q\phi\psi, \quad (21.3)$$

这就是带有电荷 q 的粒子在电磁场 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 中运动的薛定谔方程（非相对论性，无自旋）。

为了证明这是正确的，我想举一个简单的例子：我们有一列沿 x 轴不连续排列的原子，其间隔为 b ，当无外场存在时，电子从一个原子跳到另一个原子的振幅为 K ^[4]。按照式（21.1），如果在 x 方向有矢势 $A_x(x, t)$ ，则电子跳跃的振幅将从原来的振幅改变一个因子 $\exp[(iq/\hbar)A_x b]$ ，其中的指数是 $iq/\hbar$ 乘矢势从一个原子到下一个原

子的积分。为简便起见，我们令 $(q/\hbar)A_x \equiv f(x)$ ，因为 A_x 通常取决于 x 。如果将位于 x 的原子“ n ”处找到电子的振幅称为 $C(x) \equiv C_n$ ，那么振幅的变化率由下列方程给出

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} C(x) = E_0 C(x) - K e^{-ibf(x+\frac{b}{2})} C(x+b) - K e^{+ibf(x-\frac{b}{2})} C(x-b). \quad (21.4)$$

上式右边有3个部分。首先，如果电子位于 x 处，则有某个能量 E_0 。像通常那样，它给出 $E_0 C(x)$ 这项。其次，存在 $-KC(x+b)$ 这项，它是电子从位于 $x+b$ 处的原子“ $n+1$ ”向后跳一步的振幅。但是这发生在矢势中，该振幅的相位必定按照式 (21.1) 的规则移动。如果 A_x 在一个原子间隔范围内没有明显改变，那么积分可写为中间点的 A_x 值乘上间隔 b 。所以 $(iq/\hbar)$ 乘积分正好是 $bf(x+b/2)$ 。因为电子是往回跳的，所以我已证明这种相位移动带一负号。这就给出了第二部分。同样地，存在从另一边跳过来的一定的振幅，但这时我们需用在 x 另一边距离 $b/2$ 处的矢势，乘上距离 b 。这就是第三部分。总和即是在矢势中 x 处振幅的方程式。

现在我们知道，如果函数 $C(x)$ 足够平滑（我们取长波长极限）并且如果我们让原子靠得更近些，则式 (21.4) 将接近于电子在自由空间中的行为。所以下一步是假定 b 很小，将式 (21.4) 的右边以 b 的幂次展开。例如，若 b 为零，则右边正好是 $(E_0 - 2K) C(x)$ ，所以在零级近似下，能量为 $E_0 - 2K$ 。接下来是含 b 的项。但是因为两个指数函数具有相反的符号，所以只剩下 b 的偶次幂。因此你如果把 $C(x)$ ， $f(x)$ 和指数函数作泰勒展开，然后收集 b^2 的项，则得

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = E_0 C(x) - 2KC(x) - Kb^2 \{C''(x) - 2if(x)C'(x) - if'(x)C(x) - f^2(x)C(x)\}. \quad (21.5)$$

（“撇号”表示对 x 的微商。）

这个令人讨厌的组合看起来非常复杂，但是在数学上它与下式严格相同，

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial C(x)}{\partial t} = (E_0 - 2K)C(x) - Kb^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} - if(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} - if(x) \right] C(x). \quad (21.6)$$

第二个括号作用在 $C(x)$ 上得 $C'(x)$ 减去 $if(x)C(x)$ 。第一个括号作用在这两项上得 C'' 项和含有 $f(x)$ 的一次微商及 $C(x)$ 一次微商的项。现在记住，零磁场^[5]的解代表一个具有有效质量 $m_{\text{有效}}$ 的粒子， $m_{\text{有效}}$ 由下式给出

$$Kb^2 = \frac{\hbar}{m_{\text{有效}}}.$$

如果令 $E_0 = -2K$ ，并且代回 $f(x) = (q/\hbar)A_x$ ，你可以容易地验证式（21.6）与式（21.3）的第一部分相同。（势能项的来源是众所周知的，所以我不再把它包括在这个讨论中。）式（21.1）关于矢势以指数因子的方式改变全部振幅的陈述是与动量算符 $(\hbar/i)\nabla$ 用

$$\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}$$

来代替的规则相同的，正如你在薛定谔方程式（21.3）中所看到的。

§21-2 概率的连续性方程

现在我转向第二点。单粒子薛定谔方程的一个重要部分是：在某处找到粒子的概率由波函数绝对值的平方给出这一概念。从局域的意义上说概率守恒也是量子力学的特征。当在某处找到电子的概率减少，与此同时在另一处电子的概率增加（保持总概率不变），其中必有某种事情发生。换言之，如果概率在一个地方减少，而在另一处增加，则在其间必有某种流动，从这个意义上说电子具有一种连续性。例如，如果你在其间加一道墙，它就会有影响，概率就不同了。所以仅仅概率守恒并不是守恒定律的完整陈述，正如仅仅说能量守恒并不像局域的能量守恒^[6]那样深刻和重要。如果能量消失了，必定有相应的能量流动。同样，我们希望找出一种概率“流”，如果概率密度（单位体积内的概率）有任何改变，就可认为是由于某种流的流入或流出引起的。这种流应该是一个矢量，可以这样来理解这一矢量：其 x 分量是粒子在 x 方向每秒通过平行于 $y-z$ 平面的单位面积的净概率。沿 $+x$ 方向通行的认为是正流，向相反方向通行的认为是负流。

是否存在这种流呢？你们知道概率密度 $P(\mathbf{r}, t)$ 可用波函数表示为

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (21.7)$$

我现在问：是否存在这样的流 $\mathbf{J}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} ? \quad (21.8)$$

如果我对式（21.7）求时间的微商，就得到两项

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}. \quad (21.9)$$

现在对 $\partial\psi/\partial t$ 利用薛定谔方程——式(21.3)，并取它的复共轭以得出 $\partial\psi^*/\partial t$ ——每一个 i 都变号。你就得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar}\psi^* \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi + q\phi \psi^* \psi \\ & - \psi \frac{1}{2m} \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi^* - q\phi \psi \psi^*. \end{aligned} \quad (21.10)$$

势的各项和其他许多东西都可以消掉，而剩下的正好能写成一个完整的散度项。整个方程式就相当于

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2m} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi + \frac{1}{2m} \psi \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi^* \right\}. \quad (21.11)$$

这实际上并不像它看起来那样复杂。它是一个对称组合： ψ^* 乘以对 ψ 的某种运算，加上 ψ 乘以对 ψ^* 的复共轭运算。它是某个量加上它自己的共轭复数，所以其和为实数——它本应如此。这种运算可以这样去记忆：它正好是动量算符 $\hat{p}$ 减 $q\mathbf{A}$ 。我可以把式(21.8)中的流写为

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \left\{ \psi^* \left[\frac{\hat{p} - q\mathbf{A}}{m} \right] \psi + \psi \left[\frac{\hat{p} - q\mathbf{A}}{m} \right]^* \psi^* \right\}. \quad (21.12)$$

于是就有一个使式(21.8)得以完成的流 $\mathbf{J}$ 了。

式(21.11)表明概率是局域守恒的。如果一粒子在一区域消失，而且没有某种东西在中间流动，则它就不可能在另一个区域出现。设想最初的区域被一足够远的封闭面所包围，远到在该面上找到电子的概率为零。在此面内找到该电子的总概率为 P 的体积分。但是根据高

斯定理，散度 $\mathbf{J}$ 的体积分就等于 $\mathbf{J}$ 法向分量的面积分。如果 ψ 在表面处为零，式 (21.12) 表明 $\mathbf{J}$ 亦为零，所以在曲面内找到粒子的总概率不可能改变。只当有些概率向边界靠近时，才会有一些漏出。我们可以说它只能通过表面而漏出——这就是局域守恒。

§21-3 两类动量

关于流的方程是相当有趣的，而且有时也带来不少困扰。你会把流想象为粒子的密度乘上速度那种东西。密度应是 $\psi\psi^*$ 这种东西，这没有问题。式 (21.12) 中的每一项看上去像是算符

$$\frac{\hat{\mathcal{P}} - q\mathbf{A}}{m} \quad (21.13)$$

的平均值的典型形式，所以多半我们会把它想象为流动的速度。看来似乎我们对速度与动量的关系有两种意见，因为我们也认为动量除以质量 $\hat{\mathcal{P}}/m$ 应为速度。这两种速度相差一矢势。

碰巧在经典物理中也发现了这两种可能性，动量可以用两种方式定义^[7]。一种称为“运动学动量”，但为了完全清楚起见，我在这章里称它为“ $m\mathbf{v}$ 动量”，这是由质量乘速度而得到的动量。另一个（动量）是更数学化、更抽象的动量，有时称为“动力学动量”，而我将称它为“ p 动量”。这两种可能性是

$$m\mathbf{v} \text{ 动量} = m \mathbf{v}, \quad (21.14)$$

$$p \text{ 动量} = m \mathbf{v} + q \mathbf{A}. \quad (21.15)$$

这表明在量子力学里，在存在磁场的情况下，与梯度算符 $\hat{p}$ 相关的是 p 动量，所以得到式 (21.13) 是速度算符的结论。

我想暂时离开本题，告诉你们所有这些是什么意思，为什么在量子力学里必须有某些像式 (21.15) 这样的方程式。波函数按照式 (21.3) 的薛定谔方程随时间而变化。如果我突然改变矢势，波函数在最初的一刻并不改变，只有它的变化率改变。现在考虑一下在下列情况下将发生什么。假定我有一长螺线管，在其中可以产生一磁场 ($\mathbf{B}$ 场) 的通量，如图21-2所示。同时有一带电粒子待在附近。假定该通量几乎在一瞬间由零增至某个值。我从零矢势开始，然后加进一矢势。这意味着我突然产生了一个周界矢势 $\mathbf{A}$ 。你还记得 $\mathbf{A}$ 绕一回路的线积分与穿过这一回路的 $\mathbf{B}$ 的通量相同^[8]。现在如果我突然加进矢势将发生什么情况呢？根据量子力学方程， $\mathbf{A}$ 的突然变化并不引起 ψ 的突变，波函数仍是相同的。所以梯度也不变。

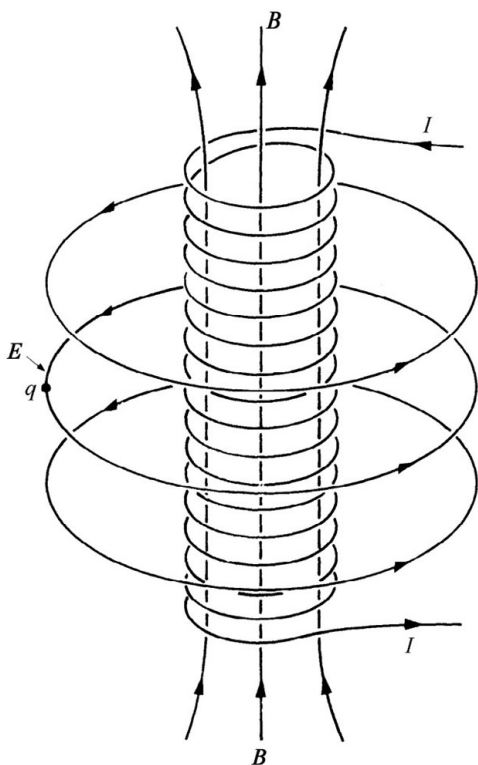


图21-2 在电流增加的螺线管外面的电场

但是记住，当我突然加进磁通量时，在电学方面发生的情况。在通量上升的短时间内，就有一个电场产生，电场的线积分等于磁通量的时间变化率：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (21.16)$$

如果通量迅速变化，则此电场是极大的，同时它给该粒子一作用力，该力为电荷乘电场。所以在通量增加的过程中，粒子获得一等于 $-q \mathbf{A}$ 的总冲量（就是 $m \mathbf{v}$ 的变化）。换言之，如果你在电荷处突然加一矢势，则该电荷立即获得一等于 $-q \mathbf{A}$ 的动量。但是有些东西并不立即改变，它就是 $m \mathbf{v}$ 和 $-q \mathbf{A}$ 之差。所以当你突然改变矢势时，二者之和 $\mathbf{p} = m \mathbf{v} + q \mathbf{A}$ 不改变。此量 $\mathbf{p}$ 就是我所说的 $\mathbf{p}$ 动量，在经典力学的动力学理论中它是一个重要的量，但它在量子力学中也有直接的意义。它取决于波函数的特性，并且认为它与算符

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

是相同的。

§21-4 波函数的意义

当薛定谔最初发现他的方程时，他发现式（21.8）的守恒定律是他的方程的结果。但是他错误地设想 P 是电子的电荷密度，而 $\mathbf{J}$ 是电流密度，所以他认为电子是通过这些电荷和电流与电磁场相互作用

的。当他对氢原子解出了他的方程并且算得 ψ 时，他并没有计算任何事件的概率——那时还没有振幅——于是解释就完全不同了。原子核是稳定的，但是有电流在其周围流动，电荷 P 和电流 $\mathbf{J}$ 将产生电磁场并将辐射光。他在解一些问题时立即发现结果不太正确。正是在这一点上玻恩对我们有关量子力学的观念作出了重要的贡献。玻恩根据概率幅的概念正确地（就我们所知）解释了薛定谔方程中的 ψ ，概率幅是一个非常难懂的概念，振幅的平方不是电荷的密度，而只是在某处单位体积内找到电子的概率，而且当你在某处找到电子时，电子的全部电荷就在该处。这整个思想都属于玻恩的。

于是原子里面的电子波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 并不描述弥散的、具有平滑的电荷密度的电子。电子不是在这里，就是在那儿，或者别的什么地方，但是它无论在什么地方都是一个点电荷。另一方面，我们可以设想一种情况，在这种情况下大量粒子处于完全相同的状态，其中非常多的粒子都具有完全相同的波函数。然后怎样呢？它们中的一个粒子在这里，另一个在那里，在一给定地点找到其中任何一个粒子的概率正比于 $\psi\psi^*$ 。但是由于存在如此多的粒子，所以如果我只看任何一个体积 $dx\,dy\,dz$ ，那么我通常将找到一个接近 $\psi\psi^* dx\,dy\,dz$ 的数。所以在大量粒子都处于相同的状态，而 ψ 是其中每一个粒子的波函数的情况下， $\psi\psi^*$ 可以解释为粒子的密度。在这种情况下，如果每个粒子带有相同的电荷 q ，那么，事实上我们可以进一步把 $\psi\psi^*$ 解释为电荷密度。正规地说， $\psi\psi^*$ 只给出概率密度的量纲，因此 ψ 应乘 q 才给出电荷密度的量纲。就我们现在的目的而言，我们可以把这个常数因子放到 ψ 中去，而把 $\psi\psi^*$ 本身当作电荷密度。根据这种理解， $\mathbf{J}$ （我们曾计算过的概率流）就直接变为电流密度了。

所以在许多粒子都处于完全相同状态的情况下，波函数就可能有一种新的物理解释。电荷密度和电流密度可直接从波函数计算出来，且可把波函数的物理意义推广到经典的宏观情况。

对于中性粒子也有类似的情形。当我们有了单个光子的波函数时，该波函数就是在某处找到光子的振幅。虽然我们一直没有写下光子波函数的式子，但是光子波函数也有一个与电子薛定谔方程相似的方程。光子的方程正好与电磁场的麦克斯韦方程组相同，并且它的波函数与矢势 A 相同。光子的波函数就是矢势。因为光子是没有相互作用的玻色子，许多光子可以处于相同的状态——正如你所知道的，它们喜欢处于同一状态，因此量子物理与经典物理是一回事。当有无数光子处于相同状态（也就是处在同一电磁波中）时，你就可以直接测量波函数，即矢势。当然，在历史上沿另一个方向进行。最初的观察是对处于相同状态的许多光子的情况进行的，所以我们可以通过在宏观水准上直接动手观察波函数的性质来发现单个光子的正确方程。

对于电子，问题是你不能在相同状态中放进多于一个的电子。因此，人们长期相信，薛定谔方程的波函数绝不会有一个类似于光子振幅的宏观表示。另一方面，现在认识到超导现象正是给我们显示出这种情况。

§21-5 超导电性

正如你所知，许多金属在低于某一温度（对于不同的金属此温度也不相同）时就变为超导体^[9]。当把温度降得足够低时，金属导电就没有电阻。这种现象已经在许多种（但不是全部）金属中观察到，而

这种现象的理论引起了很多困难。为了了解超导体内部发生的情况曾花费了很长的时间，而就我们目前的目的而言我们只作适当的描述。原来这是由于电子与晶格中原子的振动间的相互作用，使得电子之间有一个微小的净有效吸引^{~~~~~}，结果使电子合在一起，如果非常定性和粗糙地讲，就是电子形成束缚对。

现在你知道，单个电子是费米粒子。但是一束缚对表现得像玻色子。因为，如果我交换一个对中的两个电子，我就两次改变了波函数的符号，这意味着我没有改变任何东西。因此一个对是一个玻色子。

成对的能量——即净的吸引力——是非常非常弱的，只要有很小的温度升高，热骚动就能使这两个电子分开变回到“正常”电子。但是当你把温度降到足够低，以至它们尽可能进入绝对最低的能量状态时，它们就聚集成对。

我不希望你把束缚对想象成真像一个点粒子那样很紧密地结合在一起。事实上，了解这种现象的最大困难之一的根源就在于事情并非如此。形成对的两个电子实际上散布在一个相当大的距离上，对之间的平均距离相对地小于单个对的大小。几个对在同一时间占据着同一空间。关于在金属中电子形成对的原因以及在形成对时放出的能量的估计，这两者都是最近取得的成就。超导理论中的这个基本要点，首先在巴丁、库珀和施里弗的理论中得到了解释^[10]，但这不是本章的主题。然而，我们将接受电子确实以这种或那种方式形成对的概念，并且我们可以把这些对想象成或多或少地表现得像粒子，因此我们可以谈论关于一个“对”的波函数。

现在，这种对的薛定谔方程多少有点像式（21.3）。有一个区别是现在的电荷 q 为电子电荷的两倍。同时，我们不知道在晶格中对

惯性或有效质量，所以我们不知道对 m 要代入什么数值。我们也不应该认为如果达到很高频率（或短波长），这也是正确的形式，因为与极其快速变化的波函数相对应的动能可以大到使对解体。在有限的温度下，根据玻尔兹曼理论总有一些束缚对破裂。一个对破裂的概率正比于 $\exp(-E_{\text{对}}/kT)$ 。没有被束缚在对中的电子叫做“正常”电子，它们以普通的方式在晶体内运动。然而，我将只考虑基本上为零度的情况——或者，无论如何，我将不顾那些由不在对中的电子所造成的复杂情况。

因为电子对是玻色子，当一给定的状态中存在着很多电子对时，其他的对具有特别大的振幅进入同一状态。所以几乎所有的对都被锁定在最低能量的完全相同的状态——很不容易使其中一个对进入另一个状态。进入相同状态的振幅比进入未被占据的状态的振幅要大一个著名因子 $\sqrt{n}$ ，这里 $n-1$ 是最低态的占有数。所以我们认为所有的对都在同一个状态中运动。

那么我们的理论将会像什么呢？我将把 ψ 称为处于最低能量状态的对的波函数。但是，因为 $\psi\psi^*$ 将要与电荷密度 ρ 成正比，我不妨把 ψ 写成电荷密度的平方根乘上某个相因子：

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (21.17)$$

式中 ρ 和 θ 都是 $\mathbf{r}$ 的实函数。（当然，任何复数函数也可以写成这样。）当我们谈到电荷密度时，我们的意思指什么是很清楚的，但是，波函数的相位 θ 的物理意义是什么呢？那么，让我们来看一看把 $\psi(\mathbf{r})$ 代入方程式（21.12）时发生些什么，并且用这些新变量 ρ 和 θ

来表示电流密度。它仅是变量的变换，我不想写出全部运算步骤，其结果为

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \left(\nabla \theta - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right) \rho. \quad (21.18)$$

因为电流密度和电荷密度对超导电子气具有直接的物理意义，所以 ρ 和 θ 两者都是实在的东西。相位就像 ρ 一样是可观察量，它是电流密度 $\mathbf{J}$ 的一部分。绝对的相位不是可观察量，但是如果各处的相位梯度知道的话，相位就知道了，除了差一个常数。你可以在一点上定义相位，并且各处的相位也就确定了。

顺便提一句，当你把电流密度 $\mathbf{J}$ 想象为实际上是电荷密度乘上电子流的运动速度即 $\rho \mathbf{v}$ 时，就能够把电流方程分析得更精细一些。于是式（21.18）就相当于

$$m\mathbf{v} = \hbar \nabla \theta - q\mathbf{A}. \quad (21.19)$$

注意 $m \mathbf{v}$ 动量有两部分，一部分是来自矢势的贡献，另一部分是来自波函数行为的贡献。换句话说，量 $\hbar \nabla \theta$ 正好就是我们说过的 p 动量。

§21-6 迈斯纳效应

现在我们可以来叙述某些超导现象了。首先是没有电阻，之所以没有电阻是因为所有的电子都聚集在同一状态。在正常的电流中你可把一个电子或别的电子从有规则的电流中打出来，逐渐使整体的动量退化。但是在这里要使一个电子偏离所有其他电子的行为是非常困难

的，因为所有玻色子都有进入同一状态的趋势。电流一旦产生了，就永远保持下去。

如果你有一块处于超导态的金属，并且加上一不太强（我们将不去详细地讨论到底有多强）的磁场，则此磁场不能穿过该金属，这现象也是容易理解的。如果你建立起磁场，其中有一部分磁场建立在金属内部，则会有一个产生电场的磁通量的变化率，而根据楞次定律，该电场会立即产生一反抗该通量的电流。既然所有的电子将一起运动，所以一个无限小的电场将产生足够的电流，以完全抵消任何外加的磁场。所以你如果将一金属冷却至超导态后加上磁场，则该磁场将被排除。

一个由迈斯纳通过实验发现的有关现象更为有趣^[11]。如果你有一块处于高温的金属（所以它是正常导体），并且建立一穿过该金属的磁场，然后你把温度降到临界温度（这时金属变为超导体）以下，磁场就被排除出去。换言之，金属中突然出现它自己的电流——其大小正好把磁场推出去。

我们可以在方程中看到关于产生这种现象的原因，我愿意来解释一下。假定我们取一整块超导材料，在任何稳定情况下，电流的散度必然为零，因为电流无处可流。为方便起见我们选取使 $\mathbf{A}$ 的散度等于零。（我应该解释一下为什么选择这样的约定不会失去普遍性，但是我不想花这个时间。）取式（21.18）的散度，则拉普拉斯算符作用于 θ 等于零。等一等，请问 ρ 的变化怎样呢？我忘记提及一个要点，由于在金属中存在原子离子的晶格，所以它具有一个正电荷背景。如果电荷密度 ρ 是均匀的，就没有净电荷和电场。如果在一区域内有电子的积聚，电荷就不会中和，在那里就有一巨大的排斥力使电子分离^[12]

。所以在正常情况下，超导体内电子的电荷密度几乎是完全均匀的——我可以取 ρ 为常数。唯一可使 $\nabla^2 \theta$ 在金属块内每一处皆为零的办法是 θ 为一常数。这就意味着 p 动量对 $\mathbf{J}$ 没有贡献。于是式（21.18）表明电流与 ρ 乘 $\mathbf{A}$ 成正比。所以在块超导物质内的每个地方，电流必定与矢势成正比：

$$\mathbf{J} = -\rho \frac{q}{m} \mathbf{A}. \quad (21.20)$$

因为 ρ 和 q 有相同的（负）符号，而 ρ 又为常数，所以我可以设 $\rho q/m = -$ （某个正常数），于是

$$\mathbf{J} = - \text{（某个正的常数）} \mathbf{A}. \quad (21.21)$$

这个方程最初是由H.伦敦和F.伦敦^[13]提出用来解释超导电性的实验观察结果的，这是在了解此效应的量子力学起因之前很久的事。

现在我们可以把式（21.20）用到电磁的方程中去以求关于场的解。矢势与电流密度的关系为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J}. \quad (21.22)$$

如果我对 $\mathbf{J}$ 采用式（21.21），则得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \lambda^2 \mathbf{A}, \quad (21.23)$$

式中 λ^2 就是一个新常数，

$$\lambda^2 = \rho \frac{q}{\epsilon_0 m c^2}. \quad (21.24)$$

现在我们试着解此方程求 A ，并且看看出现些什么细节。例如，在一维情况下式 (21.23) 具有形式为 $e^{-\lambda x}$ 和 $e^{+\lambda x}$ 的指数解。这些解表示当由表面深入到材料内部时，矢势必然指数式减少。（它不能增加，否则将是一个爆炸。）如果金属块比 $1/\lambda$ 大很多，那么磁场只透入表面一薄层——厚度约为 $1/\lambda$ 。整个内部的其余部分皆无磁场。如图 21-3 所示。这就是迈斯纳效应的解释。

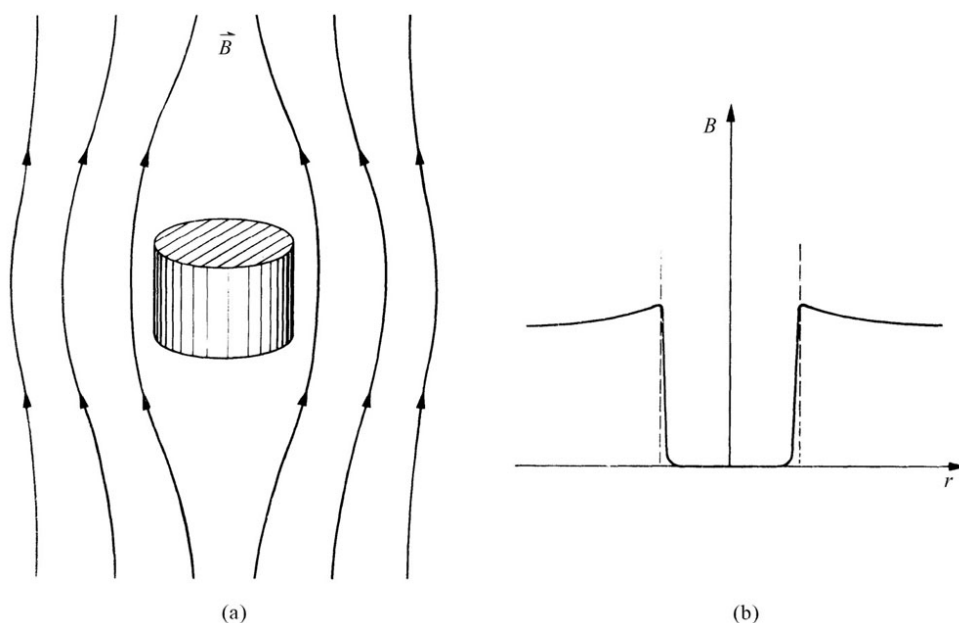


图 21-3 (a) 磁场中的超导圆柱体；(b) 磁场 B 作为 r 的函数

距离 λ 有多大？记住 r_0 是电子的“电磁半径” ($2.8 \times 10^{-13} \text{ cm}$)，它由下式给出

$$mc^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

还得记住，式 (21.24) 中的 q 是电子电荷的两倍，所以

$$\frac{q}{\epsilon_0 mc^2} = \frac{8\pi r_0}{q_e}.$$

把 ρ 写成 $q_e N$ ，这里 N 是每立方厘米中电子的数目，我们有

$$\lambda^2 = 8\pi N r_0. \quad (21.25)$$

对于像铅这样的金属，每立方厘米有 3×10^{22} 个原子，所以如果每个原子只贡献出一个传导电子， $1/\lambda$ 大致为 2×10^{-6} cm，它给出了这个量的数量级。

§21-7 通量的量子化

伦敦方程（21.21）的提出是为了说明所观察到的包括迈斯纳效应在内的超导电性实验事实。然而近来有了更富有戏剧性的预言。伦敦提出的预言太奇特了，以至到最近才受到人们较多的注意。我现在来讨论它。假定这次我们不用一整块材料，而用一厚度大于 $1/\lambda$ 的环，如果开始我们加一穿过此环的磁场，然后使环冷却到超导状态，接着再移去原来的 $\mathbf{B}$ 源，我们来看看在这种情况下会发生些什么。事件发生的先后次序画在图21-4上。在正常态时环的体内将有场，如图21-4（a）所示。当环成为超导态时磁场被迫排除在材料之外（正如我们刚才看到的）。还有一些通量穿过环中的孔，如图（b）所示。如果现在移去外磁场，穿过孔的磁力线将被“陷俘”，如图（c）所示。穿过中心的通量 Φ 不能减少，因为 $\partial\Phi/\partial t$ 必须等于 $\mathbf{E}$ 绕环的线积分，而在超导体内这是零。当外磁场移去后，超导电流开始绕环流动以保持穿过

环的通量为一常数。（这是旧的涡流概念，只是电阻为零。）然而，这些电流都靠近表面流动（至 $1/\lambda$ 的深度），同样可以用我们对实心金属块的分析方法来证明。这些电流能够使磁场保持在环体之外，并且产生一个永久的陷俘磁场。

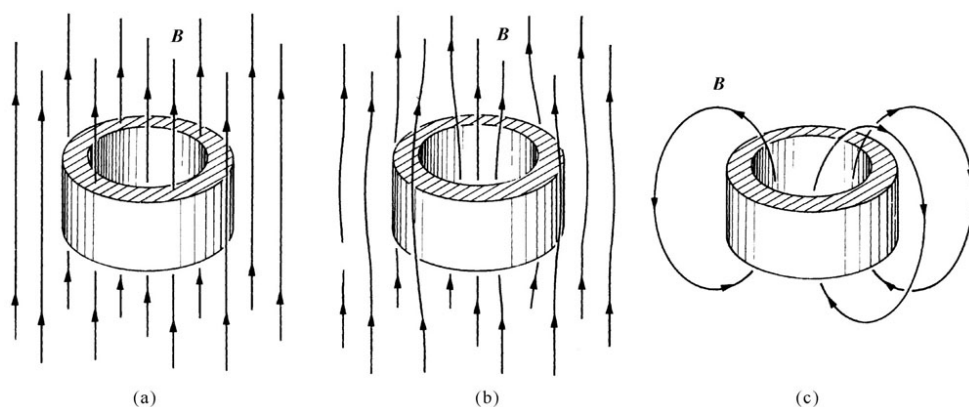


图21-4 在磁场中的环：（a）处于正常态；（b）处于超导态；（c）外磁场移去后

然而，现在有一个基本的区别，而且我们的方程预言了一个惊人的效应。上面我们所作出的在实心块中 θ 必为一常数的论证，对环不适用，你可以从下面的论证看到。

我们知道在环体内部电流密度 $\mathbf{J}$ 为零，所以由方程式（21.18）得么。由式（21.26），

$$\hbar \nabla \theta = q \mathbf{A}. \quad (21.26)$$

如果我们取 $\mathbf{A}$ 绕曲线 Γ 的线积分，该曲线在环的横截面中心附近绕环一周，所以它绝不会靠近表面，如图21-5所示，我们来考虑在这种情况下得到些什

$$\hbar \oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{s} = q \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (21.27)$$

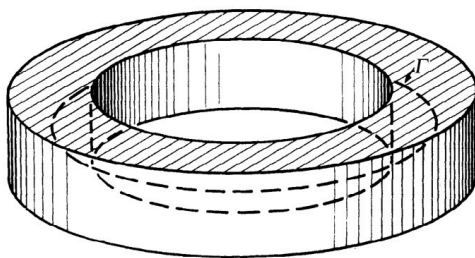


图21-5 超导环内的曲线 Γ

现在你已知道， $\mathbf{A}$ 绕任何回路的线积分都等于穿过该回路的 $\mathbf{B}$ 通量

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \Phi.$$

式 (21.27) 变为

$$\oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\hbar} \Phi. \quad (21.28)$$

一函数梯度从一点到另一点（譬如从点1到点2）的线积分等于该函数在这两点的值之差。即

$$\int_1^2 \nabla \theta \cdot d\mathbf{s} = \theta_2 - \theta_1.$$

如果我们设此两端点1和2重合在一起，使积分曲线构成一闭合回路，起初你会认为 θ_2 将等于 θ_1 ，从而式 (21.28) 中的积分将为零。对于一简单连接的超导体中的闭合回路，这是对的，但是对于一环状超导体它就未必正确。我们能够作出的唯一物理上的要求是：每一点波函数只可能有一个值。不论 θ 绕环如何变化，当回到出发点时，你必须得到波函数的相同值

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}.$$

若 θ 改变 $2\pi n$ （ n 是任意整数），就出现这一情况。所以如果我们绕环一整圈，式（21.27）的左边必为 $\hbar \cdot 2\pi n$ 。利用式（21.28），得

$$2\pi n \hbar = q\Phi. \quad (21.29)$$

陷俘磁通量必定总是 $2\pi\hbar/q$ 的整数倍！ 如果你把环看作为一个具有理想的完全（即无限大）导电性的经典物体，那么你会认为最初发现的穿过该物体的通量将始终保留在那儿——任何数值的通量能够完全被陷俘。但是超导的量子力学理论告诉我们通量只能是 $0, 2\pi\hbar/q, 4\pi\hbar/q, 6\pi\hbar/q$ ，等等，而无介于它们之间的值。它必然是一基本的量子力学单位的倍数。

伦敦^[14]预言被一超导环陷俘的通量是量子化的，并指出此通量的可能值由式（21.29）给出，其中 q 等于电子电荷。按照伦敦的预言通量的基本单位应是 $2\pi\hbar/q_e$ ，约为 4×10^{-7} 高斯·厘米²。为使这种通量形象化，想象一直径为0.1 mm的小圆柱，当它含有这样多的通量时，内部磁场大约是地球磁场的百分之一。用一灵敏的磁测量装置应能观察到这一通量。

1961年迪弗和费尔班克^[15]在斯坦福大学寻找并发现了这一量子化的通量，差不多与此同时多尔和奈鲍尔^[16]在德国也发现了这一量子化的通量。

在迪弗和费尔班克的实验中，超导体的细小圆柱是由1 cm长的56号（ 1.3×10^{-3} cm直径）铜线电镀一薄层锡制成的。锡在3.8K以下成为超导体，而铜仍为正常金属。将该导线放在一可控的小磁场中，并将温度降低到锡变成超导为止，然后将磁场外源移去。你会预期由于楞次定律这将产生一电流，结果导线内部的通量保持不变。这时小圆柱应有一与内部通量成正比的磁矩。此磁矩可以通过导线在小圆柱两端的一对小线圈里面上下轻轻跳动（就像缝纫机的针一样，但其频率为100 Hz）而测得。线圈内的感应电压即为此磁矩的量度。

当迪弗和费尔班克做这个实验时，他们发现通量是量子化的，但是其基本单位只有伦敦所预言的一半大。多尔和奈鲍尔得到相同的结果。起初这是十分难理解的^[17]，但是现在我们已了解为什么会那样了。根据巴丁、库珀和施里弗的超导理论，出现在式（21.29）中的 q 是一电子对的电荷，所以它等于 $2q_e$ 。基本的通量单位是

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar}{q_e} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ 高斯} \cdot \text{厘米}^2 \quad (21.30)$$

或是伦敦所预言的数值的一半。现在一切都吻合了，并且测量表明在大尺度范围内所预言的纯量子力学效应是存在的。

§21-8 超导动力学

迈斯纳效应和通量量子化是关于我们一般概念的两个证据。只是为了完整起见我希望说明一下，从这个观点出发完整的超导流体方程将是怎样的——这颇为有趣。到现在为止我只把 ψ 的表示式代入电荷密度和电流密度的方程式。如果把它代入完整的薛定谔方程，就得出

关于 ρ 和 θ 的方程。因为我们这里有一个具有电荷密度 ρ 和不可思议的 θ 的电子对的“流体”，所以看看能导出什么方程是很有趣的——我们可以试试，看一下对这种“流体”能得到什么类型的方程！所以我们将式（21.17）的波函数代入薛定谔方程（21.3），并记住 ρ 和 θ 是 x ， y 和 z 的实函数。如果我们把方程的实部和虚部分开，于是就得到两个方程。为了把它们写成比较简洁的形式，可根据式（21.19）写成

$$\frac{\hbar}{m} \nabla \theta - \frac{q}{m} \mathbf{A} = \mathbf{v}. \quad (21.31)$$

于是我得到的方程之一是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \rho \mathbf{v}. \quad (21.32)$$

因为 $\rho \mathbf{v}$ 是最初的 $\mathbf{J}$ ，所以这刚好又是连续性方程。我所得到的另一个方程告诉我们 θ 如何变化，它是

$$\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{m}{2} v^2 - q\phi + \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 (\sqrt{\rho}) \right\}. \quad (21.33)$$

如果我们认为 $\hbar \theta$ 是“速度势”——除了应该是流体压缩能的最后一项具有对密度 ρ 的相当特殊的依赖关系外，对流体力学非常熟悉的人（我相信你们中这种人不多）将会认出：这是一个带电流体的运动方程。无论如何，该方程表明：量 $\hbar \theta$ 的变化率由动能项 $mv^2/2$ ，加上一势能项 $-q\phi$ ，和另一附加项给出，该附加项包含因子 $\hbar^2$ ，我们可称之为“量子力学能”。我们已经知道，在超导体内部静电力的作用将 ρ 保持得非常均匀，所以倘若我们只有一个超导区域，那么在所有的具体应用中，我们无疑可以忽略这一附加项。如果两个超导体之间存在

一个边界（或者 ρ 值可以急剧变化的其他情况），则这项就变得很重要。

对于不很熟悉流体力学方程的人，我可以利用式（21.31）用 $\mathbf{v}$ 表示 θ ，从而将式（21.33）重新写成物理意义更为明确的形式。对整个方程式（21.33）取梯度，并利用式（21.31）以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{v}$ 来表示 $\nabla\theta$ ，我得到

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{q}{m} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right]. \quad (21.34)$$

这方程的意义是什么呢？首先，记住

$$-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}, \quad (21.35)$$

其次，注意如果我取式（21.19）的旋度，我得到

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{q}{m} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.36)$$

因为梯度的旋度恒为零。但 $\nabla \times \mathbf{A}$ 是磁场 $\mathbf{B}$ ，所以式（21.34）的前两项可以写为

$$\frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

最后，你应了解 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 代表流体在一点的速度的变化率。如果你注意一个特定的粒子，它的加速度是 $\mathbf{v}$ 的全微商或者在流体动力学中有时称为“共动加速度”，它与 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 的关系[\[18\]](#)为

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{共动}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (21.37)$$

这一额外的项也出现在方程式 (21.34) 右边的第三项中，把它移到左边，我可以将式 (21.34) 写成下列形式：

$$m \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{合运动}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right]. \quad (21.38)$$

由式 (21.36) 我们有

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{q}{m} \mathbf{B}. \quad (21.39)$$

这两个方程是超导电子流体的运动方程。第一个方程只不过是带电流体在电磁场中的牛顿定律。它说明流体中的每一个电荷为 q 的粒子的加速度来自普通的洛伦兹力 $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 再加上一个附加力，该附加力是某个神秘的量子力学势的梯度——除了在两个超导体之间的连接处外，该力不很大。第二个方程说明流体是“理想的”—— $\mathbf{v}$ 的旋度有零散度（ $\mathbf{B}$ 的散度恒为零）。这意味着速度可以用速度势来表示。通常对理想流体我们写为 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ，但是对于在磁场中的理想带电流体来说，应修改成式 (21.39)。

所以，超导体内电子对的薛定谔方程给了我们一个带电理想流体的运动方程。超导电性与带电液体的流体动力学问题相同。如果你想解任何有关超导体的问题，你就应用这些对流体的方程〔或用与其等价的一对方程式 (21.32) 和式 (21.33)〕，并将它们与麦克斯韦方程相结合，以求得场。（你用来计算场的电荷和电流当然必须包括从超导体和从外源来的那些电荷和电流。）

顺便说一说，我认为式（21.38）并不十分正确，还应该有一个涉及密度的附加项。这新的项并不取决于量子力学，而是来自与密度变化有关的普通能量。正如在普通流体中那样，应该有一个 ρ 和 ρ_0 的偏差的平方成正比的势能密度，这里 ρ_0 为未受扰动时的密度（它在这里也等于晶格的电荷密度）。因为存在与这个能量的梯度成正比的力，所以在式（21.38）中会有另外一项，其形式为：（常数） $\nabla (\rho - \rho_0)^2$ 。这一项不能从分析中得到，因为它来自粒子之间的相互作用，而在应用独立粒子近似中我把它忽略了。然而，它正是我在定性分析中所提到过的力，那时我指出静电力趋向于使 ρ 在超导体内近乎保持一个常数。

§21-9 约瑟夫森结

我接下来想讨论一个很有趣的情况，它是约瑟夫森在分析两个超导体间的联结处可能发生些什么时注意到的^[19]。假定我们有两个以一薄层绝缘材料相联结的超导体，如图21-6所示。这种装置现在称为“约瑟夫森结”。如果绝缘层很厚，则电子不能穿过它，但是，如果绝缘层足够薄，则电子有相当的横跃过此薄层量子力学振幅。这不过是量子力学势垒穿透的另一个例子。约瑟夫森分析了这种情况，并且发现应该出现许多奇异的现象。

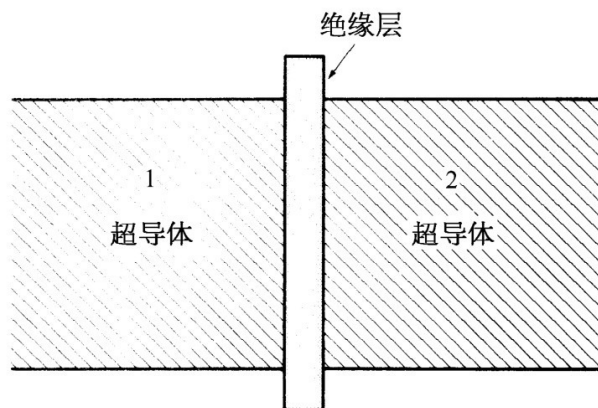


图21-6 薄绝缘层隔开的两个超导体

为了分析这种结，我将把在一边找到电子的振幅叫作 ψ_1 ，而在另一边找到它的振幅叫 ψ_2 。在超导态，波函数 ψ_1 是所有的电子在一边的共同的波函数，而 ψ_2 是在另一边的相应波函数。我可以对不同种类的超导体来解这个问题，但是让我们取一个非常简单的情况，即两边为相同的材料，从而结既对称又简单。再有，我们暂时假设不存在磁场。于是这两个振幅应该有如下的关系：

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = U_1 \psi_1 + K \psi_2,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = U_2 \psi_2 + K \psi_1.$$

常数 K 是结的一个特征常数。如果 K 为零，这两个方程只描述各个超导体具有能量为 U 的最低能量状态。但是通过振幅 K ，两边有耦合，可从一边渗透到另一边。（它就是双态系统的“翻转”振幅。）如果两边相同，则 U_1 应等于 U_2 ，我就可以把它们消去。但是现在假定我们把两个超导区域联至电池两端，使得结两边有一电势差 V 。于是

$$U_1 - U_2 = qV.$$

为了方便起见，我们可定义结的中央为能量的零点，则此两方程为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \frac{qV}{2} \psi_1 + K\psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{qV}{2} \psi_2 + K\psi_1. \end{aligned} \quad (21.40)$$

这是两个量子力学态耦合在一起的标准方程。这次让我们用另一种方法来分析这些方程。我们作下述代换

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1}, \\ \psi_2 &= \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2}. \end{aligned} \quad (21.41)$$

式中 θ_1 和 θ_2 是结两边的相位，而 ρ_1 和 ρ_2 是该结两边的电子密度。记住在实际应用中， ρ_1 和 ρ_2 几乎完全相同且等于 ρ_0 ， ρ_0 为超导材料中电子的正常密度。现在如果你把这个关于 ψ_1 和 ψ_2 的方程代入式(21.40)，并且令每一种情况的实数和虚数部分分别相等，你就得到4个方程。为简单起见，设 $(\theta_2 - \theta_1) = \delta$ ，则结果为

$$\dot{\rho}_1 = +\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin \delta, \quad (21.42)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin \delta,$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \delta - \frac{qV}{2\hbar}, \quad (21.43)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \delta + \frac{qV}{2\hbar}.$$

前面两个方程说明 $\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$ 。“但是”，你说，“如果 ρ_1 和 ρ_2 皆为常数且等于 ρ_0 ，则 $\dot{\rho}_1$ 和 $\dot{\rho}_2$ 必定都为零”。这种说法不完全对。这些

方程并不是全部的情况。它们只说明如果不存在因电子流体与正离子背景之间的不平衡而造成的额外电力， $\dot{\rho}_1$ 和 $\dot{\rho}_2$ 应该是什么。它们告诉我们密度怎样开始变化，因而描述即将开始流动的电流种类。这个从边1到边2的电流就是 $\dot{\rho}_1$ （或 $-\dot{\rho}_2$ ），或

$$J = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta. \quad (21.44)$$

该电流将立即对区域2充电。不过 我们已经忘记了这两边是由导线联结在电池上的了，因为电流将流动以保持电势恒定，所以流动的电流并不对区域2充电（或对区域1放电）。这些来自电池的电流不包括在我们的方程中。当它们被包括进去时， ρ_1 和 ρ_2 事实上并不改变，但穿过结的电流仍由式（21.44）给出。

既然 ρ_1 及 ρ_2 确实保持恒定且等于 ρ_0 ，我们令 $2K\rho_0/\hbar = J_0$ ，并写成

$$J = J_0 \sin \delta. \quad (21.45)$$

于是和 K 一样， J_0 是表示这一特定结的特征数。

另一对方程式（21.43）告诉我们关于 θ_1 和 θ_2 的情况。我们感兴趣的是用于式（21.45）的差 $\delta = \theta_2 - \theta_1$ ，我们所得到的

$$\dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{qV}{\hbar}, \quad (21.46)$$

这意味着我们可以写出

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt, \quad (21.47)$$

式中 δ_0 是 $t=0$ 时的 δ 值。再记住 q 是电子对的电荷，即 $q=2q_e$ 。在式（21.45）和式（21.47）中，我们得到一个重要结果，就是约瑟夫森结的一般理论。

现在来看看结果如何。首先，加一直流电压。如果你加上直流电压 V_0 ，则正弦的自变量就变为 $[\delta_0 + (q/\hbar)V_0 t]$ 。因 $\hbar$ 是一个小的数量（与通常的电压和时间相比），所以此正弦振荡相当迅速，并且没有什么净电流。（实际上，因为温度不为零，所以你会得到一个因“正常”电子的传导而形成的小电流。）另一方面，如果结上的电压为零，你反而能够得到电流！无电压时的电流可以是 $+J_0$ 和 $-J_0$ 之间的任何值（取决于 δ_0 的值）。但是若在结上试加一电压，电流反而趋于零。这种奇特的行为最近已在实验中观察到^[20]。

还有另一种获得电流的方法——在直流电压上再加一个频率很高的电压。令

$$V = V_0 + v \cos \omega t,$$

式中 $v \ll V_0$ 。于是 $\delta(t)$ 为

$$\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t + \frac{q}{\hbar} \frac{v}{\omega} \sin \omega t.$$

对于 Δx 很小的情形，

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x.$$

对 $\sin\delta$ 应用这一近似，得

$$J = J_0 \left[\sin\left(\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t\right) + \frac{q}{\hbar} \frac{v}{\omega} \sin \omega t \cos\left(\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t\right) \right].$$

第一项平均为零，但是如果

$$\omega = \frac{q}{\hbar} V_0,$$

则第二项不为零。如果交流电压正好为此频率，则应有电流。夏皮罗[21]宣称已观察到这样一种共振效应。

如果你查看一下论述这个题目的文章，你将会发现他们常把电流的公式写成

$$J = J_0 \sin\left(\delta_0 + \frac{2q_c}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right). \quad (21.48)$$

式中积分取为穿过结。写成这样的理由是，当存在穿过结的矢势时，要按照我们以前解释过的方式修改翻转振幅的相位。如果你一直追踪这一额外的相位，则得到上面的结果。

最后，我想描述一个很富有戏剧性而又有趣的实验，它是最近完成的分别来自两个结的电流的干涉实验。在量子力学中我们都很熟悉来自两个不同狭缝的振幅干涉。现在我们来做两个结之间的干涉，它是由电流经过不同路径到达时的相位差异所引起的。在图21-7中，我给出了两个并联的不同结“ a ”和“ b ”。 P 端和 Q 端联至电学仪器上，它测量任何流过的电流。外部的电流 $J_{\text{总}}$ 是通过两个结的电流之和，设 J_a 和 J_b 是流过两个结的电流，并设它们的相位为 δ_a 和 δ_b 。无论你走这

条或那条路线， P 和 Q 之间的波函数的相位差必定相同。沿着通过结“ a ”的路线， P 和 Q 之间的相位差为 δ_a 加上矢势沿图中上面路线的线积分：

$$\Delta \text{ 相位}_{P \rightarrow Q} = \delta_a + \frac{2q_c}{\hbar} \int_{\text{上}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (21.49)$$

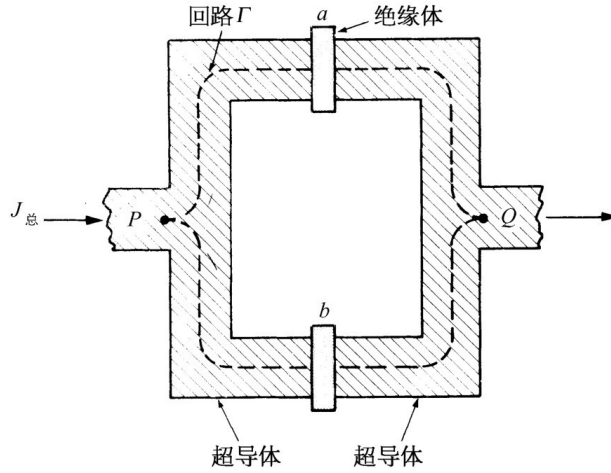


图 21-7 两个并联的约瑟夫森结

为什么呢？因为 θ 与 $\mathbf{A}$ 的关系为式 (21.26)。如果你沿某一路线对该方程进行积分，则左边给出相位的改变，正如我们在这里所写的那样，它正好与 $\mathbf{A}$ 的线积分成正比，沿图中下面的路线相位变化可以类似地写为

$$\Delta \text{ 相位}_{P \rightarrow Q} = \delta_b + \frac{2q_c}{\hbar} \int_{\text{下}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (21.50)$$

这两个相位差必须相等，如果我把它们相减，则得到 δ 的差必然是 $\mathbf{A}$ 沿回路的线积分：

$$\delta_b - \delta_a = \frac{2q_c}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

这里积分是沿图21-7中穿过两个结的闭合回路 Γ 。对 $\mathbf{A}$ 的积分就是通过回路的磁通量。所以两个 δ 之差为 $2q_c/\hbar$ 乘上穿过回路的两支路之间区域的磁通量 Φ ：

$$\delta_b - \delta_a = \frac{2q_c}{\hbar} \Phi. \quad (21.51)$$

我可以通过改变回路上的磁场来控制这个相位差，所以我能够调节这个相位差，看看流过结的总电流是否显示这两部分的任何干涉。总电流将是 J_a 和 J_b 之和。为了方便起见，我们写成

$$\delta_a = \delta_0 - \frac{q_c}{\hbar} \Phi, \quad \delta_b = \delta_0 + \frac{q_c}{\hbar} \Phi.$$

于是

$$\begin{aligned} J_{\text{总}} &= J_0 \left\{ \sin\left(\delta_0 - \frac{q_c}{\hbar} \Phi\right) + \sin\left(\delta_0 + \frac{q_c}{\hbar} \Phi\right) \right\} \\ &= J_0 \sin \delta_0 \cos \frac{q_c \Phi}{\hbar}. \end{aligned} \quad (21.52)$$

现在我们对 δ_0 一无所知，而大自然能够根据环境随意调节它。尤其是，它将取决于我们加在结上的外加电压。然而，无论我们做什么， $\sin \delta_0$ 永远不可能大于1。所以对于任何给定的 Φ ，电流的极大值为

$$J_{\text{max}} = J_0 \left| \cos \frac{q_c \Phi}{\hbar} \right|.$$

这个极大电流将随 Φ 而变化，每当

$$\Phi = n \frac{\pi \hbar}{q_e},$$

时，它本身为最大，此处 n 为整数。这就是说在磁通匝连数正好具有我们在式（21.30）中得出的量子化数值时，电流有极大值！

最近对穿过两个结的约瑟夫森电流，作为两结之间区域内的磁场的函数进行了测量^[22]。其结果如图21-8所示。存在一个普遍的背景电流，它们来自各种被我们忽略的效应。但是伴随磁场变化的电流的快速振荡是由式（21.52）中的干涉项 $\cos q_0 \Phi / \hbar$ 引起的。

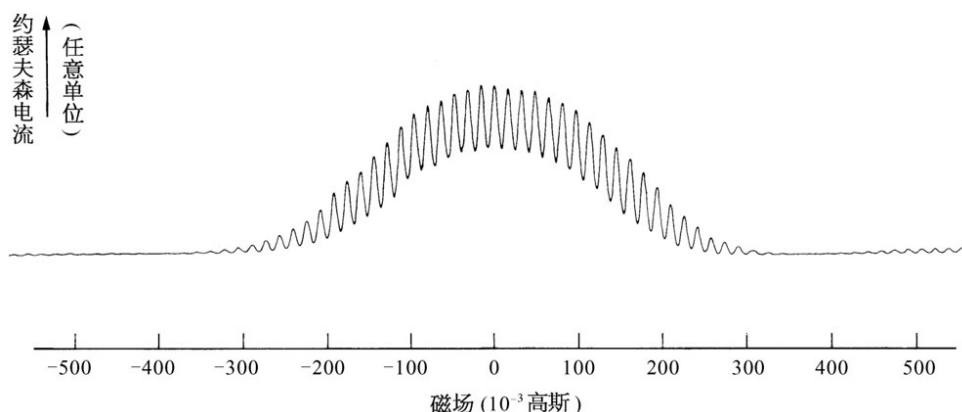


图21-8 穿过一对约瑟夫森结的电流记录

显示电流是两个结之间区域的磁场的函数（参见图21-7）。[此记录由福特汽车公司科学实验室的R. C. Jaklevic, J. Lambe, A. H. Silver及J. E. Mercereau提供。]

在没有场的地方矢势是否存在，这是关于量子力学的一个迷人的问题^[23]。我刚才描述的这个实验，也用置于两个结之间的细小螺线管来做过，此时唯一有效的磁场 $\mathbf{B}$ 在螺线管的内部，而在超导导线本身上的磁场微不足道。据报道电流的量值根据该螺线管内部的磁通量

而振荡，即使该磁场从不接触导线——这是矢势是“物理实在”的又一个证明^[24]。

我们不知道接下来将出现什么。但是来看看能做成些什么吧！首先注意，两个结之间的干涉可以用来做成一个灵敏磁强计。如果把一对结所包围的面积做成，譬如说 1 mm^2 ，则在图21-8的曲线上极大值之间的间隔为 2×10^{-6} 高斯。分辨出两个峰之间距离的1/10是完全可能的，所以用这种结测量小到 2×10^{-7} 高斯的磁场应该是没有问题的——或者可以如此精度来测量较大的磁场。我们甚至能走得更远些。例如，假定我们把一组10个或20个结以相同的间隔放在一起，于是我们就会有10个或20个狭缝之间的干涉，并且当我们改变磁场时，我们将得到非常尖锐的极大值和极小值。我们可以有一个用于测量磁场的20个或者甚至为100个狭缝的干涉仪，而不是两个狭缝的干涉。或许我们可以预言，磁场的测量——用量子力学的干涉效应——将最终变得和光的波长测量一样精密。

这些都是关于现代所发生的事情的一些例证——晶体管、激光以及现在的这些结，它们最终的实际应用仍属未知。1926年所发现的量子力学已经有了近40年的发展历史，而且相当突然地开始在许多实用方面得到利用。我们正在非常精美的水准上取得对自然界的控制。

很遗憾，要参加这项冒险活动，尽快学习量子力学是绝对必要的。我们的希望是在这门课程中找到一种方法，使你们能尽早了解这一部分物理学的奥秘。

[1] 实际上我不是提醒你们，因为以前我并没有给你们说明过这些方程，但是别忘了这个讨论会的精神。

[2] 第2卷, §15-5。

[3] 注意不要与我们以前使用的关于状态的标记 ϕ 相混淆。

[4] K 与无磁场时线型晶格问题中称为 A 的量相同。见第13章。

[5] §13-3。

[6] 第2卷§27-1。

[7] 例如, 见 J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc. New York (1962), p.408。(中文版: 杰克逊 著, 朱培豫 译。《经典电动力学》, 高等教育出版社§6.8, 1978年6月第一版。1983年第四次印刷。——译者注)

[8] 第2卷第14章§14-1。

[9] 首先由开米林-昂尼斯 (Kamerlingh-Onnes) 在1911年发现。H. Kamerlingh-Onnes, *Comm. Phys. Lab. Univ. Leyden. Nos.* 119, 120, 122 (1911)。你可以在 E.A. Lyuton 所著的 *Superconductivity*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962 中找到精彩的最新的讨论。

[10] J. Bardeen, L.N. Cooper 和 J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957)。

[11] W. Meissner and R. Ochsenfeld, *Naturwiss.* **21**, 787 (1933)。

[12] 事实上, 如果电场太强, 对将破裂, 所产生的“正常”电子将进入任何正电荷存在的区域, 以使其中和。还有产生正常电子也需要能量, 所以主要的一点是近乎均匀的密度 ρ 在能量上是非常有利的。

[13] F. London 和 H. London, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A149**, 71 (1935); *physics* **2**, 341 (1935)。

[14] F. London. Superfluids, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950, Vol.I, p.152.

[15] B.S. Deaver. Jr and W.M. Fairbank, *Phys. Rev. Letter* **7**, 43 (1961)。

[16] R. Doll 及 M. Nabauer, *Phys. Rev. Letters* **7**, 51 (1961)。

[17] 昂萨格 (Onsager) 曾提出这是可能发生的 (Deaver and Fairbank, Ref 11), 虽然别人都不了解为什么。

[18] 见第2卷§40-2。

[19] B.D. Josephson, *Physics Letters* **1**, 251 (1962)。

[20] P.W. Anderson and J.M. Rowell, *Phys .Rev .Letters* **10** , 230 (1963) .

[21] S. Shapiro, *Phys .Rev .Letters* **11** , 80 (1963) .

[22] Jaklevic, Lambe, Silver and Mercereau, *Phys .Rev .Letters* **12** , 159 (1964) .

[23] Jaklevic, Lambe, Silver and Mercereau, *Phys .Rev .Letters* **12** , 274 (1964) .

[24] 见第2卷第15章§15-5。

费曼的结束语

好，我已经给你们讲了两年的课，现在我就要停下来了。在有些方面我愿意道歉，而在另一些方面却不必要。我希望——事实上，我知道——你们中有二三十人怀着极大的兴趣听懂了所有的内容，并且学习得很愉快。但是我也知道，“除了在那些实际上并非必要的幸运情况下，许多课是很少有成效的”。所以对你们中已经懂得所有内容的二三十人，我可以说，我并没有做什么事，只不过把这些内容告诉了你们。对于其他的人，如果我使你憎恨这门学科，那我感到抱歉。我以前从未教过基础物理，我向你们表示歉意。我只希望我没有给你们带来过多的麻烦，而且希望你不会离开这个令人激动的事业。我希望别的人能以不致使你倒胃口的方法把这些教给你，并使你有朝一日终于发现它并不像看起来那样令人可怕。

最后，请允许我再说一句，我教这门课的主要目的不是替你为应付某种考试作准备——甚至也不是为你参加工业部门或军事部门工作作准备。我极希望告诉你怎样鉴赏这奇妙的世界以及对物理学家看待这一世界的方式，我相信这是真正的现代文化的一个主要部分。（或许其他学科的教授会反对这种看法，但我相信他们是完全错误的。）

你或许不仅欣赏这种文化，甚至还可能想要加入这早已开始了的人类心智最伟大的冒险中来。

索引

一画

一维晶格

one-dimensional lattice

乙烯分子

ethylene molecule

二画

丁二烯分子

butadiene molecule

三画

三苯基环丙烷基

triphenyl cyclopropenyl

三维晶格

three-dimensional lattice

与时间有关的状态

time-dependent states

干涉的振幅

interfering amplitudes

四画

不相容原理 exclusion principle

厄米伴随 Hermitian adjoint

中性K介子 neutral K-meson

中性 π 介子 neutral pion

牛顿, I. Newton, I.

双态系统 two-state systems

双缝干涉 two-slit interference

反质子 antiproton

反物质 antimatter

反粒子 antiparticle

五画

叶绿素分子 chlorophyll molecule

世界的基础态 base states of the world

代数算符 algebraic operator

对易规则 commutation rule

正载流子 positive carriers

本征态 eigenstates

本征值	eigenvalues
半导体结	semiconductor junction
电子组态	electron configuration
电子-空穴对	electron-hole pairs
电荷密度	electric charge density
电偶极子矩阵元	electric dipole matrix element

六画

西岛	Nishijima
多普勒效应	Doppler effect
迈斯纳效应	Meissner effect
负载流子	negative carriers
全同粒子	identical particles
自旋1粒子	spin-one particles
自旋1/2粒子	spin one-half particles
自旋1/2粒子的进动	precession of spin one-half particles
自旋波	spin waves
自旋-轨道相互作用	spin-orbit interaction

动力学 (p) 动量	dynamical momentum
动量	momentum
动量算符	momentum operator
汤川势	Yukawa potential
光子	photon
光子的偏振态	polarization states of photon
光的吸收	absorption of light
导带	conduction band
约瑟夫森结	Josephson junction
轨道角动量	orbital angular momentum
七画	
伴随	adjoint
里德伯能量	Rydberg energy
角动量	angular momentum
角动量的合成	composition of angular momentum
运动学 (mv) 动量	mv momentum
运动学动量	kinematic momentum

狄拉克, P

Dirac, P.

八画

苯分子

benzene molecule

金刚石晶格

diamond lattice

受主

acceptor

态矢量的分解

resolution of state vector

变换振幅

transforming amplitudes

经典极限

classical limit

奇异性

strangeness

奇异数守恒

conservation of strangeness

泡利自旋交换算符

Pauli spin exchange operator

泡利自旋矩阵

Pauli spin matrices

波节

wave nodes

波包

wave packet

波函数

wave function

周期表

periodic table

转动矩阵

rotation matrix

势能	potential energy
佩斯	Pais
	九画
结	Junction
施主位	donor site
独立粒子近似	independent particle approximation
玻尔半径	Bohr radius
玻尔兹曼因子	Boltzmann factor
玻色子	Bose particles
玻恩	Born, M.
氢（原子）的波函数	hydrogen wave functions
氢的超精细分裂	hyperfine splitting in hydrogen
（相）干涉振幅	interfering amplitudes
重子	baryons
费米子	Fermi particles
矩阵	matrix
哈密顿矩阵	Hamiltonian matrix

十画

海森伯, W.

Heisenberg, W.

通量的量子化

flux quantization

高斯定理

Gauss'theorem

铁磁晶体

ferromagnetic crystal

振幅

amplitudes

振幅概率

amplitudes probability

振幅对时间的依存关系

time dependence of amplitudes

振幅与空间有关部分

space dependence of amplitudes

振幅变换

transformation of amplitudes

核力

nuclear force

核子

nucleon

能级

energy level

能级图

energy level diagram

能量守恒

conservation of energy

能量图

energy diagram

载流子

carriers

氨分子	ammonia molecule
氨分子的状态	states of ammonia molecule
氨微波激射器	ammonia maser

十一画

氩	krypton
深红色（品红）	magenta
掺杂半导体	impure semiconductors
球对称解	spherically symmetric solution
球谐函数	spherical harmonics
液氦	liquid helium
基态	ground state
勒让德函数	Legendre function

十二画

锂	lithium
锌	zinc
量子力学	quantum mechanics

量子力学共振	quantum mechanical resonance
量子数	quantum numbers
晶格中的传播	crystal lattice propagation
晶格的缺陷	crystal lattice imperfections
晶体衍射	crystal diffraction
晶体管	transistor
晶格中的传播	propagation in a crystal lattice
黑体光谱	blackbody spectrum
超导（电）性	superconductivity
普朗克常量	Planck's constant
散射振幅	scattered amplitude
确（一）定能量的状态	states of definite energy

十三画

硼	boron
塞曼分裂	Zeeman splitting
概率分布	probability distribution
概率（振）幅	probability amplitude (s)

概率密度	probability density
------	---------------------

十四画

算符	operator (s)
----	--------------

磁矩	magnetic moments
----	------------------

磁波子	magnons
-----	---------

十五画

镓	gallium
---	---------

十六画

激子	exciton
----	---------

激发态	excited state
-----	---------------

霍尔效应	Hall effect
------	-------------

激光	laser
----	-------

薛定谔, E.	Schrödinger, E.
---------	-----------------

薛定谔方程	Schrödinger equation
-------	----------------------

整流结

rectifying junction

n 型半导体

n -type semiconductors

p 动量

p -momentum

p 型半导体

p -type semiconductors

σ (西格马) 质子

sigma proton

σ 矢量

sigma vector

σ (西格马) 电子

sigma electron

σ (西格马) 矩阵

sigma matrices

附录

本书涉及的非法定计量单位换算关系表

单位符号	单位名称	物理量名称	换算系数
bar	巴	压强，压力	$1 \text{ bar}=10^5 \text{ Pa}$
Cal	大卡	热量	$1 \text{ Cal}=1 \text{ kcal}$
cal	卡 [路里]	热量	$1 \text{ cal}=4.186 \text{ J}$
dyn	达因	力	$1 \text{ dyn}=10^{-5} \text{ N}$
f, fa, fathom	英寻	长度	$1 \text{ f}=2 \text{ yd}=1.8288 \text{ m}$
fermi (fm)	费米	(核距离) 长度	$1 \text{ fermi}=1 \text{ fm}=10^{-15} \text{ m}$
ft	英尺	长度	$1 \text{ ft}=3.048 \times 10^{-1} \text{ m}$
G, Gs	高斯	磁通量密度，磁感应强度	$1 \text{ Gs}=10^{-4} \text{ T}$

gal	加仑	容积	1 gal (UK) =3.785 43 L
in	英寸	长度	1 in=2.54 cm
lb	磅	质量	1 lb=0.453 592 kg
mi	英里	长度	1 mi=1.609 34 km
Mx	麦克斯韦	磁通量	1 Mx=10 ⁻⁸ Wb
Oe	奥斯特	磁场强度	1 Oe=1 Gb/cm= (1 000/4 π) A/m=79.577 5 A/m
oz	盎司	质量	1 oz=28.349 523 g
qt	夸脱	容积	1 qt (UK) =1.136 52 dm ³

Feynman's

TIPS ON PHYSICS

Reflections • Advice • Insights • Practice

费曼

物理学讲义

补编

• 思考 • 建议 • 领悟 • 练习 •

[美] 费曼 (Richard Feynman) [美] 戈特利布 (Michael A. Gottlieb) [美] 莱顿 (Ralph Leighton) 著

潘笃武 李洪芳 译



上海科学技术出版社

费曼物理学讲义补编

思考·建议·领悟·练习

费曼 (Richard Feynman)
[美] 戈特利布 (Michael A. Gottlieb) 著
莱顿 (Ralph Leighton)

马修·桑兹写的回忆
潘笃武 李洪芳 译

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

费曼物理学讲义补编 / （美）费曼（Richard Feynman），（美）戈特利布（Michael A. Gottlieb），（美）莱顿（Ralph Leighton）著；潘笃武，李洪芳译．—上海：上海科学技术出版社，2020.3

ISBN 978-7-5478-4715-2

I. ①费... II. ①费...②戈...③莱...④潘...⑤李... III. ①物理学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2020）第032740号

FEYNMAN'S TIPS ON PHYSICS

by Richard P. Feynman, Michael A. Gottlieb and Ralph Leighton

Copyright © 2013 by Carl Feynman, Michelle Feynman, Michael A Gottlieb and Ralph Leighton Simplified Chinese translation copyright © 2014

by Shanghai Scientific and Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books Group through Bardon-Chinese Media Agency

ALL RIGHTS RESERVED

费曼物理学讲义补编

[美] 费曼 (Richard Feynman) 戈特利布
(Michael A. Gottlieb)

莱顿 (Ralph Leighton) 著 潘笃武 李洪
芳 译

上海世纪出版(集团)有限公司 出版、发行
上海科学技术出版社

(上海钦州南路71号 邮政编码 200235 www.sstp.cn)

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16

印张 11

字数 160千字

2020年3月第1版 2020年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-4715-2/O·81

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

第二版前言

在《费曼物理学讲义补编》[艾迪生-卫斯利 (Addison-Wesley), 2006] 第一次出版以来的六年中, 对《费曼物理学讲义》的这一补编的兴趣一直没有衰退, 其证据就是费曼讲义网站 (www.feynmanlectures.info) 的访问者的数量持续增加, 这个网站的建立是这样的情况引起的: 就是给我们提出了成千上万的问题, 其中许多是对《费曼物理学讲义》中的错误提出质疑, 也有许多是与物理习题有关的问题和评论。

因为这个原因, 我们极其愉快并自豪地呈献这本《费曼物理学讲义补编》的第二版, 这本书作为附属于《费曼物理学讲义》的印刷本, 录音带和照相的联合版权的一部分, 由Basic Books公司出版。在好些年中, 这些版权分属于不同的出版社。为纪念这个吉祥的事件, 《费曼物理学讲义 (新千年版)》现在第一次用LaTeX版本印刷, 这样可以更方便得多地改正错误, 并且《费曼物理学讲义》的电子版立即就可以制成。此外, 这一新版的《费曼物理学讲义补编》选用软封面, 比之于原来的硬封面价格大大降低, 还扩展了包括三篇有关《费曼物理学讲义》富于启发性的采访记录:

- 1986年, 正值这个计划中的关键部分结束后对理查德·费曼 (Richard Feynman) 的采访。
- 1986年, 采访罗伯特·莱顿 (Robert Leighton), 关于费曼作为讲课教师的天赋, 以及将“费曼语”翻译为英语的挑战。

- 2009年，采访罗丘斯·沃格特（Rochus Vogt），关于加州理工学院协同讲授《费曼物理学讲义》的全体教授。

对于那些发来有关《费曼物理学讲义》和《费曼物理学讲义补编》电子邮件或发布问题和评论的所有的人，我们要对他们致以衷心的感谢：你们的贡献和支持大大帮助了这本书的改进，并且还将受到将来一代又一代读者的感激。对于那些提出更多的练习要求的读者，我们为这一版中不能包含更多习题而抱歉。然而，你们的鼓励已经激发了写一本新的、扩展的书（很快就要出版）：《费曼物理学讲义习题集》。

迈克尔·戈特利布（Michael Gottlieb）

拉尔夫·莱顿（Ralph Leighton）

2012年11月

序言

今天，在《费曼物理学讲义》出版四十多年以后，仍旧有人研读，并且还在启发着人们。

一个特别的情况：几年前我在一次聚会上见到迈克尔·戈特利布，这次聚会的主人在计算机显示屏上展示一个真实的图瓦喉音演唱歌手——这件事为旧金山的生活增添了许多乐趣——的谐波泛音。戈特利布学过数学，并且对物理学非常感兴趣，因此我建议他读一读《费曼物理学讲义》——大约一年以后，他花了一生中的六个月时间从头到尾非常仔细地研读了《费曼物理学讲义》。正如戈特利布在他的导言中所说，这终于导致产生了你现在正在阅读的这本书，以及《费曼物理学讲义》新的“定本”。

因此，我很高兴全世界对物理学有兴趣的人现在可以和这本补编卷一同读到更正确、更完全的《费曼物理学讲义》版本——一本里程碑式的著作，它还将在今后的几十年中给学生继续提供知识和启发灵感。

拉尔夫·莱顿

2005年5月11日

导言

我第一次听说理查德·费曼和拉尔夫·莱顿是在1986年，通过阅读他们的有趣的书《别逗了，费曼先生！》。十三年后，在一次聚会上我见到了拉尔夫。我们成了好朋友，并且在下一年中为设计纪念费曼的虚拟邮票^[1]一同工作。拉尔夫不断地给我读费曼编著的或有关他的各种书籍，包括《费曼计算讲义》^[2]（因为我是一个计算机程序员）。这本吸引人的书中关于量子力学计算的讨论引起了我的兴趣。但是因为没有学过量子力学，领会这些讨论让我感到困难。拉尔夫推荐我阅读《费曼物理学讲义》第3卷：量子力学。我从这本书开始读，但第3卷的第1、第2章是第1卷第37和第38章的复制，所以我自己发现要回过头去参考第1卷而不只是研读第3卷。因此我决定从头到尾研读全部《费曼物理学讲义》——我下决心学点量子力学！然而，随着时间的推移，这个目标成为第二位了，我越来越强烈地被费曼的迷人世界所吸引。学习物理学的乐趣，仅仅是为了对它的兴趣，这成为我最优先的事。我上瘾了！大约第1卷读到一半的时候，我暂时停止编写程序的工作，在哥斯达黎加乡间待了六个月，用全部时间学习《费曼物理学讲义》。



理查德·费曼，大约在1962年

每天下午，我学一章新课并且做习题；上午我复习并校对昨天的课程。我通过电子邮件和拉尔夫联系，他鼓励我把我提到的在第1卷中发现的错误记录下来。这并不是很重的负担，因为在那一卷里只有很少的错误。然而，当我进行到第2卷和第3卷时，我对发现越来越多的错误感到困惑。最后，我收集了《费曼物理学讲义》中总共170个以上的错误，拉尔夫和我都很吃惊：怎么会有这么多的错误在这么长的时间里一直漏网了？我们决定试试看可以做些什么，以便能在下一版中将它们改正。

那时，我注意到在费曼的前言中几句有趣的话：

“没有关于怎样解习题的课是由于有辅导课。虽然在第一年中我确实讲过三次怎样解习题的课，这些都没有包含在这本书里。还有一堂关于惯性导航的课，这肯定是在讲转动系统课的后面，但是很遗憾，它不见了。”

于是就产生了重建这些丢失的讲课稿的想法：如果认为这些确实是有价值的话，就要把它们提交给加州理工学院和艾迪生-卫斯利出版社，纳入更为完整的、经过校勘的《费曼物理学讲义》的新版本中。但首先我必须找到遗失的讲课稿，可我当时还在哥斯达黎加！经过稍许逻辑推理和研究，拉尔夫就可以确定讲课记录的所在，它原先收藏在他父亲的办公室或加州理工学院档案馆的某处。拉尔夫还找到了遗失的讲课录音磁带，并且在我回到加利福尼亚查找案卷中的错误时，偶然地在一个有各种各样照相底片的盒子里发现了黑板照相（一直以为丢失了的）。费曼的后人慷慨地允许我们使用这些材料，从而，加上费曼——莱顿——桑兹三人组中唯一在世的成员——马修·桑兹（Matthew Sands）有益的点评，拉尔夫和我重现了复习课B作为一个样品，并将它和《费曼物理学讲义》的勘误一同提供给加州理工学院和艾迪生-卫斯利出版社。

艾迪生-卫斯利出版社热情地接纳了我们的想法，但是加州理工学院最初表示怀疑。因此拉尔夫求助于加州理工学院的理查德·费曼理论物理讲座教授基普·索恩（Kip Thorne），他终于设法使所有的有关方面达成一致的认识，并且他还慷慨地义务花时间指导我们的工作。由于历史的原因，加州理工学院不愿修改已有的《费曼物理学讲义》，拉尔夫提出将遗漏的讲课稿放在另一本书中，这就是这本补编的起因。它和新的《费曼物理学讲义》定本并行出版，在定本中我找到的错误以及许多读者发现的其他错误都已改正。

马修·桑兹的回忆

在我们重建这四讲课程的努力过程中，拉尔夫和我遇到了很多问题。我们觉得非常幸运可以从马修·桑兹教授那里得到答案，他是尽力于实现《费曼物理学讲义》这个雄心勃勃的计划的人。我们对大家都不知道这些讲课起源的历史觉得惊讶，并且还认识到我们这个计划提供了补救这方面不足的机会。桑兹教授还爽快地答应写一篇关于包括这本补编在内的《费曼物理学讲义》起源的回忆文章。

四次讲课

我们从马修·桑兹那里得知，在1961年12月，费曼在加州理工学院一年级第一学期物理学课程将近结束时^[3]，当时觉得离期末考试只有几天，还要给学生介绍新的内容不大合适。所以在考试前的一星期，费曼讲了三堂可任意选择的复习课，在这些课上不讲新的内容。这些复习课是为班上有困难的学生讲的，强调理解和求解物理习题的技巧。有些例题具有历史的意义，包括卢瑟福发现原子核，以及确定 π 介子的质量。费曼以其超人的洞察力讨论了另一种问题的答案，这对于他的一年级学生课堂上的至少一半学生是同样的重要：这些学生因觉得他们自己处在平均水平以下而产生的情绪上的问题。

第四次课——《动力学效应及其应用》，是一年级第二学期开始、学生寒假后刚刚返校时讲的。原来它是第21讲，当时的想法是在18章到20章中讲解了关于转动的较难的理论讨论后稍稍放松一下，还要给学生讲一些由转动引起的有趣的应用和现象，“只是为了娱乐。”这次讲课的大部分是讨论在1962年时相对新的技术：实际的惯性导航。讲课的其余部分讨论了转动引起的自然现象，并且也提供了一些

线索，就是关于费曼把这一讲从《费曼物理学讲义》中删去说成是“不恰当的”的原因。

讲课以后

每次讲课结束以后，费曼总是让麦克风继续开着，这就给我们提供了宝贵的机会，可直接听到费曼如何与他的本科学生交流。这里提供了《动力学效应及其应用》课后的记录作为例子，特别值得注意的是关于1962年刚出现的从模拟到数字方法转变的实时计算的讨论。

习题

在这个计划的执行过程中，拉尔夫和他父亲的好朋友兼同事罗丘斯·沃格特重新建立了联系，他宽厚地允许再出版《基础物理学习题》（*Exercises in Introductory Physics*）中的习题和解答。这本习题集是早在20世纪60年代，罗伯特·莱顿和他专门为《费曼物理学讲义》编撰的。由于篇幅的限制，我只选择了第1卷第1章到第20章的习题（这些涵盖了《动力学效应及其应用》以前的材料），优先选择那些，用罗伯特·莱顿的话说，就是“数值上和解析上简单，而内容深刻并有启发性”的问题。

互联网

要获得有关这一本书和《费曼物理学讲义》更多信息的读者，请访问www.feynmanlectures.info。

迈克尔·A·戈特利布
于普拉亚·塔马林多，哥斯达黎加
mg@feynmanlectures.info

[1] 我们的邮票登载在《土著图瓦的未来》的唱片套上，这是一张图瓦喉音演唱大师昂达尔（Ondar）主演并有理查德·费曼演出小品的CD唱片（华纳兄弟公司Warner Bros.947131-2），1999年发行。

[2] *Feynman Lectures on Computation*，理查德·费曼著，安东尼·海（Anthony J. G. Hay）和罗宾·阿仑（Robin W. Allen）编，1996，艾迪生-卫斯利，ISBN 0-201-48991-0。

[3] 加州理工学院的学年分成三个学期；第一学期从9月下旬到12月上旬，第二学期从1月上旬到3月上旬，第三学期从3月下旬到6月上旬。

鸣谢

我们要对帮助实现这本书的所有人致以衷心的感谢，尤其是：

托马斯·汤布里洛（Thomas Tombrello），物理、数学与天文系主任，因为他代表加州理工学院批准这一计划。

卡尔·费曼（Carl Feynman）和米歇尔·费曼（Michelle Feynman），理查德·费曼的继承人，他们允许在这本书里出版他们父亲的讲课稿。

玛吉·莱顿（Marge L. Leighton），她允许出版从《罗伯特·莱顿的口述历史》中的摘录，以及出版《基础物理学练习》中的习题。

马修·桑兹，感谢他的智慧、学识、建设性的评论和对原稿的意见——还有他的生动的回忆。

罗丘斯·沃格特，感谢他在《基础物理学练习》中精巧的习题和答案，感谢他和我们的会见，以及在这本书中允许我们使用这些材料。

迈克尔·哈特尔（Michael Hartl），感谢他对原稿的仔细校对和勘误《费曼物理学讲义》的勤奋工作。

约翰·尼尔（John Neer），热心地提供费曼在休斯飞机公司的讲演并和我们分享这些记录。

海伦·塔克（Helen Tuck），曾任费曼的秘书多年，感谢她的鼓励和支持。

亚当·科契伦（Adam Cochren），感谢他在处理错综复杂的图书合同方面熟练的技巧，以及为这本书和《费曼物理学讲义》找到新家的美好品质。

基普·索恩，他的谦和及不知疲倦的工作赢得每一个有关人士的信任和支持，还有他对我们工作的督促。

目 录

[第二版前言](#)

[序言](#)

[导言](#)

[鸣谢](#)

[《费曼物理学讲义》的起源](#)

[采访理查德·费曼](#)

[采访罗伯特·莱顿](#)

[采访罗丘斯·沃格特](#)

[1 预修课](#)

[2 定律与直觉](#)

[3 习题及解答](#)

[4 动力学效应及其应用](#)

[5 习题选](#)

[习题答案](#)

[照片惠允](#)

[返回总目录](#)

《费曼物理学讲义》的起源

马修·桑兹的回忆

20世纪50年代的教育改革

1953年，当我成为加州理工学院正式的教师时，我被安排讲授一些研究生的课程。我发现我自己对研究生课程大纲十分不满意。在第一年中，给他们讲的课只是经典物理学——力学、电学和磁学。（即使电学和磁学的课也只包括静电和静磁学，甚至连辐射理论都没有。）我想，在研究生二年级或三年级以前不给这些优秀的学生接触近代物理学（其中许多内容已经有20到50或更长的年份了），这是一件很糟糕的事。所以我就开始争取改革课程大纲。在洛斯阿拉莫斯的日子我就已经认识费曼，几年前我们都来到加州理工学院。我请求费曼参加这项活动，我们提出一个新的课程大纲，最后说服了物理系教师接受它。第一年的课程包括电动力学和电子论（由我教），基础量子力学（由费曼教），我还记得数学方法的课是罗伯特·沃克（Robert Walker）教的。我认为新的大纲是十分成功的。

大约也是在那个时候，麻省理工学院的杰罗尔德·札查里阿斯（Jerrold Zacharias）在苏联人造地球卫星成功发射的激励下推动一个美国高中物理教学复兴的计划。一个成果是制订PSSC（物理科学学习研究委员会，Physical Science Study Committee）计划，加入了许多新的材料和思想，也产生了一些争论。

当PSSC计划接近完成时，札查里阿斯和一些同事〔我想其中有弗朗西斯·弗里德曼（Francis Friedman）和菲利普·莫里森（Philip Morrison）〕确定已经到了也要着手改革大学物理的时候了。他们组织了两次大型的物理教师会议，在此基础上，组成了大学物理委员会，一个由12所大学的物理教师组成的全国委员会，受国家科学基金会支持。委员会承担起激励全国为大专院校中教授的物理学课程的现代化而努力的任务。札查里阿斯邀请我参加这些早期的会议，我后来参加这个委员会的工作，最后担任主席。

加州理工学院教学大纲

这些活动鼓舞我开始考虑，对于加州理工学院本科生的教学大纲可以做些什么。我对这个大纲一直不满意。基础物理课还是依据密立根（Millikan）、罗勒（Roller）和沃森（Watson）写的书。这是一本写得很好的书。我想它是在20世纪30年代编写的。虽然后来罗勒做了修订，可是书中很少或者没有近代物理学。并且教的这些课程没有讲义，所以很少有机会引进新材料。课程的强度在于一系列由福斯特·斯特朗（Foster Strong）^[1]收集的艰深的“习题”，这些习题用作每周的课外作业和每两周的辅导课上讨论的指定习题。

和其他物理教师一样，我每年都被指派担任几位主修物理的学生的指导教师。当我和学生谈话时我常常觉得沮丧，这些学生到三年级的时候对于继续学物理感到泄气。看来至少部分原因是因为他们已经学了两年物理，但仍旧没有接触到任何当代物理学的概念。所以我决定不等全国的大纲完成，就在加州理工学院做一些试验。尤其是要把“近代”物理的某些内容——原子、原子核、量子 and 相对论——引进

基础课程。和几位同事研究之后——主要是托马斯·劳利森（Thomas Lanritson）和费曼——我向当时的物理系主任罗伯特·贝歇（Robert Bacher）建议，应当开始改革基础课程的计划。他最初的反应并不十分积极。他实际上是说：“我已经告诉人们我们有一个非常好的，并且我为之自豪的大纲。我们的讨论班还配备了一些我们资深的教师。为什么我们还要改变呢？”我坚持不懈并得到其他几位教师的支持，于是贝歇宽厚地接受了这个想法，并且很快从福特基金会获得一笔赞助金（如果我没有记错，大约有一百多万美元）。这笔赞助金用于基础实验室更新设备的开支，以及用于发展课程的新内容——特别是给一些临时教员担任正规的职务，担任这些职务的人要把全部时间投入这个计划。

得到赞助金以后，贝歇任命了一个小型的专门小组领导这个计划：罗伯特·莱顿任组长，还有维克多·内赫（Victor Neher）和我。莱顿从事高年级教学已经有很长的时间了——他的书《近代物理学原理》^[2]是主要依据；内赫以优秀的仪器专家闻名。我那时对贝歇没有任命我为组长而不高兴。我猜想部分原因是我要负责管理同步加速器实验室已经很忙，但我一直认为他也担心我可能过于“激进”，所以他要让莱顿的保守主义来平衡这个计划。

委员会一开始就一致同意内赫专注于发展新的实验室——他对这有很多想法——我们应当为下一学年开出一门课的目标努力——试探一下这门课是否能为开发新的课程内容提供最佳结构。莱顿和我为这门课设计了教学大纲。我们各自独立地草拟课程概要，每星期碰一次头比较进度，并力图找到一个共同的基础。

僵局和灵感

我们很快就弄清楚，共同的基础是不容易得到的。我总是觉得莱顿的处理方法过多地将已经流行了60年的物理课程的内容改头换面。而莱顿认为我提出了不切实际的想法——一年级学生对我要介绍的“近代”内容还没有做好准备。幸运的是，我的决心在经常和费曼的交谈中得到支持。大家都已经熟知费曼是一位给人深刻印象的讲课教师，尤其擅长给普通听众解释近代物理学的思想。在我从学院回家路上常常到他家停留一会，听听他对我的想法的意见，而他常常给我提出建议可以做什么，通常都是支持的。

经过几个月努力之后，我变得十分沮丧；我看不出莱顿和我在教学大纲上如何可以达成一致意见。我们对课程的概念看来完全不同。有一天，我获得一个灵感：为什么不邀请费曼来讲授这门课程？我们把莱顿和我自己的课程概要都提供给他并让他决定怎样做。我立即用下述方式向费曼提出这个想法：“你看，迪克（Dick），到现在为止，你生命中的40年已经用在探索对物理世界的认识上面。现在你有个机会把所有这些整理一下并介绍给新一代的科学家。为什么你不可在明年给一年级大学生讲讲课呢？”他并不立即表示热心，但在这以后的几个星期中我们继续讨论这个想法，他不久就接受了这个意见。他说我们或许可以这样做或那样做。或者说这放在此地可能适合，等等。这样讨论了几星期后，他问我：“是否有过一位大物理学家给一年级学生讲过课？”我告诉他我不认为曾经有过这事。他的回答是：“我来做这事。”

费曼愿意讲这门课

在我们下一次委员会的会议上，我以极高的热情提出我的建议——只是莱顿冷冷的反应使我感到沮丧。“这不是一个好的想法。费曼从来没有教过本科生课程。他大概不知道怎样和一年级学生谈话，不知道他们可以学些什么。”但是那天内赫救了我。他的眼睛激动得闪光，他说：“这太好了。迪克懂得这么多物理，他还知道怎样讲得有趣。假如他真的愿意做这件事，实在难以置信。”莱顿被说服了，他一旦被说服，就全心全意地支持这个想法。

几天之后，我又遇到下一个障碍。我把这个想法告诉了贝歇。他没有多考虑这个意见。他认为费曼对研究生的课程是太重要了，所以可能没有多余的时间，谁来教量子电动力学呢？谁来指导理论研究生呢？此外，他真的能够屈就一年级的水平吗？关于这一点，我和物理系中对贝歇讲了一些支持的话的几位资深成员进行了一些疏通。最后，我用学究们喜欢的论证：如果费曼真的愿意做这件事，你们要说他不应该吗？决定终于做出了。

在第一堂课还剩下六个月的时候，莱顿和我告诉费曼我们一直在想些什么。他开始深入仔细地考虑发展他自己的思想。最后，我每星期去他家一次，我们讨论他在想的一些东西。他有时候问我，某些特殊的方式是否可能被学生接受，或者是不是认为这样或那样的题材顺序最“有效”。我可以讲一个特殊的例子。费曼一直在考虑怎样介绍波的干涉和衍射的概念，难以找到合适的数学方法——一个既直接又有效的方法。他想不出一个可以不用复数的方法。他就问我，他是不是认为一年级学生能够用复数代数进行运算。我提醒他加州理工学院招收的学生最重要的原则就是根据他们在数学方面表现出来的能力进行选择，我相信他们不会有处理复数代数方面的问题，只要事先对这个主题作一些简要的介绍就行。他的第22讲中就包含了复数代数的引人

入胜的介绍，他把这些用在接下来的描述振荡系统的多次讲课中，在物理光学问题中等。

开始时又出现一个小问题。费曼有一个长期的习惯，在秋季学期离开加州理工学院三个星期，这样就要错过两次讲课。我们一致认为这个问题容易解决，在这几天里我来代替他。不过，为了不致打断他讲课的连续性，我准备讲两次可能对学生有用的辅助专题，这和他的发展主线没有直接关系。这说明了为什么第1卷第5章和第6章有点异常。

然而大部分都是费曼亲自完成的，制订他打算在整个一学年中要做的全部纲要——加入了足够多的细节以保证不会出现没有预见到的困难。他在那一学年剩下的时间里集中精力工作，到九月份（当时是1961年），已经准备好开始他的第一学年的讲课。

新型的物理课

最初大家以为费曼的讲课会是对两年基础课——加州理工学院所有新生必修的课程——教学大纲修订的起始点，人们认为在以后一些年中，其他教师会接替这每届两学年的工作任务，最终发展成一门“课程”——包括教材、课外习题、实验，等等。

然而在这些课程的第一学年，必须设计出与通常不同的教学安排。由于没有合适的教材，我们不得不配合课程的进展自己编写。我们安排了每周两次、每次一个小时的课程表——星期二和星期四上午11时，学生被分配到每星期一个小时的讨论班中，讨论班由教师或研究生助教指导。还有每星期三个小时内赫指导的实验课。

讲课的时候，费曼在他的脖子上挂一个麦克风，并且连接到隔壁房间的磁带录音机。定期拍下板书的照相。这两种设施都是由管理教室的技术助理员汤姆·哈尔维（Tom Harvey）负责。哈尔维还协助费曼准备有时需要的演示实验。讲课记录由打字员朱莉·柯西欧（Julie Cursio）打印成更为清楚的文本。

第一年，莱顿负责校阅文本是否誊写清楚并且要尽可能地快，可以让学生在课后及时得到印刷的讲义。原先以为这些工作可以通过将各次讲课分派给指导讨论班和实验的每一位研究生来完成。然而，这样做行不通，这不仅是因为研究生要花太多的时间，而且得到的结果更多的是反映学生的思想而不是费曼的。莱顿立即改变这样的安排，大部分工作由他自己来做，并招募几位教师（从物理和工程专业）来完成编辑一讲或几讲讲义的任务。按照这一计划，我在第一年中也编辑了好几讲。

第二学年的课程作了一些变化。莱顿负责接管一年级学生——给学生讲课并总管课程。幸运的是，现在学生一开始就拿到上一年费曼讲课的讲义。我转为负责照料费曼正在讲的第二学年的课程的各种琐事，还要负责及时地编辑讲义文本。由于第二学年材料的性质，我发现我自己来执行这个任务是最恰当的。

几乎所有的讲课我都参与了——在第一学年中我就是这样做的——并且亲自参加一个讨论班，这样我就可以知道课程对学生是否适合。每次课后，费曼、格里·诺伊格鲍尔（Gerry Neugebauer）和我，有时还有其他一两个人，常常一同到学生食堂吃午餐，我们在那里讨论哪些与讲课主题有关的、合适的课外习题可以给学生。通常费曼心中已有关于这些习题的一些想法，讨论中还会涌现其他一些习题。诺伊格鲍尔负责收集这些习题并且每周编出“问题集”。

讲课是什么样的

坐在课堂里听课是极大的乐趣。费曼在上课之前五分钟左右出现。他从他的衬衫口袋里取出一张或两张小纸片——大约5×9英寸——把它们打开，放在课堂前面的讲台中间摊平。这是他的讲稿，虽然他很少去查看。（在第2卷第19章开头的地方翻印的照片显示费曼的一次讲课，他站在讲台后面，可以看见讲台上的两张讲稿。）上课铃一响，宣告上课正式开始，他就开始讲课。每一堂课都是认真地写下讲稿，戏剧性的表演，这些他都事先清晰地做出详细计划——通常有序曲、展开、高潮和结局。他的时间安排给人的印象最为深刻。只有很少几次他在课时到点之前或之后的一分钟稍多的时间里结束讲课。甚至黑板上的板书也是精心设计的。他习惯从左边的第一块黑板的左上方开始，在讲课结束时正好写满最右边的第二块黑板。

最大的享受当然是看着按概念的原有顺序展开——以清晰而时尚的方式呈现给我们。

编写成书的决定

虽然我们原来并没有想过讲课的讲义会成为一本书。大约在讲课第二年的中期——1963年春——开始认真考虑这个想法。这个想法之所以会产生，部分是由于其他学校的物理学家来询问是否可以给他们记录稿，部分是来自几位图书编辑的建议——当然他们已经得到讲课正在进行的风声，或许还看到了记录的文稿——因此我们就考虑出一本书，并且他们很愿意出版这本书。

经过一些讨论，我们决定将记录文稿做一些加工后成为一本书。于是我们请有兴趣的出版商提出我们该如何做的意见。最有吸引力的建议来自艾迪生-卫斯利出版公司（Addison-Wesley Publishing Company, A-W）的代表，他提出，他们可以给1963年9月的班级及时提供精装本的书——从决定到出版只有6个月。还考虑到我们没有要求支付作者版税这个事实，他们提出书的价格可以十分低廉。

之所以可能如此快速出版，是因为他们拥有成套的设备以及编辑、排字和照相胶印工作人员的完整班子。通过采用（当时）新的版式，包括文本的单一宽栏加上一边有很宽的“页边空白”，这样就可以用来安置插图和其他附属的材料。这种版式意味着标准的长条校样可以直接用作最后的页面编排，而不需要重新安排正文的材料来配合图表之类。

艾迪生-卫斯利的建议获得胜利。我负责对讲义文本作必要的修改和注释，通常和出版公司一同工作——校订排字材料，等等。（在这个时候，莱顿全力专心于讲授第二轮一年级学生的课程。）我修改每一讲的记录文本，使之明白和准确，然后给费曼做最后校对。每完成几章，立即将它们送交艾迪生-卫斯利出版社。

我尽快地送出前面几章，很快就回收校样，进行校对。这简直就是一场灾难！艾迪生-卫斯利的编辑改写了很多，将原稿中不规范的文体改成传统的、规范的教科书文体——例如将“you”改成“one”，等等。因为害怕为这事产生不愉快，我打电话给编辑。我解释说我们考虑到不规范的、交谈式的风格是讲课的重要部分，我们更喜欢用人称代词而不用非人称代词，如此等等。终于她理解了，以后就做得非常好——尽可能地保持原样。（以后和她合作成了愉快的事情，但愿我还能记住她的芳名。）

下一个绊脚石更加需要认真对待：选择一个书名。我回忆起，有一天到费曼的办公室去见他，讨论这个问题。我建议采用一个简单的名字，像“物理学”或“物理学初阶（*Physics One*）”，作者应当是费曼、莱顿和桑兹。他特别不喜欢所提议的书名，并且对建议的作者的反应更加激烈：“为什么要写上你们的名字——你们只做了速记员的工作！”我不同意，指出如果没有莱顿和我的努力讲义永远不会成为一本书。分歧没有立即解决。几天以后，我又回来讨论，最后我们共同达成一致意见：“《费曼物理学讲义》，费曼、莱顿和桑兹编著。”

费曼的序

第二学年讲课结束以后——接近1963年7月初——我正在办公室里给期终考评分，这时费曼顺路来道别，说就要离开一段时间（好像是去巴西）。他询问学生考试成绩如何。我说我认为很好。他问平均分数是多少，我就告诉了他——我记得大概是65分左右。他的反应是：“喔，很糟糕，他们应该考得比这成绩更好些。我失败了。”对这个想法我试图劝说他，指出平均分数有很大的随意性，由很多因素决定，譬如像所出的题目的难度，所用的评分方法，还有这样那样的因素——我们通常试图把平均分数评得相当低，就使分数产生一定程度的分散而使评定的等级形成一条合理的“曲线”。（顺便说说，这是一种态度，今天我并不赞同。）我说，我想这些学生显然从课上学到许多东西。他没有被说服。

然后我告诉他《费曼物理学讲义》的出版工作正在顺利进行，不知他是否愿意写些序言之类的东西。这个想法令他感兴趣，可是他的时间很紧。我就提出建议，我可以打开我写字台上的口述记录机，他

可以口授他的序言。所以，仍旧想着对二年级学生期终考平均分数的不满意，他口授了第一份费曼序的草稿。这就是你们在每一卷《费曼物理学讲义》前面读到的。序言中他说道：“我不认为我为学生做得非常好。”我一直懊悔以这种方式安排他作序言，因为我并不认为这是经过非常认真考虑过的判断。我担心这被许多教师用来作为不给他们的学生试用《费曼物理学讲义》的借口。

第2卷和第3卷

第二学年讲义出版的经过和第一年的稍有不同。首先，当第二学年结束的时候（当时大概是1963年6月），决定将讲课记录分成两部分，成为分开的两卷：电学和磁学，以及量子力学。其次，当时考虑量子物理学讲课记录可以通过一些增补和更为广泛的修订做较大的改进。到这最后时刻，费曼提出他愿意做几次额外的量子物理学的讲课直到下一学年的结束，这些讲课记录可以和原来的一起组成印刷本讲义的第3卷。

还有一个复杂情况。联邦政府在大约一年以前已经批准在斯坦福大学建立一台两英里（1英里 $\approx$ 1.61千米）长的直线加速器，用来产生20吉电子伏的电子用于粒子物理学研究。这是当时已建造的最大、最昂贵的加速器，它的电子能量和强度比任何已有的设备高出许多倍——这是一个激动人心的项目。一年多以来，被任命为新建的实验室——斯坦福直线加速器中心——主任的潘诺夫斯基（W. K. H. Panofsky）一直在说服我担任副主任，协助他建造新的加速器。在那一年春天，他得胜了，我同意在7月初去斯坦福。不过，我已承诺对讲义负责到底，所以我们约定的一部分是我要兼做这项工作。一到斯坦

福，我就发现我的新任务比我原来预期的要求高得多，因而我发现如果要保持适当的进度，就需要在大多数晚上都要做《费曼物理学讲义》的工作。到1964年3月，我尽力完成了第2卷最后的编辑。幸运的是，我得到我的新秘书帕特丽夏·普雷斯（**Patricia Preuss**）大力的帮助。

到那一年的5月，费曼已经完成了关于量子物理学的额外讲课，于是我们着手第3卷的工作。由于需要做一些很大的调整和修改，我多次去帕萨迪纳和费曼进行长时间的磋商。问题很容易被解决了，到12月，第3卷的材料全部完成。

学生的反应

从我在讨论班里和学生的接触，我可以得到他们对讲课反映的十分明确的印象。我相信他们当中即使不是大多数，也还是有许多人体会到他们获得这一特殊恩典的经历。我也看出他们常常被一些思想的激情所吸引，同时学到许多物理学。当然，这并不适用于所有的学生。要知道这门课要求所有参加听课的每一个学生都是全心投入的听众，虽然其中只有不到一半的学生打算主修物理，对这许多学生也都同样要求。因此课程的一些缺点也就变得明显了。举一个例子，学生往往在区分讲课中的基本概念和一些次要的材料方面感到困难，介绍这些次要材料是作为应用的例子提供的。在他们准备考试的时候尤其会感到无所适从。

在《费曼物理学讲义》的纪念版的特别序言中，戴维·古德斯坦（**David Goodstein**）和格里·诺伊格鲍尔写道：“.....在课程的进行中，注册的学生的出席率开始令人惊慌地减少。”我不知道他们从哪里

得到这个信息。我也不知道他们所说的“许多学生害怕上这课.....”有什么根据，因为当时古德斯坦不在加州理工学院。诺伊格鲍尔是参加课程工作的成员之一。有时候他开玩笑地说，没有本科生留在课堂里——只有研究生了。这可能歪曲了他的记忆。大多数课我都坐在教室的后排，根据我的记忆——当然由于年代已久有些模糊——有大约20%的学生并不为上课烦恼。对一个很大的班级来说，这个数字并非不寻常，我也记不起有谁觉得“惊慌”。虽然可能在我的讨论班上有一些学生害怕上这课，但大多数都受到讲课的吸引和激励——很可能有些学生会害怕布置课外作业。

我想举出三个例子来说明开头两年的那些课程对学生的影响。第一个例子是在讲课正在进行的那些日子，虽然那是在四十多年以前，但给我的深刻印象使我还清楚地记得这事。那是在第二学年的开始，碰巧由于课时的安排，我的讨论班的第一次上课正好在那一学年费曼的第一次讲课之前。由于我们还没有要讨论的课，也还没有已经布置的课外作业，不清楚我们应当谈些什么。我要学生说说上一学年的课程给他们的印象作为上课的开始——上学期的课早在3个月前就已结束。在一些学生回答以后，一个学生说，关于蜜蜂眼睛结构以及它如何在几何光学效应和因光的波动性质导致的极限之间求得平衡以达到最佳值〔参见《费曼物理学讲义》（FLP）第1卷，36-4节〕的讨论引起他的兴趣。我问他是不是可以复述这些论证。他走到黑板前，我只给他很少提示，他就能够把论证的要点重新讲了一遍。这是在这堂课的6个月之后，并且没有给他们复习过。

第二个例子，我在1997年——讲课以后的34年——收到的一封学生的信。这位学生，比尔·萨特斯伟特（Bill Satterthwaite），他参加听

课和我的辅导班。这封信来得出乎意外，是由他和我在麻省理工学院的一位老朋友偶然相遇而激起的。他写道：

“这一封信是感谢你和其他与费曼物理学有关的每一位老师……费曼博士在序中说他并不以为他为学生做得很好……我不同意。我和我的朋友们都一直欣赏这些讲课，并且都体会到这些是无可比拟的精彩经历。我们学到许多东西。作为我们如何感觉的客观证据是：我想不起在加州理工学院的经历中任何其他正规课程获得过喝彩，在我的记忆中费曼博士讲课结束时常常发生这样的事……”

最后一个例子是在几个星期前的事。我偶然读到道格拉斯·奥谢洛夫（Douglas Osheroff）写的自传概略，他因发现氦-3中的超流态而获得1996年诺贝尔物理学奖〔和戴维·李（David Lee）及罗伯特·理查森（Robert Richardson）共享〕。奥谢洛夫写道：

“在加州理工学院的时光是美妙的，那时费曼正在讲授他著名的本科生课程。这两年的系列课程是我受的教育中极其重要的部分。虽然我不能说我完全理解，我认为这课程对我的物理直觉的发展贡献最大。”

回想

在紧接着讲课的第二学年结束后，我十分突然地离开加州理工学院，意味着再也没有机会观察基础物理课程随后的演变。所以我一点

也不了解出版的讲义对以后学生产生的实际效果。大家一直都很明白，《费曼物理学讲义》本身不适合用作教科书。通常教科书的许多辅助部分都没有：像每一章的摘要，设计出说明原理的例题、课外习题，等等。这些都必须由勤奋的教师做出，莱顿和罗丘斯·沃格特编撰了一部分，他们在1963年以后负责这门课。我曾经考虑这些可以在一本补编本里提供，但始终没有实现。

当我多次出差和大学物理学委员会联系时，常常遇到各个大学的物理教师，我听说大多数教师不认为在他们的课上适合使用《费曼物理学讲义》——虽然我确实听说有些教师将这套书中的这一本或那一本用于“优等生荣誉”班，或者正规教科书的补充读物。（我必须说，我往往得到这样的印象，有些教师对使用《费曼物理学讲义》有顾虑，因为怕学生会提出他们不能回答的问题。）最普遍的是，我听说研究生发现《费曼物理学讲义》是准备资格考试绝佳的资料。

看来《费曼物理学讲义》在外国的影响远比在美国的更大。出版商已经安排了将《费曼物理学讲义》翻译成多种语言——据我的记忆有12种。当我去国外参加高能物理学会议时，我总是被问到是否就是这本红书的桑兹。我也常常听说《费曼物理学讲义》被用作基础物理课的教材。

我离开加州理工学院的另一个令人遗憾的后果是我再也不能和费曼及他的夫人格温妮丝（Gweneth）保持经常的交往。他和我从洛杉矶莫斯的日子以来一直保持着真诚的同事关系，在20世纪50年代中期我曾参加他们的婚礼。1963年以后，我虽然只有很少的机会访问帕萨迪纳，但那时我总要看望他们，每当我我和我的家人一同访问时总要共度一个黄昏。在这样的访问的最后一次，他告诉我们他最近因癌症动手术的情况，不久之后，癌症夺去了他的生命。

对我来说，最大快乐的源泉就是，直到现在，在讲课40年之后，《费曼物理学讲义》还在被印刷、被购买、被阅读，以及——我冒昧地说——被赏识。

圣克鲁斯，加利福尼亚

2004年12月2日

[1] 这本书第五章的练习中有10多个习题是取自福斯特·斯特朗的收集，在罗伯特·B.莱顿和罗丘斯·E.沃格特的《基础物理学练习》中许可重印。

[2] 《近代物理学原理》，罗伯特·莱顿，1959，Mc Graw-Hill, *Principles of Modern Physics* , by Robert B. Leighton, Library of Congress Catalog Card Number 58-8847。

采访理查德·费曼

查尔斯·魏纳（Charles Weiner）于1966年3月4日在加利福尼亚州阿尔塔地纳采访理查德·费曼。蒙尼尔斯·玻尔图书和档案馆和美国物理联合会允许。科利吉帕克，马里兰州，美国。

费曼：《费曼物理学讲义》，你要谈这个？

魏纳：我想这是合适的，因为这是这个时期一件非常重要的事情。

费曼：是的，那是很有兴趣的，现在我想起这些事，就是因为在那个时期这是一件重要的事情。我那时抱怨我没有做任何研究工作——我真的是疯了！现在有人向我指出，如我觉得那几年里没有做任何事情，那我真的是非常糊涂，因为那件事〔《费曼物理学讲义》〕就是一件事情。但是我仍旧没有这样的感觉，因为当你还年轻时，你把你自己献身于某种理想——就是你要在物理学中发现一些东西——如果你去做另外的一件事，你就很难做出使每个人都满意的合理解释——这件事只不过是教了一门课。

不管怎样，下面就谈谈这次讲课的故事。当时有某个小组，我不是其中的成员，他们讨论应当改革物理学课程，因为许多学物理的十分优秀学生抱怨说，学了一两年物理，学到的只是投掷小球和斜面之类。他们在中学时就听到许多关于相对论和奇异粒子，以及世界的各种惊异的事物，但直到他们成为研究生之前还一点不知道世界的惊异

到底是哪些，这些都是艰深的问题，他们力图改革物理课程。为此他们制定了几种教学大纲，但问题是由谁来实现？我不知道在他们内部是怎样讨论的，不管怎样，桑兹到我这里来，他要我讲这门课。

不过，我要丢开这些教学大纲。你们知道，我当然决定按我自己的方式来做这件事。但我还是得到必需包括些什么内容的一般观念。他们要我教一年级大学生的课。他们想要改革课程。那时惯常的做法不是所有主要课程都由一位主讲教师来讲。但习惯于分成一些小班，由一些研究生分别教各个小班。当时，他们一致的唯一的的事情是，可以选修和物理课程没有直接关系的某一种文化课，每周一次，在星期五，也可能是两周一次，在星期五。

魏纳：或许是某种历史课？

费曼：是啊，那是些不同的东西。我常常受邀请去作讲座，讲些关于相对论之类。这种讲座不是他们课程的一部分。但有时候有人会讲一些就是他们课程中的一部分内容，但不是系统的。

那时他们正准备建设新的实验课。他们要组建新的实验室，他们为实验室安排新实验。他们要重新设计课程，每个星期至少有两次由一位主讲教授讲授的课，然后有由研究生主持的辅导班。我要不要讲这门课呢？明白吗？他们得到福特基金会为这项改革提供的资金。那个时候为了改变世界，到处都有许多钱。

于是我说“好”。我接受这一挑战，以一年为期，我试着开一门课，每星期要讲两次。

魏纳：你是不是放下了其他所有工作，所有其他教学工作？

费曼：实际上确实如此。我很难相信，但我的妻子说我基本上是夜以继日地工作，一天16小时，始终如此。我所有时间都花在这上面，在考虑这些问题——准备这些课程，因为我不只是要准备材料，我还必须准备讲课，所以说那是一门很好的课，不知你是不是明白我的意思。

我有这样的观念——我有一些原则，有几条原则。第一条是我不教他们那些原来就不正确，因而我不得不重新再讲一遍的任何内容。除非我指明这是不正确的。例如，牛顿定律只是近似的，而学生并不懂得量子力学，也不懂相对论。我一开始就说明这些，所以他们知道他们处在什么位置。换句话说，应该有某种地图。事实上，我甚至想过做一张包括各种事物的巨大的地图，图中表示事物的相互关系，从而我们可以看出我们目前处在什么位置。我认为所有物理学课程的困境之一就是它们只说：你要学会所有这些，你要学会所有那些，只当你学完所有东西以后你才知道它们的联系。但是你瞧，没有可以“引导你走出困境”的地图。所以我想绘制一张地图。但是发现这个计划没有行得通。我是说，还是没有绘制出这样一张地图。

另一原则是，我希望所讲内容足够让好学生深入思考而平均水平的学生也应该懂得。我试着创新。

我再重复一遍这些原则。第一条是，我从不介绍任何不严格正确的东西而不说明它并不严格正确以及以后将会如何改变。（另一件事，你瞧，我查阅一些书，我开始发现有很严重的缺陷：例如，在同一本书里面，他们讲 $F=ma$ ，稍后又讲摩擦力等于摩擦系数乘以法向力……好像它们有同样的品质和同样的意义。你知道，它们的性质是完全不同的，书中一点也没有加以说明。）这就是第一条原则。

第二条原则是：在你已经说过的内容中应该弄清楚，估计哪些内容学生是可以理解的，哪些想来还不能理解。因为我发现在一些书中会突然冒出一些东西，譬如交流电路的频率公式。这被认为是比较高级的内容。现在还不能推导出来，但是他们没有说，“在现阶段你们还不会理解这个公式，其理由只是它超前讲到了，这是外加的内容。”换言之，什么是外加进来的，什么可以从其他东西推导出来？即使某些公式可以从其他公式推出来——但你没有进行推论——你应当说明白。我总是说，“这是可以推导出来的，大致可以像下面所说的那样做，但我们不打算那样把它推导出来。”或者说，“这是一个从另一个地方得来的独立概念，你看，你还不能推出它，所以不必担心。”

像这样的原则有几条。问题是讲课中哪些内容对平均水平的学生合适，并且还要有给优秀学生的材料。在我准备讲课时，我头脑中出现一个想法，在课堂前面放一个立方体，它的各个面有不同的彩色，当某些内容只是为了提高兴趣，为了使比较好的学生提高他的兴趣，但实际上不是课程中的主要内容，就翻出一种彩色面。你明白吗？当讲到一些如此基本的问题，这在整个物理学中是绝对必须懂得的，每个人都应当尽他们的最大努力去搞懂这些问题，翻出另一种彩色面，如此等等。彩色面指示不同主题的重要性和地位。因为我所担心的是所有学生都想学会所有这一大堆的东西，如果他们能做到，那说明我还没有给优秀学生喂饱。你不可能做到这样。就是既要喂饱优秀生而最笨的学生或不那么优秀的学生也不会感到迷惑，这是不可能做到的。

所以我产生了这个立方体的想法，但是因为这有点像是骗人的机关，代替这种方法，每一节课我都在黑板上写下必须懂得的中心内容

的概要（这些都丢失了）。在概要中没有的其他内容只是为了提高兴趣。但这些再也找不到了。^[1]

最后，让我想想——刚才我讲话的时候还想到其他一些事情。我现在忘了。

所以，我就开始上课。一开始，我要做的第一件事就是把学生集合在一起。在许多课上，教师不懂得开始讲课的逻辑。开始的实际逻辑是，将所有从高中来的孩子们带到大体上同一个起点。例如，我要讲每件物体都是由原子组成——并不因为我认为他们不知道，而是因为我希望不知道这些的人也知道。你知道，我不能把这明白说出来，所以我以这样的方式来说，使得已经知道的学生也会感到激动，因为这是以一种新的角度来看这些问题，而原来不知道这些内容的学生也能够理解并赶上我所要求的水平。诸如此类。所以，开头几次讲课是要把每个学生都带到同一起跑线上。

这些课也是我在另外一些场合下已经讲过的，特别是开头的那几讲，这样我就可以有时间准备以后的讲课，你知道。最后——啊，还有一个原则，非常重要的原则：我希望每次讲课本身都能够独立成章。我认为这不是一个好的想法：就是在一堂课最后说：“好，下课时间到了，下一次我们要继续这一堂课讲的内容。”或者说“上一堂课下课的时候我们正好讲到这里或者其他东西。现在我们继续讲下去。”

代替这种做法，我要使自己相信，可以使每一讲都以这种或那种方式成为独立的优秀作品。你看，在一堂课中，有起始、介绍和有点戏剧性的结论。每一堂课都是这样，只有少数例外。有一次或两次我做不到，我把两次讲课连接起来，或者诸如此类的事情——但那是另一个原则。我只是告诉你做这些事的指导思想。

最后，我们主要兴趣是物理学以及如何组织材料。我喜欢将材料组织起来，想想看怎样把它们组织在一起，并且从中发现看待某些事物的新视角以及我可以怎样来说明它，等等。我不是这种类型的教师，他们对学生个人的事感兴趣。我意思是说，我不关心：这个小伙子是否结婚，他正努力取得学位，以及这类乱七八糟的事情。我尽我的最大努力把学生多多少少当成抽象的学生来教，他们有虚构的性质——混合起来的，混合的，有很多不同类型的抽象学生——但没有特定的个人。在所有情况中，主题是我兴趣的中心——不是学生而是主题。你想知道我对它们（讲课）感觉怎样。此外我还可以对讲课说些什么？它们都已经发表了。但我还是试图向你说明我自己对它们的感受，以及我对我试图做的事有什么想法。

魏纳： 当你在讲课的时候是否得到某种意义上的反馈？

费曼： 没有。无论什么都没有，我没有办法知道发生什么情况。因为我没有上辅导课，并且我在讲课结束的时候也没有提出什么问题。料想所有问题都放在辅导课上。所以，反馈为零，除了有一些考试，他们出一些题目。在考试周里给学生出一些题目，学生要写出答案，你知道就是这样。他们是如此恶劣——就我的看法——一点反馈也没有。从某种意义上说，我确实在整个教学过程中感到沮丧。之所以感到沮丧的并不是对于我所走的路是否一直按照正确的道路前进这一点，而是对于我始终觉得这样做是不是行得通，是不是毫无意义——但是没有关系，不管怎样我还是要做下去。我意思是说，这是我所知道的如何去做的唯一方法，见鬼去吧。但它行不通。

魏纳： 那些直接参与辅导课的人是怎样的态度？

费曼： 直接参与辅导课的人告诉我，我低估了学生，他们不像我想象的那样差。但我从来不相信他们，现在还是不相信。

魏纳： 你不认为这种类型的讲课，它的效果是很难用传统的考试方法来测定吗？

费曼： 当然是这样。但是只要让我们假设你有一些进展。但你还要做别的什么事呢？我意思是说，你问我的反应是什么。这可能不容易说清楚，但我期望他们对这些简单的问题做得比他们已经做得更好。换句话说，一个人不会做他们显然不会做的事，他肯定没有懂得我讲的是什么。这就是我感觉到的。

魏纳： 这工作你做了多久？三年？

费曼： 这件事我做了一年后，他们给我做工作，要我教第二学年。于是我说：“我更喜欢再教一遍第一年的课。当时我想编写出配合讲课内容的习题并做一些改进，但主要是编辑配合课程内容的习题，这样就可以扎扎实实地去教这门课。”至于对一些内容做某种改进，我并不很在意。

然后他们给我做工作，他们以某种方式，不管什么方式。他们说：“看，没有人会重做一遍同一件事。我们需要你讲第二学年的课。”

我不喜欢讲第二学年的课，因为我不认为我对怎样讲第二学年的课有什么了不起的想法。我觉得关于怎样教电动力学的课我并没有好的想法。但是，你瞧，讲这门课面临着挑战，挑战我讲解相对论，挑战我解释量子力学，挑战我讲解数学和物理学的关系和能量守恒。我回应了所有挑战。但还有一项没有人提出的挑战，这是我对我自己提

出的，因为我不知道该怎么做。我还从来没有做成过这件事。现在我想我知道怎样去做了。我以前还没有做过，但我想有一天我将会去做这件事。这件事就是：你怎样讲解麦克斯韦方程？你怎样在一个小时的讲课中对一个外行人，或几乎是外行的人，一个非常聪明的人，解释电学和磁学的定律？你怎样做？我从来没有解决过这个问题。好，给我两小时的课。它应当在一小时的课中完成，或者两个小时也可以。

不管怎样，我现在已经构想出更好得多的方式来讲授电动力学，比书里的更有独创性并且更有效的方法。但当时我还没有新方法，并且我埋怨自己没有贡献出额外的东西。但他们说，“无论如何要去做做看。”他们叫我参加进来，就这样我去做了。

当我准备的时候，我想要教电动力学，然后要讲一些拥有同样的方程式，而实际上在物理学中是完全不同的分支——如将扩散方程用于扩散，用于温度和其他许多问题。或者声、光的波动方程，等等。换言之，后一半有点像物理学中的数学方法，但有许多物理学的例子。我教物理的同时也教数学。我要讲傅里叶变换、微分方程，等等。虽然这看上去不像原来的样子。这些内容不是用通常的方式组织起来的。这里有不同的主题，关键在于这许多不同的领域中方程式都相同。当你处理一个方程式的时候，你应当指出得到这四个方程式的所有领域，而不是只讲方程式。所以我就照这样做。

后来我又得到另一个机会。或许我可以给二年级学生教量子力学；没有人期望这件事可以成功——那将是一个奇迹。我想出一个疯狂的、上下颠倒的方法来教量子力学，把里外完全翻转。其中，各种高级的内容先讲，所有传统意义上的基础概念最后讲。

我告诉这些家伙我的想法，他们不停地来对我游说。他们说，我一定要去讲，我所说的数学方面的问题可能有一天别的人也会去做，但你说的这些东西是独一无二的。他们也知道以后我再也不会做这事了。我必须做这件独一无二的事，你看——即使这样做简直是要杀死这些孩子，他们学不会，这样做并不好。我不清楚实际情况到底会是怎样，有没有价值。我应当试一试。所以我就去做了。这就有了关于量子力学的第3卷。但第2卷和第3卷其实是一学年的课程，就像第1卷是一学年的课程一样。

魏纳：这说明你花了整整两学年的时间。

费曼：正是。一个是1961—1962学年，另一个是1962—1963学年。

魏纳：从那以后，当然，就像你昨天说的，你对它有较好的感觉。

费曼：有一些。

魏纳：因为它们在校理工学院以外也使用了。

费曼：是啊。我还没有做的时候人们就向我指出应该去做。我可能逐渐转变过来理解这种情况。我要坚持的是，我从一开始坚持做的就是教这一群特殊的学生，这就是我要做的一切。我不停地说：“你没有别的路，只有死路一条，你非去教这些学生不可。换了别人就不会碰到这种事情。”我想这大致不错。假如我去听另一个人在这几本书的基础上讲的课，我会看到各种缺陷、错误、弱点和曲解。你确实只有死路一条。但是必定有还活着但没有听过某教授讲课的人，他只是自己读这本书并且独立思考。他们一定可以从中得到一些东西。所以，

如果我还存在一些希望，这本书对他们有一定的价值，这样想或许我对整个事情感觉会好一些。我想，关于我实际上针对的那些特殊学生，我公开声明这些学生是我设定的目标——我并不关心书或者其他任何事情，我只关心学生——我想其结果远远不值所做的努力。^[2]

[1] 费曼讲课的概要在加州理工学院档案馆保存的黑板相片上都保留着；将发表在《费曼物理学讲义》的增强电子版上。参见<http://www.basicefeynman/enhanced.html>。

[2] 二十年后，费曼在谈到《费曼物理学讲义》时说：“其中有各种各样的材料，更多从基础物理的观点来讨论，显然这些都是有用的。现在我必须承认，我不能不说这确实是对物理世界的贡献。”——摘自梅拉（J. Mehra），《另一种鼓的节拍》（*The Beat of Different Drum*）（1994）。

采访罗伯特·莱顿

取自《罗伯特·莱顿：口述历史》，海蒂·阿斯帕图里安（Heidi Aspaturian）于1986年10月在加利福尼亚州帕萨迪纳的采访。蒙加州理工学院档案馆允许。加利福尼亚理工学院，帕萨迪纳，加利福尼亚州，美国。

莱顿： 费曼的课很重要，我在编辑和将“费曼语”翻译成英语等方面起了一定的作用。那是一段有意思的、激动人心的时光。

在20世纪60年代初，那一段时间〔格里〕诺伊格鲍尔和我正在讨论红外线，并且那时我对水手号^[1]会感兴趣，在这时候出现了《费曼物理学讲义》。这来自一个项目——我在这项目中起了某种领导作用——重新制定一年级物理学课程。关于如何做这件事，我那时已经有了一些想法，在一年级物理课委员会中其他一些人也有些想法。但讨论到一半，马修·桑兹说道，“好，真的，我们应当请迪克·费曼来讲课并把他的讲课用磁带录音机记录下来。”当时桑兹是加州理工学院的物理学教授。他是一个激进的人。他年轻的时候曾经参加洛斯-阿拉莫斯计划，所以他和费曼很熟悉，便去和费曼谈谈。但费曼拒绝了。

阿斯帕图里安： 关于费曼的讲课，什么原因使得他断然地选择了这一件事情。

莱顿： 费曼具有独特的能力，就是在他说明某件事情的时候，这事情就显得非常明白易懂——你可以看到每种事物都是合适的，你会

带着对这些问题非常好的感觉离开。“好啦，这里有许多自由端，这些是我要进一步探讨的；孩子们，这些不是很了不起吗！”大约两个小时以后，就像人们关于中国食品所说的，全都吃完了，可是你还觉得饿。你一点也不记得发生了什么事。

我亲眼目睹一件事。在20世纪50年代末，费曼给外行听众讲解爱因斯坦狭义相对论的基本概念，地点在东桥楼（East Bridge）201——当然这间报告厅里挤得满满的。他用他特有的方式把主题精简为最少的几句话，就是 $1-v^2/c^2$ ——“你一定要搞懂的问题就是 $1-v^2/c^2$ 的平方根。”演讲结束后，在出去的路上，我无意中听到一位年轻女士向她的同伴说，“我很少听懂他说了些什么，但是那肯定是很有趣的！”费曼具有做这种事情的方法。

阿斯帕图里安： 这听起来就好像他做了像虚粒子那样的意义上的虚报告。

莱顿： [大笑] 嗯，就是这样。是的，把事物带到现实中，只有短暂的时间又看着它重新又沉到海里！

阿斯帕图里安： 这种想法使他永远离开真空。

莱顿： 是的。所以马修·桑兹去找费曼，费曼拒绝了，但最终他还是同意做这事。这就是《费曼物理学讲义》的来历。

莱顿： 在他的讲课中，费曼试图将本科生物理课组织到两学年系列课程中，结果成了三学年，因为在前两年中他没有实实在在地讲量子力学——虽然他在这里或那里涉及孤立的片段。他直接从原子出发——他没有停留在原子上而把它留给化学，只给一年级学生讲滑轮和弦！他给一年级学生反复提到物理学就是原子的性质这个事实。用这

样的分类方法，他力图将每一堂课做成各自独立的章节。现在，你只能在一定程度上做到，因为你必须将你的知识放在一定的数学水平的基础以及数学应用于物理学的熟练技巧上，还有诸如此类的一些东西。

无论如何，首先能促使费曼去做这事本身看上去就是了不起的想法。事实上，后来发现这对成熟的物理学家比对一年级大学生更合适。费曼的讲课对大多数一年级学生来说，内容是稍微多了一些：对大约百分之二十的学生来说它是理想的课，绝对完美。对大约百分之六十就不是了。他们的反应多半是像“确切地说，他难道期望我们学会所有这些东西吗？”

第一学年我负责实验室和课程的协调。我还负责将讲课内容誊写成书面形式。我在这本书的前言中曾说明我们原来指望将书的编辑工作安排给研究生做——加上一些 i ，去掉几个 t ，在这里或那里改几个誊写员可能误解的字，等等。

阿斯帕图里安：怎么会委派你去监督书的编辑工作？

莱顿：我是课程改革小组的主席。你总不可以让费曼自己来处理整个课程，他要讲课。讲课占用了他所有时间。还有实验课配合讲课，新内容是完全不同的，这要求一年级实验室排出完全新的实验。现在已经退休的（H.维克多）内赫博士具体负责实验部分。但我是协调人。

讲课被录音；费曼用一个挂在衣领上的无线传声器，我们雇用了一位年轻女士誊写这些录音。她愉快地尽力去做，听录音并打成书面文字。她的工作做得很好。但是大概经过六次或八次讲课，结果什么

有用的东西都没有得到。誊写本是逐字逐句誊录的，可是在现在这种情况中逐字逐句誊录就很糟糕——因为费曼对任何东西从来都不是只讲一遍：如果不是重复三遍半或四遍，他至少要重复两遍再加一半——每一次他都用不同的方式来讲。然后他进入下一个论题，讲了两分钟，他还在想他是不是可以把前面的论题解释得更清楚些，于是他又回过来重复讲。结果是组织得很松散，有点乱。我只得亲自把它理顺，编辑出第1卷。这是专职工作，没有全心全意去做的话就不可能给出满意的素材。

这里有很特别的一段，如果我到费曼的书里去找的话，我肯定可以找到。我想让你知道原来费曼讲的话是什么样子的。〔大笑〕它和牛顿以前的物理学以及牛顿以后的物理学有关系。费曼的意思是说，在以前，世界正是在黑暗和迷信的极度混乱中——以后世界全都是光明的，有秩序的并且是可理解的。这绝对真实，他总是用这种一点也不明白的方式来表达。他讲的句子里面没有一个动词！〔大笑〕

阿斯帕图里安： 当你们开始的时候你了解费曼吗？

莱顿： 喔，大约和我今天了解他一样。我猜想他和我都有某种社交方面笨拙的问题：我记不住人的名字，除非我要十分认真地记，并且要花很长的时间。如果我要将某个人的姓名在我的头脑中归类，这样我才能再把他想起来，我当时就一定要立刻这样做。但问题在于，给我介绍某人是在谈话过程当中，并且谈话还在继续进行，他或她是谁立即从我头脑中丢失了。这是这种缺陷的一种表现；费曼也有这个问题。我知道，他在麻省理工学院时和某个后到加州理工学院的人同室居住至少有一个学期，他居然想不起那人的名字〔大笑〕！

阿斯帕图里安：和他一同编写《费曼物理学讲义》工作是怎样的情况？

莱顿：最初打印出来的稿本绝对是没有加工的“费曼语”，必须在原始的稿纸上做粗略的编辑。我将他的每堂讲课的材料整理成我认为可以打印到正式的稿纸上的程度，再送回年轻的女打字员，重新打印成文以送交费曼校勘。他会抽时间看这些，但通常没有评论——这就是说他完全满意。

另一件事是，讲课是在11点钟，接下来是午餐。我们总是一同去吃午饭，当他对某些事情的做法不满意时，就会提出问题或者批评，“要把这事做得更好我们可以做些什么呢？”就会有一些想法，然后我们进行讨论。还有另外一些听课的人——教授和助教——就会有几分像流动午餐，部分是讨论讲课。这并不是有意识这样组织的，但却得到某些思想的好机会。

阿斯帕图里安：这最初的设计是否主要是为了有益于加州理工学院学生？

莱顿：噢，是的。

阿斯帕图里安：但后来它还是有些扩大，不是吗？

莱顿：是啊，没有一个教一年级物理的教师会拒绝拥有一本《费曼物理学讲义》，无论他在课堂上是否用它。这一计划是福特基金资助的，我也不知道版税是多少。有一个约定，学院同意将教材获得的所有版税都用来支持加州理工学院同样类型的活动。没有任何版税支付给参与讲义编辑的人员本人。这是教学任务，所以这个计划不能作为有著作权的手稿对待。这也是应该的。当时费曼说，“要看以后的四

年或五年我们的工资有多少，我们就会知道它是不是卖得很好。”[大笑]他是对的。我们的工资一直增加，他的以及我们这些在他周围工作的其余许多人——原因显而易见，我猜想。

阿斯帕图里安： 你的儿子拉尔夫也参加了同样的工作。^[2]那是怎样一回事？这是不是成为家族的特权了呢？

莱顿： 我对事情发生的先后次序已记得不十分清楚了。我的妻子和我那时常常举办聚餐会，费曼肯定参加过一次或者好几次这样的聚餐会。我的儿子拉尔夫那时在高中读书并且热衷于敲鼓，他和一群喜欢音乐的朋友十分友好，其中有会玩各种乐器的孩子和他们的父母——这给我们家带来另外一群客人。有一次，费曼听到拉尔夫和他的朋友在另一间房里敲鼓，于是他就进去了，他和孩子们在一起总是感到更加自在。他介绍自己，于是他们邀请他敲鼓。从此导致费曼、拉尔夫和两位碰巧来访的朋友组织定期的鼓会。

我自己对费曼的敲鼓技巧感到好奇，有一次我问拉尔夫，“哎，费曼是一个好的鼓手吗？”他说：“是啊，他敲击的节奏完全准确，并且他的节奏非常快，虽然有的时候开始时有些不顺——但是对一个老头子来说他是十分好的。”[大笑]我告诉拉尔夫，他刚才说到的这个人可能是当代世界上懂得宇宙中各种事物是如何运作的比任何其他人都多的一个人。[大笑]

不管怎样，拉尔夫的其他音乐朋友都先后离开，进了这所或那所大学，但费曼和拉尔夫继续一同敲鼓。如果你和费曼交往足够长的时间，你就会不经意间听到这些惊奇的故事。毫无疑问，这些故事在讲的时候夸大了，但都十分真实可信。有一只无限大的锅子，他时不时地从里面掏出一个故事。就是说，记忆中的一些东西会被回忆起来是

这样或那样的。如果你在一些同样的谈话情况中碰巧和他在一起，你会听到同样的故事——例如费曼还是孩子的时候修收音机，在洛杉矶莫斯和将军打交道。费曼可以一直讲下去：从一件事联想起另一件事——那是很惊人的。这个人绝对是不可思议的。

阿斯帕图里安：所以说贮藏着取之不尽的（inexhaustible）故事。

莱顿：或者就像有些人说的，不可饶恕的（inexcusable）[\[3\]](#)！
[大笑]

在他们鼓会期间，拉尔夫把这些故事录音下来。然后他把这些打印出来，先是用打字机，后来用我的电脑。费曼对这事很满意；这事完全不是偷偷摸摸的。这就是拉尔夫说的，“这些故事多么了不起，就像宝石滑过我的手指间——我能把这些打印下来吗？”

后来到某个阶段，我对拉尔夫说：“我来整理打印稿你看好吗？我只是想重温我的记忆。”所以我阅读了大部分打印稿。我时而发现一些弄错了的词汇。

阿斯帕图里安：你对大多数故事都熟悉吗？

莱顿：喔，是的。对我来说只有百分之二十是新的。我想拉尔夫和我用不着老是讨论这些事，我们在完全不同的场合下了解到关于迪克的同样的一些事：关于他说些什么，你只要做很少的编辑工作。你应当让它尽可能地接近于原来的样子，包括他独特的讲话方式——只是不要重复。在物理学讲义中，我发现非常重要是将重复的材料整理成为好的表达方式并保留这种形式。拉尔夫在处理文字方面很有才能。不过，这件特殊的任务是他第一次试着写一些要发表的东西，他

从爱德·哈钦斯（Ed Hutchings）[工程学和科学编辑]那里学到了一些有价值的知识。

阿斯帕图里安：还有什么后续计划？

莱顿：噢，还有更多的故事。后来还有QED [《量子电动力学：光和物质的奇异理论》，理查德·费曼著（普林斯顿，1985）]，这已经出版了并得到相当好的评论。我猜想拉尔夫还在玩他的磁带录音机。

阿斯帕图里安：在 [《别逗了，费曼先生！》] 那本书里，有一些东西我发现并不都是对费曼正面的表现。有没有讨论过删去一些这样的内容？

莱顿：没有。他就是这样的人。

[1] 水手号计划（Mariner Program）是美国宇航局从1962年至1972年发射一系列行星际机器人探测器的计划，共发射10枚水手号飞船，其中第2、第3号失败，水手2号探测器中使用了微波和红外辐射计，于1962年发射。——译者注

[2] 拉尔夫·莱顿是费曼的两个回忆录集——《别逗了，费曼先生！》（诺顿出版社，1985）；《你为什么关心别人在想些什么？》（诺顿出版社，1988）的誊录员，这两本书在2005年合并成一卷《经典的费曼》。

[3] 这一句“不可饶恕”的英文inexcusable和上一句中“取之不尽的”英文inexhaustible两个英文字发音相近。——译者注

采访罗丘斯·沃格特

这一段的材料是拉尔夫·莱顿于2009年5月15日在加利福尼亚理工学院做的记录。莱顿和迈克尔·戈特利勃采访罗丘斯·沃格特，有关20世纪60年代初期加州理工学院以及讲授费曼的物理学是怎样的情形。（感叹号通常表示沃格特对他当时所说的事情发笑。）

莱顿：我想请问在《费曼物理学讲义》中你的作用。请你把我们带回那些日子。

沃格特：1962，我来到加州理工学院，本科一年级的课是1961年开讲的——我来时正值费曼的一年级课程必须翻译成一般人都可以用作教材的东西——这是一个很大的挑战！当加州理工学院聘用我的时候，我告诉物理系主任卡尔·安德森（Carl Anderson）：“我还要结束在芝加哥的一些重要工作，到十月中旬以前我还不能离开。”他说：“没有问题，请别人来上你的课到十月中旬，你一来就要上课。”那和今天的方式完全不同，我还记得我的妻子米茜苓（Micheline）和我在一个星期六下午到达帕萨迪纳，星期一早上我就到教室里——我还不知道我要做什么！

这是第二学年的课程。费曼给二年级学生讲课，那时你的父亲[罗伯特·莱顿]讲一年级的课。莱顿的课讲得非常好，在这样的小组中工作是很愉快的——看到我们这些平凡的人可以教费曼讲义确也是了不起的事，许多人怀疑这种事是不是可能！在鲍勃·莱顿的领导下，我作为助教，教两个辅导班——一个普通班，一个重点班。重点班程

度相当整齐，普通班就不那么整齐了；因为其中包括学生物的学生，他们并不想学物理！不过，还是得到了预期的效果。这个班比重点班更具挑战性——重点班非常容易教：他们自己都会做，不需要我。

莱顿：这是很有趣的，当你教优秀学生的时候，你怎样知道你是个好教师！

沃格特：你说得不错。那时有所谓“教学质量反馈报告”，针对所有教师，并且一直都有。我看到我自己的。其中有“他的工作做得很好，当然有像《费曼物理学讲义》那样优良的教科书，任何人都可以做到！”当时他们认为这是一本很好的教科书。以后的几年中，加州理工学院的人说《费曼物理学讲义》确实不适合做教科书——但令人觉得诧异的是，许多人把这本书和指定给他们阅读的一些教材并行研读——这意味着这套《费曼物理学讲义》并没有失去价值。但在加州理工学院，它应当仍旧用作教科书，就应该如此。

那是不容易的，因为我们没有人具有费曼那样的魅力和号召力——没有人能仿效。但到我的第二学年，我（接着鲍勃·莱顿）给一年级学生上课，我总是布置这样的作业：阅读费曼书的下面的一章，然后我要教你们它有什么意义。这很有效，因为我不是鹦鹉学舌般地复述费曼。事实上，我告诉他们：“对我来说鹦鹉学舌般地重复圣经是没有意思的——圣经是独立自明的——但是我可以告诉你如何理解它。”我给他们例题、应用、扩充，有时作解释——因为费曼有时候站在很高水平上——这样做看来是有效的。

你可能对我第二学年在加州理工学院如何接着讲《费曼物理学讲义》会感到有趣。十月初的一天，鲍勃·莱顿和我偶然相遇，他突然说：“罗比，我要你接着教这门课。”

“发生了什么事，鲍勃？”我关切地问。

他说：“我需要休假，我已经决定去亚利桑那州基特峰（Kitt Peak），我决定你来接替费曼课程。”于是，鲍勃·莱顿要将《费曼物理学讲义》交给我去讲的消息不胫而走。

马修·桑兹听到这个消息勃然大怒！我还记得在鲍勃·莱顿的办公室里和他讨论这件事的时候，马修·桑兹在外面声嘶力竭地大叫，我敢说从来没有人像这样叫喊过。“鲍勃·莱顿神经错乱了！他疯了！他让这个毫无经验、幼稚的助理教授接替费曼课程！这简直是污辱！我反对！”他确实很激动，由于他深深的关切，他信任鲍勃·莱顿，但他从来没有听说过我。

不管怎样，1963年10月21日，我讲了费曼课程的第一堂课。当时发生了几件事：我准备在十二月份的四分之一学期休假期间到印度去参加一个会议，所以要打黄热病和伤寒病的预防针——打了伤寒预防针后我发了高烧——在10月20日我发着高烧。更有甚者，那天正好我的妻子米茜苓把我们的第一个女儿米茜尔（Michele）带到了这个世界，所以我在10月20日晚上一直待在医院里，等待着事情的发生！我只有两个小时睡眠，我发着高烧，我还要讲我的第一堂费曼课——这真是怎样的一个开始。

顺便说说，你的母亲爱丽丝（Alice）做了一件绝对不可思议的事：她给我们打电话说：“我觉得鲍勃使你陷进费曼课程真是不应该，我知道你的孩子刚刚出生，所以我决定为你们订购了洗尿布服务——这可能对你们有所帮助。”就是这样。

不管怎样，正如我说的，我觉得教费曼物理非常愉快，因为这些都是非常聪明的学生；如果你给他们机会，他们会做得很好。我认为实际上他们在我的引导下能比在费曼指导下做得更好，因为在费曼以外还有某个人教他们费曼的运用。

你大概知道，费曼讲课的时候一半以上的助教都是教授。甚至在我担任讲课教师时，也有好几位教授上辅导课——我的一位助教是汤米·劳里森（Tommy Lauritsen）。汤米帮了很多忙。每堂课他都来听，告诉我哪些是好的，哪里可以改进。做助教被认为是准备讲授《费曼物理学讲义》必需的。我讲授《费曼物理学讲义》两年后，汤米接替我——他是下一位费曼讲师。

当我在鲍勃·莱顿手下担任辅导课时，我对费曼课程逐渐搞得非常熟悉。不然，如果我因没有这个背景而毫无准备，我就不可能做出优良的业绩。作为助教，我学到了学生需要什么——怎样做对他们有效，怎样没有效果；即使我做了讲课教师，我也总是教一班和我上的大课并行的辅导课，因为我要知道学生是怎样做的，我怎样可以教得更好。当你上一个10到20个学生的小班课的时候，你会得到非常好的反馈，而在上大课的时候你很少得到反馈，因为他们忙于记笔记和听讲。有时候课后你稍微多留一会，但这不是同一件事。但当你布置课外作业并和他们讨论的时候，你会发现学生是否真正懂得物理意义。

对于课外作业，我有自己的观念，这与他们现在所做的完全不同——这就是，他们印出解答并在布置作业时就交给学生，或者用去年的，因为他们常常再次使用同样的题目。我完全反对这样做。这是一个心理学的问题，当你被难住的时候，你完全不知道下一步该怎么做，很自然地你想看看结果以帮你克服困难。但很快你开始越来越早地查看解答。所以我把我的观念给学生讲得很清楚。我说：“我希望你

们首先试着独自做你们的课外作业。但是，如果你们在我布置的一个题目上花了20分钟还不知道怎样做，然后去和别人讨论。不要因此觉得难过。有时候你只是没有搞懂；你可能忘了某些关键的东西。只要某人给你一些启发，你就知道如何做了。然而，一旦你理解了这个问题，就回你的房间，你自己求出解答——不要抄别人的答案。”

还有第三种情形：我说：“如果有几个人一起做，经过半个小时还做不出，就给我打电话。”我忘了学生什么时候做他们的作业——于是我在半夜两点或三点钟接到了电话：“我们被难住了！我们刚才花了一个小时，但毫无头绪！”

戈特利勃：我要问他们另外一个问题：“你们认为适合给教授打电话的最晚时间是几点钟？”[大笑]

沃格特：实际上我很高兴他们这样做。在你年轻的时候，半夜三点钟被叫醒并不是一件了不起的事，花15分钟和学生谈话然后回去睡觉——尤其是在隔壁房间还有一个婴儿在哭闹！至少我知道了对学生的问题该怎么办；至于孩子的哭闹，我想都没有想！

回到你的第一个问题，拉尔夫，关于我在费曼课程中的角色。我把我自己看作助手，是一个解释者，是费曼和学生之间的中间人。另一个角色是和鲍勃·莱顿一同提供练习。他对我有非常大的影响，我是说就是他让我参加这项工作！当我们编写出A、B和C三类问题时，他常说，“我们还需要两个A，或还要两个B。”通常我们有很多C，最难的题目！他总是知道缺失了什么。有时候他会提出一个题目，但更多是说“罗比，再想两个题目——我知道你能够做到。”这是他的风格：他觉得每个人都有足够的办事能力；他们只要有做这事的动力。他不以为他是在利用我，他只认为他应该帮助我做正确的事。

几年之后，有一次我“作弊”，用了别人的习题。有一篇我心中的英雄瓦尔·特莱迪（Val Telegdi）的关于计算电子的 g 因子的重要论文。发表在*Nuovo Cimento*（意大利的物理出版物）上，我记得好像共有65页。大部分数学推导我都不懂。我仔细读了这篇该死的论文并对我自己说：“读懂这篇文章真是一件苦差事！”然而，我想起了费曼给二年级学生讲的量子力学课程，我知道你可以根据《费曼物理学讲义》解同样的问题。于是我就给三年级学生出了一个课外作业题：“求电子的 g 因子。”

班上一半以上的学生都能做出这一道题。当然也要善于随机应变，因为你不能将费曼给二年级学生讲的量子力学的风格用于所有事情，但它对于像这样的一些物理问题有重要的应用价值。你无法想象这些学生感到如此自豪：他们只写了一页半就能够完成特莱迪的有许多数学的65页的物理问题！所以他们认为费曼量子力学非常优美，就是这样。

我还想起另一件事，这要追溯到我们教费曼课程最初的几年：每周星期三，大约六到十位物理学家共进午餐（我们自带，或者到帕萨迪纳的米哈勒斯墨西哥餐厅）。这些人包括鲍勃·莱顿、吉利·诺伊格鲍尔、汤米·劳里森，还有其他几个人。当我们在这些午餐会上聚集在一起时，我们讨论教学工作：怎样做有效，怎样做效果不好，我们怎样可以做得更好。有这么多的相互支持，你一定会成为一个更好的教师，因为你能得到这么多的帮助——还有星期五下午在劳里森家里，我们许多人都喜欢在周末聚在那里喝点儿马丁尼酒放松身心。我们多半是讨论学生和教学。在有些时候我们也讨论研究工作，因为我们各自有不同的研究领域，我们对别的一些人做的工作有多大的兴趣见解不同——当然我们每个人都认为自己的研究是最吸引人的——但是当

谈到教学，我们每个人都有相同的兴趣，我们可以从别人那里学习。没有人强迫我们这样做，在20世纪60年代初期的加州理工学院的气氛中，这些只是自发的。

这就是我所知道费曼课程是如何进行的——在劳里森家里醉酒之后。他们讨论怎样把事情做得更好，马修·桑兹提出了他们应当请费曼来参加的想法。

通过这样的聚会我体会到大学怎样会成为非常有教益并且温馨的地方——由于有这些学生，他们形成了教师之间的纽带。我们聚在一起是为了学生，不是为我们的科研。当然，我们个人之间也常见面——汤米常来我的实验室，他说“告诉我你正在做什么”，并提出很好的建议，但这通常是一对一的。有关学生工作是学校的任务。我讲课的时候总有三四位教授坐在后排，在东桥楼201大教室——并不是因为他们不信任我或者监视我，而是因为他们觉得好奇，我是怎样上课的以及他们可以从我的课中学些什么。甚至系主任卡尔·安德森每隔一堂课都要来听，我也从每一位得到反馈。这也是费曼的精神：你知道，费曼讲课的时候后排坐满了教授。他们都是如此着迷，于是他们形成了一个习惯，甚至于来旁听普通的人的讲课——比如像我这样的小人物——因为这已经成为一种模式。这很重要，我觉得遗憾的是：今天我再也看不到这种精神了。

最后一件事：在那些日子里，我对我的课程负责。我布置所有的课外作业，我组织所有的测验，组织所有的期末考试——我亲自做——没有别人帮我做这些事。我用不着去问别的人，因为我想我最清楚要问些什么！除此以外，我教一个优秀生小班；还有，我管理一年级实验室——在那些日子这是正常的教学工作量。今天，我想只有这四分之一。今天大多数教授每年上两个四分之一学年的一个班级课

程。现在，我要讲句公道话：今天我承认再也不可能像我们当时所做的那样了，因为今天教授们不得不花很多的时间为他们的科研筹钱以保证他们的研究工作——但这又是另外的一回事了。

1 预修课

复习课A

1-1 复习课导言

这三讲选修课都比较乏味：把以前讲过的内容再复习一遍，一点也没有增添新材料。因此我很惊讶地看到这里有这么多人。坦白地说，我宁可希望你们只有几个人，这几次讲课并不是必需的。

在这个时间放松一下的目的是为了给你们时间考虑一些问题，复习一下你们在课堂上听过的内容。学习物理学最有效的方法是什么：毫无疑问，到课堂里来听复习课不是一个好想法，更好的方法是你自己做复习总结。所以我建议你们——如果你不是远远跟不上，或完全不懂和糊涂——你们要忘掉这几次讲课，自己进行复习，试着找出什么是有兴趣的东西，而不必辛辛苦苦地按某一条特定的路线死记硬背。你想学得更好，更轻松并且更完满，就要你自己选择一个你认为有兴趣的问题深入探讨——选择某个你听到过而你还不不懂的问题，或者你打算进一步分析的，或者用它来玩些什么花招的问题——这是学习某样东西的最好方法。

一直到现在，我们正在讲的课是一门新型的课程，我们设计这门课程是想回答我们认为存在的问题：就是没有人知道怎样教物理，或者怎样教书育人——这是一个事实，如果你们不喜欢所用的教学方

法，那是完全自然的。不可能教得人人都满意：几百年或更多的时间里，人们一直在设法解决如何教的问题，可是还没有人已经解决了这个问题。所以，如果这一新型课程不能令人满意，这并不奇怪。

在加州理工学院，我们总是在改变课程，希望有所改进。这一学年我们再次改革物理课。过去令人不满意的地方之一是，最好的一些学生觉得全部力学的内容都很枯燥：他们发现他们自己学得很辛苦，做习题，复习功课，应付考试，没有时间思考一些问题；里面没有令人兴奋的东西；没有讲到它们和近代物理学的关系或任何类似的东西。所以这一系列的讲课被构想出来，认为这在一定程度上是比较好的方法，可以帮助这些优秀的学生，并使主题更有趣，如果可能的话和宇宙的其余部分联系起来。

另一方面，这种做法有不利的一面。这会使许多人感到困惑，因为他们搞不清楚要他们学些什么——也可以说内容实在太多，他们不可能全都搞懂，他们没有足够的智慧去判断对他们来说什么是有兴趣的，而且只把注意力放在这些感兴趣的问题上。

因此我给我自己定下这次讲课的对象是：他们听大课感到非常难懂，非常厌烦，非常恼火，从某种意义上说他们搞不清要学些什么，他们感到迷茫。并不感到迷茫的另一些人就不该坐在此地，所以，现在我给你们出去的机会.....^[1]

我看没有人有勇气。或者，我猜想我完全失败了，就是说我使每一个人都感到迷茫！（也可能你们坐在这里只是为了好玩。）

1-2 加州理工学院最差的学生

现在，我设想你们中的一个人来到我的办公室说：“费曼，我听了所有的课，我参加了期中考试，我还试着去做习题，可是我一点也不会做，我想我是班上最差的学生，我不知道该怎么办。”

我要对你说什么呢？

我要指出的第一件事是：进入加州理工学院在某种意义上具有优势，但从另一个角度来看是不利条件。某些优势你们原来大概已经知道，但是现在忘记了。这些优势包括这样一些事实，就是学校有极好的声誉，并且这样的声誉是应得的。这里有相当好的课程。（我不知道关于我们这一门课程如何，当然我对它有自己的看法。）从加州理工学院毕业的人，当他们进入工业领域，或去做研究工作，等等，都说他们在这里受到了非常好的教育，当他们把自己和曾经进其他学校的人相比较（虽然其他学校也非常好），他们从未发现他们落在后面并缺少了某些东西；他们总觉得他们进了所有学校中最好的学校。这就是优势的方面。

但是也有某种不利因素：因为加州理工学院有如此好的名声，几乎所有在高中班级里第一、第二名学生都要申请来这里。有许许多多高中，所有最优秀的男生^[2]都来申请。现在我们试图制定一个选择系统，有各种测验，因此我们招收到最优秀中最优秀的学生。所以你们这些小伙子都是从所有这些来报名的学生中仔细挑选出来的。然而我们仍旧需要不断工作，因为我们发现非常严重的问题：无论我们多么严格地选择这些学生，无论我们多么耐心地进行分析，当他们进校以后会发生一些情况——结果总是有差不多一半的学生在平均水平以下！

当然，你们会对这个结论嗤之以鼻，因为对于有理性的头脑来说这是不证自明的，但对于重感情的心灵来说就不是这样——重感情的心灵不会嗤之以鼻。你在高中的科学课上一直都是第一名或第二名（或者即使只是第三名）。你知道在你原来中学里的科学课在平均水平以下的每一个人都是十足的傻瓜，现在你突然发现你自己在平均水平以下——你们这些小伙子的一半都是——低得可怕，因为你们想象这意味着比较起来你们笨到像以前高中里的那些家伙那样。这就是加州理工学院巨大的不利因素：心理上的打击很难承受。当然，我不是心理学家；我想象所有这些，其实我并不知道是否真的是这样！

问题在于，如果你发现你是低于平均水平该怎么办，有两种可能性。首先，你可能发现你必须设法摆脱这种困境，从而感到如此的困难和烦恼——这是感情上的问题。你可以运用你的理性思维对待这个问题，并对你自己指明我刚才给你指出的问题：在这里的一半学生都低于平均水平，即使他们原来都是拔尖的学生，所以这并不意味任何了不起的事情。你看，如果你对这种无意义的蠢话和不舒服的感觉忍耐四年，然后你走出学校再进入世界，你会发现世界仍旧像以前那样——例如，当你在某个地方找到了工作，你会发现你又是第一号人物。你得到做专家的巨大满足，在这个特定的工厂里，当他们不能计算怎样将英寸换算成厘米时都来向你求教！这是真的：到工厂去的人，或者到一所在物理学方面没有极好声誉的小学校，即使他们曾经在班上是倒数第三名，倒数第五名或倒数第十名——如果他们不努力鞭策自己（过一会我将要说明），他们就会发现他们自己是大大地被看重的，他们在这里学到的东西非常有用，他们回到了他们以前的状态：快活，第一号人物。

另一方面，你可能犯一个错误，有些人可能鞭策自己力争这样的地位，就是他们坚持一定要成为第一号人物，不管其他各种条件，他们要进研究生院，他们要成为最好的学校里的最好的博士，即使他们开始时是这个班上最差的学生。不过，他们很可能失望。并且在他们今后的生命中总是在第一流的人群中最低的地位，因为他选择了这一群体，这使他们自己感到痛苦。这是一个问题，这轮到你了——这取决于你的个性。（要记住，我是对我办公室的小伙子讲话，因为他是在最差的十名中；我不是对另外的那些很得意的人讲的，因为他们正好在前十名中——无论如何这是少数！）

就这样，如果你能承受这个心理上的打击——假如你可以对自己说，“我在班上属于最差的三分之一当中，不过班上有一分之一的家伙在这最差的三分之一中，因为事实就是这样！在高中的时候我是顶尖的学生并且我仍旧是一个聪明的家伙。我们国家需要科学家，我要做一个科学家，当我从这所学校毕业以后，我会一切顺利，见鬼去吧！我会成为一名优秀的科学家！”——然后这将成为事实：你会成为一名优秀的科学家。唯一的问题是，你在这四年中能不能不顾理性的论据保持愉快的心情。如果你发现你不能保持愉快的心情，我建议最好的出路是试试到另外一个地方去。这不是失败；这只是感情上的问题。

即使你是班级里最后两名学生之一，这并不表示你一点也不行。你只是一定要把你自己放在适当的一群人中比较，而不是和在这里加州理工学院聚集的一群疯子相比。因此，我特意对那些失望的人作这样的评论，他们还有机会留在这里更长一些的时间，看看他们是否能适应，好吗？

我还要讲一个问题：这不是为考试做准备，或者像这一类的事情。我对考试毫不知情——我的意思是说，我根本不管出考题的事，我也不知道会出怎样的考题，所以我一点也不能保证考试会出什么题目，我只是打算对讲课的内容作一些复习，或者说些类似的废话。

1-3 物理学需要的数学

就这样，这个小伙子来到我的办公室，要求我把我以前教他的每样东西都整理一下，这就是我要尽力去做的。问题是试着解释教过的内容。我现在就开始复习。

我要告诉这个小伙子，“你必须学习的第一件事是数学。其中首先包括微积分。微积分中首先是微分。”

数学是一门美丽的学科，它包含多种多样复杂的内容，我们试图列出为物理的目的 必须学习的最少的数学。这里采取的态度对数学是“轻蔑的”，只是纯粹的工具；我不打算取消数学。

我们必须做的是学会微分，就像知道3加5等于几，5乘7是多少一样。因为这类运算经常会遇到，最好不要被它弄得惊慌失措。当你写下某些东西时，你应当能立即求出它的微分，甚至连想都不要想，并且还不能有任何错误。你将会发现你经常要做这种运算——不只是在物理学中，而是在所有科学中。因此微分就像你在学习代数以前必须学会算术一样。

附带说说，对代数也是同样：有许多种类的代数。我们假定你在睡梦中还会做代数，倒背如流，并且还不出错。我们知道这不是真

的，所以你们应当做代数练习：你自己写出许多表达式，用它做练习，并且不要做错。

代数、微分和积分的错误结果只是些没有意义的东西。这些只会把物理搞混，当你试图用这错误结果来分析某种东西时会搞乱你的思想。你们应当尽可能快地进行计算并且错误率最小。除了老老实实多做练习以外没有别的办法——这是学数学的唯一办法。就好像你在小学里学乘法表：老师把一连串的数字写在黑板上，你们要做“这个乘那个，那个乘这个”如此等等——砰！砰！砰！

1-4 微分学

同样的道理，你们必须学习微分学。拿一张卡片，在卡片上写下若干下列一般类型的表达式，例如：

$$\begin{aligned} &1 + 6t \\ &4t^2 + 2t^3 \\ &(1 + 2t)^3 \\ &\sqrt{1 + 5t} \\ &(t + 7t^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

等等。譬如说，写出十几个这样的表达式。然后从你的口袋里随便拿出一张卡片，把你的手指指着上面的式子，并说出它的微分。

换句话说，你应当立刻看出：

$$\frac{d}{dt}(1+6t) = 6。砰！$$

$$\frac{d}{dt}(4t^2 + 2t^3) = 8t + 6t^2。砰！$$

$$\frac{d}{dt}(1+2t)^3 = 6(1+2t)^2。砰！ \quad (1.2)$$

看到没有？要做的第一件事情是牢记怎样求微分——一点儿不出差错。这是必须做的练习。

现在，要求更复杂的表达式的微分。求和的微分很容易：简单地就是各个分立的被加数的微分之和。在我们这一阶段的物理学课程中，不需要知道怎样求比上面所列出的更复杂的表达式或者它们的和的微分。按照我们复习的精神，我不再给你们讲更多的了。但有一个求复杂表达式微分的公式，它通常与微积分课上所写的形式和我要写给你们的不同，但你们会发现这种形式特别有用。你们以后不会学到，因为没有人会把它告诉你们，但知道怎样做是有益的。

假设我要微分下面的式子：

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}(4t)^{3/2}} + \frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}}. \quad (1.3)$$

现在，问题是怎样迅速地去求微分。这里告诉你怎样迅速地去做。（这些只是规则，我已经把数学运算减少到这样的水平，因为我们是和勉强跟得上的学生一同学习。）你们看！

重写表达式，并在每一个被加项后面放一个括弧：

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}(4t)^{3/2}} \cdot \left[\right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}} \cdot \left[\right. \right. \quad (1.4)$$

下一步，你要在括弧里写一些东西，到你全部完成时，你就得到原来的表达式的微分。（这是你为了不要忘记它，所以要再次写下表达式的原因。）

现在，你注意每一项，并写下一横——除法符号——写下分母：第一项是 $1+2t^2$ ；把这放在分母上。这一项的幂放在前面（这里是1次幂），这一项的微分（按照我们练习中的方式）是 $4t$ ，作为分子。这是一项：

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}(4t)^{3/2}} \cdot \left[1 \frac{4t}{1+2t^2} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}} \cdot \left[\right. \right. \quad (1.5)$$

（6在哪里呢？忘掉它！在前面的任何数都不会有任何区别：如果你一定要，你可以写下，“6放在分母上；它的幂，1，放在前面；它的微分，0，放在分子上。”）

下一项： t^3-t 放在分母上；它的幂+2，放在前面；它的微分， $3t^2-1$ ，放在分子上。下一项， $t+5t^2$ ，放在分母上；它的幂-1/2（平方根倒数是负的二分之一幂），放在前面；其微分， $1+10t$ ，放在分子上。再下一项， $4t$ ，放在分母上；它的幂，-3/2，放在前面；它的微分，4，就是分子。括弧。这是一个被加数：

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}(4t)^{3/2}} \cdot \left[1 \frac{4t}{1+2t^2} + 2 \frac{3t^2-1}{t^3-t} - \frac{1}{2} \frac{1+10t}{t+5t^2} - \frac{3}{2} \frac{4}{4t} \right] \\ + \frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}} \cdot \left[\quad \right]. \quad (1.6)$$

下一个被加数，第一项：幂是+1/2。我们写下它的幂的那一项是 $1+2t$ ；其微分是2。下一项 $t+\sqrt{1+t^2}$ 的幂是-1。（你看，这是个倒数。）这一项在分母上，它的微分（这是唯一的一个比较难的）有两个部分，因为它是两项之和： $1+\frac{1}{2} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ 。括弧。

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}(4t)^{3/2}} \cdot \left[1 \frac{4t}{1+2t^2} + 2 \frac{3t^2-1}{t^3-t} - \frac{1}{2} \frac{1+10t}{t+5t^2} - \frac{3}{2} \frac{4}{4t} \right] \\ + \frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}} \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{2}{(1+2t)} - 1 \frac{1+\frac{1}{2} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}} \right]. \quad (1.7)$$

这就是原来的表达式的微分。所以，你看到，记住这种技巧你可以求任何函数的微分——除了正弦、余弦、对数以及其他，但你能很容易地学会这些规则；这些容易得很。然后你就可以把这种技巧用于包含正切和其他的各种表达式。

我注意到，当我写下这些的时候你们都担心，那是这样复杂的表达式，但是我想你们现在明白了这确实是求微分的有效方法，因为它给出了答案——嘭——无论多么复杂一点也不拖泥带水。

这里的概念是，函数 $f=k \cdot u^a \cdot v^b \cdot w^c \dots$ 对于 t 的微分是：

$$\frac{df}{dt} = f \cdot \left[a \frac{du/dt}{u} + b \frac{dv/dt}{v} + c \frac{dw/dt}{w} \dots \right]. \quad (1.8)$$

(其中 k 和 a 、 b 、 c ...是常数。)

然而，在这物理课上，我觉得并不是所有的问题都像这样复杂，所以有可能我们没有任何机会来运用这种方法。无论如何，这就是我求微分的方法，我现在对它已经非常熟练了。我就讲到这里。

1-5 积分

微分的反过程是积分。你们应当同样好地学会尽可能快地求积分。积分并不像微分那样容易，但是在你的头脑中应当能够做简单表达式的积分。并不要求能够做每一种表达式的积分；例如， $(1+7t^2)^{1/3}$ 是不可能用简单的方式来积分的，但另一些写在下面的式子是容易积分的。所以当你们选择表达式来练习求积分时，一定要留心它们是容易做的：

$$\begin{aligned} \int (1+6t) dt &= t + 3t^2, \\ \int (4t^2 + 2t^3) dt &= \frac{4t^3}{3} + \frac{t^4}{2}, \\ \int (1+2t)^3 dt &= \frac{(1+2t)^4}{8}, \\ \int \sqrt{1+5t} \, dt &= \frac{2(1+5t)^{3/2}}{15}, \\ \int (t+7t^2)^{1/2} dt &= ??? \end{aligned} \quad (1.9)$$

关于微积分，我没有更多的东西要给你们讲了。其余的该由你们自己来做了：你们必须练习微分和积分——当然，不要碰到代数就害怕，就像在（1.7）式中。要用这种单调乏味的方法练习代数和微积分——这是首要的事情。

1-6 矢量

我们要专门讨论的、作为纯粹数学学科的另一数学分支是矢量。你们首先必须知道什么是矢量，如果你们对它还没有建立一点概念，我就不知该怎么办了：我们不得不过来来回回地讲解一会儿，以使我能了解你们的困难之所在——否则我就无法做解释。一个矢量，譬如像推力，具有一定的方向，或者像速度具有确定的方向，或者运动也有一定的方向——在一张纸上用沿着这个东西的具有方向的箭号来表示它。例如我们用箭号来表示作用于某一物体上的力，箭号指向力的方向，箭号的长度是以某规定尺度的力的大小量度——不过所用尺度必须对这同一题目中的所有力始终相同。如果你施加另一个两倍强度的力，你就用两倍长的箭号来表示该力（见图1-1）。

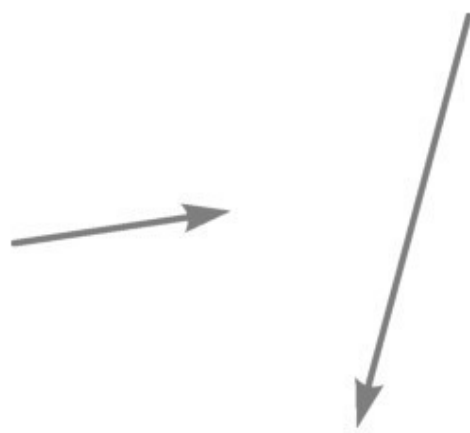


图1-1 用箭头表示两个矢量

现在，用这些矢量可以进行运算了。就是说，假设有两个力同时作用在一个物体上——譬如说，两个人一同推动一个物体——这样，两个力可以用两个箭号 F 和 F' 表示。我们在画类似于这样的图解的时候，将箭号的尾部放在力作用的地方常常是最方便的，虽然一般地说矢量的位置没有什么意义（见图1-2）。

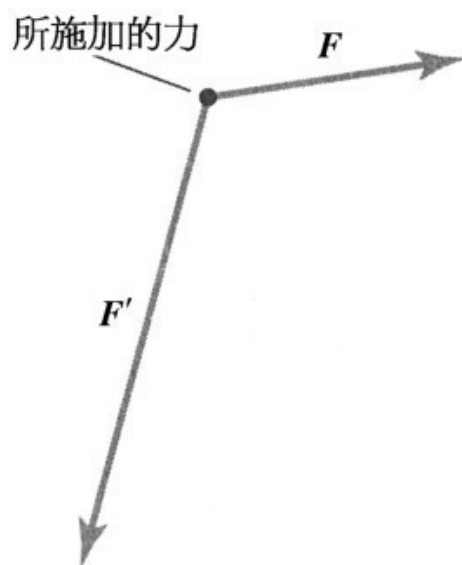


图1-2 作用在同一点的两个力的示意图

如果我们要知道合力，或力的总和，就相当于把矢量加起来，我们可以通过把一个矢量的尾部移动到另一个矢量的头部作图。（在你移动它们以后，它们仍旧是同样的一些矢量，因为它们的方向和长度都保持原样。） $F + F'$ 是从 F 的尾部到 F' 的头部的直线（或从 F' 的尾部到 F 的头部），如图1-3所示。这种求矢量和的方法有时叫做“平行四边形法则”。

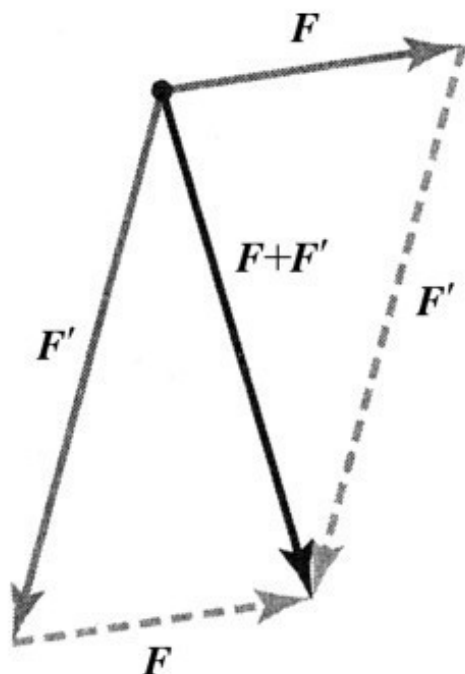


图1-3 用“平行四边形方法”求矢量和

另一方面，假设有两个力作用在一个物体上，但我们只知道其中的一个是 F' ；另一个我们不知道的力我们称作 X 。如果作用在物体上的合力 F 是已知的，我们有 $F' + X = F$ 。从而 $X = F - F'$ 。要求出 X 你们就必须求两个矢量的差，你们可以用两种方法中随便哪一种来求：可以取 $-F'$ ，它是和 F' 方向相反的矢量，将它和 F 相加（见图1-4）。

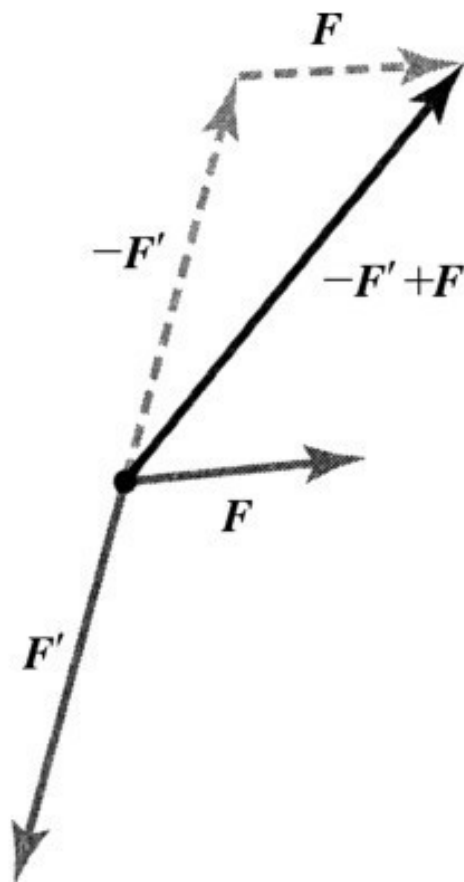


图1-4 矢量差的第一种方法

另一种方法， $F - F'$ 简单地就是从 F' 的头部到 F 的头部画的矢量。

好了，第二种方法的缺点是，你们可能倾向于画图1-5中的箭号，虽然方向和长度都正确，施力点不是在箭号的尾部——千万要注意。你对这种方法不太有把握，或者有些疑问，还是用第一种方法（见图1-6）。

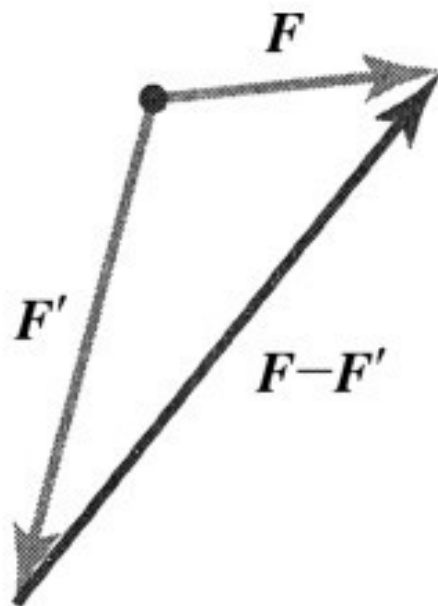


图1-5 矢量差的第二种方法

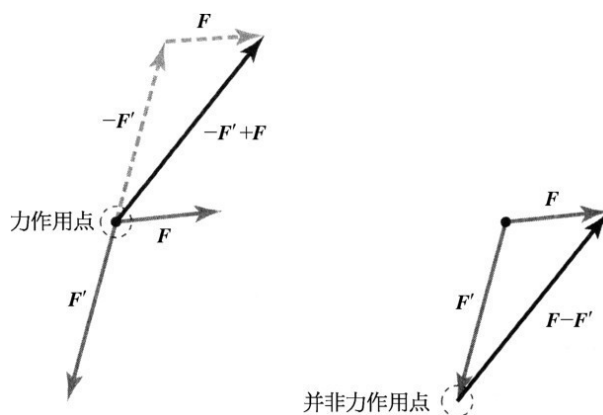


图1-6 作用在同一点上二力之差

我们也可以把矢量投影到一定的方向。例如，我们如果要知道在“ x ”方向的力（称为力在这个方向的分量），这很容易：我们只要将 $\boldsymbol{F}$ 垂直投影到 x 轴上，这就是力在这个方向上的分量，把它称作 F_x 。数学上 F_x 是 $\boldsymbol{F}$ 的数值（我们写成 $|\boldsymbol{F}|$ ）乘以 $\boldsymbol{F}$ 和 x 轴之间夹角的余弦；这来自直角三角形的性质（见图1-7）：

$$F_x = | \mathbf{F} | \cos \theta. \quad (1.10)$$

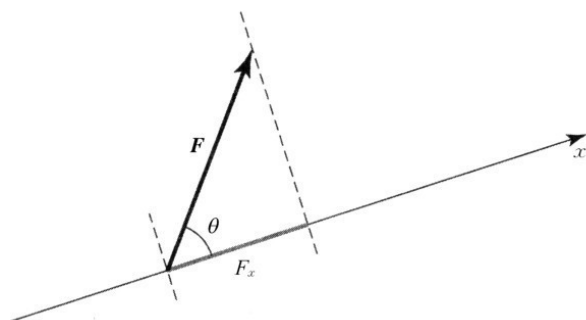


图1-7 矢量 $\mathbf{F}$ 在 x 方向的分量

其次，如 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相加得 $\mathbf{C}$ ，那么将它们到给定的“ x ”方向的垂直投影显然也相加。所以，矢量和的分量就是矢量分量的和，这对任何方向都是正确的（见图1-8）。

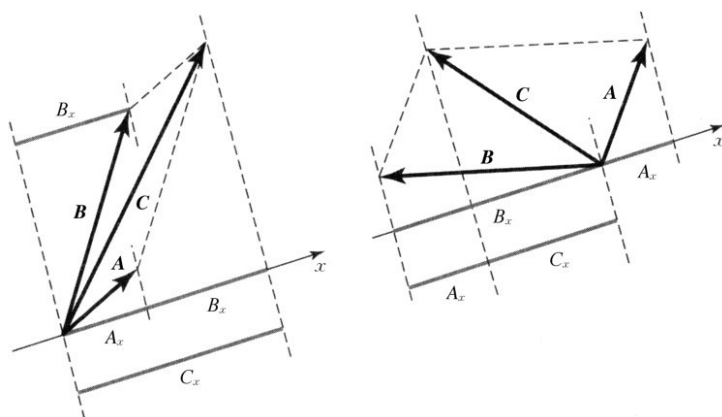


图1-8 矢量和的分量等于相应的矢量分量的和

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow A_x + B_x = C_x. \quad (1.11)$$

特别方便的是用它们在相互垂直的轴 x 和 y 上的分量来表示矢量（以及 z 轴——世界是三维的；我一直把这点忽略，因为我总是在黑板上作图！）。假设有一个矢量 $\mathbf{F}$ 在 x - y 平面上，并且我们知道它在 x 方向的分量，这还不能完全定义 $\mathbf{F}$ ，因为在 x - y 平面上有许多矢量在

x 方向都有同样的分量。但如果我们还知道 $\mathbf{F}$ 在 y 方向的分量，那么 $\mathbf{F}$ 就完全确定了（见图1-9）。

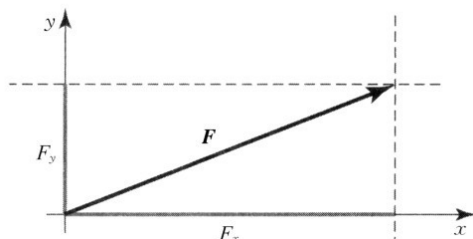


图1-9 在 $x - y$ 平面上的矢量由两个分量完全确定

$\mathbf{F}$ 沿 x ， y 和 z 的分量可以写成 F_x ， F_y 和 F_z ；矢量的求和等价于将它们分量求和，如另一矢量 $\mathbf{F}'$ 的分量为 F'_x ， F'_y 和 F'_z ，那么 $\mathbf{F} + \mathbf{F}'$ 具有分量 $F_x + F'_x$ ， $F_y + F'_y$ 以及 $F_z + F'_z$ 。

上面是较简单的部分，现在要稍微难一些了。有一个两个矢量相乘得到一个标量的方法——标量是一个在任何坐标系中都相等的一个量。（事实上，有一个从一个矢量得到标量的方法，我以后将会回到这个主题上来。）你看，如果坐标轴改变了，分量也随着改变——但矢量之间的夹角和它们的大小保持不变。设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是两个矢量，它们的夹角是 θ 。我取 $\mathbf{A}$ 的数值乘以 $\mathbf{B}$ 的数值再乘以 θ 的余弦，把这个数写成 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ （“ $\mathbf{A}$ 点乘 $\mathbf{B}$ ”）（见图1-10）。这个数称为“点积”或“标积”，它在所有坐标系中都是相等的：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\theta. \quad (1.12)$$

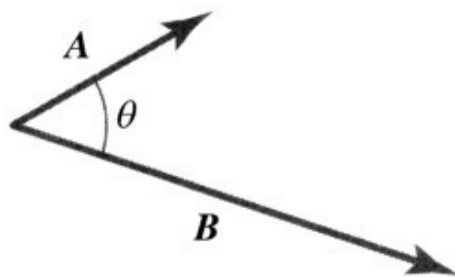


图1-10 矢量的点积 $|A| |B| \cos \theta$ 在所有坐标系中都相等

显而易见，因为 $|A| \cos \theta$ 是 A 在 B 上的投影， $A \cdot B$ 等于 A 在 B 上的投影乘以 B 的数值。同理， $|B| \cos \theta$ 是 B 在 A 上的投影， $A \cdot B$ 也就等于 B 在 A 上的投影乘以 A 的数值。然而，我发现， $A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$ 是最容易记住点积是什么的方法；这样我总是能立即知道其他的关系。当然，真正的麻烦在于，你有这么多的方法来表示同一事物，但你用不着试图把它们全都记在心里——这一点我随后将说得更完全些。

我们也可以用 A 和 B 在任意一组坐标轴上的分量来定义 $A \cdot B$ 。如果我们取三个相互垂直的坐标轴， x, y, z ，它们的方向任意。于是 $A \cdot B$ 就是：

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1.13)$$

怎样从 $|A| |B| \cos \theta$ 变为 $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ ，这并不是一眼就可以看出来的。虽然，当我想要做的时候我可以证明它^[3]，这要花很多时间，所以我要记住这两个公式。

当我求一个矢量和它自己的点积的时候， θ 为0，0的余弦为1，所以 $A \cdot B = |A| |A| \cos 0 = |A|^2$ ，用分量来表示，就是

$|\mathbf{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ 。这个数字的正的平方根是矢量大小的数值。

1-7 求矢量的微分

现在我们可以来求所谓的矢量的微分了。当然，除非矢量依赖于时间，否则矢量对时间的微分就没有意义了。这意味着我们一定要想象某个矢量在不同的时刻是不同的：随着时间的推移，矢量不断变化，我们要求变化率。

例如，矢量 $\mathbf{A}(t)$ 可以是正在飞行的物体在时刻 t 的位置。在下一个时刻 t' ，物体从 $\mathbf{A}(t)$ 运动到 $\mathbf{A}(t')$ ；我们要求 $\mathbf{A}$ 在 t 时刻的变化率。

计算的法则如下：在时间间隔 $\Delta t = t' - t$ 内，物体从 $\mathbf{A}(t)$ 运动到 $\mathbf{A}(t')$ ，其位移为 $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t') - \mathbf{A}(t)$ ，这是从原来的位置到新的位置的矢量差（参见图1-11）。

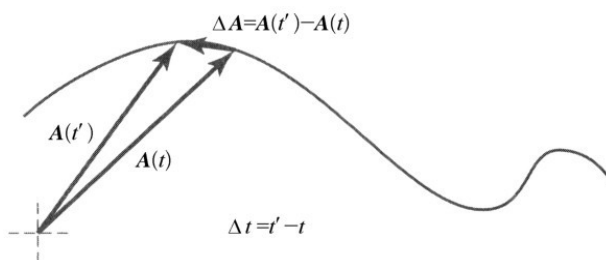


图1-11 位置矢量 $\mathbf{A}$ 和它在时间间隔 Δt 中的位移 $\Delta \mathbf{A}$

显然，时间间隔 Δt 越短，则 $\mathbf{A}(t')$ 越靠近 $\mathbf{A}(t)$ 。如果 $\Delta \mathbf{A}$ 除以 Δt ，并且取二者都趋近于零的极限——这就是微商。在这种情况下， $\mathbf{A}$ 是位置，它对时间的微商是速度矢量；速度矢量是在曲线的切

线方向，这就是位移变化的方向；你无法从图上看出它的大小，因为它决定于物体沿曲线运动有多快。速度矢量的大小称为速率：它告诉你物体在单位时间内运动到多远的距离。下面是速度矢量的定义：它和路径相切，它的数值等于沿路径运动的速率（见图1-12）。

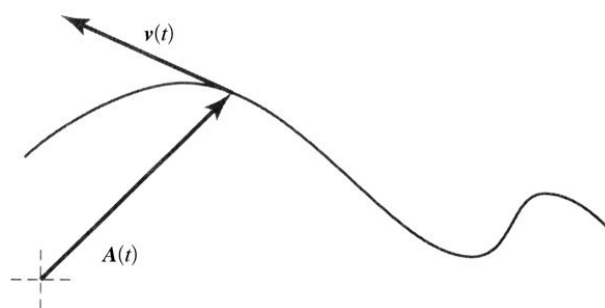


图1-12 位置矢量 A 和它在 t 时刻的微商 v

$$v(t) = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (1.14)$$

附带说说，在同一张图上既要画出位置矢量，又要画出速度矢量是危险的，除非你非常小心——因为我们理解这些稍微有点麻烦。我指出所有我想象得到的可能犯的错误，因为说不定你们接着要做的事情是为某种目的将 A 加到 v 上。这是不合理的，因为要真正画出速度矢量，你必须知道时间的标度：速度矢量与位置矢量用的是不同的标度；事实上，它们有不同的单位。一般说来，你不能把位置 and 速度相加——在这里你们不能把它们加起来。

对我来说，为了真实地画出任何矢量的图，必须确定所用的标度。当我们讲到力的时候，我们说多少牛顿可以用1英寸（或1米，或不管什么都可以）来表示。在此地，我们必须说明多少米每秒用1英寸来表示。其他某个人可能用我们用的同样的长度来画位置矢量的图，而速度矢量的长度相当于我们用的三分之一——他只是把不同的标度

用于他的速度矢量。并不存在唯一的方法来画矢量的长度，因为标度的选择是任意的。

现在，用 x ， y 和 z 的分量来表示速度是很方便的，因为，举例来说，位置的 x 分量的改变率等于速度的 x 分量，依此类推。这仅仅是因为微商实际上就是差，从而矢量差的分量就等于相应的分量之差。我们有：

$$\left(\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}\right)_x = \frac{\Delta A_x}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}\right)_y = \frac{\Delta A_y}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}\right)_z = \frac{\Delta A_z}{\Delta t}, \quad (1.15)$$

取极限后就得到微商的分量：

$$v_x = \frac{dA_x}{dt}, \quad v_y = \frac{dA_y}{dt}, \quad v_z = \frac{dA_z}{dt}. \quad (1.16)$$

这在任何方向都是正确的：如果我取 $\mathbf{A}(t)$ 在任意一个方向上的分量，那么在这个方向上的速度矢量的分量就是 $\mathbf{A}(t)$ 在这个方向的分量的微商，附带一个严正的警告：该方向必须不随时间改变。你不能说，“我要取 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{v}$ 方向上的分量”，或者类似于这样的事情，因为 $\mathbf{v}$ 是在运动中。这只当你对它取分量的方向本身是固定不动的条件下，位置分量的微商才等于速度分量。所以，(1.15)和(1.16)两式只对 x ， y ， z 和其他固定轴是正确的；如果轴在转动，同时要求微商，那么公式就要复杂得多。

这些就是求矢量微商的一些困难和题外之话。

当然，你还可以对矢量的微商求微分，然后对它再求微分，依此类推。我们称 $\mathbf{A}$ 的微商为“速度”，但这只是因为 $\mathbf{A}$ 是位置；如果 $\mathbf{A}$ 是

别的什么东西，它的微商就不是速度而是别的某种东西。例如， $\mathbf{A}$ 是动量，动量的时间微商等于力，所以 $\mathbf{A}$ 的微商可以是力。如果 $\mathbf{A}$ 是速度，速度的时间微商是加速度，等等。我在这里给你们讲的关于矢量微商是普遍正确的，但此地只给出位置和速度的例子。

1-8 线积分

最后，关于矢量，我还只有一件事是一定要谈的，并且这是一件讨厌而又复杂的事情，称为“线积分”：

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.17)$$

我们要拿来作为例子的是，你有某个矢量场 $\mathbf{F}$ ，在其中你要沿着曲线 S 从 a 点积分到 z 点。现在，为了使这个线积分具有某种意义，必须以某种方式沿曲线 S 上 a 和 z 之间的每一点定义 $\mathbf{F}$ 的值。如果 $\mathbf{F}$ 定义为作用于在 a 点的物体上的力，如果你不能告诉我当你沿 S 运动时，至少 在 a 和 z 之间，力如何变化，“ $\mathbf{F}$ 从 a 到 z 沿 S 的积分”就没有意义。

（我说“至少”，因为 $\mathbf{F}$ 可能也在别的任何地方定义，但至少你必须在你沿着它求积分的曲线部分定义。）

我马上就要定义任意矢量场中沿任意曲线的线积分，但首先我们来考虑一下 $\mathbf{F}$ 是常数的情形，并且 S 是 a 到 z 的直线路径——位移矢量，我把它称为 $\mathbf{S}$ （见图1-13）。因为 $\mathbf{F}$ 是常数，我们把它拿到积分号外面（就像普通的积分一样），从 a 到 z 的 $d\mathbf{S}$ 积分正好等于 $\mathbf{S}$ ，所以答案是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ 。这就是一个不变力和直线路径的线积分——容易的情况：

$$\int_a^z \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \int_a^z d\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}. \quad (1.18)$$

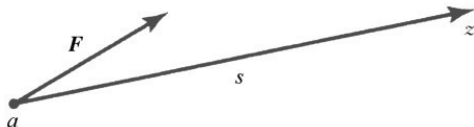


图1-13 定义在直线路径 $a-z$ 上的不变力 $\mathbf{F}$

（记住， $\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ 是力在位移方向的分量乘以位移的大小；换句话说，简单地是沿着直线移动的距离乘以力在这个方向上的分量。还有许多其他方式看待它：它是位移在力的方向上的分量乘以力的大小；它是力的数值乘以位移的数值再乘以它们之间角度的余弦。这些都是相同的。）

更一般地说，线积分定义如下：首先，我们分解积分，把 a 和 z 之间的 S 分为 N 个相等的线段 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_N$ 。于是沿 S 积分成为沿 ΔS_1 积分加上沿 ΔS_2 积分加上沿 ΔS_3 积分，等等。我们取的 N 很大，所以我们可以将每一个 ΔS_i 近似为一个小的位移矢量 $\Delta \mathbf{S}_i$ ，在这一段上 $\mathbf{F}$ 近似于常数 $\mathbf{F}_i$ （见图1-14）。然后用“不变力直线路径”法则，线段 ΔS_i 上近似地贡献 $\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i$ 于积分。所以，你把 i 等于1到 N 的 $\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i$ 加在一起，这就是积分的很好的近似值。只当我们 N 趋向于无限大，积分才准确地等于这个和数：你尽可能地把小段分得短一些；你把它们取得比这稍微更短一些，你得到正确的积分：

$$\int_a^z \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \quad (1.19)$$

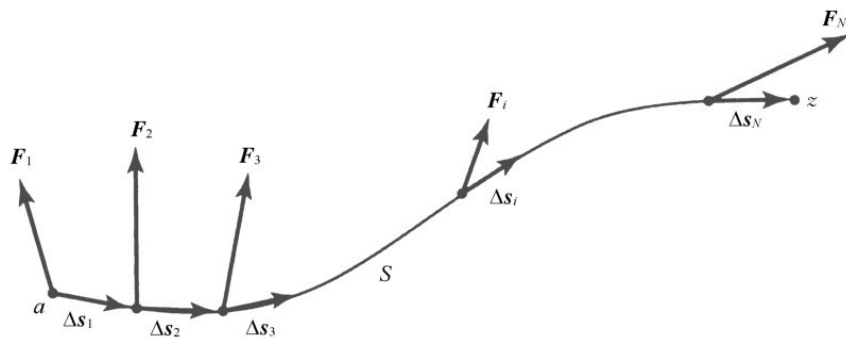


图1-14 定义在曲线 S 上的变化的力 F

（当然，这积分依赖于曲线——一般情况下——虽然有时它不是物理学。）

好了，你们要学物理必须懂的数学——至少是现在——都在这里了。这些东西，最主要是微积分和初等矢量理论应当成为第二天性。某些东西——像线积分——现在还不是第二天性，但是当用它们更多以后终于会成为第二天性。他们还不是这样重要，并且比较难。你现在“必须牢记在你的头脑里的”是微积分以及一些关于求不同方向上的矢量分量的方法。

1-9 一个简单的例子

我给你们讲一个例题——只是非常简单的一个例题——来说明怎样求矢量的分量。假设我们有一台机器，如图1-15所示：它是由用一个枢轴连结的两根杆子（像肘关节）组成，上面有一个大的重物。其中一根杆子的一端用一个固定的枢轴固定在地板上。另一根杆子的一端有一个滚轴，可以沿地板上的狭槽滚动——这是一台机器的一部分。你看它彳亍、彳亍地开动——滚子前后运动，重物忽上忽下，就这样运动。

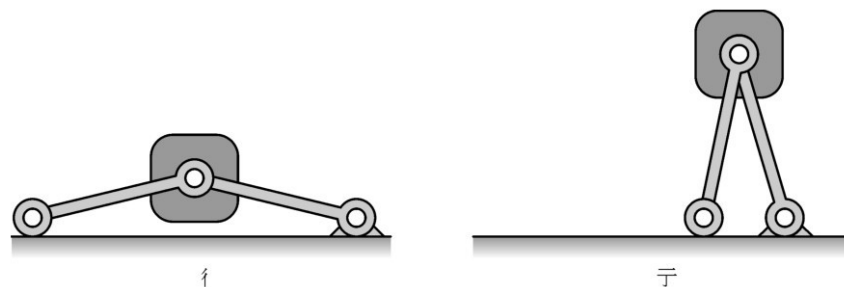


图1-15 简单的机器

我们设重物质量为2千克，杆子长0.5米，在某个时刻机器静止不动，重物到地板的距离恰好是0.4米——这样我们就有一个3-4-5三角形，这使计算变得更容易（见图1-16）。（计算并不是最重要的，真正的困难在于得到正确的概念。）

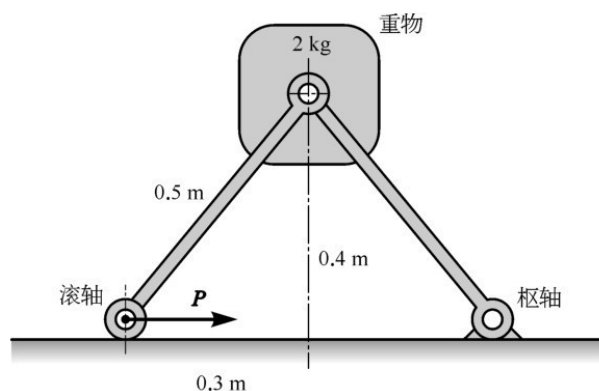


图1-16 需要多大的力 P 以维持重物

问题是求为了托住重物你必须作用在滚轴上的水平力 P 。现在我作一个为解这个题所需要的假设。我们假设如杆子两端都有枢轴，净力总是沿着杆子。（可以证明这是正确的，你们可以领悟到这是不证自明的。）如果只在杆子的一端有枢轴这就不一定正确了，因为这样我就可以把杆子推向侧面。但如果在两端各有一个枢轴，我只能沿着杆子推动它。我们假设我们知道这一点——就是力必定沿着杆子的方向。

根据物理学，我们还知道其他一些事情：在杆子的端点的力相等而方向相反。例如，杆子作用在滚轴上的力必定等于杆子以相反的方向作用在重物上的力。问题在于：有了这样的杆子的性质的概念，我们试着算出作用在滚轴上的水平力。

我想我尝试着做做看的方法是这样：杆子作用在滚轴上的水平力是作用在它上面净力的一个分量。（当然，由于“限制狭槽”的作用还有一个垂直分量，这个分量是不知道的，也没有兴趣；这是作用在滚轴上净力的一部分，它和作用在重物上的净力正好相反。）如果我能求出杆子作用在重物上的力的分量，我就可以求出杆子作用在滚轴上的力的分量——我只要水平分量。如果我把作用在重物上的水平力称作 F_x ，那么作用在滚轴上的水平力就是 $-F_x$ ，将重物托住所需要的力与它相等，方向相反，所以 $|\mathbf{P}| = F_x$ 。

杆子施加于重物的垂直力 F_y 很容易求：它就等于该重物的重量，为2千克乘以引力常量 g 。（你们必须从物理学知道的另一些东西——在米·千克·秒制中 g 是9.8。） F_y 等于2乘 g ，即19.6牛顿。于是得到作用在滚轴上的垂直力-19.6牛顿。我怎样求水平力呢？答案：由于已知净力必定沿着杆子，从而我就可以求出它。如 F_y 为19.6，并且净作用力沿着杆子，那么 F_x 应该等于多少（见图1-17）？

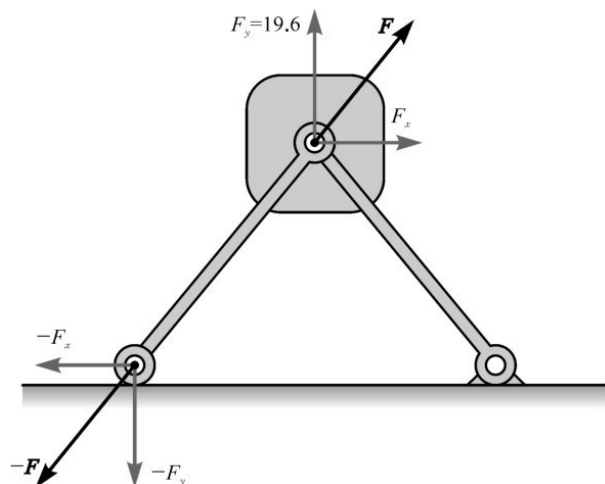


图1-17 杆子作用在重物上的力和作用在滚轴上的力

好了，我们有了三角形投影，它被设计得非常恰当，所以水平边对垂直边的比例为3比4；这和 F_x 比 F_y 的比例相同。（此地我不在乎净力 $\mathbf{F}$ ；我只需要水平方向的力）并且我已经知道垂直是多少。所以水平力的大小——未知——与19.6之比等于0.3与0.4之比。因此，用19.6乘3/4就得到：

$$\frac{F_x}{19.6} = \frac{0.3}{0.4}$$

$$\therefore F_x = \frac{0.3}{0.4} \times 19.6 = 14.7(\text{牛顿}). \quad (1.20)$$

我们得到托住重物所必需的作用于滚轴上的水平力 $|\mathbf{P}|$ 是14.7牛顿。这就是这个问题的答案。

是吗？

你们看，你们做物理习题不能只是代代公式：你们除了知道法则、投影的公式以及所有的数据以外不知道还有别的东西，你们就永远不可能真正学到东西；你们必须对实际情况具有某种感觉！过一会

儿我要作关于这方面更多的讨论，但在此地，在这个特定的问题中，困难在于：作用在重物上的净力不仅来自一根杆子，还有另一根杆子在某个方向的作用力，我在分析问题的时候把它丢在一边——所以这全都错了！

我还必须考虑带有固定枢轴的杆子施于重物上的力。现在问题变复杂了：我怎样求出这个力是多少？好，各种物体作用在重物上的净力是多少？只有重力——只需要平衡重力，没有施加于重物上的水平力。从这个线索我可以求出沿着带固定枢轴的杆子有多大的“劲头”。这个线索使我们还注意到必须要有足够的水平力来平衡另一杆子施加的水平力。

因此，如果我要画出带固定枢轴的杆子施加的作用力的图，它的水平分量与带有滚轴的杆子施力的水平分量正好相反相等，两杆施力的垂直分量相等，因为杆子形成同样的3-4-5三角形：两根杆子以同样大小的力向上推举，因为它们的水平分量必须平衡——假如杆子的长度不同，你就要稍微多做一些计算，但概念是一样的。

就这样，我们再来讲重物：杆子作用在重物上的力是首先要弄清楚的，所以让我们来看看杆子作用在重物上的力。我对自己重复这句话是因为不然的话我会把符号都搞混了：重物作用在杆子上的力和杆子作用在重物上的力方向相反，我总是在像这个样子搞糊涂之后不得不重新开始；我不得不再想一遍来确定我要讲的是什么。所以我说，“看杆子作用在重物上的力：这是力 F ，它沿着一根杆子的方向，还有一个力 F' ，沿另一根杆子的方向。只有这两个力，它们沿着杆子的方向。”

现在，这两个力的净作用力——啊！我开始看到亮光了！这两个力的净合力没有水平分量，只有19.6牛顿的垂直分量。啊！我们再画一个图，因为我以前错了（见图1-18）。

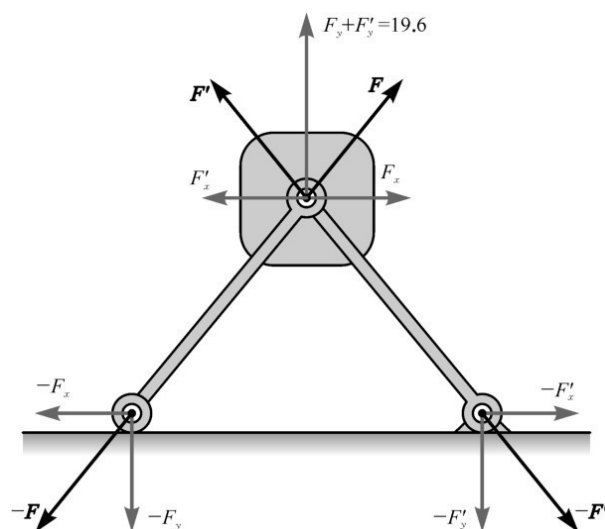


图1-18 两根杆子作用在重物上的力及作用在滚轴和枢轴上的力

水平力平衡，垂直力相加，19.6牛顿并不只是一根杆子施加的力的垂直分量，而是两根杆子的合力；每根杆子贡献一半，带滚轴的杆子作用力的垂直分量只有9.8牛顿。

现在取这个力的水平投影，将它乘以3/4，就像我们以前做的那样，我们就得到带滚轴的杆子作用于重物的力的水平分量，它满足：

$$\frac{F_x}{9.8} = \frac{0.3}{0.4}$$

$$\therefore F_x = \frac{0.3}{0.4} \times 9.8 = 7.35(\text{牛顿}). \quad (1.21)$$

1-10 三角测量

还有一点时间，我想讲一点关于数学和物理学的关系——事实上通过这个小小的例子可以很好地描绘这种关系。这并不要求你去记住公式，并且还对你自己说：“我知道所有的公式，我要做的是判断怎样把这些公式用到这个问题中！”

现在你们用这个方法可以暂时获得成功，你们记得更多的公式，你们就可以用这个方法走得更远——但到最后就不行了。

你们可能会说：“我不相信他，因为我总是成功的：这是我一直用的方法；我总是用这种方法来解题目。”

你们并不能总是用这种方法：你们将会不及格——不是今年，不是明年，而是最终要不及格，当你们参加工作或者做某事——你们沿这条路走到某个地方就要失败，因为物理学是极其广博的；有几百万个公式！不可能记住所有的公式——不可能！

你们忽视的重要的东西，你们没有利用的强有力的机器是：假设图1-19是所有物理公式和物理学中所有关系的地图。（它应当是比二更多的维度，但我们假设它是这个样子的。）

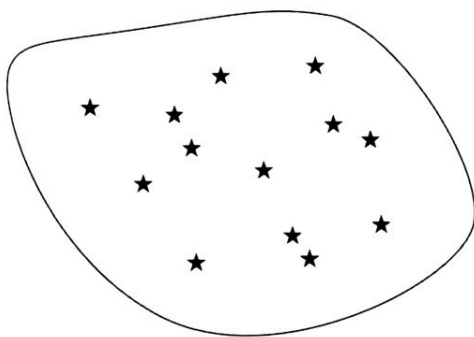


图1-19 所有物理公式的想象地图

现在假设你的心中恰巧想到某件事，不知什么原因在某个范围内的所有材料都被抹去了，只留下失去记忆的某些片段。自然界的相互关系是如此精妙，可以用逻辑方法从已知的东西通过“三角测量”得知空洞中的内容（见图1-20）。

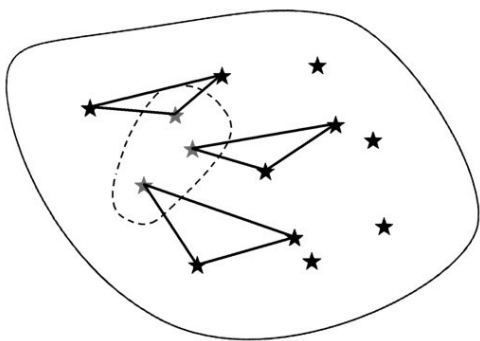


图1-20 忘了的事实可以从已知的事实用三角测量重新建立

你可以重建你已经长期忘却的东西——只要你没有忘记太多，并且还知道足够的材料。换言之，你最后会到某个境界——你还没有完全到达——那时你会知道如此多的你忘记的东西，你可以从你还记得的一些片断重新建立这些。因此，头等重要的是你要知道如何进行“三角测量”——就是如何从你已知的推出某些东西。这是绝对必需的。你可能会说：“啊，我不在乎，我记性很好！我知道怎样能牢牢记住！实际上我是靠记忆来决定我的行为！”

这还不行！因为物理学家真正的作用——无论是发现自然界的新定律还是在工厂里开发新东西，诸如此类——不是谈论已知的东西而是创造某些新事物——所以他们要从已知的事物进行三角测量：他们进行以前没有人做过的“三角测量”（见图1-21）。

为了学习如何做，你们要忘掉死记硬背公式的方法，要试着学会认识自然界的相互关系。这一开始是非常困难的，但这是唯一成功的

方法。

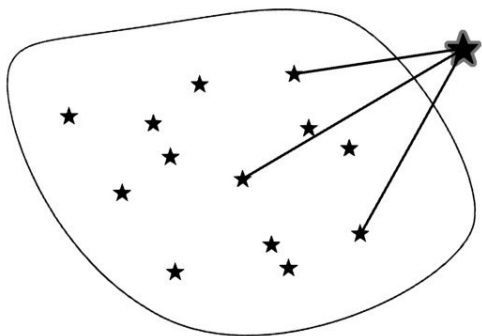


图1-21 新发现是物理学家们用三角测量方法从已知到达以前未知的事物

[1] 没有人出去。

[2] 在1961年，加州理工学院只招收男生。

[3] 参见《费曼物理学讲义》第1卷11-7节。

2 定律与直觉

复习课B

上次我们讨论了你们学习物理需要的数学，而且我还指出应该把方程作为工具记住，但是去记住每件事情并不是一个好想法。实际上，从长远的观点来看，凭记忆来做每件事情是不可能的。这也不表示凭记忆做不了任何事情——从某种意义上来说，你们记住的东西越多，做事情就越好——而你们应当可以重新创建你们忘记的任何事情。

顺便说说，当你们来到加州理工学院时，你突然发现自己低于平均水平的问题，这是上次我们也讨论过的，如果由于某种原因你们脱离了班级内下面一半的行列，那么你们只是使得另外一些人难受，因为你们现在正迫使另一个人落到班级的下半部分！但有一种方法你可以去做而不妨碍任何人：找出并追踪某个有兴趣，你特别喜爱的题目，以致你暂时成为某种你听说过的特殊现象的专家，这是一种拯救你们灵魂的方法——于是你就可以说：“好，至少别的家伙对这件事情毫无所知。”

2-1 物理定律

现在我将在这堂复习课中谈谈物理定律。首先要做的事情是说明它们是什么。到现在为止，在我们的讲课中用大量的语言表述了不少，没有同样的时间很难再把它们都重复一遍。但是物理定律也可以用某些方程来概括，这里我们将把它们写出来。（到现在为止，我可以假定你们的数学已经提高到能够立即理解这些符号。）下面都是你们应该知道的物理定律。

第一：

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.1)$$

该式表明，力 $\mathbf{F}$ 等于动量 $\mathbf{p}$ 对时间的变化率。（ $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{p}$ 都是矢量。此时假定你们已知道这些符号的意义。）

我想要强调的是，必须理解每个物理方程中每个字母代表什么。这并不是说“喔，我知道这 $\mathbf{p}$ 代表运动中的质量乘速度，或者代表静止质量乘速度再被 $1 - v^2/c^2$ 的平方根去除”^[1]：

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.2)$$

而为了在物理上理解 $\mathbf{p}$ 代表什么，你们必须知道 $\mathbf{p}$ 不仅仅是“动量”；它是某个东西的动量——一个质量为 m 、速度为 $\mathbf{v}$ 的质点的动量。并且在 (2.1) 式中， $\mathbf{F}$ 是合力——所有作用于那个质点上的力的矢量和。只有这样你们才能对这些方程有所理解。

现在这里有一个你们应该知道的物理定律，叫做动量守恒：

$$\sum_{\text{质点}} \mathbf{p}_{\text{后}} = \sum_{\text{质点}} \mathbf{p}_{\text{前}}. \quad (2.3)$$

动量守恒定律说，在任何情况下总动量是一个常量。这在物理上意味着什么呢？例如在碰撞中，它等于说碰撞前所有质点的动量总和与碰撞后所有质点的动量总和是相同的。在相对论世界中，在碰撞后粒子可能不同了——你们可能创造新的粒子或者摧毁老的粒子——但碰撞前后所有粒子总动量的矢量和是相同的，这个定律仍旧成立。

下一个你们应该知道的物理定律叫做能量守恒，写成与上面同样的形式：

$$\sum_{\text{质点}} E_{\text{后}} = \sum_{\text{质点}} E_{\text{前}}. \quad (2.4)$$

这表示，碰撞前所有质点的能量总和等于碰撞后所有质点的能量总和。为了应用这个公式，你们必须知道质点的能量是什么。具有静止质量 m 、速率为 v 的质点能量为

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.5)$$

2-2 非相对论近似

现在，这些定律在相对论世界中都是正确的。在非相对论性的近似中——这也就是说，如果观察与光速相比为低速情形下的质点——那么就有上述定律的某些特殊情况。

首先，在低速情形下的动量很容易写出： $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 几乎等于 1，所以 (2.2) 式成为

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

这意味着力的公式 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ，也可以写成 $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ ；然后，把常数 m 移到前面。我们看到对于低速情况，力等于质量乘加速度：

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (2.7)$$

低速质点的动量守恒，具有与 (2.3) 式相同的形式，只是动量公式是 $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ （而所有质量都是常数）：

$$\sum_{\text{质点}} (m\mathbf{v})_{\text{后}} = \sum_{\text{质点}} (m\mathbf{v})_{\text{前}}. \quad (2.8)$$

然而，低速情况下的能量守恒定律变成两个定律：第一，每个质点的质量都是常数——你们不能创造或摧毁任何物质——第二，所有质点的 $\frac{1}{2}mv^2$ （总动能）之和为常数 [2]：

$$m_{\text{后}} = m_{\text{前}} \quad (2.9)$$

$$\sum_{\text{质点}} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)_{\text{后}} = \sum_{\text{质点}} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)_{\text{前}}.$$

如果我们把大的、每日见到的物体都看作低速运动的质点——像把一个烟灰缸近似地看作一个质点——那么〔许多质点（烟灰缸）〕碰撞前的动能之和等于碰撞后的动能之和这个定律就不正确了。因为

可能这许多质点的一些动能($\frac{1}{2}mv^2$)转变为物体内部运动——例如热运动——的形式进入物体内部。所以在两个大的物体之间碰撞过程中，这个定律看上去失效了。这个定律只对基本的质点成立。当然在大的物体的情况中，可能只有很少的能量转变成内部运动，所以能量守恒表现为近似正确，而这种碰撞就称为近似弹性碰撞——有时理想化为完全弹性碰撞。所以能量比动量更难于观察记录，因为牵涉到的物体是像重物等大的物体，它们作非弹性碰撞时，动能守恒定律就不正确了。

2-3 由力引起的运动

现在我们不关注碰撞，来讨论力作用下发生的运动。于是我们首先得到一个定理，它告诉我们，质点动能的变化等于力对它所做的功：

$$\Delta K.E. = \Delta W. \quad (2.10)$$

记住，这个式子表示重要的东西——你必须完全了解所有这些字母的意义——它意味着如果一个质点正沿着某一曲线 s 从 A 点到 B 点运动，并且它的运动是在力 $\mathbf{F}$ 的作用下进行的，这里 $\mathbf{F}$ 是作用在该质点上的合力。于是，若知道质点在 A 点的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ ，则也就知道经过 B 点时动能有多少，它们的差为 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 从 A 到 B 的积分，这里 $d\mathbf{S}$ 是沿曲线 S 的位移增量（见图2-1）。

$$\Delta K.E. = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \quad (2.11)$$

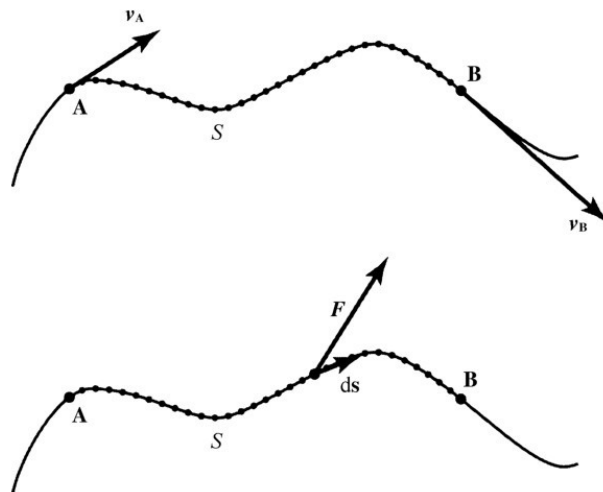


图 2-1 $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

及

$$\Delta W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.12)$$

在某些情况下，由于作用在质点上的力仅以简单的方式依赖于它的位置而与时间无关，所以积分可以很容易算出。在这些情况下，我们可以把对质点所做的功用称为势能 或 $P.E.$ 的另一个量来表示，与它数值上相等，而与其变化符号相反。这样的力被称为“保守力”：

$$\Delta W = -\Delta P.E. \quad (\text{在保守力 } \mathbf{F} \text{ 的条件下}). \quad (2.13)$$

顺便说及，我们在物理中所用的一些词是令人难以理解的：“保守力”并不意味着该力是守恒的，而是这样的一种力，受这种力作用的物体的能量可能是守恒的 [3]。我承认这个概念很容易混淆，但我也帮不了忙。

一个质点的总能量等于它的动能加势能：

$$E = K.E. + P.E. \quad (2.14)$$

当仅有保守力作用时，一个质点的总能量不变：

$$\Delta E = \Delta K.E. + \Delta P.E. = 0 \quad (\text{在保守力条件下}). \quad (2.15)$$

然而当有非保守力——不能用任何势能来描述的力——作用时，质点能量的变化等于作用于其上的那些力可做的功。

$$\Delta E = \Delta W \quad (\text{在非保守力的条件下}). \quad (2.16)$$

现在，当我们给出了各种力的全部已知规则时，复习的这一部分也该结束了。

但在结束前还须提一下关于加速度的公式，这个公式很有用：如果在一给定的瞬时，一个物体正以恒定速率 v 沿半径为 r 的圆周运动，那么它的加速度指向圆心，其量值等于 v^2/r （见图2-2）。那是与我们曾谈到过的一切别的东西成“直角”的那类事情，但由于导出这个公式很麻烦^[4]，所以最好是记住它。

$$|a| = \frac{v^2}{r}. \quad (2.17)$$

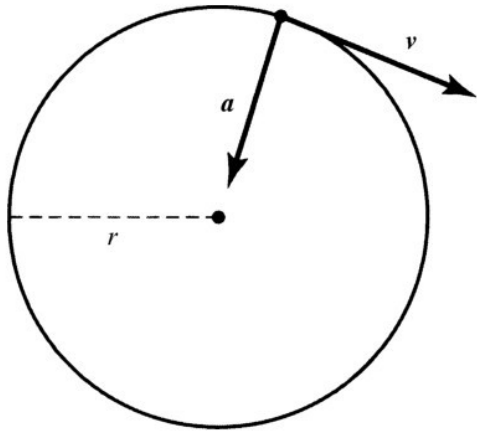


图2-2 匀速圆周运动的速度和加速度矢量

表 2-1

	永远正确	一般情况下不成立 (仅在低速情况下正确)
力	$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
动量	$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
能量	$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$E = \frac{1}{2}mv^2 (+ mc^2)$

表 2-2

在保守力的条件下正确	在非保守力的条件下正确
$\Delta P.E. = -\Delta W$	$P.E.$ 没有定义
$\Delta E = \Delta K.E. + \Delta P.E. = 0$	$\Delta E = \Delta W$

定义：动能 $K.E. = \frac{1}{2}mv^2$; 功 $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$

2-4 力及其势能

现在，回到正题，我将列出一系列力的定律及它们的势能公式的表。

表 2-3

	力	势
重力(靠近地球表面)	$-mg$	mgz
引力(质点之间)	$-Gm_1m_2/r^2$	$-Gm_1m_2/r$
电荷	$q_1q_2/4\pi\epsilon_0r^2$	$q_1q_2/4\pi\epsilon_0r$
电场	qE	$q\phi$
理想弹簧	$-kx$	$\frac{1}{2}kx^2$
摩擦	$-\mu N$	不存在

先讲地球表面上的重力。这个力的方向向下，但不必关注其符号，只要记住力是哪个方向，因为谁会知道你取什么样的坐标轴——或许你会取 z 轴向下！（你这样做是可以的。）所以力为 $-mg$ ，则其势能为 mgz ，这里 m 是物体的质量， g 是一个常数（地球表面处的重力加速度——否则，这个公式就不对了！）而 z 是地面或其他任何水平面以上的高度。这就意味着势能值在你想选的任何地方都可以为零。我们使用势能的方式是讨论它的变化——当然，如果你在势能上加一常数，也不会有任何区别。

我们接下来讨论空间中质点之间的引力。这是一个指向质点的力，它正比于两个质点质量的乘积除以这两者之间距离的平方，即 mm'/r^2 或 $-m_1m_2/r^2$ ，或者是你想写的任何其他形式。记住力的方向比操心其符号更好。但这部分内容你必须记住：引力与两个质点间距

离平方成反比。（所以怎样确定符号？就像引力的吸引，因而力处于径向矢量的相反方向。这向你们表明我不记符号，我只从物理意义上记住应该怎样确定符号。质点相互吸引，这就是所有我必须记住的。）

现在，两个粒子间的势能为 $-Gm_1m_2/r$ 。对我来说，记住势能是何种样式是困难的。让我们看看：当两个质点靠近时，势能减少，所以这表示 r 越小，势能应越少，因此它是负的——我想这是正确的！我感到在符号方面有很多困难。

在电学里面，两个电荷之间的作用力正比于两个电量 q_1 和 q_2 的乘积除以它们之间距离的平方，但比例常数不再被写在分子上（像引力那样），而是在分母上写作 $4\pi\epsilon_0$ 。同引力一样电力也是沿径向，但有不同的符号规律：有电排斥力，因而它的电势能的符号与引力势能的符号相反，另一方面比例常数不同：为 $\frac{1}{4\pi q_0}$ 而不是 G 。

电学定律中有几个技术性问题：作用在 q 单位电荷上的力可以写成 q 乘上电场（强度），即 qE ，而能量可以写成 q 乘电势，即 $q\phi$ 。这里 E 是一个矢量场，而 ϕ 是标量场。当能量用常用单位焦耳时， q 用库仑计量， ϕ 用伏特计量。

继续讨论上面的这张公式表，接下来的是理想弹簧。把一理想弹簧拉伸距离 x 时，作用力为常数 k 乘以 x 。这里我们再次强调必须知道字母的意义： x 是你把弹簧从平衡位置拉开的距离，而弹簧拉回来的力是 $-kx$ 。这里我取的符号只是表明弹簧向后拉。你很清楚当弹簧被拉伸后，弹簧会把物体拉回去，而不会把它推远。现在其势能为 $\frac{1}{2}kx^2$

。为了拉伸弹簧你们得对它做功，所以它被拉伸后其势能为正。因而对弹簧来说，符号问题是不难的。

你们知道我不可能记住像符号这种细节，但我试着通过论证将这些事情进行重现——那就是我如何回忆起我没有记住的所有事情。

摩擦：干燥表面上的摩擦力为 $-\mu N$ ，你们再次必须知道各个符号的意义。当一个物体被用力压在另一个表面上时，该力垂直于表面的分量为 N ，这时为使该物体沿表面滑动，所需推力为 μ 乘 N 。你很容易确定摩擦力的方向：它与你使物体滑动的方向相反。

现在，在表2-3中关于摩擦的势能项下面，其答案是不存在：摩擦消耗能量，所以我们没有关于摩擦力的势能公式。如果你沿着一个表面把一物体推进一段路程，你做了功；然而当你把它拖回来时，你又要做功。所以当你经过一个完全循环，得不出没有能量变化的结论。你们已经做了功，所以摩擦力没有势能。

2-5 通过实例学习物理

这些就是我能够记住的必需的所有规则。所以你们会说，“好吧！那很容易：我只要记住这整个该死的表，于是我就知道了全部物理学。”嗯，那是不行的。

实际上，开始时它可能有相当好的效果，但是正如我在第一章中所指出的那样，这种办法会变得越来越困难。因此，为了了解世界，下面我们必须学习如何把数学应用到物理学中。方程帮助我们掌握事物的线索，所以我们应把它们当工具使用——但要这样做，我们需要知道方程论及什么对象。

关于如何从老的情况推断出新情况的问题，以及如何解决问题，实在是很难教的，而我真的不知道如何做这件事。我不知道如何告诉你们某些事情，这会把你们从一个不会分析新情况或解决问题的人，转变成为一个能够这样做的人。就数学的情况而言，我能够通过教你们全部规则，而把你们从不会求微分的人转变成能够求微分的人。但是在物理的情况方面，我却不能把你从一个不能解决问题的人转变成一个能够解决问题的人，所以我不知道做什么好。

由于我凭直觉理解在物理上发生什么事情，我发现这很难表达出来：我只能给你们看一些例子。因此这堂课的其余部分和下一堂课，全都是小型的例子——应用的，物理世界或工业领域中现象的，以及物理在不同方面应用的例题——这都是为了让你们看看，你们已知的东西可以用来使你们了解和分析发生的事情。仅通过这些例子，你们就能理解。

我们已找到许多古代巴比伦数学的老课本。其中一部分全是给学生的数学练习大丛书。这些非常有趣：巴比伦人那时已能解二次方程；他们甚至有解三次方程的表格。他们能够做三角的问题（见图2-3）；他们能做各种事情，但从来没有写下代数公式。古代巴比伦人没有写代数公式的方法。而他们一个接一个地做例题——就是这样。其观念是你们应该考察许多例题，直到你们获得概念。这是由于古代巴比伦人还不具备用数学形式来表达的能力。

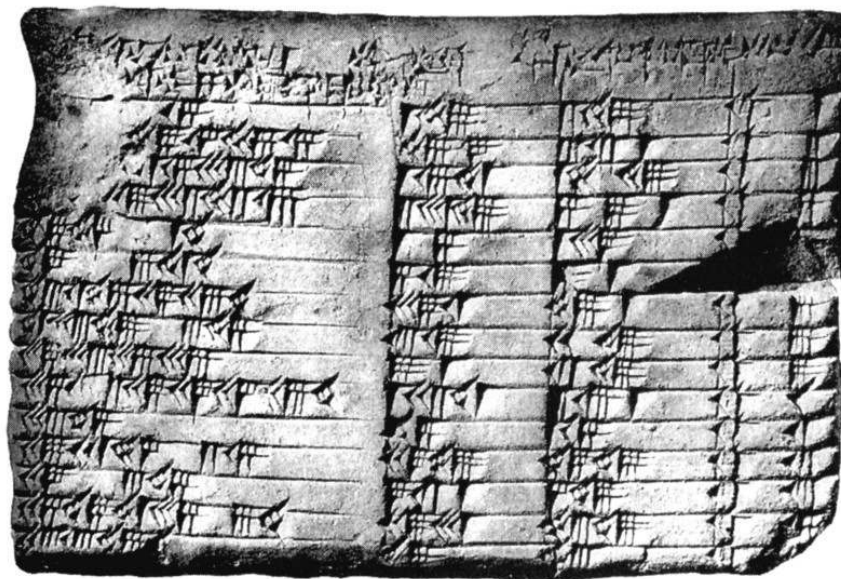


图2-3 大约在公元前1700年的Plimpton表格上的毕达哥拉斯三元组 [\[5\]](#)

今天，我们还不具备告诉学生如何从物理的角度来理解物理的表达能力。我们能够写出定律，但仍不能说清楚如何从物理上来理解这些定律。由于我们缺乏表达的方法，你们能够从物理上理解物理的唯一办法，是效仿巴比伦人的笨办法，做很多例题，直到获得概念。这就是我能够对你们所做的一切。在巴比伦，那些没有获得概念的学生不及格，而真正得到概念的家伙死了，所以都是一样。

那么，现在我们来试试吧。

2-6 从物理的角度来理解物理学

我在第一章中提出的第一个问题就包含了许多物理的东西。有两根杆子、一个滚轴、一个枢轴以及一个重物——我记得它的质量是2 kg。如图2-4所示，两根杆子的几何关系是0.3、0.4及0.5。问题是为把重物托住在上面需要多大的水平力 p 作用在滚轴上？尝试了多种方法

（事实上，在我获得正确答案以前，我不得不做了两次），但我们求得了作用在滚轴上的水平力等于 $\frac{3}{4}$ kg，如图2-5所示。

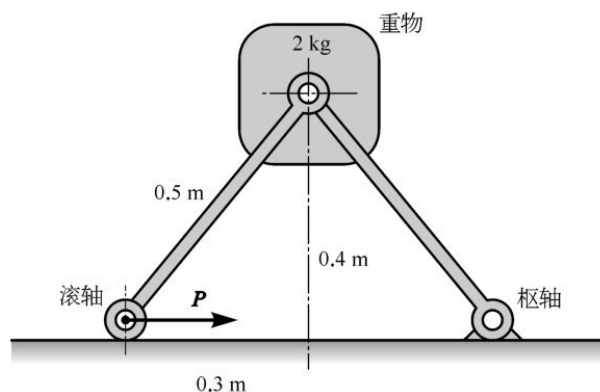


图2-4 第一章中的简单机械

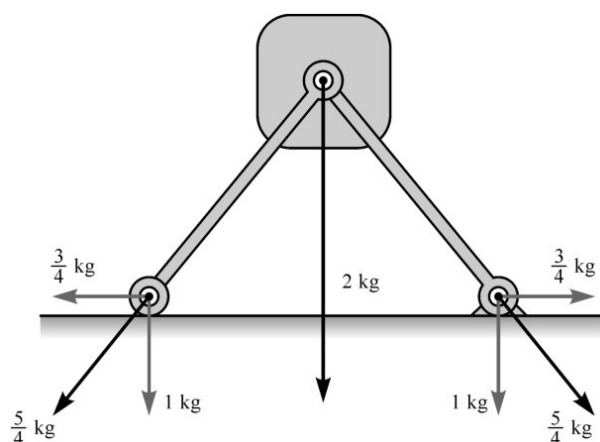


图2-5 重物通过杆对滚轴和枢轴作用力的分布

现在如果让你们自己丢开方程式，并思考一下。而要是你们卷起衣袖并摇动你们的手臂，那么你们几乎能够理解答案是什么——至少我能够。现在，我来教教你们如何解这问题。

你们可能会说“噢，来自重物的力一直向下，它相当于2 kg。重量由两条腿的均等支撑而得到平衡，所以每条腿的垂直力必须足以支持1 kg。此时，作用在每条腿上相应的水平力必定是垂直的力的一部分，就是直角三角形的水平边与垂直边的比例，就是3:4。所以作用在滚轴上的水平力相当于 $\frac{3}{4}$ kg重——结束。”

现在让我们看看它是否有意义：按照上面的想法，要是把滚轴推到非常靠近枢轴，以致两腿的间距非常小，那么我们会预计出作用在滚轴上的力小得多。对不对？当重物慢慢上升时，作用在滚轴上的力应当慢慢减少？对了（见图2-6）！

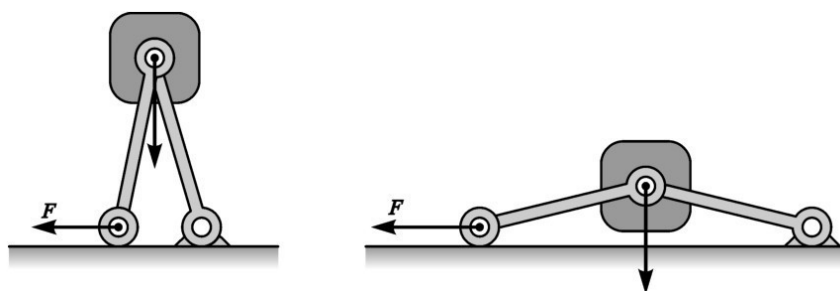


图2-6 作用在滚轴上的力随重物的高度而变化

如果你们还不明白，也难于解释为什么是这样——要是你们试着用梯子支撑某个物体，而如果你们让梯子笔直地竖在物体的下面，那很容易防止梯子滑倒。但是如果梯子倾斜一个角度，支持这个物体就有点困难了！实际上，如果你们慢慢向外，以致梯子的远端离开地面只有很小的距离，那你们会发现要在很小角度向上支撑一个物体所需的水平方向的力将接近于无限大。

现在，你们能够亲身感受到所有这些事情。其实你们不必亲自感受它们，你们可以通过作图及计算把它们解出来。然而当问题变得越来越困难时，并当你们试图去了解越来越复杂的状态下的自然界，你

们能够不做实际计算而猜到、感受到并认识到的东西越多，则你们可以走得更远！所以这是为什么你们应当做各种练习：当你们有时间做某件事，并且不必担忧是为测验或类似的事去求答案，就仔细地考察问题，并且看看当你们改变某些数据时，是否能了解它大致的行为方式。

现在如何说明怎样做这件事呢，我不知道。我记得有一次我试图教某一个人，纵然他数学很好，他上物理课时遇到了很多麻烦。他认为不可能解的一个很好的问题：一只用三只脚支撑的圆桌子，你应靠在它的什么地方才能使得桌子最不稳定？

该学生的解答是：“很可能在一只脚的顶部，但让我想想看：我要算一算在不同的地方用多少力会提升多大高度，会产生怎样的提升，等等。”

于是我说：“不必关心计算。你们能够想象一张真实的桌子吗？”

“但那不是解这问题应该用的方法！”

“不要管你应该如何做；你已经有一张有许多腿的真实的桌子，你明白吗？现在你想倚靠在什么地方？如果你直接在一只脚的上面往下压，会发生什么情况？”

“什么也没有！”

我说：“对了，而如果你在两条腿之间当中地方的边缘处往下压，会发生什么情况？”

“桌子就翻倒了！”

我说：“好！这就对了！”

问题在于学生并没有领悟到这些不仅是数学问题；它们描述了有腿的真实桌子。其实它不是一张真实的桌子，因为它是完全圆形的，它的腿也是笔直上下，等等。但是，粗略地说，它近似描述了一张真实的桌子。知道了实际桌子的情况，你们就可以不必要做任何计算，而获得这张桌子会发生什么情况很好的概念——你们很清楚为了使桌子翻倒，必须倚靠在桌子的什么地方。

那么，如何说明这种事呢，我不知道！但是你们一旦得到这样的概念，即这个问题不是数学问题而是物理问题，就受益匪浅。

现在我将这个方法应用到一系列问题上：第一，用在机械设计中；第二，用于人造卫星的运动；第三，用于火箭的推进；第四，发射分析器，然后，如果我还有时间，用于 π 介子的蜕变和两个其他问题。所有这些问题都是相当困难的，但它们描述了我们发展中的各个方面，那么就让我们看看会发生什么情况吧。

2-7 机械设计中的问题

第一，机械设计，这里的问题是：有两根带轴的杆，每根都有半米长，它们承载2 kg的重物——听上去熟悉吗？——左边的滚轴被某种机器驱动，以2米/秒的恒定速率前进或后退。清楚吗？给你们的问题是，当重物的高度是0.4米时，使它做这样的运动需要多大的力（见图2-7）？

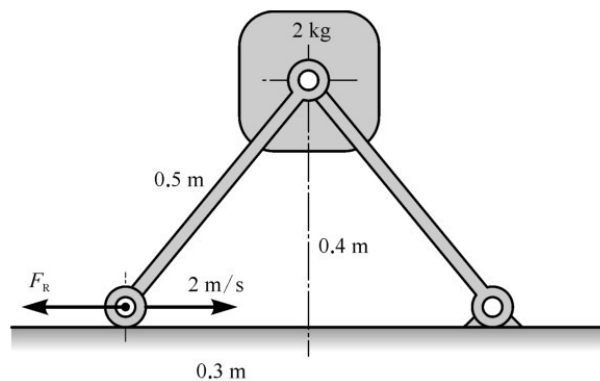


图2-7 运动中的简单机械

你们或许在想，“我们已经做过了！支持这重物所需的水平方向的力是1 kg重的 $\frac{3}{4}$ 。”

但我争辩说：“该力不是 $\frac{3}{4}$ kg重，因为重物是在运动着的。”

你们可能会反驳说：“当物体运动时，难道需要力维持其运动吗？不！”

“但为了改变物体的运动就需要力。”

“是的，但滚轴是以恒定速度运动。”

“噢，是这样。这是对的：滚轴正以2 m/s的恒定速度运动，但是重物怎么样：它是以恒定速度运动吗？让我们想一想：该重物是否有时运动得慢有时运动快？”

“是的……”

“它的运动是变化着的——这就是我们遇到的问题：计算出，重物在0.4米高度时，维持滚轴以2 m/s的恒定速度运动所需要的作用力。”

让我们看看，“我们是否能够说明重物的运动是怎样变化的。”

好的。如果重物靠近顶部而滚轴几乎在重物的正下方，则重物几乎不作上下运动。在这个位置上，重物运动不很快；但如果重物降低了，像前面讨论的那种情况，这时你只要把滚轴向右推动一点点——好家伙，重物就不得不向上运动才不妨碍它！所以，当我们推动滚轴时，重物开始很快地向上运动，然后慢下来，对吗？如果重物快速上升，然后变慢，那么它的加速度从哪里来？加速度必然向下：就像我把它快速向上抛出然后它慢下来——有点儿像它正在下落，所以作用力必须减少。那就是说，我推动滚轴前进的水平力小于滚轴不动时的力。所以我们要算出小了多少。（我这样讨论整个问题的理由是我不能保证方程式中符号的正确，所以我要到最后通过这样的物理论证来确定符号是什么。）

顺便提一句，这个问题我大约已做过四次——每次都有错——但最后我还是做对了。我很清楚，当你第一次做一个习题的时候，有许多事情搞不清楚：我把数据搞混了，我忘了平方，我把时间的符号放错了，我还做错了其他许多事情，但不管怎样，现在我做对了，而且我还可以告诉你这个问题如何才能正确地去解决——我必须老实承认，为了获得正确的答案，曾花费了我相当长时间。（孩子们，我很高兴我还保留着我的笔记本。）

现在为了计算力的大小，我们需要求出加速度。仅仅通过考察所有尺寸都固定在我们注意的时间的几何图形，是不可能求出加速度的。但为了得到变化率，我们不能让它固定不动——我的意思是，我们不能说，“好，这是0.3，这是0.4，这是0.5，这是每秒2米，加速度是多少？”不存在容易求加速度的方法。求加速度的唯一办法是找出一

般的运动并将它对时间求微商^[6]。于是我们就能够代入与这个特定图解相应的时间值。

因此，我需要在更一般的情况下去分析这个问题，就是当重物位于某个任意位置时的情况。比如说，在 $t=0$ 的时刻，枢轴和滚轴靠在一起，因为滚轴以 2 m/s 的速度运动，所以它们之间的距离是 $2t$ 。当我们想要进行计算的时刻是它们靠拢之前的 0.3s ，这就是 $t=-0.3$ ，因此它们之间的距离实际上为负 $2t$ ——但是如果我们用 $t=0.3$ ，使距离为 $2t$ ，它也完全是正确的。但是因为从一开始就没有探讨力的正确符号是什么，所以结束时会有许多符号错误。我将会完全正确——我宁愿不管数学，而从物理意义上获得正确的符号，然后从相反方向来做。不管怎样，我们达到了目的。（你们不愿这样做吗？它太困难了——练习一下吧！）

（记住 t 的意义： t 是两个轴靠在一起之前的时间，它是一种负的时间，这种负时间会使每个人发疯，但我实在帮不了忙——这是我求解这问题的方法。）

现在几何图形是这样的，重物总是在滚轴和枢轴之间（水平方向上）一半的地方。所以，如果我们把坐标系的原点放在枢轴的位置，那么重物的 x 坐标为 $x = \frac{1}{2}(2t) = t$ 。杆的长度是 0.5 ，所以重物的高度就是它的 y 坐标，由勾股定理，我得到 $y = \sqrt{0.25 - t^2}$ （见图2-8）。你能否想象，我第一次非常仔细地求解出这个问题得到的结果是 $y = \sqrt{0.25 + t^2}$ ？

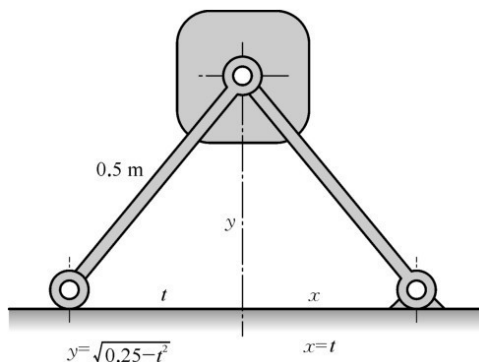


图2-8 利用勾股定理求重物的高度

现在我们需要求加速度，加速度有两个分量：一个是水平加速度，另一个是垂直加速度。如果存在水平加速度，那么就有水平方向的力。我们已通过杆子求出它并算出它作用在滚轴上的力是多少。这个问题比它看上去要容易一些，因为不存在水平方向的加速度——重物的 x 坐标总是等于滚轴坐标的一半；它在同样的方向运动，但是其速率是滚轴速率的一半。这样，重物在水平方向以1米/秒的恒速运动，所以不存在横向的加速度，感谢上帝！这就使问题变得稍微容易一点，我们只需关心向上及向下的加速度。

因此为了求加速度，我们必须对重物的高度两次求微商：一次我们得到 y 方向的速度，再一次微商就得到加速度。高度为 $y = \sqrt{0.25 - t^2}$ ，你们应该能够很快对此求出微商，答案为

$$y' = \frac{-t}{\sqrt{0.25 - t^2}}. \quad (2.18)$$

它是负的，即使重物向上运动。但我把我的符号全都搞得很笨拙。所以我就让它这样。无论如何，我知道速率是向上的，所以假如 t 是正的话，则这个等式就错了。但 t 确实应该是负的——所以该式是正确的。

现在我们来计算加速度。你们能够用几种方法来解这道题：你们可以用普通的方法去解，但我将利用第一章给你们讲过的“超级”方法：你们再写下 y' ；然后你们说，“我要微分的第一项是一次幂， $-t$ ， $-t$ 的微商是 -1 。我要微分的第二项是负二分之一一次幂，这一项是 $0.25-t^2$ 。它的微商是 $-2t$ 。做完了！”

$$y' = -t(0.25 - t^2)^{-1/2}, \quad (2.19)$$

$$y'' = -t(0.25 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1 \cdot \frac{-1}{(-t)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2t}{(0.25 - t^2)} \right].$$

现在我们有了任何时刻的加速度。为了求力，我们要把它乘以质量。所以，力——产生加速度的除重力以外的力——等于质量（2公斤）乘加速度，让我们把数值代入； t 为0.3， $0.25-t^2$ 的平方根就是 $0.25-0.09=0.16$ 的平方根0.4——好，多方便！正确吗？肯定正确，先生。这个平方根与 y 本身相同，当 t 为0.3时，根据我们的图解， y 为0.4。好，不错。

（在我的计算过程中，我总是边计算边核查。一种核查方法是非常仔细地作数学计算；另一种核查方法是一直关注着所得到的数据是否合理，是否描述实际发生的情况。）

现在我们来计算。（第一次解这问题时我认为 $0.25-t^2=0.4$ ，而不是0.16——为了找到那样一个解，花费了我一些时间！）我们算出某一个或另一个数值；结果加速度约为3.9^[7]。

好了，加速度为3.9，现在来求力：与这个加速度相应的垂直方向的力为3.9乘2 kg乘 g 。不，这不对！我忘了，现在没有 g 了；3.9是真实的加速度。垂直方向的重力是2 kg乘由重力加速度9.8——这就是 g

——而杆子作用在重物上的力的垂直分量是这两个力之和，其中一个带有负号；两个符号是相反的。所以你们把它们相减，并得

$$F_W = ma - mg = 7.8 - 19.6 = -11.8 \text{ (牛顿)}. \quad (2.20)$$

但应记住，现在得到的是作用在重物上的垂直方向的力。作用在滚轴上的水平力是多少呢？答案是：作用在滚轴上的水平力，是作用在重物上的垂直力一半的 $\frac{3}{4}$ 。我们前面就注意到：向下拉的力是由两条腿支撑的，它们把力分解为二，由几何关系可知，力的水平分量与垂直分量之比是 $\frac{3}{4}$ ——所以答案是：作用在滚轴上的水平力是作用在重物上的垂直的八分之三。我算出的结果是每一个力的八分之三，对重力的情况我得到7.35，而由加速度产生的项得2.95，它们的差为4.425牛顿——比重物在相同位置上而不动时所需的支撑力大约小3牛顿（见图2-9）。

$$F_R = \dots \approx 4.425 \text{ (牛顿)}.$$

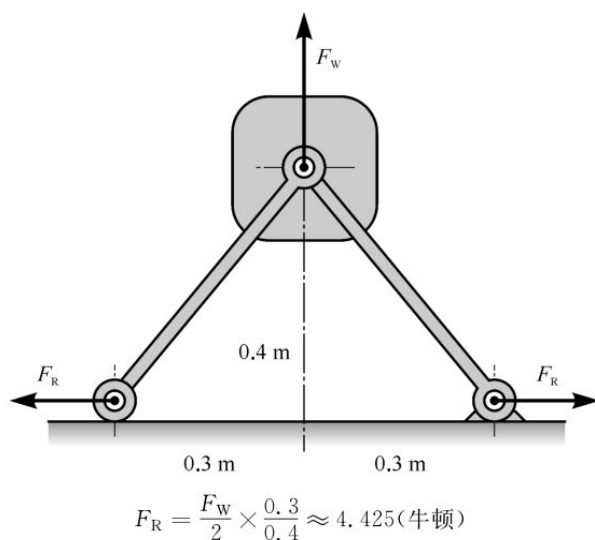


图2-9 利用相似三角形求作用在滚轴上的力

总之，这就是你们如何设计机械的方式；你们知道驱动一个物体向前需要多大的力。

现在你们要问：“那是解决这种问题的正确方法吗？”

这种东西是不存在的！没有处理任何事情的“正确”方法。做一件事用特定方法可能是正确的，但它不是在任何情况下都正确的方法。你们可以用你们想要的任何该死的方法做事情！（好吧，请原谅：有许多不正确的办事方法。）

现在，如果我足够聪明，我只要看一看这东西，就能够告诉你们力有多大；但我不是一个足够聪明的人，所以我不得不用这种或那种方法来做这种事件——但有许多做这种事情方法。我要说明另一种方法，它非常有用，尤其是你要设计真实的机器。这个问题由于具有相等长度的腿及其他因素而简化了，因为不想把运算复杂化。但物理概念可以帮助你们能够用另一种方法计算出所有东西，即使几何关系并不如此简单。下面介绍的就是另一种有趣的方法。

当你们有一整套能使许多重物运动的杠杆时，你们就能够做这样的事：随着你们驱动这些物体，由于所有杠杆的作用，所有重物都开始运动，你们就要做一定数量的功 W 。在任何给定的时刻，有一定的功率输入，功率是你们做功的速率，即 dW/dt 。在同一时刻，所有重物的能量 E 是以某种速率变化，即 dE/dt ，而这两者是相互匹配的。这就是说你输入功的速率应该与所有重物的总能量的变化率相匹配：

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt}. \quad (2.21)$$

回想一下讲过的课，你们应该记得，功率等于力乘以速度^[8]：

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

从而我们得到：

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

于是就有这种概念，即在给定的瞬时，各重物具有某种速率，这样它们就都有了动能。它们离地面也有一定的高度，因而它们也具有了势能。为了求出它们的总能量，我们就要算出重物运动得多快以及它们位于何处，然后把总能量对时间求微商，结果就等于力在受这个力作用的物体即时的运动的方向上的分量与运动速率的乘积。

让我们来看看，是否可以把上述结论应用到我们的问题。

现在，当我们用力 $\mathbf{p} = -\mathbf{F}_R$ 推动正以速度 $\mathbf{v}_R$ 运动的滚轴时，整个东西的能量相对时间的变化率，应该等于力的数值乘以速率 $F_R v_R$ ，因为在这种情况下，力和速度都处在相同的方向。它不是普适的公式；如果我曾要你们求的力是在某个别的方向，我就不可能直接根据这样的论证得到它，因为这个公式仅仅给了你做功的力的分量！（当然，由于你们可以知道沿杆子的力，所以你们能够间接得到这个式子。如果有若干连接着的杆子，这个方法仍然有用，你们只要取运动方向上的力。）

总之，滚轴、枢轴及使这机器处于正确运动状态的所有其他机件，这些约束的力所做的全部功是多少？假定当它们开动时，由于没有别的力作用于它，那么它们就不做功。例如，若另一个人正坐在那里，把一条腿拉出去，而同时我把另一条腿推进去，则我必须把另一

家伙做的功也一起计算进去！但是没有人做那种事，由于 $v_R=2$ ，我们得

$$\frac{dE}{dt} = 2F_R. \quad (2.24)$$

这样，如果我能够算出 dE/dt ，——除以2，你瞧，就得到力！那就一切就绪。

准备好了吗？我们继续下去！

现在我们有了重物的总能量，它包括两部分——动能加势能。嗯，势能不难求得：它是 mgy （见表2-3）。我们已经知道 y 等于0.4 m， m 是2 kg以及 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 。所以势能为 $2 \times 9.8 \times 0.4 = 7.84$ 焦耳。这时的动能：嗯，经过尝试很多方法之后，我得到重物的速度，把它写成动能；我们将在只用1秒钟就解出这个问题。于是我因为有了总能量，因而一切就绪了。

遗憾的是我还没有考虑到所有问题：我要求的并不是能量！我要求的是能量对时间的微商，你们不可能通过算出某个东西此时是多少来求得它变化多快！你们或者算出两个相邻时刻——此刻及稍后一刻——的能量，或者用数学形式表示任意时刻 t 的能量，然后将它对 t 求微商。这取决于哪一种做法最容易：在数值上计算出两个位置的几何关系要比计算出普遍情况下的几何关系并将它微商要容易得多。

（大多数人都试图直接把一个问题写成数学形式，并对它微商，这是由于他们还没有足够的计算经验领会到用数字而不用文字进行计算的惊人能力及便利。不过，我们还是要用文字来计算。）

我们再次求解这个问题，这里 $x=t$ ，而 $y=\sqrt{0.25-t^2}$ ，所以我们能够求出它的微商。

现在我们需要知道势能。我们能很容易求得：它等于 mg 乘高度 y ，于是得到

$$\begin{aligned} P.E. &= mgy = 2 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times \sqrt{0.25-t^2} \cdot m \\ &= 19.6 \text{ 牛顿} \times \sqrt{0.25-t^2} \text{ 米} \\ &= 19.6\sqrt{0.25-t^2} \text{ 焦耳} \end{aligned} \quad (2.25)$$

但更有趣也更难的是算出动能。动能为 $\frac{1}{2}mv^2$ 。为了算出动能，我需要算出速度的平方，这要做一大堆繁琐事：速度的平方等于它的 x 分量的平方加 y 分量的平方。我能够算出 y 分量，就像我前面做的一样。至于 x 分量，我已经指出它是1，我可能已有这些量的平方并把它们加在一起。但是，假定我还没有做过这些计算，那么我还要想出另一种方法去求速度。

那么，对这个问题进行思考后，一个好的机械设计师通常能够根据几何学原理计算出这些并安排机器的部件。例如，因为枢轴是不动的，所以重物必然围绕它作圆周运动。那么重物的速度必定在什么方向？它不可能具有平行于杆子的速度，因为这样会改变杆的长度，对吗？因此速度矢量是垂直于杆子的（见图2-10）。

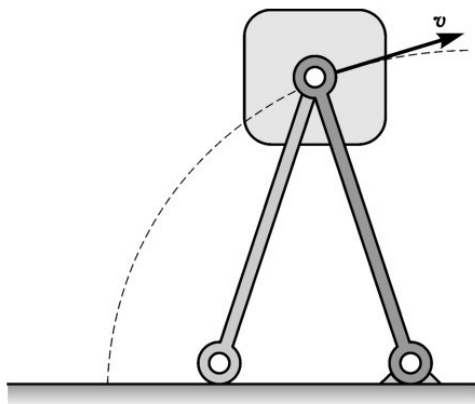


图2-10 重物作圆周运动，所以它的速度垂直于杆子

你们或许会对自己说，“喔！我得学习那个诀窍！”

不！这种诀窍仅对特殊类型的问题是有用的，在大多数情况下它是无效的。你们很少碰到恰巧要求绕固定点转动的某个物体的速度；没有规则说“速度垂直于杆子”或类似的东西。你们得尽可能经常使用常识。从几何学分析机械的一般概念在这里是很重要的——但不是任何特殊的规则。

现在我们知道了速度的方向。我们已经知道的速度的水平分量为1，因为它是滚轴速率的一半。但是你看！速度是直角三角形的斜边，该三角形与以杆子为斜边的直角三角形相似！求速度的数值并不比求它对其水平分量的比值更困难。我们可以从我们已经完全知道的其他三角形得到该比值（见图2-11）。

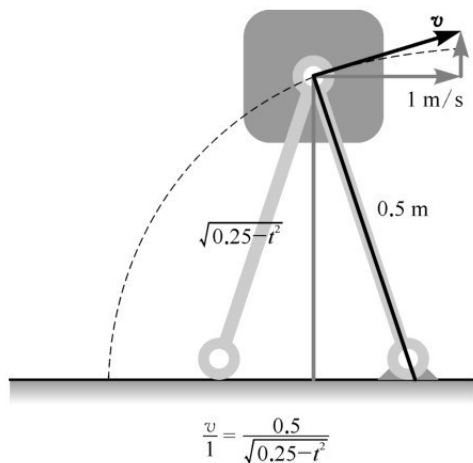


图2-11 利用相似三角形求重物的速度

最后，关于动能，我们得到

$$K.E. = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 2 \text{ kg} \times \left(\frac{0.5}{\sqrt{0.25 - t^2}} \text{ m/s} \right)^2 = \frac{1}{1 - 4t^2} \text{ (焦耳).} \quad (2.26)$$

现在，谈谈符号的问题：动能肯定为正，由于我们测量的距离是对地面而言的，所以势能也为正，现在我所用的符号都完全正确。因而在任何时刻的能量为

$$E = K.E. + P.E. = \frac{1}{1 - 4t^2} + 19.6\sqrt{0.25 - t^2}. \quad (2.27)$$

现在，为了用这种诀窍求力，我们需要对能量求微商，然后除以2，这样就一切都准备好了。“我用这种方法解这个问题表面上显得很容易，其实这是假象：我发誓，在我得到正确答案之前我做了不止一次。”

现在我们把能量对时间求微商。我不必为此事花太多的时间，我认为你们现在都已知道如何求微商，所以我们就直接给出 dE/dt 的答案（顺便提及，它是所需力的2倍。）

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8t}{(1-4t^2)^2} - \frac{19.6t}{\sqrt{0.25-t^2}}. \quad (2.28)$$

这样，我就全部完成了：我只要把0.3代入 t ，就完成了。不过，还没完——为得到正确的符号获得正确，我必须使用 $t=-0.3$ ：

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(-0.3)}^* = -\frac{2.4}{0.4096} + 19.6 \times \frac{0.3}{0.4} \approx 8.84(\text{瓦}). \quad (2.29)$$

*原文为 $\frac{dE}{dt}(-0.3)$ 。——译者注

现在我们来看看这结果是否有意义。如果没有运动，那我不必为动能操心，于是重物的总能量仅仅是它的势能，而它的微商应为重量产生的力^[9]。确实如此，这里所得结果与我们在第一章中计算的结果相同，都是 $2 \times 9.8 \times \frac{3}{4}$ 。

（2.29）式右边第一项为负，这是因为重物正在减速，所以它正在失去动能；第二项为正是由于重物正在上升，所以势能正在增加。无论如何，它们的符号彼此相反，这是我要知道的全部东西，而你们可以代入数值，果然，所得到的力与前面得到的相同：

$$2F_R = \frac{dE}{dt} \approx 8.84, \quad (2.30)$$

$$F_R \approx 4.42(\text{牛顿}).$$

实际上，这就是我为什么一定要做这许多次的原因：在我第一次做这题后，对我的错误答案心满意足，我决定用另一种完全不同的办法试试。我用另一种办法做了以后，又满足于完全不同的答案！当你们辛苦地工作时，你们有时会想：“至少，我已经发现数学是前后矛盾的！”但是很快你们就发现了错误，正如我最后做的那样。

无论如何，这正是解这问题的两种方法。解任何具体问题不是只有唯一的一种方法。随着智力越来越强大，你们能够找到工作量少而又少的方法，但是这需要实践经验^[10]。

2-8 地球的逃逸速度

我剩下的时间不多了，但我要讲的下一个问题是涉及行星运动的一些事情。由于这次我肯定不能告诉你们关于这个问题的所有事情，我还要重新回到这个问题上来。第一个问题是，一个物体脱离地球表面需要多大的速度？某个物体必须运动得多快才能刚好摆脱地球引力？

现在，求解这个问题的一种方法是计算物体在引力作用下的运动，另一种方法是利用能量守恒。当物体到离开地球无穷远处时，其动能为零，而势能是它在无穷大距离处定义的值。引力势的公式列在表2-3中，它告诉我们，在无穷远处质点的势能为零。

所以当某个物体以逃逸速度离开地球时，其总能量必须与其到达无穷远处、并且地球的引力将它的速度减慢至零的能量相同。（假定不存在其他的力。）如果 M 是地球的质量， R 是地球的半径，以及 G 是万有引力常数，则我们求得逃逸速度的平方必定为 $2GM/R$ 。

$$(K.E. + P.E.)_{(\text{在}\infty, v=0)} \stackrel{(\text{能量守恒})}{=} (K.E. + P.E.)_{(\text{在}R\text{处}, v=v_{\text{esc}})}$$

$$P.E._{(\text{在}\infty)} = -\frac{GMm}{\infty} = 0 \quad P.E._{(\text{在}R\text{处})} = -\frac{GMm}{R}$$

$$K.E._{(v=0)} = \frac{m}{2} 0^2 = 0 \quad K.E._{(v=v_{\text{esc}})} = \frac{mv_{\text{esc}}^2}{2}$$

$$+ \quad +$$

$$0 = \left(-\frac{GMm}{R} + \frac{mv_{\text{esc}}^2}{2} \right)$$

$$\therefore v_{\text{esc}}^2 = \frac{2GM}{R}. \quad (2.31)$$

重力常数 g （地球表面附近的重力加速度）正好就是 GM/R^2 ，由力的定律可知，对质量为 m 的物体， $mg = GMm/R^2$ 。用较容易记忆的重力常数来表示，我可以写出 $v_{\text{esc}}^2 = 2gR$ 。此地， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，地球半径为6 400 km，所以地球的逃逸速度为

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6\,400 \times 1\,000} = 11\,200 \text{ (m/s)}. \quad (2.32)$$

所以若要逃逸出去，你们必须达到11 km/s的速度——相当快的速度。

接下来我们要讨论如果你们达到15 km/s的速度，并且你们正从某个距离处飞过地球，那时将会发生些什么。

现在物体有15 km/s的速度，就有了足够的能量可以一直向上飞离地球。但是如果物体不是笔直向上飞，它是不是一定会飞离地球呢？物体是否可能围地球运动并返回呢？这不是自明的问题；要仔细想想。你们说，“它有足够的能量飞出去，”但是你们怎样知道的？我们没有计算那个方向的逃逸速度。是否可能由于地球引力产生的横向加速度足以使得物体作环绕运动呢（见图2-12）？

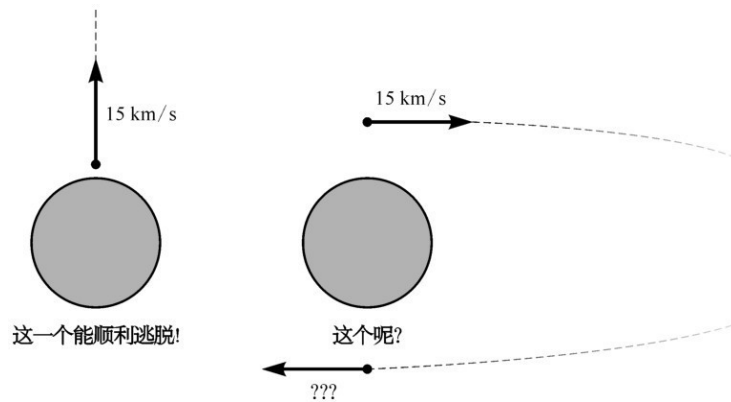


图2-12 具有了逃逸速度就保证能够逃逸吗

原则是可能的。你们知道有这样一条定律：物体在相等的时间内扫过相等的面积。所以你们明白当你们飞出很远时，你们必定由于某种原因或别的因素而做横向运动。不清楚你们需要逃逸的某种运动是否有横向运动，以致即使具有 15km/s 的速度还是不会逃逸。

实际发现，物体达到 15km/s 时一定逃逸了——只要速度大于上面算出的逃逸速度，它就要逃逸。只要它能够逃逸，它肯定会逃逸——虽然这不是自明的——下次我将试着去证明它。但为了给你们一点我将如何论证的启示，因此你们可以自己看看。下面是一些提示。

我们在 A 、 B 两点用能量守恒。 a 是物体离地球最短的距离，而 b 是物体离地球最长的距离，如图2-13所示，问题是试计算 b 。由于能量守恒，我们已知物体在 A 点的总能量与在 B 点的总能量相同，所以如果我们知道了物体在 B 点的速度，就能算出它的势能，从而求出 b 。但我们不知道物体在 B 点的速度！

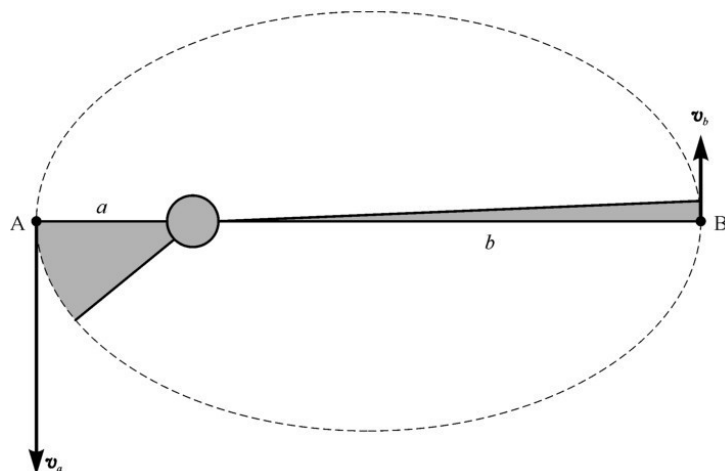


图2-13 人造卫星在近日点和远日点的距离和速度

我们再计算：根据在相等的时间内扫过相等面积这个定律，我们就知道物体在 B 处的速率必定以一定的比例小于 A 处。实际上就是 a 比 b 。利用这个事实就得到在 B 点的速率。我们有可能根据 a 求得距离 b ，我们下次再来求它。

补充题解（由迈克尔A.戈特利勃提供）

这里提供求解在（2-7节）讲到的机械设计问题（[此处](#)开始）的另外三种方法。

A 用几何方法求重物的加速度

由于重物在水平方向始终处于滚轴和枢轴之间一半的位置，所以它的水平速率是1 m/s，即滚轴速率的一半。重物沿着圆周运动（以枢轴为中心），所以其速度垂直于杆子。由相似三角形我们得到重物的速度（见图2-14a）。

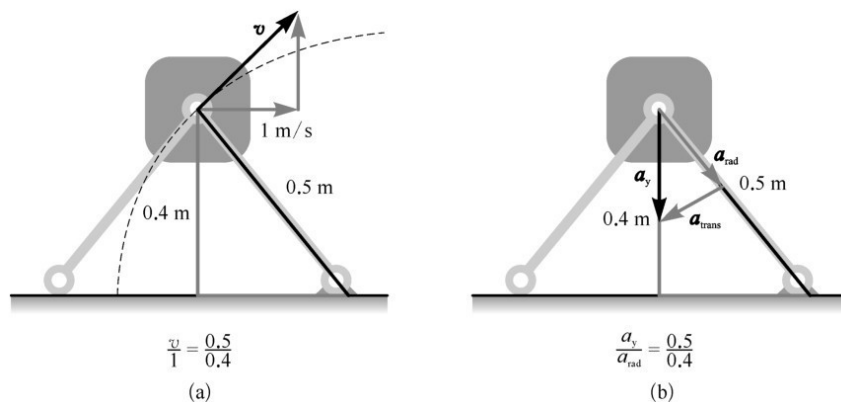


图 2-14

由于重物作圆周运动，所以按照（2.17）式，它的加速度的径向分量为

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.25)^2}{0.5} = 3.125.$$

重物垂直方向的加速度是它的径向分量及法向分量之和（见图2-14b）。

再次利用相似三角形，我们得到重物垂直方向的加速度：

$$a_y = \frac{a_y}{a_{\text{rad}}} \times a_{\text{rad}} = \frac{0.5}{0.4} \times 3.125 = 3.90625.$$

B 利用三角学求重物加速度

由于重物沿半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆弧运动，所以它的运动方程可以用杆子与地面的夹角来表示（见图2-15）：

$$x = \frac{1}{2} \cos \theta,$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \theta.$$

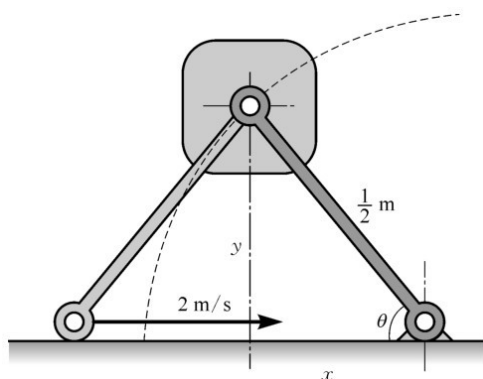


图 2-15

重物的水平速率为1 m/s（滚轴速率的一半）。所以 $x=t$ ， $\frac{dx}{dt}=1$ ，以及 $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ ，垂直方向的加速度可以由 y 对 t 两次微商算出。但是首先，由于 $t=\frac{1}{2}\cos\theta$ ，所以

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2}{\sin\theta}.$$

因此

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \cos \theta \left(-\frac{2}{\sin \theta} \right) = -\operatorname{ctg} \theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(-\frac{2}{\sin \theta} \right) = -\frac{2}{\sin^3 \theta}.$$

当 $x=t=0.3$ 时，得 $y=0.4$ ， $\sin\theta=0.8$ （因 $y=\frac{1}{2}\sin\theta$ ）。于是垂直方向加速度的量值为

$$a_y = \left| \frac{d^2 y}{dt^2} \right| = \frac{2}{(0.8)^3} = 3.906\ 25.$$

C 利用转矩和角动量求作用在重物上的力

作用在重物上的转矩 $\tau = xF_y - yF_x$ 。重物以1 m/s的速率在水平方向匀速运动，所以不存在水平方向的作用力： $F_x=0$ 。设 $x=t$ ，则转矩简缩为 $\tau = tF_y$ 。由于转矩是角动量对时间的微商，所以如果求得了重物的角动量 L ，则我们就能对它求微商，再除以 t 就得到 F_y ：

$$F_y = \frac{\tau}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dL}{dt}.$$

因为重物作圆周运动，所以它的角动量很容易求得。它的角动量简单地为杆子的长度 r 乘以重物的动量，而它的动量等于它的质量 m 乘上速率 v ，速率可用费曼的几何方法求得（见图2-16），或者对重物的运动方程求微商求得。

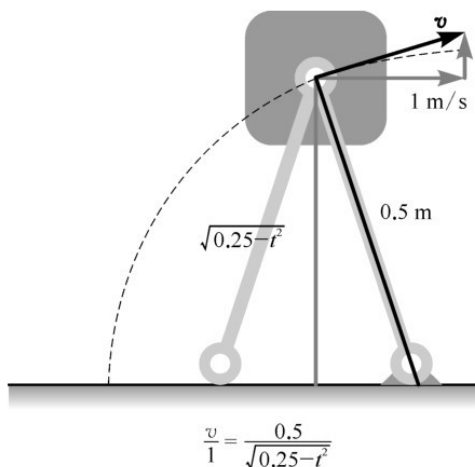


图 2-16

总合起来我们得：

$$F_y = \frac{1}{t} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{t} \frac{d}{dt}(mv) = \frac{m}{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{0.5}{\sqrt{0.25 - t^2}} \right)$$

$$= \frac{0.5 \times 2}{t} \cdot \frac{0.5t}{(0.25 - t^2)^{3/2}} = \frac{4}{(1 - 4t^2)^{3/2}}.$$

当 $t=0.3$ ，我们得 $F_y=7.8125$ 。除以 2 kg 给出我们求出我们以前得到过的垂直方向加速度： 3.90625 。

[1] $v = |v|$ 是粒子的速率； c 是光速。

[2] 通过 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 的泰勒级数展开式的前两项代入 (2.5) 式，就很容易地看出质点的动能和它总的（相对论性）能量之间的关系：

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \dots$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2(1 + v^2/2c^2 + \dots)$$

$$\approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{静能} + \text{动能(对于 } v \ll c)$$

[3] 一个力被定义为保守力的条件是：当它作用在一个质点上，使它从一个位置移动到另一个位置所做的总功与粒子运动的路径无关，都是相同的。也就是说，总功仅取决于路径的

两个端点。在质点沿一闭合路径运动（即终点就是原点）的情况中，作用在质点上的保守力所做的功恒为零。参见《费曼物理学讲义》第1卷14-3节。

[4] 参见《费曼物理学讲义》第1卷11-6节。

[5] 满足毕达哥拉斯定理 $x^2 + y^2 = z^2$ 的三个正整数 x ， y 和 z 称为毕达哥拉斯三元组，也称三数组。——译者注

[6] 参见[此处](#)关于无须微商求重物加速度方法的补充题解A。

[7] 精确的数值是3.906 25。

[8] 参见《费曼物理学讲义》第1卷，13章。

[9] 能量相对于滚轴位置的微商就是作用于滚轴上力的数值，然而，由于在这个特殊问题中滚轴的位置为 $2t$ ，所以能量对 t 的微商就等于作用在滚轴上的力的2倍。

[10] 关于解这问题的另外三种方法，参见补充题解，从[此处](#)开始。

3 习题及解答

复习课C

我们继续复习如何通过做一些习题来学习物理。我这里所选的习题都是精心设计的、复杂法的并且是困难的，我把容易些的习题留给你们自己去做。我也有所有教授都有的毛病——就是似乎永远不会有足够的时间，我想出了肯定比我们来得及做的更多的习题。因此我试图加快速度，为此，先把某些东西写在黑板上，并带着每位教授都有的错觉：如果他讲更多的东西，他就教给学生更多的东西。当然，人脑吸收材料的速率是有限的，然而我们还是会忽视这种现象。我们会不顾这些而讲得太快。所以，我想尽量讲得慢一点，并看看我们可以讲多少。

3-1 卫星运动

我们上次讲到的最后一个问题是卫星的运动。我们曾讨论这样的问题，若一个质点作垂直于太阳、行星或任何质量为 M 的物体的半径的运动，它们的距离为 a ，且具有在此距离处的逃逸速度，则该质点实际上是否能逃逸——因它不是不证自明的。如果质点是沿半径方向一直向外运动的，则它应该会逃逸；但如果它开始时沿垂直半径方向运动，那它是否逃逸是另一个问题（见图3-1）。

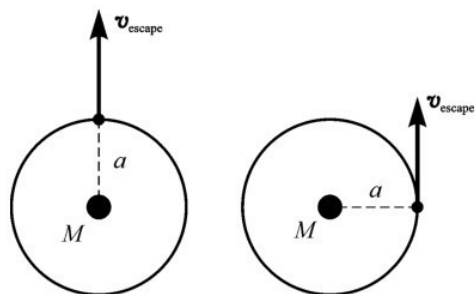


图3-1 逃逸速度沿着半径指向和垂直于半径的情况

结果发现——如果我们还记得开普勒定律，再加上另外一些定律，如能量守恒定律——那么我们就能够算出要是质点不逃逸，它会作椭圆运动，而且我们能算出它将达到多远的地方，这就是我们现在要做的事情。如果该椭圆的近日点是 a ，那其远日点 b 有多远？（顺便说说，我想把这问题写在黑板上，但是我发现我不会拼写近日点，见图3-2。）

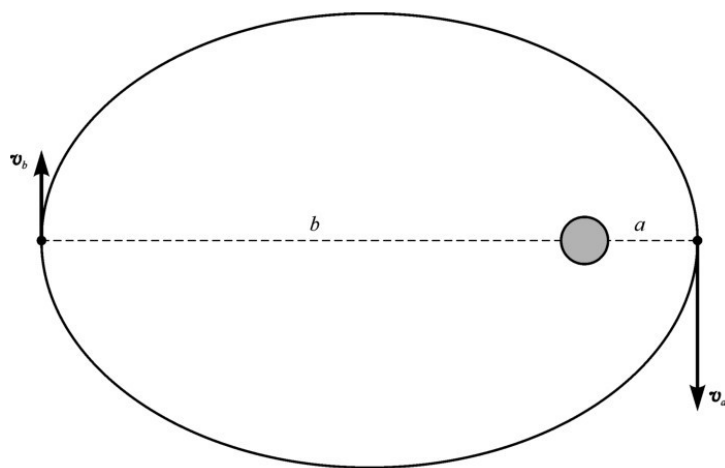


图3-2 椭圆轨道上人造卫星的近日点及远日点处的速度和距离

上次我们根据能量守恒算出了逃逸速度（见图3-3）。

$$K.E. + P.E._{a\text{处}} = K.E. + P.E._{\infty\text{处}},$$

$$\frac{m}{2}v_{\text{esc}}^2 - \frac{GmM}{a} = 0 + 0,$$

$$\frac{v_{\text{esc}}^2}{2} = \frac{GM}{a}, \quad (3.1)$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{a}}.$$

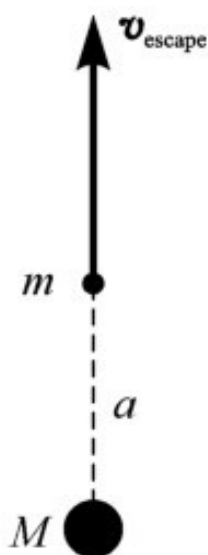


图3-3 距离质量为 M 的物体 a 处的逃逸速度

现在，这是在半径 a 处的逃逸速度公式。但是假定速度 v_a 是任意的，而我们来求由 v_a 表示的 b 。能量守恒告诉我们，质点在近日点的动能和势能必定等于它在远日点的动能和势能——这样我们就能利用它来计算 b ，一眼就看出：

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM}{a} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GmM}{b}. \quad (3.2)$$

Infelizmente ^[1], 我们却没有 v_b , 所以除非存在某种外部机制或者经分析而得出 v_b , 否则我们永远无法从(3.2)式求出 b 。

但是如果我们记得开普勒的等面积定律, 那么我们就知道, 在给定的时间间隔内, 在远日点扫过的面积和在近日点扫过的面积相等; 在短时间间隔 Δt 内, 质点在近日点通过距离 $v_a \Delta t$, 所以它扫过的面积约为 $a \cdot v_a \Delta t / 2$, 而在远日点, 质点经过的距离 $v_b \Delta t$, 扫过的面积约为 $b v_b \Delta t / 2$, “面积相等”意指 $av_a \Delta t / 2$ 等于 $bv_b \Delta t / 2$ ——这意味着速度与半径反比地变化(见图3-4)。

$$av_a \Delta t / 2 = bv_b \Delta t / 2,$$

$$v_b = \frac{a}{b}v_a. \quad (3.3)$$

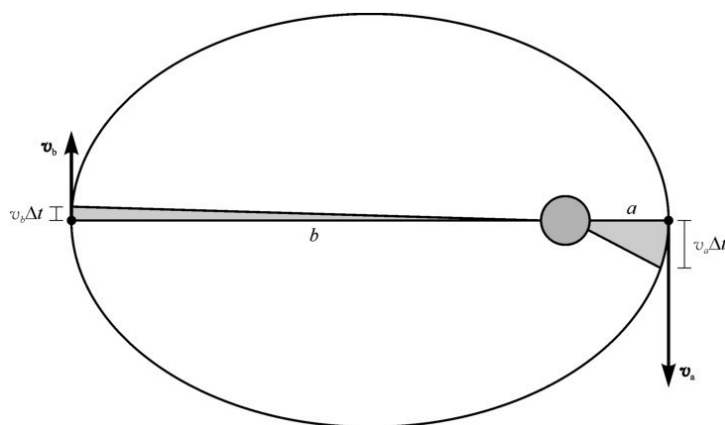


图3-4 利用开普勒等面积定律求卫星在远日点的速度

于是，上式给了我们由 v_a 表示的 v_b 的公式。我们可以将其代入（3.2）式。因而我们就有一个确定 b 的方程：

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM}{a} = \frac{1}{2}m\left(\frac{a}{b}v_a\right)^2 - \frac{GmM}{b}. \quad (3.4)$$

两边除以 m ，再重新排列，我们得

$$\frac{1}{2}a^2v_a^2\left(\frac{1}{b}\right)^2 - GM\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{GM}{a} - \frac{1}{2}v_a^2\right) = 0. \quad (3.5)$$

你若仔细看一下（3.5）式，可能会说“好，我可以用 b^2 去乘，于是上式就变为 b 的二次方程。”或者，如果你们喜欢，就像原来这样，解 $\frac{1}{b}$ 的二次方程——两种方法都行。 $\left(\frac{1}{b}\right)$ 的解为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{GM}{a^2v_a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{a^2v_a^2}\right)^2 + \frac{v_a^2/2 - GM/a}{a^2v_a^2/2}} \\ &= \frac{GM}{a^2v_a^2} \pm \left(\frac{GM}{a^2 \cdot v_a^2} - \frac{1}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

此后我不再讨论这个代数式；你们知道如何解二次方程，并且 b 存在两个解：可以发现其中一个解是 b 等于 a ——这令人高兴，因为如果你们考察（3.2）式就会看到，显然 b 等于 a 时方程将相等。（这意味着 b 就是 a 。）根据另一个解，得到用 a 表示的 b 的公式，把它写下：

$$b = \frac{a}{\frac{2Gm}{av_a^2} - 1}. \quad (3.7)$$

现在的问题是，我们是否可用这样的方式来写上式，即使得 v_a 与距离 a 处的逃逸速度的关系能够明显看出。注意到由（3.1）式， $2GM/a$ 就是逃逸速度的平方，所以我们可把上式写成如下形式：

$$b = \frac{a}{(v_{\text{esc}}/v_a)^2 - 1}. \quad (3.8)$$

这就是最后的结果，相当有意思，首先假定 v_a 小于逃逸速度。在这种情况下，我们预料质点不会逃逸，所以我们会得到合理的 b 值。果然，要是 v_a 小于 v_{esc} ，则 v_{esc}/v_a 大于1，其平方也大于1，减去1，你们就得到某个合理的位置数值， a 除以该数就告诉我们 b 。

粗略估计我们分析的精确程度，一个好的办法是利用我们在第九次讲课[2]中对轨道所做数值计算，其中的 b 和我们从（3.8）式中所求出的 b 是否一致。它们为什么不完全一致？当然不会相同，因为积分的数值方法是用不连续的小段来代替连续的时间。所以它不是精确的。

无论如何，这就是当 v_a 小于 v_{esc} 时如何求 b 的方法。[顺便说说，知道 b 和 a 后，我们就知道了椭圆的半长轴，要是愿意我们就能根据（3.2）式算出轨道周期。]

但有趣的事情是：首先假定， v_a 精确等于逃逸速度，那么 v_{esc}/v_a 为1，而（3.8）式告诉我们 b 为无穷大。这意味着轨道不是椭圆；这表示轨道延伸到无穷远。（可以证明，在这种特殊情况下，轨道是一抛物线。）所以事实是，不论你们在靠近一颗恒星或行星的任何地方，也不论你们朝什么方向运动，只要你们具有逃逸速度，你们就会

逃逸，完全正确——即使你们不是朝着正确的方向，你们也不会被捕获。

还有一个问题是，如果 v_a 超过 逃逸速度会发生什么情况？那时 v_{esc}/v_a 小于1，结果 b 为负——那并不表示什么，只表示没有实际的 b 。从物理意义上来讲，答案更像是这个样子：粒子以非常高的速度，比逃逸速度高得多，射入并被偏转——但它的轨道不是椭圆。实际上它的轨道是双曲线。所以围绕太阳运动的物体的轨道不只是椭圆，像开普勒所认为的那样。但对于以较高速率运动物体，其轨道的一般情况包括椭圆、抛物线及双曲线。（在这里我们不去证明它们是椭圆、抛物线或双曲线，但这就是这个问题的答案。）

3-2 原子核的发现

双曲线轨道的问题是有趣的，具有很有意义的历史上的应用。我很愿意把它介绍给你们；这在图3-5中阐明。我们选取非常 高的速率及相对小的力这种极限情况，那就是，物体如此快地通过，一级近似下它沿直线运动（参见图3-5）。

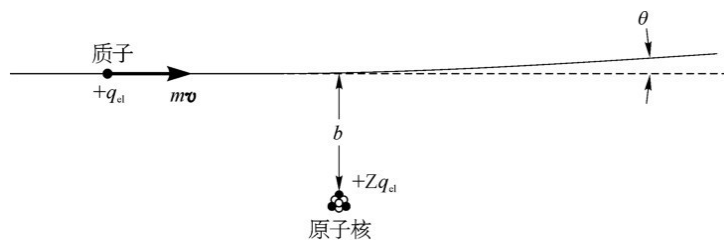


图3-5 当一个高速质子通过原子核附近时，它因受到电场作用而偏转

我们假设原子核带有电荷 $+Zq_{\text{el}}$ （这里 $-q_{\text{el}}$ 是电子电荷），一带电粒子——按照你自己的条件，可以用某种离子也一样（最初是用 α 粒

子)——从它附近距离 b 处通过, 我们可以用质子, 其质量为 m , 速度为 v , 电荷为 $+q_{\text{el}}$ (对于 α 粒子, 其电荷就是 $+2q_{\text{el}}$)。质子并不完全沿直线通过, 而是偏转一个很小的角度。问题是该角度是多少? 现在, 我们不准备作精确计算, 而是做粗略的估计——借以获得角度如何随 b 而变化的某些概念。(我作非相对论性的讨论, 虽然考虑相对论计算也同样简单——只有很小的改变, 你们可以自己去计算。)显然, b 越大, 偏转角就越小。问题是, 偏转角是随 b 的平方减少, 或者立方, 或者 b , 还是别的什么次方? 我们希望得到有关这方面的一些概念。

(其实, 这是你着手处理任何复杂或不熟悉的问题如何着手的方法问题: 你们首先获得一个粗略的概念; 然后在你们对它了解得较多后再回过头来, 并更仔细地去解这个问题。)

所以最初的粗略分析会遇到像这样的事情: 当质子飞过时, 它受到来自核的侧向力的作用——当然, 也有其他方向的力, 是侧向力使它偏转, 不再沿原来的直线方向前进, 现在它有了向上的速度分量。换句话说, 它获得了力的作用产生的、在力的方向上的一些向上的动量。

现在要问, 向上的力有多大? 嗯, 它沿质子运动路径变化。但粗略地估计它或多或少依赖于 b , 而最大的力(当质子通过中心位置时)为

$$\text{垂直方向的力} \approx \frac{Zq_{\text{el}}^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{Ze^2}{b^2}. \quad (3.9)$$

(我用 e^2 代替 $\frac{q_{\text{el}}^2}{4\pi\epsilon_0}$, 所以我就可以写方程式快一些[\[3\]](#)。)

如果我知道力作用时间有多长，那么我就能估计出它传送的动量。力作用了多长时间呢？嗯，质子离在一英里以外不受到力的作用。但是，粗略地讲，只要质子和原子核处在通常邻近距离上，就有通常量级的力对它作用。多远？距离原子核 b 的范围以内通过时就有或大或小的力？所以力的作用时间就是距离 b 的数量级除以速率 v （见图3-6）。

$$\text{时间} \approx \frac{b}{v} \quad (3.10)$$

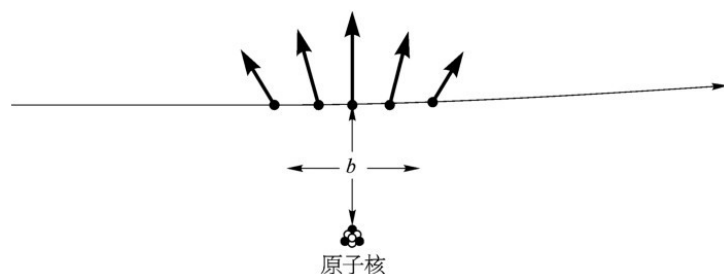


图3-6 原子核的电力对质子的有效作用时间正比于它们之间的最近距离

牛顿定律告诉我们，力等于动量的变化率——所以，要是我们把力乘以其作用的时间，就得到动量的改变。因此，质子获得的垂直方向的动量为

$$\begin{aligned} \text{垂直方向的动量} &= \text{垂直方向的力} \times \text{时间} \\ &\approx \frac{Ze^2}{b^2} \cdot \frac{b}{v} = \frac{Ze^2}{bv}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

上式并不精确成立；归根到底，当我们对这种情况作精确积分时，就可能出现2.716这种或其他数字因子——至于现在，我们只是试图求出依赖于各个字母所代表的物理量的数量级。

当粒子离开时具有的水平方向的 动量，实际上与它入射时的动量相同，其为 mv ：

$$\text{水平方向的动量} = mv. \quad (3.12)$$

（如果考虑到相对论，这是你需要改变的唯一的東西。）

现在要问：偏转角是多少？我们知道“向上”的动量是 Ze^2/bv ，“横向”动量是 mv ，而向上动量对“横向”动量的比就是偏转角的正切——或者，因为偏转角是如此小，事实上就是角度本身（见图3-7）。

$$\theta \approx \frac{Ze^2}{bv} \bigg/ mv = \frac{Ze^2}{bmv^2}. \quad (3.13)$$

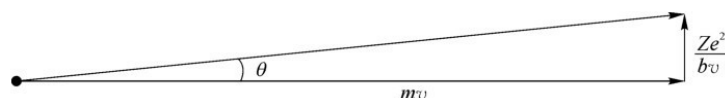


图3-7 质子动量的水平分量与垂直分量决定了偏转角

（3.13）式表明偏转角如何依赖于速度、质量、电荷及所谓的“碰撞参量”——距离 b 。当你通过积分来实际计算 θ ，而不只是估计，就会发现确实少了一个数值因子，这个因子精确地为2。我不知道你们求积分是否达到这样的水平：如果你们不会计算，不要紧；因为它不是最重要的，正确的角度为

$$\theta = \frac{2Ze^2}{bmv^2}. \quad (3.14)$$

〔实际上，你们能够对任何双曲线轨道精确地求出这个公式，但不必介意：你们能够懂得关于这种小角度情况的各个方面。当然，当角度

达到 30° 或 50° 时，（3.14）式就不正确了，那是由于我们所作的近似太粗糙了。]

现在介绍一个在物理学史上非常有意义的实验——它就是卢瑟福发现原子有原子核的方法。他有一个很简单的想法：通过安排一种装置，其中从放射性源出射的 α 粒子通过一条狭缝——因而他知道 α 粒子在确定方向上行进——并使它们撞击到硫化锌屏上，他就能在狭缝正后方看到许多闪烁的亮点，但若在狭缝和屏之间插入一片金箔，那么闪烁的亮点有时就会出现在别的地方（见图3-8）。

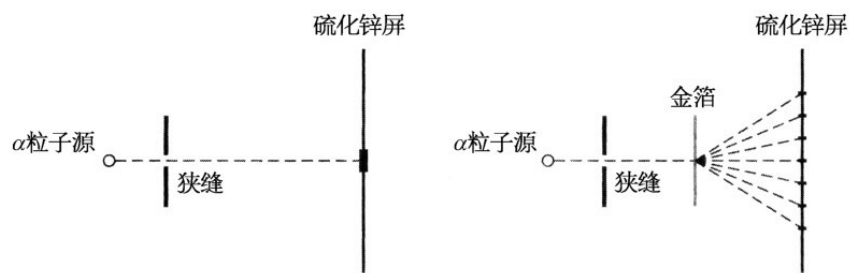


图3-8 卢瑟福 α 粒子的偏转实验，导致了原子核的发现

显然，其原理是 α 粒子经过金箔中很小的原子核旁边时被偏转了。通过测量偏转角并反过来应用（3.14）式，卢瑟福就可以得到距离 b ，即产生非常大的偏转的距离。极其令人诧异的是这些距离比一个原子小了许多许多。在卢瑟福做实验之前，人们相信原子的正电荷并非集中在中央一点，而是均匀地分布在原子中。在这种情况下， α 粒子完全不可能受到造成所观察到的偏转所需的足够大的力的作用。因为假如它在原子的外面，它就不会和电荷如此靠近；而要是在原子内部，那么在它上面和下面都会有同样多的电荷，因而不会产生足够的力。大的偏转角显示原子内部有强大电力源。于是猜想到必定存在一个带有全部正电荷的中心点。通过观察最远的偏转，以及它们产生的次数，人们就能够得到 b 可能是多小的估计，并最后得到原子核的

大小——发现原子核的尺度比原子的尺度小 10^{-5} 倍！这就是发现原子核存在的历程。

3-3 基本火箭方程

现在我要谈的下一个问题完全不同：它与火箭的推进有关。我们先让火箭漂浮在空间——完全不考虑引力及其他影响。火箭装有大量燃料；它装备了某种类型的发动机，发动机向后喷出燃料——从火箭的观点而言，它总是以相同的速率向后喷射燃料。它不会一会儿打开一会儿关闭。我们开动它以后，它就不断向后喷出物质直到用完为止。我们将假设物质以喷出率 μ （每秒喷出的质量）喷出，喷出时的速度为 u （见图3-9）。

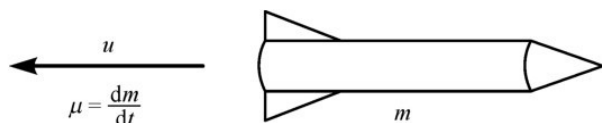


图3-9 火箭质量为 m ，燃料喷出率为 $\mu = dm/dt$ ，燃料喷出速度为 u

你们或许会说：“这些不都是同样的东西吗？你知道质量/每秒，那不就是速度吗？”

不。我可以准备大量材料而每次均匀地把它排放出去，就可以做到每秒钟抛出一定数量的物质，或者我可以取同样质量的物体，每次抛出一个。所以你们看到它们是两个不同的概念。

现在的问题是，过了一段时间后火箭将达到多大的速度？例如假定它消耗完了它重量的百分之九十的燃料：这就是说，当它最后用完

全部燃料时，它留下的外壳质量是它出发前荷载的全部质量的十分之一，试问火箭获得多大的速度？

任何思维正常的人会说，火箭获得比速度 u 更快的任何速度是不可能的。你们立刻就会明白，这种说法是不正确的。或许你们会说，那完全是显而易见的啊；很好，完全正确，但实际上它之所以正确是由于下面的原因。

让我们考察任意时刻的火箭，它可以以任意速率运动。如果我们跟随着火箭一同运动，并观察一段时间 Δt ，我们看到什么呢？嗯，有一定质量 Δm 的物质离开——它等于火箭的喷出率 μ 乘时间 Δt ，这些质量离开的速度为 u （见图3-10）。

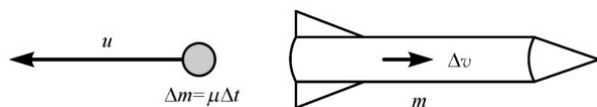


图3-10 通过喷射出速度为 u 的质量 Δm ，火箭在 Δt 的时间间隔内增加了速度 Δv

现在，这些质量向后抛出后，火箭向前运动增加多少呢？在它向前运动的速率必须满足总动量守恒。也就是说，它将以这样的方式获得一点速率 Δv ，即如果火箭的壳体和剩余燃料在这瞬时的质量为 m ，那么 m 乘 Δv 就应与这段时间向外抛射的动量，即 Δm 乘 u ，相等。这就是火箭理论的全部内容；基本火箭方程是：

$$m \Delta v = u \Delta m . \quad (3.15)$$

我们可以用 $\mu \Delta t$ 代替 Δm ，稍加推演，就可求出火箭达到给定速度要花多长时间^[4]，但我们的问题是求出最后速度，而我们可以直接从（3.15）式来求：

$$\frac{\Delta v}{\Delta m} = \frac{u}{m},$$

$$dv = u \frac{dm}{m}. \quad (3.16)$$

为了求出火箭从静止出发，最后达到的速度，你们对 u (dm/m) 从初始质量到最后质量求积分。现在 u 假定为常数，所以可把它提到积分号外，因而我们得

$$v = u \int_{m_{\text{初}}}^{m_{\text{末}}} \frac{dm}{m}. \quad (3.17)$$

dm/m 的积分，你们也许知道，也许不知道。让我们假定你们不知道。你们说，“ $1/m$ 是一个如此简单的函数，所以我一定要知道它的微商：我会不停地尝试直到求出它为止。”

但是你们发现找不到任何简单函数——用 m 表示的、用 m 的乘方以及这一类的函数，你们对这些函数进行微商时会给出 $1/m$ 。所以不知道用哪种方法时，我们要用另外的方法去做。这里我们要用数值积分来求它。

记住：每当你被数学分析难住时，你总能够用算术的方法来做。

3-4 数值积分

让我们假定初始质量为10，并取简单近似，即每一次丢掉一个单位质量。进一步按以 u 为单位测量所有的速度。因为这样我们就简单地得到 $\Delta v = \Delta m / m$ 。

我们想要求得累积的总速度。那好，让我们看看，在第一次抛弃一个单位的质量后获得了多少速率？这很容易，它是

$$\Delta v = \frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{10}.$$

但这不完全对，因为在你们吐出一个单位质量的时候，反作用的质量不是10；当你们把一个单位质量全部喷出后，它只剩9。你们看， Δm 被射出去后，火箭的质量只有 $m - \Delta m$ ，所以最好把上式写成

$$\Delta v = \frac{\Delta m}{m - \Delta m} = \frac{1}{9}.$$

但这还是不完全正确。如果火箭真的是一团一团地抛出物质，上式就是对的，但它不是——它是连续地抛出物质。在一开始，火箭的质量是10，在放出一个单位质量的末尾，它的质量仅为9——所以平均起来，它大致上是9.5。在第一个单位质量抛出的时间内，我们说质量 $m = 9.5$ 是反抗 $\Delta m = 1$ 的有效平均惯性质量，所以火箭得到一个等于 $\frac{1}{9.5}$ 的反冲 Δv ：

$$\Delta v \approx \frac{\Delta m}{m - \Delta m/2} = \frac{1}{9.5}.$$

把这些有一半的数值放进去是有好处的，因为你们只需较少步骤就得到高的精度。当然它仍然不是精确的。如果我们想做得更仔细一些，可以用一团较小的物质，像 $\Delta m = \frac{1}{10}$ ，并作更多的分解。但是我们这里做得粗糙一些，用 $\Delta m = 1$ ，再继续做下去。

现在火箭的质量只有9，从火箭后部抛出另一个单位质量，我们求得下一个 Δv 为...1/9吗？不！...1/8？不！它应该是 $\Delta v = 1/8.5$ ，因为质量从9到8一直是连续变化的，所以它平均大约是8.5。对于下一个单位质量，我们得 $\Delta v = 1/7.5$ 。从而我们发现答案是1/9.5、1/8.5、1/7.5、1/6.5。嗒、嗒、嗒...——直到末尾。最后一步，从2个单位质量降到1个单位，平均质量为1.5，最后剩下一个单位质量。

最后，我们计算所有这些比率，（只要一会儿，这些数值都是简单的数，不难把它们计算出来。）只要把它们都加起来就得到答案2.268。它表示火箭获得的最后速度比燃料的排出速度 u 快2.268倍。那就是这个问题的答案——仅此而已！

1/9.5	0.106		
1/8.5	0.118		
1/7.5	0.133		
1/6.5	0.154		
1/5.5	0.182		
1/4.5	0.222	$v \approx 2.268u.$	(3.18)
1/3.5	0.286		
1/2.5	0.400		
1/1.5	<u>0.667</u>		
	2.268		

现在你们或许会讲，“我不喜欢这里的精度——这结果有点草率。下面的讲法就非常好，‘在第一步中，质量从10变到9，所以它大约是

9.5。’但在最后一步，它从2变到1，而你把整个过程取平均值1.5。把最后一步分得更细，每一次抛出半个质量单位，因此得到稍微好一点的精度。这样做不是更好吗”？（这是计算方法上的技术问题。）

让我们看看，第一次半个单位的质量抛出去的时候，火箭质量从2降到1.5，平均为1.75，所以我们对公式 $\frac{\Delta m}{m}$ 取 $\frac{1}{1.75}$ 乘以半个单位。然后我对第二个半个单位用同样的方法，质量从1.5降到1，平均值为1.25：

$$\Delta v \approx \frac{0.5}{(2+1.5)/2} + \frac{0.5}{(1.5+1)/2} = \frac{0.5}{1.75} + \frac{0.5}{1.25} = 0.686.$$

所以你们能够在最后一步做一些改进——你们也可以用同样的方法改进其余全部系数，如果你们不怕麻烦—— Δv 用0.686代替0.667，这意味着我们前面的答案稍为低了点。你们算出好一些的结果， $v \approx 2.287u$ 。最后所得的数字实际上也不可靠，但我们的估算是很接近了，精确的答案是离2.3不远。

现在我必须告诉你们，由于积分 $\int_1^x dm/m$ 是一个如此简单的函数，它在许多问题中出现，所以人们已经把它制成了一个表，并给它取了个名字：称为自然对数， $\ln(x)$ 。如果你们恰巧在一个自然对数表中看到 $\ln(10)$ ，你们会发现它实际上是2.302585：

$$v = u \int_1^{10} \frac{dm}{m} = \ln(10)u = 2.302\,585u. \quad (3.19)$$

你可以用我们使用的相同技巧获得许多精确的数字，这种技巧提供你们用更精细得多的间隔像 $\Delta m = \frac{1}{1\,000}$ 等来代替1——而这正是已经做过的事情。

不管怎样，我们很快就做得非常好了，无须知道什么，也不需要查表。所以我反复强调，在紧急情况下，你们总能够用算术的方法做计算。

3-5 化学火箭

现在，火箭推进的问题是很有趣的。首先，你们会注意到，火箭最终达到的速率正比于排出气体的速率 u 。因此所有的努力都用在尽可能快地排出气体。如果你们使过氧化氢和这种及那种燃料燃烧，或者使氧和氢或某些东西燃烧，那么你们就得到每克燃料产生的一定量的化学能。要是你们能正确地设计喷嘴和各种部件，那么你们就能获得化学能转变成喷出速度的高百分比，自然，你们不可能获得高于百分之百的比例。所以对给定的燃料，和对给定质量比的最理想的设计，存在着能达到的速率的上限。这也是因为从给定的化学反应可能获得的 u 值有一个上限。

考虑两个反应 a 和 b ，在这两个反应中每个原子释放出的能量相同，但原子的质量不同，分别为 m_a 和 m_b 。如果 u_a 和 u_b 是喷出速度，我们就有：

$$\frac{m_a u_a^2}{2} = \frac{m_b u_b^2}{2}. \quad (3.20)$$

因此在较轻原子的反应中，原子具有较高的速度，因为 $m_a < m_b$ ，（3.20）式表示 $u_a > u_b$ 。这也说明为什么大多数火箭所用燃料都是轻物质，工程师们都希望使氦和氢进行燃烧，不幸，那种混合物不能燃烧，所以他们权且把氢和氧之类凑合着用。

3-6 离子推进火箭

代替使用化学反应的另一个计划是制造一种装置，你们可以用它使原子离子化，并用电场来加速它们，这样你们就能得到极高的速度，因为你们可以把离子加速到你们想要的速度。所以这里我给你们提出另一个问题。

假定我们有一台所谓的离子推进火箭，我们使静电加速器加速的铯离子向后喷射。离子从火箭的前部出发，在前后两端之间加上电压 V_0 ——在我们的具体问题中，它并非不合理的电压——我采用 $V_0 = 200\,000$ 伏。

现在的问题是：这会产生多大的推力？它是一个与以前不同的问题。前面的问题是求火箭会跑得多快。这次我们希望知道，如果使火箭保持在测试台上，它产生多大的推力（见图3-11）。

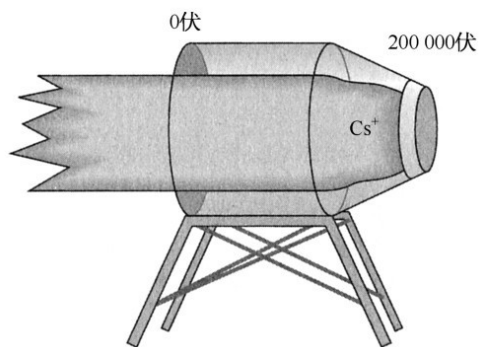


图3-11 在测试台上的离子推进火箭

它的工作原理是：假定在时间 Δt 内火箭以速度 u 喷出质量 $\Delta m = \mu \Delta t$ 。于是喷出的动量为 $(\mu \Delta t) u$ ；由于作用等于反作用，所以火箭也获得这么多的动量。在以前的问题中，火箭处于太空中，所以它就飞出去。这一次，它被测试台固定着，依靠离子每秒获得的动量就是固定火箭所必须施加的力。由离子获得的每秒的总动量为 $(\mu \Delta t) u / \Delta t$ 。所以火箭的推力就是 μu ，即每秒释放的质量乘以质量射出的速度。因此只要计算出每秒发射出多少质量的铯离子以及它的速度就行了：

$$\begin{aligned} \text{推力} &= \frac{\Delta(\text{射出的动量})}{\Delta t} \\ &= (\mu \Delta t) u / \Delta t \\ &= \mu u. \end{aligned} \quad (3.21)$$

我们先算出离子的速度，做法如下：铯离子从火箭射出时的动能等于它的电荷乘以加速器电极之间的电压。问题在于电压是什么：它类似于势能，就像场和力——你只要用电荷去乘就得到势能差。

铯离子是单价离子——它带有一个电子的电量——所以

$$\begin{aligned} \frac{m c_s^+ u^2}{2} &= q_{\text{el}} V_0, \\ u &= \sqrt{2V_0 \frac{q_{\text{el}}}{m c_s^+}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

现在让我们算出 $q_{\text{el}}/m c_s^+$ 这个值。每摩尔^[5]电荷是一个著名的常数，它为96 500库仑/摩尔。每摩尔质量称为原子量。如果你们查一下

周期表，每摩尔铯的质量为0.133千克。

你们说，“这些摩尔是怎么回事？我想去掉它们！”

它们已经被去掉了：我们需要的只是电荷和质量的比值。我可以以一个原子为单位或以一摩尔原子为单位进行计量，而比值是相同的。所以我们得到向外喷射的速率

$$u = \sqrt{2V_0 \frac{q_{\text{el}}}{m c_s^+}} = \sqrt{400\,000 \cdot \frac{96\,500}{0.133}} \\ \approx 5.387 \times 10^5 \text{ (m/s)}. \quad (3.23)$$

顺便说说， $5 \times 10^5 \text{ m/s}$ 比我们迄今用化学反应的方法获得的速度要快得多。化学反应对应于1伏特量级的电压，所以离子推进火箭提供的能量比化学火箭的能量高200 000倍。

现在，好极了，但是我们不仅要速度，还要推力，所以我们必须用每秒质量 μ 乘速度。我想要用火箭喷射的电流来表示答案——当然，这是因为电流与每秒喷射的质量成正比。所以我要求出1安培电流能产生多少推力。

假定1安培电流正在流出：相当于多少质量？1安培是每秒1库仑，或每秒1/96 500摩尔。因为这是一个摩尔有多少库仑，但1摩尔铯原子的质量是0.133 kg，所以火箭每秒射出的质量是0.133/96 500 kg，这也是质量流的比率：

$$1 \text{ 安培} = 1 \text{ 库仑 / 秒} \longrightarrow \frac{1}{96\,500} \text{ 摩尔 / 秒},$$

$$\begin{aligned}\mu &= \left(\frac{1}{96\,500} \text{ 摩尔 / 秒} \right) \cdot (0.133 \text{ 千克 / 摩尔}) \\ &= 1.378 \times 10^{-6} \text{ 千克 / 秒}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

我将 μ 乘以速率 u ，就求得每1安培产生的推力，结果为

$$\begin{aligned}\text{推力/安培} &= \mu u = (1.378 \times 10^{-6}) \cdot (5.387 \times 10^5) \\ &\approx 0.74 \text{ (牛顿/安培)}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

所以我们得到小于 $\frac{3}{4}$ 牛顿/安培的推力——这是一个很小的力，很糟糕，很小。要达到1安培并不是一件很难的事，但要达到100安培或1 000安培却是件很费劲的事情，而它仍几乎没有产生什么推力，也难以获得适当数量的离子。

现在让我们计算消耗多少能量。当电流为1安培时，每秒1库仑的电量通过200 000伏的电势差。为了获得以焦耳为单位的能量，我将电量乘以电压，因为伏特不是别的而是单位电量的能量（焦耳/库仑）。因此消耗掉 $1 \times 200\,000$ 焦耳/秒，相当于200 000瓦：

$$1 \text{ 库仑/秒} \times 200\,000 \text{ 伏} = 200\,000 \text{ 瓦}.\tag{3.26}$$

我们从200 000瓦中只得到了0.74牛顿的推力，从能量的观点来看，这完全是一个没有用的机器，推力对功率的比仅为 3.7×10^{-6} 牛顿/瓦——它是非常非常微小的值：

$$\text{推力} / \text{功率} \approx \frac{0.74}{200\,000} = 3.7 \times 10^{-6} (\text{牛顿} / \text{瓦}). \quad (3.27)$$

所以，虽然离子火箭是一个很美妙的想法，但是为了把这个东西送到任何地方，都要用去极其多的能量！

3-7 光子推进火箭

根据排出物体越快就越好的原则，人们又提出了另一种火箭，因此人们就问为什么不喷射光子呢——它们可是地球上跑得最快的东西啊——向后发射光！你在火箭尾部发射一个闪光，你就得到一个推力！然而，你们可能会想到虽然发射出非常多的光，但并没有获得多大的推力。你们从经验知道，每当你开启一次闪光，你并没有发现自己有摔倒的感觉，即使你打开100瓦的灯泡，并且放上一个聚焦器，你什么也不会感觉到！所以想要获得每瓦很大推力是靠不住的。尽管如此，还是让我试试算出光子火箭的推力与功率的比值。

向后发射的每个光子都带有一定的动量 p 以及一定的能量 E ，对光子来说，两者的关系为能量等于动量乘以光速：

$$E = pc. \quad (3.28)$$

所以对一个光子而言，单位能量的动量等于 $1/c$ 。这就意味着不论我们用了多少光子，我们每秒发射出去的动量与每秒发射出去的能量之比是确定的——这个比率是唯一并确定的：它是1除以光的速率。

但是每秒发射的动量，就是把火箭维持在固定位置所必需的力，而每秒发射出的能量就是产生光子的发动机的功率，所以推力和功率

的比率也是 $1/c$ （ c 为 3×10^8 ），或 3.3×10^{-9} 牛顿/瓦。它比铯离子加速器还差一千倍，比化学发动机差100万倍。这些都是火箭设计中的几个要害问题。

我明确告诉你们，所有这些相当复杂的半新的事物，都是为了便于你们能意识到你们已经学到了一些东西，而且你们现在已经能够懂得世界上正在发生的很多事情。

3-8 静电质子束致偏器

现在，为了给你们示范怎样做研究，我准备了下面的问题，其内容如下：在Kellogg实验室[\[6\]](#)里有一台范德格拉夫起电机，它能产生200万伏的质子。电势差是用静电学的运动皮带方法产生的。质子通过这个势场下落，获得了很大的能量，以束流的形式射出。

假定由于某些实验方面的要求，我们想要质子在另一个角度上射出来，所以我们需要把它偏转。现在最实用的方法是用磁铁来使它偏转。不过我们也可以设计出用电的方法做到这一点——他们已经研究出了这种方法——那就是我们要讲的事情。

我们采用一对弯曲的电极，与它们的曲率半径相比，这对电极靠得很近——比如说它们大约相距 $d = 1 \text{ cm}$ ，由绝缘体隔开。电极被弯曲成圆形，在两者之间加上由电源提供的尽可能高的电压，所以在两电极之间就产生了电场，它使质子束沿着圆周径向偏转（见图3-12）。

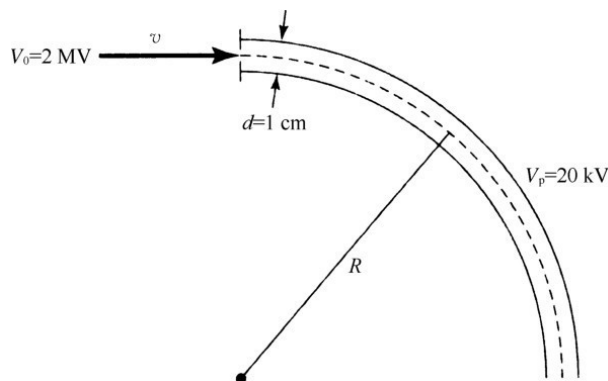


图3-12 静电质子束致偏器

实际上，如果你们在1厘米真空间隙两边加上远大于20千伏的电压，设备就有被击穿的危险——如有一点漏电，进了灰尘，就很难使它不放电——所以我们在两板间加了20千伏电压。（但是，我不准备用数值来讨论这个问题；我只是用数字来说明一下，所以下面我说板极间电压为 V_p 。）现在，我们想知道：我们必须把电极弯曲成多大的曲率半径才能使2 MeV的质子在它们之间偏转？

这只取决于向心力。设 m 是质子的质量，那么（2.17）式告诉我们， mv^2/R 等于将质子拉向中心所需要的力。而将它拉向中心的力是质子的电荷引起的——又是我们熟悉的 q_{el} ——乘两板之间的电场：

$$q_{el}\epsilon = \frac{mv^2}{R}. \quad (3.29)$$

这个方程就是牛顿定律：力等于质量乘加速度。不过为了利用这个公式，你们必须知道质子离开范德格拉夫起电机时的速度。

现在，有关质子速度的信息，可从它们在势场中降落200万伏——我们称为 V_0 ——将具有多大势能而获得。能量守恒定律告诉我们，质

子的动能 $mv^2/2$ 等于质子的电量乘上它下落时通过的电压。从这些分析我们可以直接计算 v^2 ：

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{2} &= q_{\text{el}}V_0, \\ v^2 &= \frac{2q_{\text{el}}}{m}V_0.\end{aligned}\tag{3.30}$$

把（3.30）式中的 v^2 代入（3.29）式得：

$$\begin{aligned}q_{\text{el}}\epsilon &= m \frac{\left(\frac{2q_{\text{el}} \cdot V_0}{m}\right)}{R} = \frac{2q_{\text{el}}V_0}{R}, \\ R &= \frac{2V_0}{\epsilon}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

所以如果我知道两板之间的电场，就很容易求出半径——因为电场、加速质子的电压和电极曲率之间存在这样一个简单关系。

电场是什么？如果电极不是被弯曲得太厉害，那么电场在两板之间各处近似相等。当我把一电压加在板上，在一个板上的电荷与在另一个板的电荷之间有一个能量差。单位电荷的能量差就是电压——这就是电压的意义。现在，如果我把一个电荷 q 从一个板穿过匀强电场 ϵ 带到另一个板，则作用在电荷上的力为 $q\epsilon$ ，而能量差是 $q\epsilon d$ ，这里 d 是两板之间的距离。力乘以距离，得到能量——或场乘以距离，我就得到势。所以加在两板上的电压为 ϵd ：

$$V_p = \frac{\text{能量差}}{\text{电量}} = \frac{q\epsilon d}{q} = \epsilon d,$$

$$\epsilon = V_p/d. \quad (3.32)$$

因此我把（3.32）式中的 ϵ 代入（3.31）式，经过推导，我就得到半径的公式—— $2V_0/V_p$ 乘两板间的距离：

$$R = \frac{2V_0}{(V_p/d)} = 2 \frac{V_0}{V_p} d. \quad (3.33)$$

在我们的具体问题中， V_0 与 V_p 的比——200万伏比2万伏——为100比1，而 $d=1$ 厘米，所以曲率半径应是200厘米或2米。

在这里已经做的假定是两板之间的电场是均匀的。如果电场不均匀，那么我们的致偏器还好到什么程度？还是非常好，因为有2米的半径，所以两个板几乎是平的，所以其中的电场强度近似为常数，而要是使质子束正好在两板的中间，那就很好。但即使我们做不到，它仍然是非常好，因为如果电场在一侧过分强，那它会在另一侧过分弱，这两件事将近似地得到补偿。换句话说，利用靠近中间的场，我们可以作一个很好的估计：即使它并不完美，在这样的尺度上还是很接近的；当 $R/d=200:1$ ，它几乎是精确的。

3-9 测定 π 介子的质量

时间不多了，但我要求你们再多待一分钟，这样我就能够再给你们讲一个问题：就是历史上测定 π 介子质量的方法。实际上， π 介子最初是在照相底片上发现的，在该底片上还有 μ 介子（ μ 子）的径迹^[7]

：某个未知的粒子进入并停留下来，而它停留的地方又出现一个离开的细小径迹，由该小径迹的性质发现就是 μ 介子。（ μ 介子以前就已经知道，但 π 介子正是从这些照片中被发现的。）人们假定中微子（ ν ）以相反的方向离开，（因为它是中性的，所以不留痕迹。）如图3-13所示。

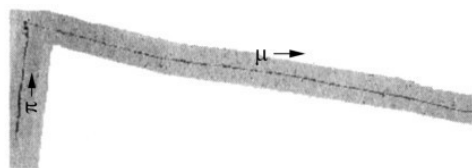


图3-13 π 介子蜕变为一个 μ 子和一个看不见的（电中性）的粒子的径迹

μ 子的静止能量已知为105 MeV，从它的径迹的性质求得它的动能为4.5 MeV。我们如何从所做的这些假定求出 π 介子的质量（见图3-14）？

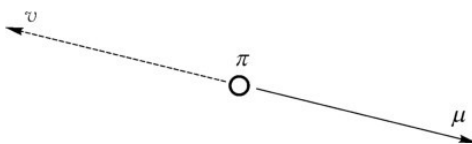


图3-14 处于静止状态的 π 介子蜕变成 μ 子和中微子，它们具有相等而相反的动量。 μ 子和中微子的总能量等于 π 介子的静能

让我们假设 π 介子处于静止状态，它蜕变成一个 μ 子和一个中微子。我们已知 μ 子的静止能量和它的动能，因此就知道 μ 子的总能量。但是也需要知道中微子的能量，因为根据相对论， π 介子的质量乘 c 的平方就是它的能量，这能量全部变成了 μ 子和中微子的能量。你们看， π 介子消失了，而 μ 子和中微子留下了，根据能量守恒， π 介子的能量必定等于 μ 子的能量加上中微子的能量：

$$E_{\pi} = E_{\mu} + E_{\nu} . \quad (3.34)$$

所以我们需要计算 μ 子和中微子二者的能量。 μ 子的能量容易得到，实际上它已经给出的：为4.5 MeV的动能，加上它的静能——所以你们获得 $E_\mu = 109.5 \text{ MeV}$ 。

现在中微子的能量是多少？这是一个难题。但由动量守恒，我们就可以知道中微子的 $\underline{\text{动量}}$ ，因为它与 μ 子的动量严格相等而方向相反——这是问题的关键所在。你们看，在这里我又把问题反过来了：如果我们已知中微子的动量，那么我们大概就能够计算出它的能量。我们来试试。

我们从公式 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ 计算 μ 子的动量，选用 $c = 1$ 的单位系统，所以 $E^2 = m^2 + p^2$ ，于是我们得到 μ 子的动量

$$p_\mu = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = \sqrt{(109.5)^2 - (105)^2} \approx 31 \text{ (MeV)}. \quad (3.35)$$

而中微子的动量与它的动量相等而方向相反，所以不必为符号操心，只需考虑数值——中微子的动量也是31 MeV。

中微子的能量约为多少呢？

因为中微子的静止质量为零，所以它的能量就等于动量乘 c 。我们曾谈论过“光子火箭”。在这一问题中，我们令 $c = 1$ ，所以中微子的能量与它的动量数值相同，为31 MeV。

很好，我们已经全部完成了： μ 子的能量为109.5 MeV，中微子的能量为31 MeV，所以在该反应中释放出来的总能量为140.5 MeV——全部由 π 介子的静止质量提供：

$$m_{\pi} = E_{\mu} + E_{\nu} \approx 109.5 + 31 = 140.5 \text{ (MeV)}. \quad (3.36)$$

而这就是最初测定 π 介子质量的方法。

我要讲的就是这些。谢谢你们。

下学期再见。祝好运！

[1] 巴西的葡萄牙语的“不幸”。

[2] 参见《费曼物理学讲义》第1卷9-7节。

[3] 这种历史上的习惯已在《费曼物理学讲义》第1卷32-2节作过介绍。今天，字母 e 在本文中特地保留表示电子的电量。

[4] 如果火箭在 $t=0$ 时出发，质量 $m=m_0$ ， $\mu=dm/dt$ 是常数，于是 $m=m_0-\mu t$ ，(3.16)式变为 $dv = u \mu dt / (m_0 - \mu t)$ 。积分得 $v = u \ln [1 - (\mu t / m_0)]$ 。解出 t 就是达到速率 v 所需的时间： $t(v) = (m_0 / \mu) (1 - e^{v/u})$ 。

[5] 1摩尔原子数等于 6.02×10^{23} 个原子。

[6] 在加州理工学院的Kollong辐射实验室进行核物理、粒子物理及天体物理方面的实验。

[7] “ μ 介子”是已废弃的 μ 子的名称，它是一个基本粒子，与电子带有相同的电荷，但其质量接近电子质量的209倍（实际上就“介子”一词的现在意义上来讲，它根本不是介子）。

4 动力学效应及其应用

我一定要声明，我今天的课和其他课不同，今天我要讲这许多东西只是为了你们自己的娱乐和兴趣，如果你们觉得有些东西因为太复杂而不能理解，你们可以把它忘掉；这些绝对是不重要的。

当然，我们学习的每一个主题是要学得越来越深入——肯定比初学入门的水平要深入得多——我们几乎可以永远不停地研究转动动力学的问题，但这样我们就没有时间学习更多物理学的其他内容了。所以我们只在这一讲里讲这个主题。

不过，或许某一天你们会回来研究转动动力学，以你们自己的方式，无论是作为机械工程师，或者是作为自旋的星体所困扰的天文学家，或者在量子力学中（在量子力学中你们会遇到转动）——如果它又回到你面前，这该由你自己负责解决了。但这是第一次我们留下一个没有结束的主题；我们有许多断断续续的思想或思路，这些都已经过时或者没有继承下去，我要告诉你们它们去了哪里，这样你们会更好地了解你们知道的内容。

特别是，到现在为止的大多数讲课在很大程度上都是理论的——充满了方程式等——你们中许多对实用工程学有兴趣的人可能渴望看到一些在利用某些效应方面所表现出来的“人的聪明”。如果是这样的话，我们今天的主题想来会使你们高兴，因为在机械工程学中没有比最近几年中惯性导航的实际发展更精巧了。

这在鹦鹉螺号核潜艇在北极冰帽下的航行戏剧性地得到说明：观察不到天上的星；实际上也没有冰帽下面海底地图；在潜艇里面没有办法看到你在什么地方——然而他们在任何时刻都准确知道他们在哪里^[1]。没有惯性导航的发展这次航行就不可能，今天我要告诉你们它是怎样工作的。但在我讲到它以前，我最好先讲一些老式的、不很灵敏的器件，这是为了让你们更完全地理解它的原理以及后来的更加精细和奇迹般的发展中的问题。

4-1 演示陀螺仪

可能你们还没有看见过这种东西，图4-1出示一个常平架上的演示陀螺仪。

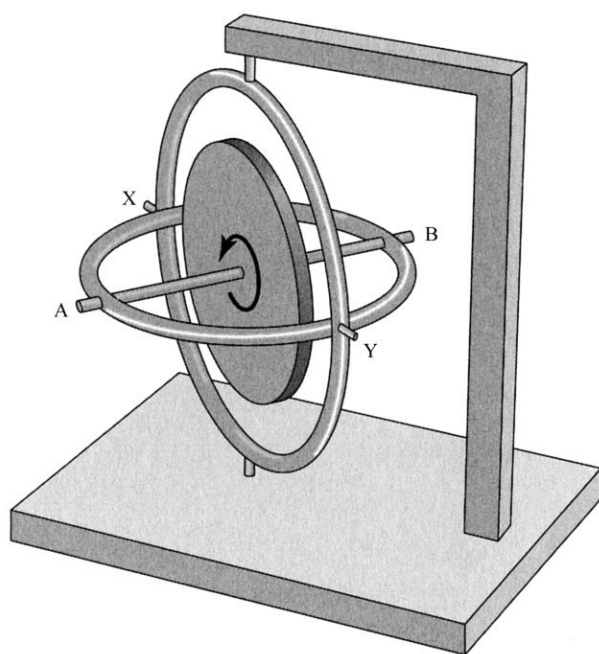


图4-1 演示陀螺仪

轮子一旦转动起来，无论它被举起或沿任意方向运动，它始终保持不变的方向——陀螺保持它的自旋轴 AB 空间指向不变。在实际应用中，陀螺必须保持不停地自转，用一个小马达来补偿陀螺仪轴上的摩擦。

如果你试着在 A 点向下推，要想改变 AB 轴的方向（陀螺产生一个沿 XY 轴的转矩）， A 点并不向下运动而实际上向旁边运动，在图4-1中向着 Y 。绕任何轴对陀螺施加转矩（除自旋轴之外）会使陀螺绕垂直于所加转矩和陀螺自旋轴的轴线转动。

4-2 定向陀螺仪

我从陀螺仪可能的最简单应用开始：假定在一架从一个方向转向另一方向的飞机里，陀螺的旋转轴——譬如水平放置——始终指着同一方向。这非常有用：当飞机作各种不同的运动时，可以保持同一个方向——这称为定向陀螺（见图4-2）。

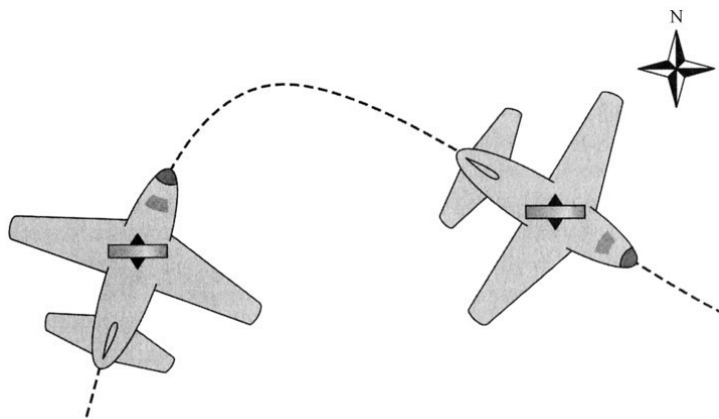


图4-2 在转弯的飞机中的定向陀螺保持它的方向不变

你们会说：“这像指南针（磁罗盘）。”

它不像指南针，因为它并不指向北极。它一般像这个样子：飞机停在地上的时候，你给磁罗盘定标，并利用它将陀螺的轴安置为指向某个方向，譬如说指向北。然后在你飞来飞去的时候，陀螺仪始终保持它的方向，你总是可以利用它找到北方。

“为什么不用磁罗盘呢？”

在飞机里面很难使用磁罗盘，因为磁针在运动时要摇晃和倾斜，并且飞机里有铁和其他磁场源。

另一方面，当飞机平稳地沿直线飞行一段时间，你会发现陀螺仪不再指向北，这是由于常平架的摩擦力。飞机一直在慢慢地转向，总有些摩擦力会产生微小的转矩，陀螺产生进动，它不再准确地指向同一方向。所以，飞行员需要时不时地按照指南针校正他的陀螺仪的方向——每一个小时或更多的时间，取决于减少摩擦效果做得有多完美。

4-3 人工地平仪

这同样的系统可用作人工地平仪，用来确定“上方”的器件。当你在地面上的时候，你将陀螺仪的轴垂直安放。然后你飞到空中，飞机纵向和横向摇晃；陀螺仪始终保持垂直方向，但它也需要时不时地进行校正。

我们相对于什么东西来核对人工地平仪呢？

我们可以根据重力来确定什么方向是上方，但就像你们都很清楚的，当你们沿曲线运动的时候表观重力就要偏离一个角度，这是不容

易核对的。但是长时间的平均，重力是在确定的方向上——除非飞机最终上下颠倒地结束飞行（见图4-3）。

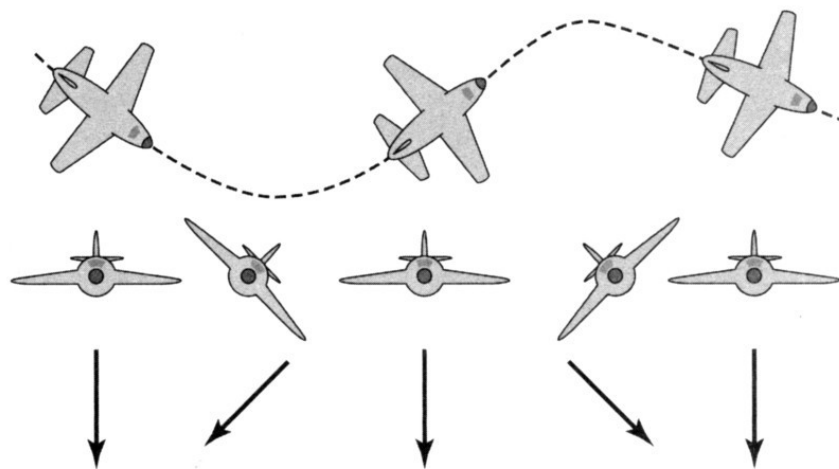


图4-3 飞机转弯时的表观重力

好了，现在考虑一下如果我们在图4-1所示的常平架上陀螺的A点施加一个重力，然后使陀螺绕它的垂直轴自转，A在下面。当飞机水平笔直飞行时，重力垂直向下作用，倾向于保持自转轴垂直。飞机转弯的时候，重力力图将转轴拉离它的垂直位置，但陀螺通过进动予以抗拒，转轴只是很慢地偏离垂直方向。终于飞机停止做特技动作，重力重又指向正下方。长时间来看，重力倾向于使陀螺转轴的方向沿着地球引力的方向，这很像将定向陀螺仪和磁罗盘相比较，除了大约每一个小时要做一次校正以外，在整个飞行过程中还要不断地校正，所以不管陀螺具有非常缓慢漂移的倾向，在长时间内它的方向始终维持地球引力的平均效应。很自然，陀螺漂移得慢，有效地取平均值的时间周期就更长，仪器就能更好地适用于更为复杂的飞行特技，飞机并非不常做使重力偏离达到半分钟的特技飞行的，如果平均周期只有半分钟，人工地平仪就不能发挥正确的作用。

我刚才描述的器件——人工地平仪和定向陀螺仪——是用于引导飞机自动驾驶仪的器械。从这种器件获得的信息用来操控飞机，使沿确定的方向飞行。例如，如果飞机偏离定向陀螺仪的轴线，电接触点的离合通过许多器件的作用，结果牵动飞机的一些襟翼，操控飞机回到航线上来。自动驾驶仪的心脏部分就是这种陀螺仪。

4-4 船舶稳定陀螺仪

另一陀螺仪有趣的应用是稳定船只，它今天不再使用但曾经被提议并且制造出来。当然，每个人都认为这只是一个固定在船里面装在轴上旋转的巨大飞轮，但这是不对的。假如你把自转轴垂直安放，有一个力将船的前部推向上，其净效应使陀螺向一边进动，船就要翻覆——所以这是不行的！只靠陀螺仪本身是不能使任何东西稳定的。

如果不只是说明惯性导航所依据的原理，该做些什么。诀窍在于：在船的某个地方装一台很小的但很精巧的主陀螺仪，它的轴可以垂直安放。当船滚动略微偏离垂直的瞬间，主陀螺仪的电接触器操控一台巨大的从动陀螺，这是用来稳定船舶用的——这可能是已经造成的最大的陀螺（见图4-4）！通常，从动陀螺的轴保持垂直，但它是装在常平架上的，所以它可以绕着船上下颠簸的轴旋转。如果船开始左右滚动^[2]，那么为了使它改正，从动陀螺就向前或向后急转，——你知道陀螺总是很顽固并向相反的方向走。绕颠簸的轴突然转动产生一个相对于滚动轴的转矩，它和船的滚动方向相反。船的颠簸不能用这种陀螺校正，当然大船的颠簸是比较小的。

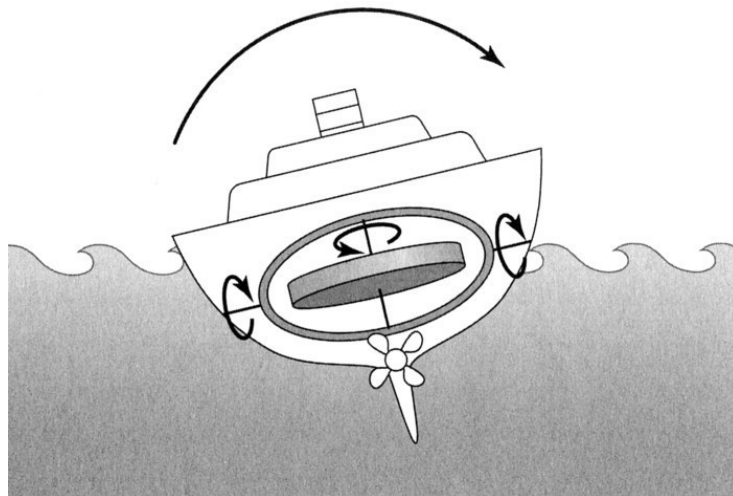


图4-4 船舶稳定陀螺仪：将陀螺向前推动，产生使船向左滚动的转矩

4-5 回旋罗盘

现在我要讲船上用的另一种装置——“回旋罗盘”。它与总是要偏离北极并且必须定期调整的定向罗盘不同，回旋罗盘实际上追踪北极——事实上它比磁罗盘更好，它指向真正的北极，地球自转轴意义上的北极。它的工作原理是这样：假设我们从北极上面看地球，地球反时针方向旋转，我们在某处安装一个陀螺仪，譬如在赤道，它的转轴指向东西方向，平行于赤道，如图4-5（a）所示。目前我们以理想的自由陀螺为例，它装在许多常平架和架子上。（可能放在浮在油里面的球体中——无论你要怎样都可以，只要使它没有摩擦。）六个小时以后，陀螺仪仍旧指向绝对相同的方向（因为没有摩擦力产生的转矩），但是如果我们站在赤道上站在它的旁边，我们会看到它慢慢地翻转：六个小时后它就直指向正上方，如图4-5（c）所示。

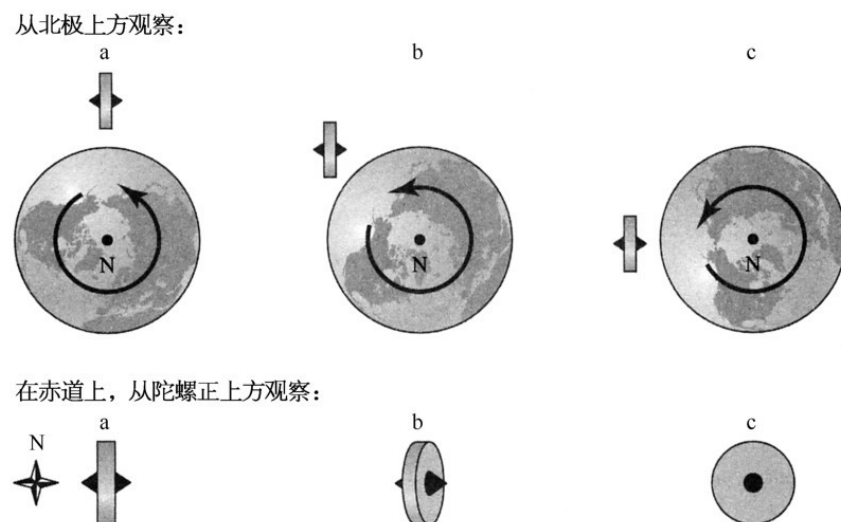


图4-5 自由转动的陀螺，地球保持它在空间的方向

现在我们把一个重物放在陀螺仪上，如图4-6所示，想象一下会发生什么状况；重量使陀螺的自转轴始终保持垂直于引力的方向。

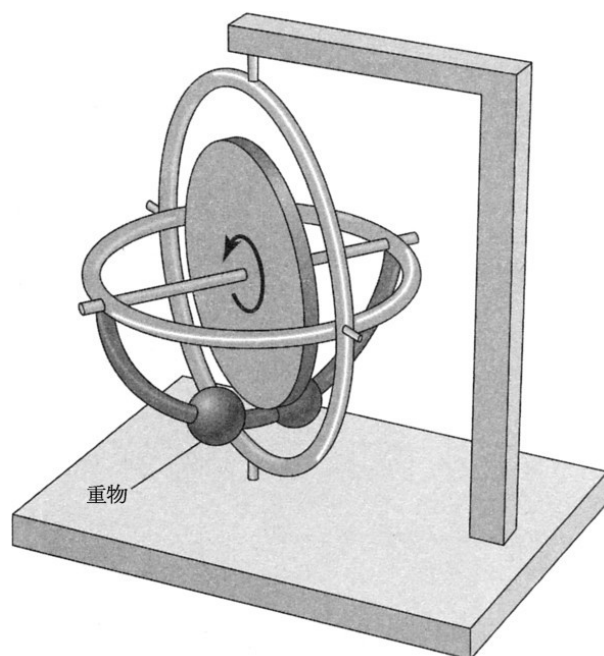


图4-6 演示带有重物的陀螺要保持它的自转轴垂直于引力

当地球自转时，重物被举起来。重物当然要返回到下面的位置，这就产生一个平行于地球转动轴的转矩，这使陀螺转到和每样东西都

成直角的方位；在这特殊的情况中，如果你把它算出来，这意味着不是将重物举起来而陀螺要转向，使轴转向北极，如图4-7所示。

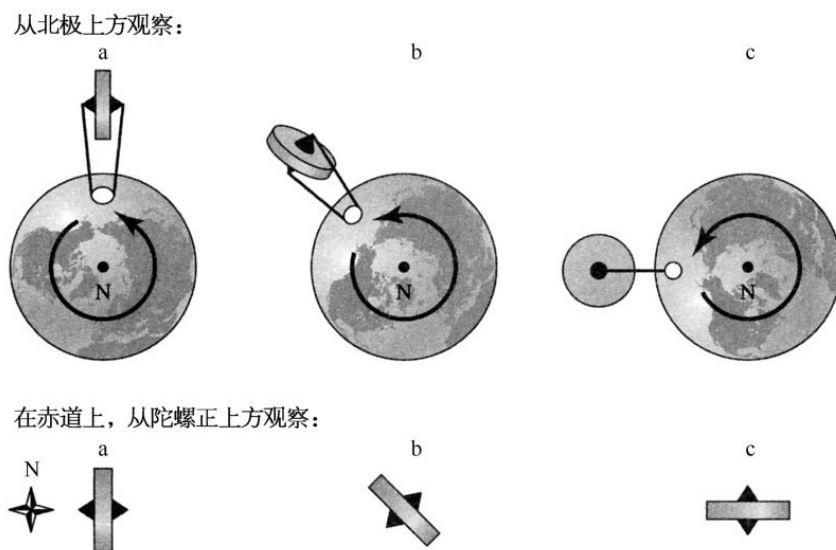


图4-7 带有重物的回旋螺盘会使它的转轴平行于地球的自转轴

现在假设陀螺的轴最终指向了北极，它一直保持这样状态吗？如果我们画出转轴指向北极的相同的图，如4-8图中所画的那样，在地球自转的时候，臂绕着陀螺的转轴摇摆并且重物一直在下面；没有因重物被提升产生的转矩，以后转轴仍旧指向北极。

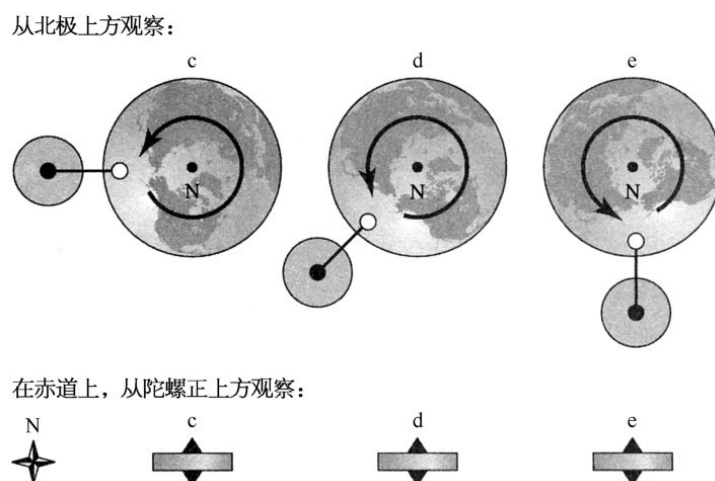


图4-8 自转轴平行于地球自转轴的回旋罗盘倾向于保持这个方向

所以，如果回旋罗盘的轴指向北极，没有理由说明它为什么不能保持这种方式，但如果它的轴随地球转动向东西方向稍微偏转一点，由于地球的自转，重物的重力就会将轴转向北极。由此可知，这是指北的器件。（实际上，如果我仅仅用这种方式建造器件，它会朝北极转动并越过北极的位置，转到另一边，然后回来，并来回摆动——所以要加进一些阻尼。）

我们已经制造了一个模拟回旋罗盘的机件，这在图4-9中可以看到。遗憾的是这台陀螺仪不是所有的轴都可以自由运动；其中只有两个是自由运动的，你不得不稍稍思考一下，可以领会几乎都是一样的。你们把这东西转动起来模拟地球的运动，引力用连在陀螺上的橡皮带模拟，相当于臂端的重物。你将它转动起来，陀螺进动一段时间，但只要你足够耐心，并使它保持运动，它就安定下来。它可以稳定并且不会转到另外的方向上去的唯一位置是平行于它的框架——在这里是想象的地球——的转动轴的方位，它稳定下来，精彩极了。它指向北极。当我使它停止转动，转轴就要漂移，因为在轴承上有各种摩擦和阻力。真实的陀螺总是要漂移，它们不是理想的东西。



图4-9 费曼演示模拟回旋罗盘

4-6 陀螺仪设计和结构的改进

大约十年前能够制造出的最好的陀螺仪在一个小时内的漂移在2到3度之间——这是惯性导航的极限：不可能确定你在空间的方向比这更准确。例如，你要在潜艇中航行10个小时，你的定向陀螺的轴可能偏移多达30度！（回转罗盘和人工地平仪可以完全正确，因为它们根据引力进行“校正”，但自由转动的定向陀螺不是很准确。）

惯性导航的发展要求发展更好的陀螺仪——在这种陀螺仪中，会使它产生进动的不可控制的摩擦力要减小到尽可能最小。许多新发明使这成为可能，我想要介绍其中的普遍原理。

第一项，到现在为止我们所讨论的都是“两个自由度”的陀螺，因为自转轴可以有两种转动的方法。我们发现如果你们每一次只需要关心一种方法就比较简单——就是说，较好的办法是这样安装你的陀螺，使得你只需要分别考虑绕一个轴的转动。“一个自由度”的陀螺画在图4-10中。[我必须感谢喷气推进实验室的斯科尔（Skull）先生，他不仅借给我这些幻灯片，还给我讲解最近几年内发生的各种事情。]

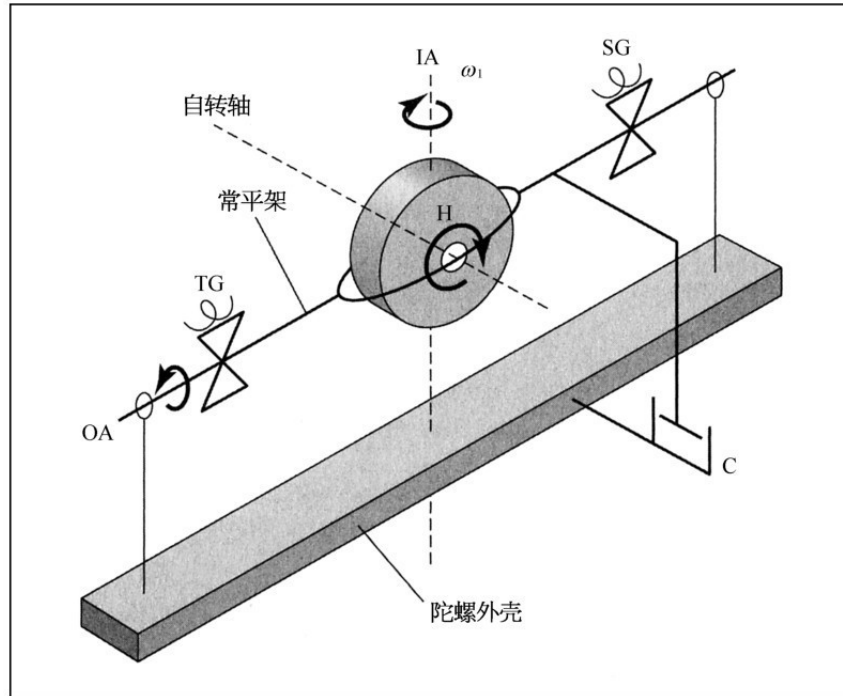


图4-10 一个自由度的陀螺仪略图（取自原始的报告幻灯片）

陀螺的飞轮绕水平的轴旋转（图上的“自转轴”），它只能绕一个轴（IA）自由转动，不是两个。不过，由于以下理由，它还是一个有用的器件：设想使陀螺绕着垂直输入轴（IA）转动，这是因为它在正在转弯的车或船中。那么陀螺的飞轮就要试图绕水平输出轴（OA）进动；更准确地说，相对于输出轴产生一个转矩。如果转矩没有受到抵抗，陀螺的飞轮就绕这个轴进动。所以，如果我们有一台信号发生器（SG），它可以探测出飞轮进动的角度，那么我们就可以利用它来发现船正在转弯。

现在，这里已经谈到了几种特征；精巧的部分是，绕输出轴的转矩必定绝对精确地表示绕输入轴转动的结果。相对于输出轴的其他任何转矩都是噪声，我们必须去掉它们以避免混淆。困难在于陀螺的飞轮本身具有一定的重量，它必须用输出轴上的支枢来支撑其重量——这些是真正的问题所在，因为它们会产生不清楚、不确定的摩擦力。

所以，第一个，也最主要改进陀螺仪的策略就是把陀螺的飞轮放在一个盒子里并将盒子漂浮在油里。盒子是圆柱形，完全浸没在油中，并且可以绕它的轴（图4-11中的输出轴）自由转动。包括飞轮和其中的空气的盒子重量和它排开油的重量准确相等（或尽可能接近），这样容器就自然地平衡在油中。用这种方法支枢负担很少的重量，因此可以使用非常精巧的宝石轴承，像钟表里面的那种由一个针尖和宝石构成。宝石轴承可以承受很小的侧向力，但在现在的情况中它们不需要承受很大的侧向力——并且它们有非常小的摩擦力。这就是第一项了不起的改进：将陀螺的飞轮浮在油中，用宝石轴承做支持飞轮的支枢。

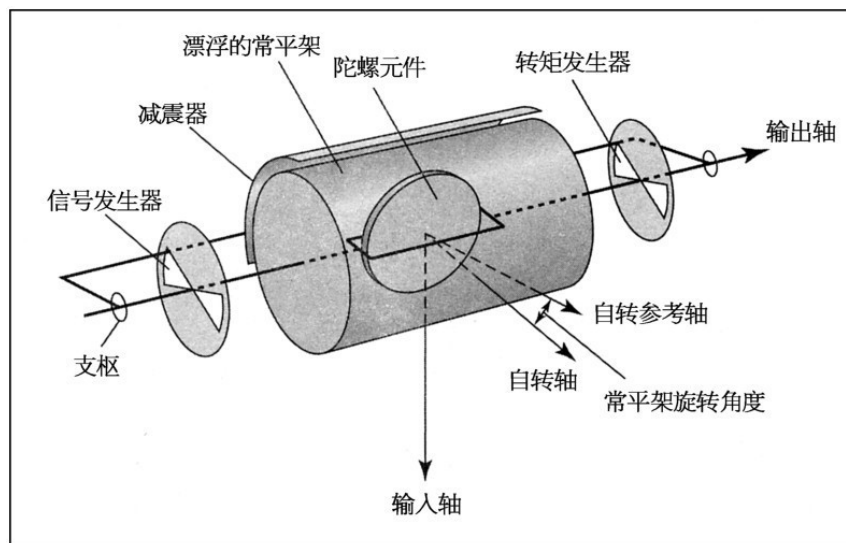


图4-11 一个自由度的组合陀螺仪整体的详细图解（取自原始的报告幻灯片）

下一项重要改进是实际上从来不使陀螺仪产生任何力——或很大的力。到现在为止我们一直在讲的使用方式是，陀螺飞轮绕输出轴进动以及我们测量它进动了多远。但另一项测量绕输入轴的转动效应的有趣技术是根据下述概念（参见图4-10和4-11）：假设我们有一台精心制造的器件，如给它确定数量的电流，我们可以非常精确地在输出轴上产生一定的转矩——一个电磁转矩发生器。然后我们做一个反馈

器件，它在信号发生器和转矩发生器之间有极大的放大，所以当船绕输入轴转动时，陀螺仪的飞轮开始绕输出轴进动，但是刚开始动了一点点，一根头发丝——只是一根头发丝——信号发生器就说，“嘿！它在动了！”转矩发生器立即在输出轴上施加一个转矩以抵消使陀螺仪飞轮进动的转矩，从而使它保持在原来位置上。那么我们要问一个问题，“我们要使它保持不动有多难？”换言之，就是我们测量进入转矩发生器的电流的数量。本质上，我们通过测量需要多大的抗衡转矩来测定造成陀螺进动的转矩。在设计和发展陀螺仪中反馈原理是非常重要的。

现在，另一种实际上更常用的、令人感兴趣的反馈方法画在图4-12上。

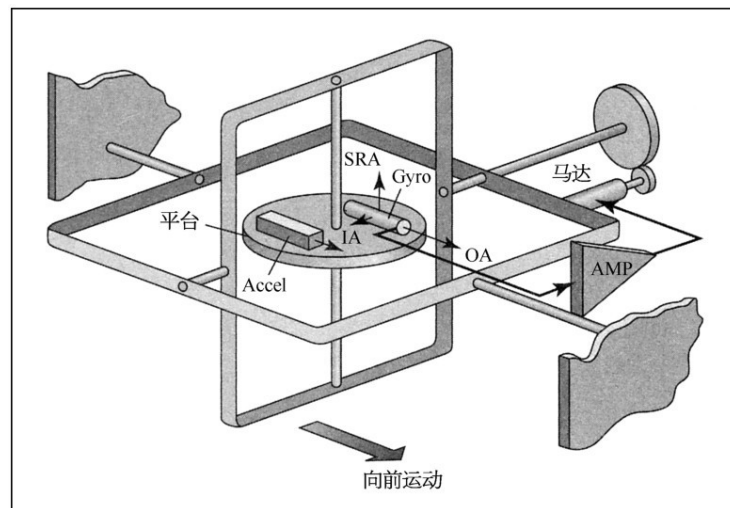


图4-12 一个自由度的稳定平台的示意图（取自原始的报告幻灯片）

陀螺仪是放置在支持框架中央的水平平台上的小盒子（图4-12上的“Gyro”）。[你们可以暂时不去管加速度计（Accel）；我们只要注意陀螺仪。]和以前的例子不同，陀螺仪的自转轴（SRA）是垂直的；不过输出轴（OA）仍旧水平。我们想象整个框架安装在沿图所示方向（图4-12中的“向前运动”方向）飞行的飞机中，那么输入轴就是

飞机的俯仰运动的轴。当飞机向上或向下时，陀螺仪的飞轮开始绕输出轴进动，信号发生器就产生一个信号，但不是产生一个转矩来平衡，而是通过反馈系统用下述操作来替代：当飞机一开始绕俯仰运动的轴转动时，承载陀螺仪的框架相对于飞机转向相反的方向，这样一来抵消了运动；我们把它转回原位，我们就没有信号了。换句话说，我们通过反馈保持了平台稳定，我们实际上完全不需要让陀螺仪运动！这比让它摇摆和转动并试图通过测量信号发生器的输出来计算飞机的上下颠簸方便了许多！将信号用这种方法回馈简便得多，平台完全不转动，陀螺仪始终保持它的轴不动——我们可以通过比较平台和飞机的地板就知道颠簸角度。

图4-13是一张解剖图，表示真实的“一个自由度”的陀螺仪的结构。在这张图上陀螺的飞轮看上去很大，但整个仪器可以放在我的手掌上。陀螺飞轮放在一个盒子里，它漂浮在非常少量的油中——它们充满着围绕盒子的罅隙——但已足够使两端的微小宝石轴承不需要支持重量。陀螺仪的飞轮一直在不停地旋转。支撑自转轴的轴承不要求是无摩擦的，因为它们被抵消了——摩擦力被引擎的动力克服了，引擎转动一个小马达，马达使陀螺仪的飞轮旋转。还有探测盒子极其微小的运动的电磁线圈〔图4-13中的信号—转矩双同步（dualsyn）〕，线圈提供反馈信号，反馈信号或者用来在盒子上产生绕输出轴的转矩，或者使承载陀螺仪的平台绕输入轴转动。

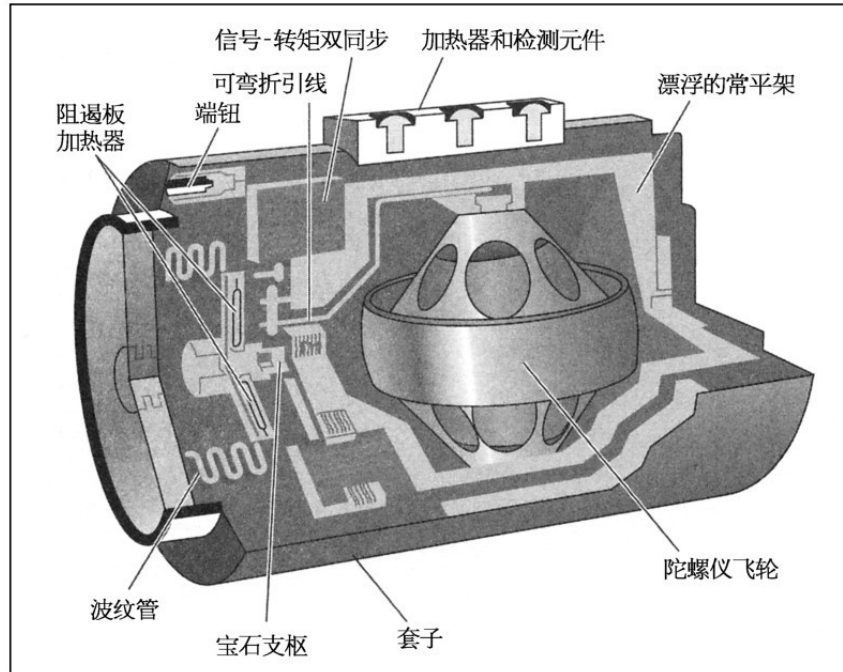


图4-13 一个自由度的组合陀螺仪的解剖图（取自原始的报告幻灯片）

这里有一个有点困难的技术问题：给驱使陀螺飞轮转动的马达输送动力，我们必须将电流从仪器的固定部分送入转动着的盒子里面。这意味着导线必须和盒子接触，还有接触实际上必须无摩擦，这是非常困难的。所用的方法是下面这样的：四个精确制造的半圆形弹簧在盒子上和导线连接，如图4-14所示。弹簧是非常好的材料制造，像钟表弹簧的材料，只是非常精细。它们保持平衡，使得盒子准确地处在零位置时不产生转矩；如果盒子微微转动，它们产生很小的转矩——不过，由于弹簧做得如此完美，转矩可以精确知道——我们知道它的正确的方程式——它在反馈器件的线路中得到修正。

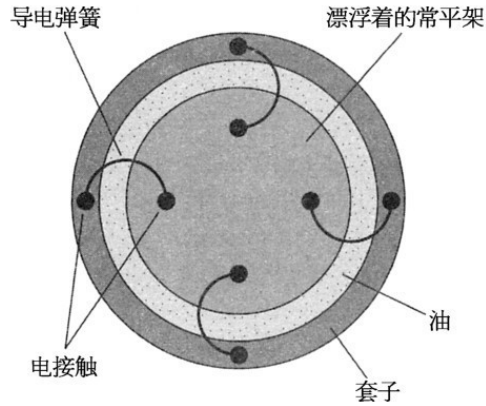


图4-14 在一个自由度的陀螺仪中从套子到漂浮着的常平架的电连接

盒子和油之间也有很大的摩擦力，在盒子转动时产生绕输出轴的转矩。但是液体油的摩擦定律是十分准确地知道的：转矩精确地正比于盒子转动的速率。所以它能在反馈线路的计算部分被完全校正，对于弹簧也是一样。

像这类精密器械的主要原则并不是尽量使每样东西都完美无瑕，而是使每样东西都确定和准确。

这种器件就像奇妙的“单马车”^[3]：每样东西都做到当前机械学可能的绝对极限，他们还在努力把它做得更好。但最严重的问题在于：假如陀螺飞轮的轴略微偏离盒子的中心，如图4-15所示，会发生什么情况。这样一来盒子的重心和输出轴不一致，飞轮的重量就要使盒子转动，产生许多不需要的转矩。

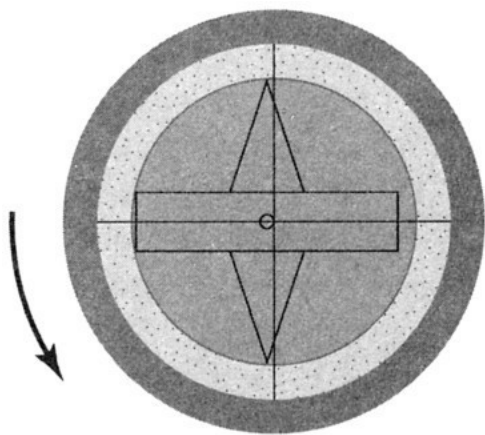


图4-15 在一台一个自由度的陀螺仪中漂浮着不平衡的常平架造成相对于输出轴的不需要的转矩

为了固定它，你要做的第一件事是钻一个小洞，或者将重物放在盒子里放一些重物使它尽可能平衡。然后你非常仔细地测量存在的剩余偏移，通过这种测量来校准。当你测量了你建造的某一器件并发现你不能将偏移减到零，你可以在反馈线路中使它得到校正。虽然在这个情况中问题在于偏移是不确定的，陀螺仪运行两三个小时后，由于轴承的磨损重心的位置会稍稍移动。

现在，这种类型的陀螺仪比起10年前制造的改进了100多倍。最好的一种产生的偏移在每小时一度的 $1/100$ 以下。对于图4-13所示的器件，它的陀螺飞轮的重心偏离盒子中心的运动不会大于百万分之一英寸的 $1/10$ ！精密的机械常规应用要求达到诸如一亿分之一英寸，这比现在的精密机械常规提高一千倍。确实，这是最重要的问题之一——保证轴承不磨损，这样陀螺飞轮偏离中心向两边的移动不超过20个原子。

4-7 加速度计

我们前面讨论的器件可以用来告诉我们哪一方向是上方，或者使某个东西不会绕一个轴转动。如果我们有三台这样的器件沿三个轴安置，装在各种常平架上，如此等等，那么我们就可以使某个物体绝对稳定。当飞机转弯时，飞机内的平台保持水平，它完全不会向左或向右转动，它不会发生任何变化。用这样的方法我们就能保证它恒定指向北方，或东方，或上方或下方，或者任何其他方向。但下一个问题是要知道我们现在在什么地方：我们已经走了多远？

现在，你们知道你们在飞机里面不能进行某种测量来求出飞机飞得多快，所以你肯定不能够测量出它飞出多远，但你可以测量它的加速度是多少。因此，如果我们开始的时候测量出没有加速度，我们就说，“好，我们处在零点位置并且没有加速度。”当我们开始运动时我们一定要加速。当我们加速时就可以把它测量出来。然后我们用计算机把加速度积分，我们就可以求出飞机的速率，再次积分我们就可以求出飞机的位置。因此，要确定某个物体走了多远的方法是测量加速度再对它积分两次。

你怎样测量加速度呢？测量加速度的简单器件的略图画在图4-16中。最重要的部件只是一个重物（图中“地震重物”）。还有一个很弱的弹簧（弹性遏阻器）使重物大体上保持在原位，还有一个抑制它振荡的阻尼器，但这些细节都是不重要的。现在假设这整个器件向前加速，沿着箭头所指的方向（敏感轴）。当然，重物就要向后运动，我们利用标尺（指示加速度的标尺）测量它向后运动的距离；我们可以从这求出加速度，积分两次就到距离。很自然，如果我们在重物位置的测量中产生一点误差，这样我们求得的加速度有微小的偏差。经过很长的时间以后，对加速度积分两次，距离偏差就很大。所以，我们必须把器件做得更好。

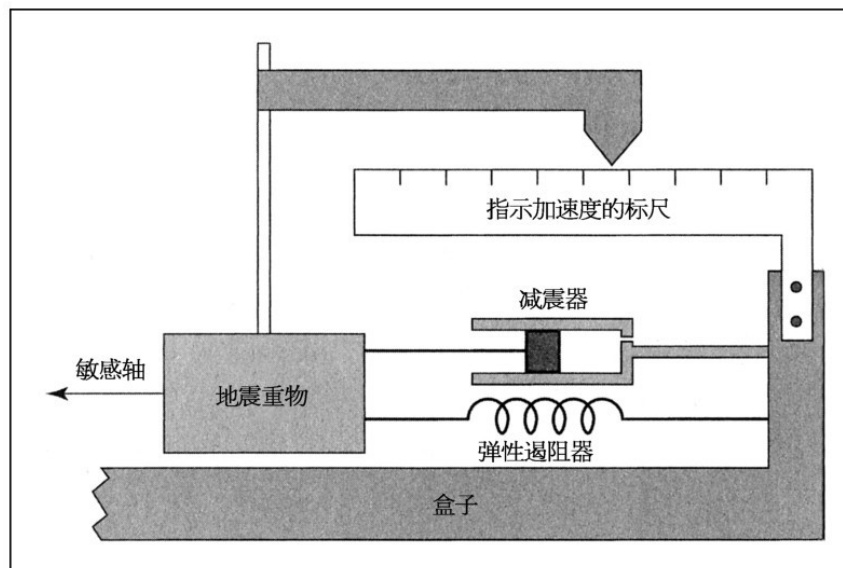


图4-16 简单的加速器略图（取自原始的报告幻灯片）

下一阶段的改进装置简图画在图4-17中，利用我们熟悉的反馈原理：当这个器件作加速运动时，重物移动，这种运动引起信号发生器输出一个正比于位移的电压。下一步的关键不是测量电压，而是通过放大器将电压反馈到一个机件，把重物拉回原位，从而求出需要多大的力得以保持重物不动。换言之，并不是让重物移动并测量它走多远，而我们是测量使它保持平衡所需要的反作用力，然后利用公式 $F = m a$ 求出加速度。

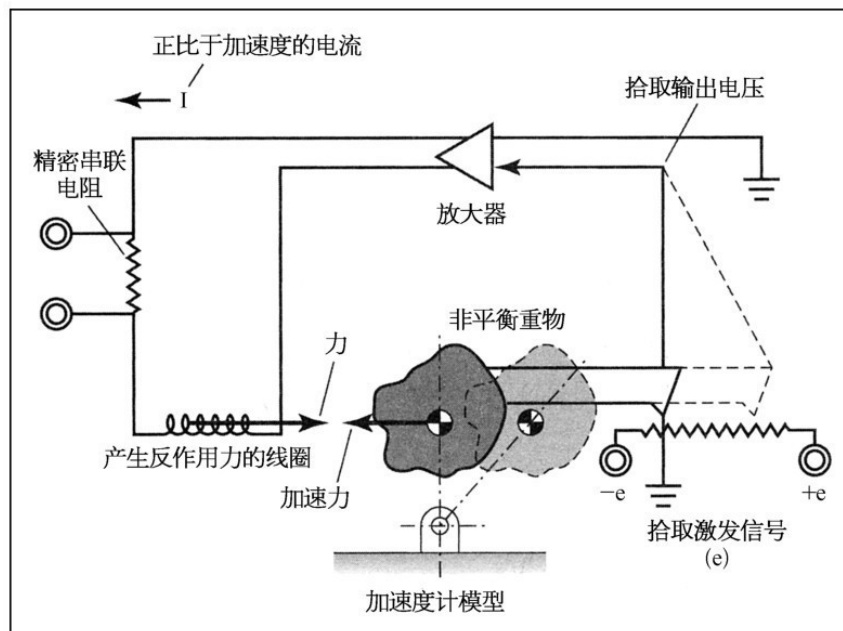


图4-17 带有反馈力的非平衡重物加速度计略图（取自原始的报告幻灯片）

这种器件的一种具体结构的简图表示在图4-18中。图4-19是真实器件结构的解剖图。它十分像图4-11和图4-13中的陀螺仪，只是盒子看上去是空的：只有一个贴在靠近底部一边的重物取代陀螺。整个盒子漂浮着，它完全被液态油支持着并保持平衡（盒子架在极其完美、精密的宝石支枢上），当然，由于地球引力的作用盒子的重物一边停留在下方。

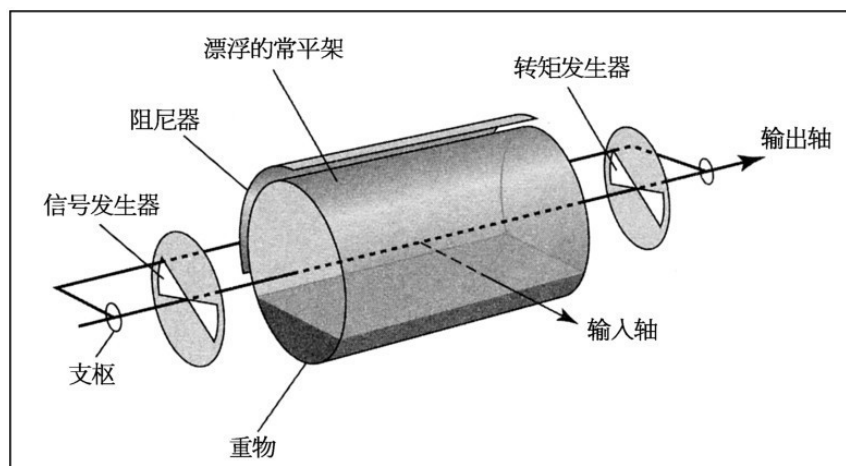


图4-18 带有转矩反馈的漂浮常平架加速度计的示意图（取自原始的报告幻灯片）

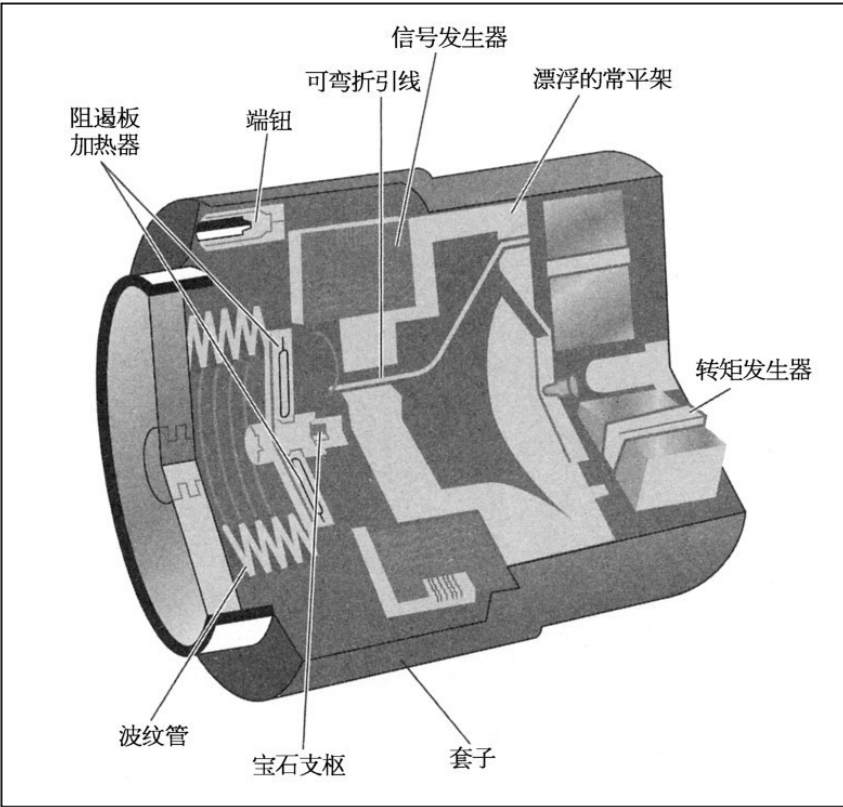


图4-19 真实的漂浮常平架加速度计的解剖图（取自原始的报告幻灯片）

这种器件用来测量垂直于盒子轴线方向的水平加速度；每当盒子在这个方向加速时，重物落后并使盒子的一边向上倾斜，盒子在支枢上转动；信号发生器立即产生一个信号，这个信号送到转矩发生器的线圈，将盒子拉回原来的位置。就和以前一样，我们把转矩反馈回来以改正偏离，我们测量出需要多大的转矩来保持物体不致晃动，这个转矩告诉我们的加速度有多大。

另一种测量加速度的有趣的器件的简略图画在图4-20上。实际上它能自动地做一次积分。这个略图和图4-11相同，只是在自转轴的一

边有一个重物（图4-20中的“摆动重物”）。如果器件向上加速，在陀螺仪上产生一个转矩，以后它就和我们的其他器件同样了——只不过转矩是因加速产生而不是因为盒子的转动。信号发生器，转矩发生器以及所有其余的部件都是一样的。反馈是用来将盒子绕输出轴转回去。为了使盒子平衡，作用于重物向上的力必须正比于加速度，但是作用在重物向上的力正比于盒子扭转的角速度，所以盒子的角速度正比于加速度。这意味着盒子转过的角度 正比于速度。测量盒子转过多大角度给出速度——所以一次积分已经完成了。（这并不表示这种加速度计比其他的更好；对于特定的应用哪一种更好，取决于整体的技术细节，这是一个设计的问题。）

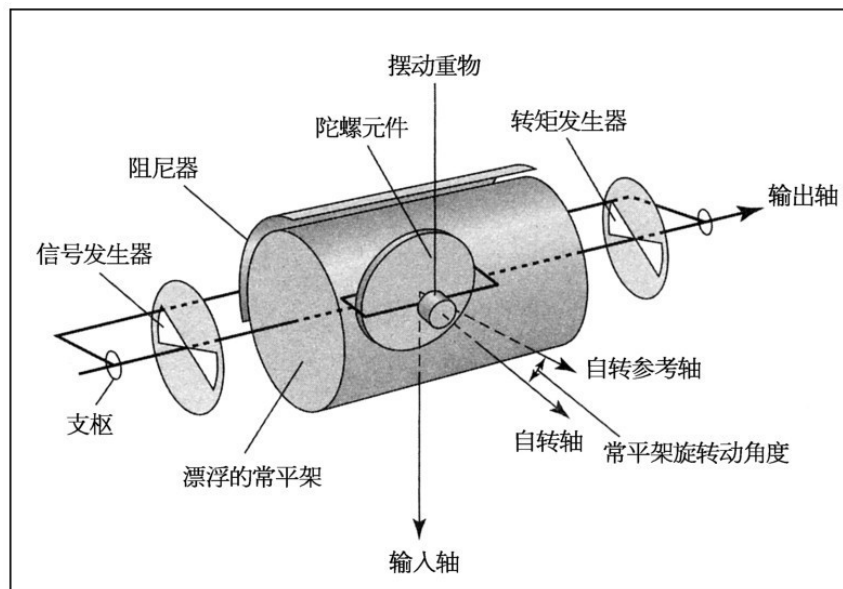


图4-20 用作加速度计的、自由摆动积分陀螺仪的略图；常平架转动角度指示速度（取自原始的报告幻灯片）

4-8 完整的导航系统

好了，如果我们建造了这样的一些器件，我们可以把它们组合起来安放在一个平台上，如图4-21所示，这就是完整的导航系统。三个小的圆柱体（ G_x 、 G_y 、 G_z ）是陀螺仪，它们的轴安置在三个互相垂直的方向上。三个长方形盒子（ A_x 、 A_y 、 A_z ）是加速度计，每个对应于一个坐标轴。这些陀螺仪和它们的反馈系统一同保持着平台在绝对空间中的不作任何方向上转动——既不偏航，也不上下颠簸，也不左右滚动——当飞机（或船舰，或系统所在的随便什么东西里）转弯时，平台的平面非常精确地保持稳定。这对于加速度测量的器件来说是非常重要的，因为你一定要准确知道它们的测量是沿哪个方向：假如它歪斜了，那么导航系统就以为它们向某一个方向转动了，但实际上它们是转向另一方向，这样一来系统就乱套了。关键是要使加速度计保持在空间固定的方向上，这样它就很容易进行位移的计算。

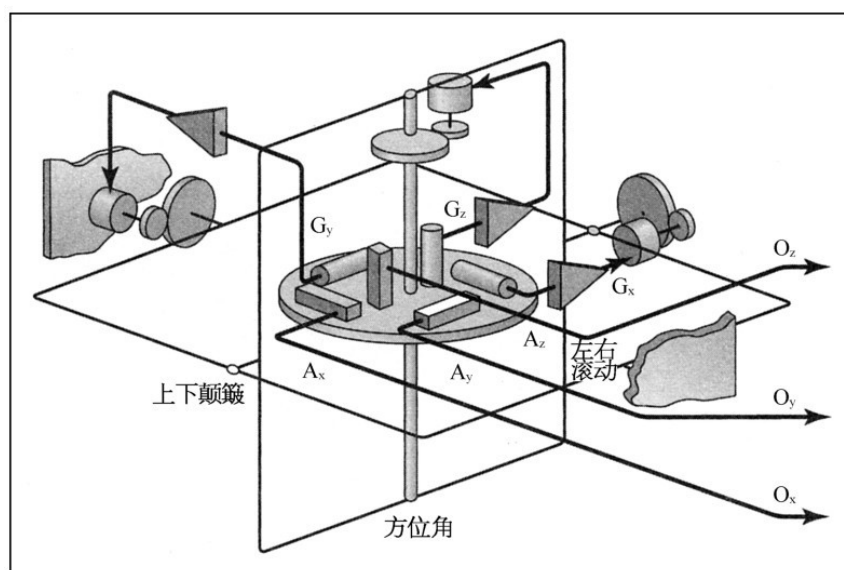


图4-21 有三台陀螺仪和三台加速度计，安装在一个稳定的平台上的完整导航系统（取自原始的报告幻灯片）

加速度计的 x ， y 和 z 的输出送入积分线路，通过在每一个方向上积分两次来计算位移。如此，假设我们从一个已知的位置从静止开

始，在任何时刻我们都可以知道我们到了哪里。我们也知道我们正向着什么方向运动，因为平台始终在我们开始的时候（理想上）所设定的同一方向上。这就是一般的概念。不过，还有几个问题是我想要说明的。

第一，考虑一下如果器件产生，譬如说，百万分之一的误差，在测量加速度的时候会发生什么情况呢。假设器件是在一台火箭中，它需要测量加速度高达 $10g$ 。一台可以测量高达 $10g$ 的器件能够分辨 $10^{-5}g$ 以下是很难的（事实上我怀疑你们能够做到）。但是，加速度有 $10^{-5}g$ 的误差，积分两次，经过一个小时后，结果位置的误差超过半个千米——10个小时后多达50千米，这已经脱离了轨道。于是这个系统不再有效。在火箭中这没有很大的关系，因为所有的加速度都产生在刚开始的一段短时间内，以后它就靠惯性自由运动。然而，在飞机或者船里面，你必须经常调整系统，就像普通的定向陀螺仪，要保证它始终指向同一方向。这可以通过观察星座或太阳，但是在潜水艇里你怎样校正它呢？

好吧，如果我们有一张海底地图，如果我们驶过一个山顶或者某种东西，我们可以看到这些都在我们下面经过。但假设我们没有地图——还是有办法来核实！其思路是：地球是球形，如果我们已经确定我们沿某个方向已经走了，譬如说100英里，这时地球引力不再是在以前的同一方向上。如果我们没有使平台保持垂直于地球引力，加速度测量器件的输出就全部错了。因此我们要做下面的事：我们从平台是水平的情况开始，利用加速度测量器件算出我们的位置，根据这个位置，我们推算行驶中我们应当将平台怎样转动使它始终保持水平，于是我们把它转过所预期的差率使它保持水平。这是十分方便的事——而它也是节省时间的方法！

考虑一下如果有误差会发生什么情况。假设机器静止地放在一间房间里，经过一段时间，由于它建造不完善，平台不再保持水平的而微微转过一点，如图4-22（a）所示。这样，加速度计中的重物就会移动，相当于有个加速度，机器计算出来的位置指示向右运动了，向着（b）。要保持平台水平的机制使它慢慢转动。当平台重新成为水平时，机器不再认为它在加速运动。然而由于表观加速度，机器还以为它在同样的方向上具有速度，所以力图保持平台水平的机制要使它非常慢地继续转动，直到它不再水平，如图4-22（c）所示。事实上，它要经过加速度为零的位置，然后它会以为加速度向相反的方向。因此，我们就有了非常小的振荡，误差只会有一次振荡中累积。如果你将所有的角度、转折以及其他各种因素都综合起来，这种振荡一次需要84分钟。因此，只需要把器件做得足够好，在84分钟内有合适的准确度，因为在这个时间里它会校正自己。这十分像在飞机里的情况，在飞机上隔一定时间要用磁罗盘来校正回旋罗盘，但在现在这种情况下，机器相对于地球引力作校正，就像在人工地平仪的情况中一样。

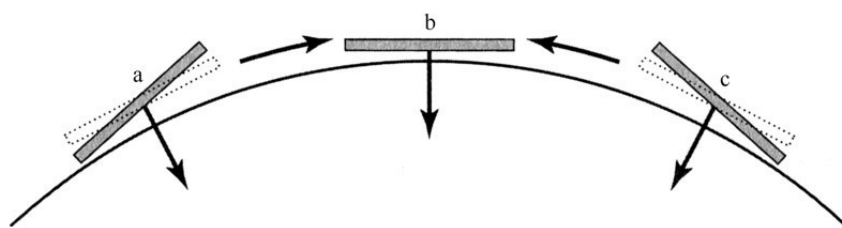


图4-22 利用地球引力校正，使稳定的平台保持水平

以大体上相同的方式，潜水艇中的方位角器件（它告诉你哪个方向是北极）隔一定时间就要按照回旋罗盘校正。回旋罗盘在长时间周期内平均，所以船的运动不会产生任何偏差。就这样，你可以用回旋罗盘校正方位角，你可以依照地球引力校正加速度计，所以误差不会一直积累下去，只有大约一个半小时的积累。

在鹦鹉螺号核潜艇中有3个这种类型的极其巨大的平台，每一平台各在一个巨大的球体中，并排地从领航员房间的天花板悬挂下来，各个互相完全独立，如有其中一个损坏的情况下——或者，它们互相不一致，领航员就要从三台中选出最好的两台（这肯定会使他感到相当不安！）这些平台在制造的时候都有些差异，因为你不可能做到每件事都完美无瑕。细微的不精确引起的漂移都必须对每一台仪器进行测定，这些仪器都必须校准以进行补偿。

在喷射推进实验室里有一个实验室，在这里测试一些新的仪器。这是一个令人感兴趣的实验室，你可以考虑一下你要怎样校对这种仪器：你用不着乘船去航行，不需要。在这个实验室里，他们利用地球自转来校对仪器！如果仪器是灵敏的，由于地球的自转它会转向，并且还要漂移。通过测量漂移可以在非常短的时间内确定如何校正。这个实验室或许是世界上唯一的一个实验室，它的基本的特色——使它能发挥作用的原理——就是地球在转动这个事实。假如地球不转动，它就不能用来校正仪器了。

4-9 地球的自转效应

我要讲的下一个题目是地球的自转效应（除了惯性导航器件的定标）。

地球自转的最明显的效应是风的大尺度运动。有一个有名的故事，你们听过一遍又一遍了，假如你有一只浴缸，你拔掉塞子，如果你在北半球，水就沿着某一个方向旋转；如果你在南半球，水就沿相反方向旋转——但你如果去试一试，这并不正确。其中假设沿着一定的方向旋转的道理是在以下的情况中：假设在海洋底部，在北极下

面，有一个排水口用塞子塞住。然后我们拔掉塞子，水就开始通过排水口流出去（见图4-23）。

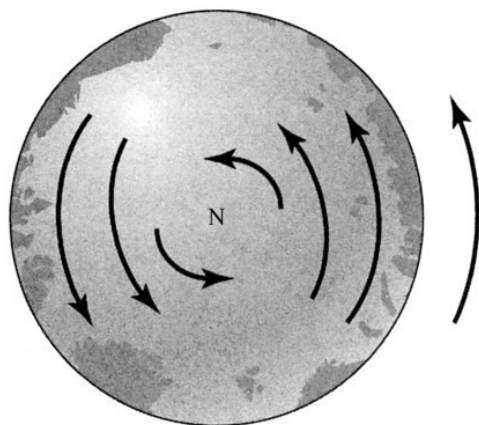


图4-23 水流入在北极的假想排水口

海洋的半径很大，由于地球的自转，水流慢慢地随着地球围绕排水口转动。水向排水口流动过程中，从较大的转动半径变为较小的半径，所以水流必须转得越来越快以保持其角动量守恒（就好像自转着的滑冰运动员把她的双臂拉近身体时）。水流以和地球转动同样的方向转动，但水流必须转得更快，这样站在地球上的人就看到水流绕着排水口旋转。这是正确的，这是应当发生的情况。这种运动方式对风也确实有效：如果有一个地方气压低，周围的空气力图进入这区域，它不是直接进来而是从旁边绕着圈流动过来——事实上，从旁边绕行变得如此之强，空气完全不是向中心运动，实际上是绕着低气压区域旋转。

这是关于天气的一条定律：假如你在北半球面向顺风，低气压总是在左边，高气压在右边（见图4-24），其原理和地球的自转有关。

（这几乎总是正确；有时在某些异常的环境中，这个定律无效，因为除了地球自转还有其他的力参与其中。）

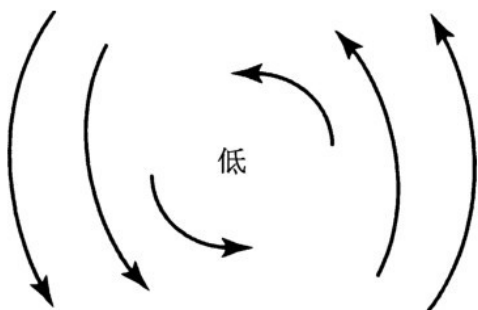


图4-24 在北半球高压会聚到低压地带

在你的浴缸中它失效的原因如下：造成这种现象的原因是水初始的转动——你的浴缸里的水正转动着。地球自转有多快呢？一天一圈。你能不能保证你的浴缸里的水没有形成些微的运动，等价于一天一次绕着浴缸冲激？没有。通常在浴缸里不断发生许多喷溅和激荡！所以这只在足够大的尺度上，像巨大的湖泊中，才有效。湖泊中的水是十分平静的，你可以很容易演示环流并不如一天绕湖一次那么巨大。那么，如果你在湖底打一个洞，让水流出去，水就会沿正确的方向转动，正如大肆宣扬的那样。

关于地球自转还有另外几个有趣的问题。其中一个问题是地球并不是严格的一个球体；由于自转的效应——离心力使它稍稍偏离球体，为了平衡地球引力而成为扁球形。如果你知道地球所起的作用有多大，你就可以算出有多扁。如果你假设地球像理想液体，它会慢慢流动占据最终的位置。我们要问它的扁率应当是多少，你会发现在计算和测量的准确度范围内（大约百分之一的精确度）它和地球的实际扁率一致。

这对月球就不对了。按照它自转的速率，月球比它应该有的形状更不匀称。无论解释为月球还是液体的时候，自转得更快，还是凝固得很硬足以抗拒使它成为恰当的形状，或者其他可能。月球从来没有

熔融过，它是由一堆流星凑合起来的——上帝在造它的时候没有做成非常精确和均衡的形状，所以它稍许有些不匀称。

我还要指出一个事实，扁的地球绕轴自转的自转轴不垂直于地球绕太阳公转平面（月球绕地球转动几乎在这同一平面上）。假如地球是一个球体，作用在它的中心的引力和离心力对于它的中心就会平衡。但由于它稍有不匀称，力就不平衡了；由于力图将地球的轴转到垂直于力线的方向的引力产生的转矩的存在，地球就像一个巨大的陀螺在空间进动（见图4-25）。

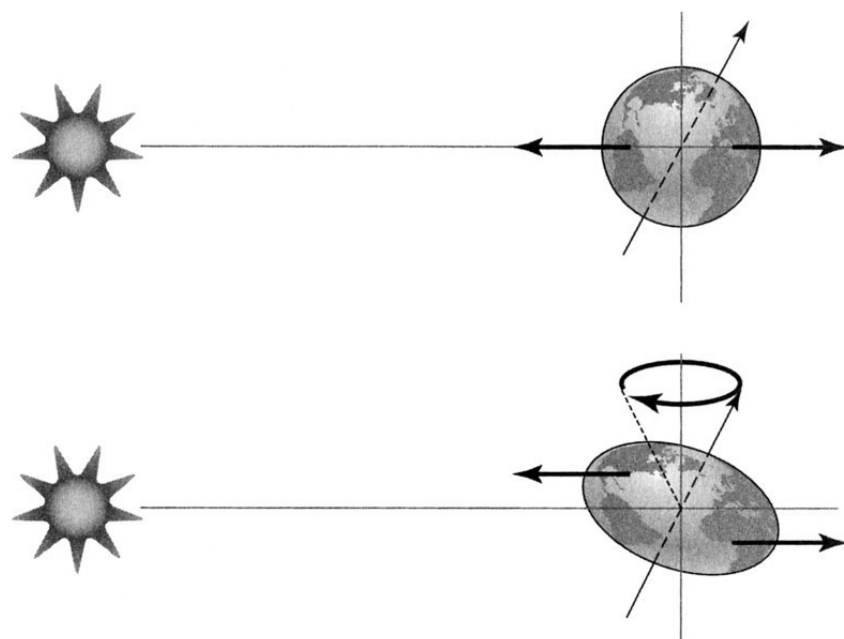


图4-25 由于引力引起的转矩使扁球形的地球作进动

今天指向北极星的地球的轴实际上是在慢慢地转动，终于，它将先后指遍张角为 $23\frac{1}{2}$ 度的巨大圆锥形上面天空中的所有恒星。它要重新回到北极星需要花上26 000年，假如你从现在起到26 000年以后转世再生，你就可以不需要再学新的东西了。如果那是另一个时代，你只得学习另一种位置的“北极”星（或许是另一个名称）。

4-10 自转的盘

在上一讲（见《费曼物理学讲义》第1卷第20章“空间转动”）我们讨论了一个有趣的事实，就是刚体的角动量不一定和角速度在同一个方向上。我们举一个例子，以如图4-26所示的倾侧方式固定在转动轴上的圆盘。

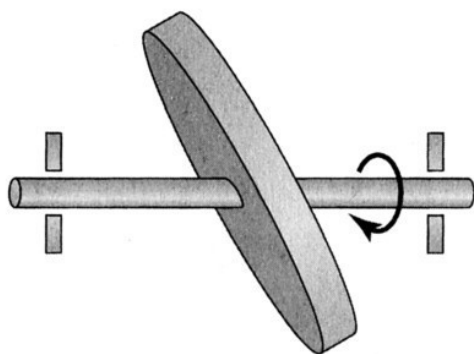


图4-26 以倾侧方式固定在转动轴上的圆盘

首先，我们要提醒你们一件我们已经讲过的有趣的事：对于任何刚体，有一个通过刚体质心的轴，刚体对这个轴的转动惯量最大。还有另一个通过质心的轴，对它转动惯量最小。两者总是成直角。对于图4-27所示的长方体这很容易看出来，但令人惊奇的是这对任何刚体都成立。

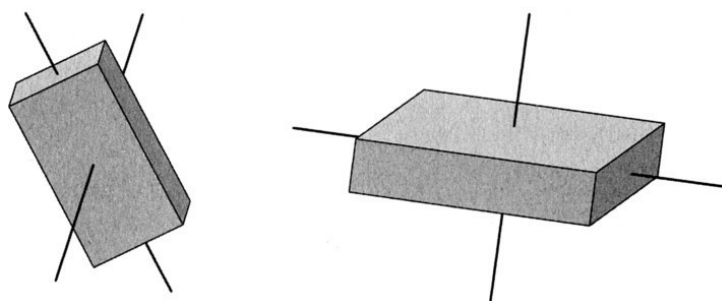


图4-27 长方体和它们的转动惯量最小及最大的主轴

这两根轴加上垂直于它们的轴合称该物体的主轴。物体的主轴具有下列特性：物体的角动量在主轴方向上的分量等于它在该方向的角速度分量乘以物体对这个轴的转动惯量。所以，设 $\mathbf{i}$ ， $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 为沿物体主轴的单位矢量，相应的主转动惯量为 A ， B 和 C 。当物体以角速度 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i, \omega_j, \omega_k)$ 绕质心转动时，其角动量为

$$\mathbf{L} = A \omega_i \mathbf{i} + B \omega_j \mathbf{j} + C \omega_k \mathbf{k}. \quad (4.1)$$

对一个质量为 m ，半径为 r 的薄圆盘，主轴是这样几条：最重要的一根轴垂直于盘面，转动惯量是最大值 $A = \frac{1}{2}mr^2$ ；垂直于这最重要的轴具有最小值的转动惯量 $B = C = \frac{1}{4}mr^2$ 。主转动惯量并不相等；事实上 $A = 2B = 2C$ 。所以当图4-26中的轴被转动起来，圆盘的角动量不平行于角速度。圆盘是静态平衡的，因为转轴通过它的质心。它不是动态平衡。当我们使轴转动时，我们还必须使圆盘的角动量转动，所以我们必须施加一个转矩。图4-28表示圆盘的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和它的角动量 $\mathbf{L}$ ，以及它们沿圆盘主轴的分量。

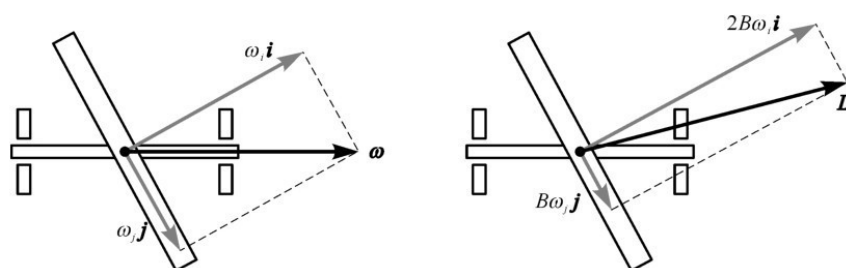


图4-28 被轴带动自转的圆盘的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角动量 $\mathbf{L}$ 以及它们沿圆盘主轴的分量

现在考虑另一种有趣的情况：假如我们在圆盘中央放一个轴承，这样我们也可以使圆盘以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕它的最主要的轴自转，如图4-29所示。

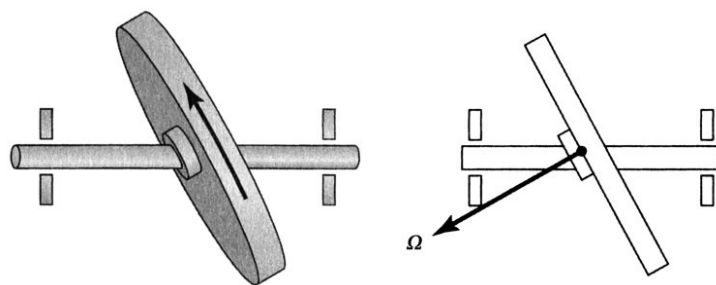


图4-29 使圆盘以角速度 Ω 绕它最主要的轴自转，同时使轴保持静止

这样，当轴转动的时候，圆盘会具有轴转动和圆盘自转合成的实际角动量。如果我们使圆盘自转的方向和轴带动方向相反，如图所示，我们就减少了圆盘的沿其最主要的轴的角动量分量。事实上，由于圆盘的主转动惯量准确地为2:1，（4.1）式告诉我们，使圆盘准确地以轴推动它转动的速率的一半作反方向的自转 [即 $\Omega = -(\omega_i/2) \mathbf{i}$]，我们可以把这些东西结合成为不可思议的样式，就是总角动量准确地沿着轴——然后可以把轴抽掉，因为没有作用力（见图4-30）。

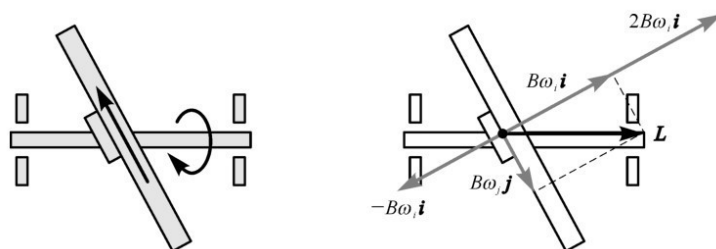


图4-30 使轴转动，同时使圆盘绕它最重要的轴以相反方向自转，结果总角动量平行于轴

这就是自由物体转动的方式：如果你把一个物体，譬如一只盘子 [4] [5] 或者一个钱币，抛向空中，你可以看到它不只是绕一个轴转动。它的运动是绕它的最主要的轴自转并绕另一个斜轴的转动的极美妙的平衡组合，总的结果是角动量守恒。这造成它的晃动，地球也在晃动。

4-11 地球的章动

从地球进动的周期——26 000年——可以证明最大的转动惯量（绕北极）和最小的转动惯量（绕通过赤道的轴）的差别只有1/360——地球几乎就是一个球体。然而，由于这两个转动惯量确实不同，地球受到任何摄动的可能结果是绕另外某一个轴微小的转动，或者说，综合起来：地球章动并进动。

我们可以求出地球章动的频率：实际上得到是306天。你也可以十分精确地测出它：北极在空间晃动，在地球表面测量得到50尺；它前后晃动，并不是无规则的，但主要的运动周期是439天而不是306天，这里面隐含着一个奥秘。不过这个奥秘很容易解开：理论分析是对刚体做的，但地球并非刚体；它的内部是液态的糊状物，所以，首先它的周期不同于刚体的，其次，运动受到阻滞，它最后会停下来——这就是为什么章动这么小。什么原因使它产生章动，除了阻尼外还有各种无规律的因素使地球摇晃，例如风的突然运动，还有洋流等。

4-12 天文学中的角动量

开普勒发现的太阳系最引人注目的性质之一是每样东西都沿椭圆轨道运动。这最终可以用万有引力定律来解释。但是还有许许多多关于太阳系的其他情况——特别简单的东西——比较难解释。例如，所有行星看上去都大致在同一平面上绕太阳运动，除一两个例外，它们都以同样的方式绕它们的极点转动——从西向东，像地球一样；几乎所有行星的卫星都以同样的方向绕行，只有少数例外，每样东西都以

同样的方式转动。一个有兴趣的问题就是要问：太阳系怎样会按这种方式运动？

在研究太阳系起源时，要考虑的最重要的问题是角动量。如果你想象大量尘埃或气体整体在引力作用下收缩，即使它只有少量的内部运动，角动量一定要保持为常数；这些“臂”向里面运动，转动惯量减少，所以角速度必定增加。很可能是，太阳系需要不断地抛出它的角动量才能继续，结果产生了行星——我们不清楚是不是这样。但是太阳系里面95%的角动量是在行星上而不是在太阳上这是事实。（太阳在自转，不错，但它只得到总角动量的5%。）这个问题讨论了不知多少次，但始终没有搞懂，当它们慢慢旋转的时候气体怎样收缩，或者尘埃如何聚到一起。大多数的讨论在开始时空谈角动量，不过当他们进一步分析的时候他们就把它忽视了。

天文学中另一个严肃的问题是关于银河系——星云——的演化。什么因素决定它们的形状？图4-31表示几种不同类型的星云：著名的普通旋涡星云（很像我们自己的银河系），棒旋星云（它的长臂从中央棒伸展出去），椭圆星云（它甚至连臂状结构也没有）。问题是：它们怎么会变得各不相同的？

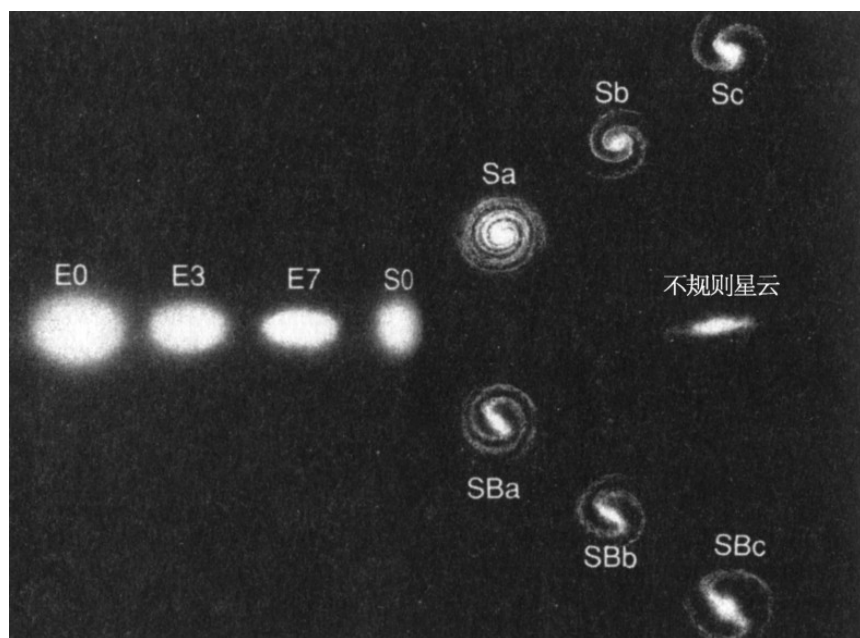


图4-31 不同类型的星云：旋涡星云，棒旋星云和椭圆星云

当然，可能是因为各个星云的质量不同，如果你从不同数量的物质开始，你会得到不同的结果。这是可能的，但从星云的旋涡特性来看，几乎可以肯定和角动量有关系。看来很可能是，一个星云与另一星云的差别可以从原始气体和尘埃物质的初始角动量的差别（或者你假设它们开始时的随便什么东西）来解释。一些人提出的另一种可能性是不同类型的星云代表不同的演化阶段。这意味着它们都有不同的年龄——当然，这对我们的宇宙理论具有极其重大的影响：宇宙是否在同一时间爆炸，在这以后气体凝聚形成不同类型的星云？这样的话它们必定都有相同的年龄。或者星云重复不停地由空间中的碎片形成，在这种情况下它们可能有不同的年龄？

对这些星云的形成要真正了解是一个力学的问题，是一个包括角动量的问题，这是一个迄今为止还没有解决的问题。物理学家们自己要觉得难为情：天文学家一直在问：“你们为什么不给我们算一算如果你有一大堆垃圾被引力拉到一起并且还在自转，这会发生什么？你们

能不能解释一下这些星云的形状为什么这样？”还没有一个人能回答这些问题。

4-13 量子力学中的角动量

在量子力学中，基本定律 $F=ma$ 失效。然而，有些东西保留下来：能量守恒定律保留下来；动量守恒定律保留下来；还有角动量守恒定律也保留了下来——它以非常美妙的形式保存下来，在量子力学的中心深处保存下来。角动量是量子力学分析中主要特色。这事实上就是为了能够理解原子中的现象——力学之所以如此深入量子力学的主要原因之一。

经典力学和量子力学重要的区别之一是，经典力学中一个给定的物体只要使它以不同的速率自转就可以有任意数量的角动量；在量子力学中，沿着一个给定轴的角动量不能是任意值——它只可以有整数或半整数乘以普朗克常数除 2π ($h/2\pi$ 或 $\hbar$) 的数值，它从一个数值到另一数量必须以 $\hbar$ 为增量的跳跃式变化。这是和角动量联系在一起的量子力学深刻的原理之一。

最后，有趣的一个问题：我们以为电子是一个最简单的基本粒子。然而，它具有内禀角动量。我们给电子描绘的图像并不是简单到只是一个点电荷，点电荷只是具有角动量的真实客体的一种极限。它有点像经典理论中绕轴自转的物体，但并不准确：人们发现电子类似于最简单的一种陀螺，我们想象它有非常小的转动惯量，绕它的主要轴极快地旋转。并且，有趣的是，在经典力学中我们总是要做的第一级近似，就是忽略绕进动轴的转动惯量——这对电子来说严格正确！换言之，电子看上去像一个具有无限小转动惯量的陀螺，以无限

大的角速度自转，结果就得到一个有限的角动量。这是一个极限情况；它并不严格地和陀螺一样——它更为简单。但它仍旧是一个奇异的東西。

我在图4-13中表示了陀螺仪的内部，你们愿意的话可以去看看。今天要讲的就是这些。

4-14 讲课后

费曼： 如果你们通过放大镜非常仔细地看，你们可以看到非常非常细的半圆形的电线，它将电力输送到盒子里面，并且它连接到外面的细针上。

学生： 这样一个东西值多少钱？

费曼： 啊，上帝知道它们值多少钱。这里面包含了如此多的精密的部件，不只是制造这东西，还要把它们全都定标和测定。看看这些极小的孔，还有这四根金针，看上去好像有一个人把它们弄弯了？他们把这些针弯成这样就能使盒子完全平衡。不过，如果油的密度变了，盒子就浮不起来，在油里面要沉下去或者升到上面，这样就会有力作用在支枢上。要保持油的密度正确，使盒子正好能够漂浮，你们必须用加热线圈保持它的温度精确到千分之几度。还有宝石制成的支枢，轴伸进宝石的一点就像钟表里面的一样。所以你们看，它肯定是非常贵的——我甚至不知道贵到什么程度。

学生： 有没有研究过一种陀螺仪，它是放在可以活动的杆子一端一个重物？

费曼： 是的，是的。他们一直在设想其他方式，其他的方法。

学生： 他们没有想过减少轴承的问题吗？

费曼： 是啊，减去了一样东西又加上了别的东西。

学生： 它用了没有？

费曼： 我不知道。我们讨论的陀螺仪是迄今为止所实际使用的唯一的一种，我不认为其他的已经处在能够和它竞争的地位了，但它们都差不多。这是一个前沿的问题。人们还在设计新型的陀螺仪，新的器件，新的方法，完全可能其中有一种可以解决这些问题，例如，这种必须要把轴承做得如此精确的蠢事。如果你玩陀螺，过一会儿你就会看到它轴上的摩擦力并不小。其理由是，如果轴承做得摩擦力太小，轴就会晃动，你不得不考虑到一英寸的百万分之十——这是荒谬的。一定有更好的方法。

学生： 我过去在金工车间工作。

费曼： 那么你能懂得一英寸的百万分之十意味着什么：那是不可能做到的！

另一个学生： 什么是铁陶瓷（ferro ceramics）？

费曼： 是用磁场支持超导体的研究吗？显然，如果球上有一个指纹印，那么变化的场所产生的电流会产生一点点损耗。他们力图改进，但还没有效果。

还有许多其他聪明的想法，但我只讲一个最终建造成功的形式，包括所有的细节。

学生： 这里面的弹簧特别精巧。

费曼： 对。它们不仅在很小的意义上很精巧，并且在制造它们的方法的意义上也很精巧：你们知道它们是非常好的钢，弹簧钢，每样东西都恰到好处。

这类的陀螺仪其实是不现实的。要把它做成所要求那样精确是如此的困难。它必须在绝对没有灰尘的房间里制造——人要穿上特殊的大衣、手套、长靴和面罩，因为如果在这些东西里面一个部件上沾有一粒灰尘就会造成摩擦力而产生错误。我敢打赌他们报废的比做成功的还多，因为每个部件都必须如此仔细地制造。它不是你拼合出来的小玩意；那是极其困难的。这样异常的精密度到了我们当前能力的边界。所以这是很有趣的。当然，你可以发明或构思出对它的任何改进都是了不起的事情。

主要问题之一是当盒子的轴偏离中心并且转动起来；这样你测量到绕错误的轴的扭转，于是你会得到古怪的答案。但从我看来不言而喻的是（或者几乎是——我可能错了），这不是本质问题；一定会有某种方法支持一个旋转着的東西使得支持力跟随引力中心变动。同时，你可以测出它正被扭曲，因为扭曲与偏离引力中心是不同的。

我们要做的是得到一台直接测量对引力中心扭曲的器件。假如我们能够想出一种方法，保证测量扭曲的器件测量的肯定是相对于引力中心的，如果引力中心晃动它不会出现任何差别。如果整个平台总是在晃动，你试图测量的东西也作同样类型的运动，这样就没有办法摆脱它。但是这种偏离中心的飞轮并不正好是和你测量的东西同样的，所以必定有某种出路。

学生：机械/模拟积分器即将过时，一般说来，人们是否更喜欢用电子/数字的器件？

费曼：正是这样。

大多数积分器件是电的，有两种一般类型。一种是所谓“模拟”：这种器件用物理方法，这种方法之一的测量结果就是某个东西的积分。例如，如果你有一个电阻，你加上一定的电压，通过电阻就有一定的电流，电流正比于电压。如果你是测量总电荷而不是电流，你知道这就是电流的积分。当我们通过测量角度将加速度积分——这是一个力学的例子。你们可以用各种方法来做这种类型的积分，无论它是力学的还是电学的，它们都没有什么区别，通常是用电的方法——但这仍旧是模拟方法。

还有另外一种方法，提取出信号并把这信号转换成例如频率。把信号转换成许多脉冲，当信号较强时产生脉冲更快。然后计算脉冲数目，你们明白吗？

学生：将脉冲的数目加起来，是吗？

费曼：就是计算脉冲的数目；你可以用一个像小型计步器那样的器件来进行计数，每一个脉冲按一次，或者你可以用电的方法，即用带有来回翻转状态电子管来做这事。然后，你如果要把它再积分，你可以用数值方法来做这些事——就像我们在黑板上做数值积分。你实质上是做一台加法机——不是积分器，而是加法机——我们用这加法机把数加起来，只要你设计正确，这些数里面不会出现明显的误差。所以由于积分器件引起的误差可以减少到零，不过，测量设备中，如摩擦力之类引起的误差仍旧存在。

他们在实际的火箭和潜水艇中还没有大量使用数字积分器。但是他们正在向这方向努力。他们可以消除积分机不精确所产生的误差——他们可以消除，只要你把信号转换成他们所说的数字信息——许多点——可计数的东西。

学生：这样你就有了一台数字计算机？

费曼：这样你就有了某种类型的小型数字计算机，它做两次数值积分。从长远来看这比模拟方法更好。

当前计算机大部分是模拟的，很可能将来都要转为数字式——大概在一年或两年内——因为里面没有误差。

学生：你可以用一百兆周逻辑！

费曼：速度不是最本质的；只是一个设计的问题。模拟积分器现在已经觉得太不精确了，最简单的办法就是改成数字式。我猜想，这或许就是下一步。

当然，实际的问题在于陀螺仪本身；它必须做得越来越好。

学生：多谢这有关应用的讲课。你是不是认为在这学期里以后还会讲更多一些？

费曼：你喜欢这类有关应用的内容？

学生：我打算将来去搞工程。

费曼：很好。这当然是机械工程中最美妙的东西之一。

我们来试一试.....

——它开动了吗？

学生： 没有。我想插头没有插上。

费曼： 啊，对不起。好了，现在接通电源。

学生： 我这样做了，它说是“关”。

费曼： 什么？我不知道怎么回事。没关系，很遗憾。

另一个学生： 能不能请你再说一遍科里奥利力怎样作用在陀螺上？

费曼： 好。

学生： 我已经知道它怎样作用在旋转木马上。

费曼： 很好。这里是一个绕它的轴旋转的轮子——像转动着的旋转木马。我要证明，为了使轴转向，我必须抵抗进动……或者说，支持轴的杆子上产生应变，明白吗？

学生： 明白。

费曼： 现在，我们来看看当我们使轴转向的时候陀螺飞轮上面一个特定质点实际上的运动方式。

假如整个飞轮没有转向，答案应当是粒子沿一个圆周运动。有离心力作用在它上面，离心力被飞轮沿轮辐作用的拉力所平衡。但飞轮是在非常快速地自转。当我们使轴转向的时候，飞轮也要转向，这一小块物质跟着飞轮也要转向一同运动，你明白吗？一开始它是在此

地；现在它到了这里：我们已经使它跑到上面，陀螺转向了，于是这一小块物质走了一条曲线。好，当你沿曲线运动的时候你必须用力拉——它产生离心力，如果它沿曲线运动就必定是这样。这个力不会被沿着轮辐的力平衡，轮辐的力是径向的；它需要被某个飞轮上的侧向推力来平衡。

学生： 啊！这样！

费曼： 所以当旋转轴在转向的时候要支持住转轴，我必须向侧面推它。你随我做做看？

学生： 好啊。

费曼： 还有一点要指出。你会问，“如果有一个侧向力为什么整个陀螺不沿侧向力的方向运动？”答案当然是，飞轮的另一边 按相反的方向 运动。如果你在飞轮转向的时候跟踪它另一边的粒子，你做同样的事情，就会发现那一边有一个相反方向的力。所以没有净力作用在陀螺上。

学生： 我开始明白了，但我还不明白飞轮的转向有什么差别。

费曼： 好，你看，它在世界上造成了所有的区别，它转得越快，效应就越强——虽然要知道为什么要花一点时间。因为如果它转得更快，那么上面的质点形成的曲线轨迹就不是很明锐。另一方面，它转得更快，就有用一点与另一点比照核对的问题。不管怎样，我们发现它走得更快时力就更大——事实上正比于速率。

另一个学生： 费曼博士……

费曼： 是，先生。

学生： 你真的能心算7位数字乘法吗？

费曼： 不，这不是真的。甚至说我能够心算两位 数字乘法也不是真的。我只能做一位 数字的乘法。

学生： 你认识华盛顿中央大学（Central College）的任何一位哲学老师吗？

费曼： 为什么？

学生： 是这样，我有一个朋友在那里。我曾有一阵子没有见到他，后来一次在圣诞节假期他问我这些日子里一直在干什么。我告诉他我进了加州理工学院。于是他问我，“你们那里是不是有一位叫费曼的老师？”——因为他的哲学老师告诉他在加州理工学院有一个名叫费曼的家伙，他能心算七位数的乘法。

费曼： 胡说。但我会做别的事情。

学生： 我能不能照几张仪器的照片？

费曼： 可以！你是要一张近照还是什么？

学生： 我看这样就很好，但主要是因为这是使我不会忘记你的一样东西。

费曼： 我也不会忘记你的。

[1] 世界上第一艘核动力潜艇美国舰船鹦鹉螺号（Nautilus）从夏威夷航行到英格兰，于1958年8月3日经过北极。它在北极冰帽下航行整整95个小时。

[2] 颠簸（pitch）指船首尾上下摆动，滚动（roll）指船身绕通过连结船首尾的轴左右摇摆。——译者注

[3] 《执事的杰作或奇妙的“单马车”：一则逻辑的故事》是奥利弗·温德尔·霍姆斯（Oliver Wendell Holmes）的诗，写的是一辆轻便马车，它设计得如此精美，使用了一百年，然后在瞬间化为灰尘。

[4] 对费曼博士来说，自转/晃动的盘子有特殊意义。他在《别逗了，费曼先生！》一书中的“受尊敬的教授”这一节末尾写道：“我获得诺贝尔奖的图解和全部工作都源自浪费在晃动盘子的无聊研究。”

[5] 费曼在这一节中谈到，物理学对他来说是“有趣”“好玩”的东西。研究物理学就好像读《天方夜谭》一样是一种乐趣。他讲到有一段时期他在自助食堂里看到有几个人把盘子丢向空中来取乐。费曼注意到盘子在自转并晃动，当盘子倾斜角度小时，转动可以比晃动快一倍。他就想到用一个复杂的方程式来描写盘子的运动。费曼从盘子的运动联想到电子轨道运动的相对论效应以及量子电动力学的狄拉克方程，等等。他“玩”物理——实际上就是研究。譬如说，他一旦开了窍，就好像打开一个瓶塞，里面的东西就自然地流出来了。开始时所做的工作好像毫无实际意义，但最后得到的东西却是非常重要的。他获得诺贝尔奖的工作就是从没有实用意义的晃动的盘子的无聊研究开始的。——译者注

5 习题选_[1]

下面的习题由《基础物理学习题》的各章分成小节组合起来。括号里提供了《费曼物理学讲义》第1—3卷中相应内容的卷、章位置。例如，5-1节中习题的题目，“能量守恒，静力学（第1卷，第4章）”是在《费曼物理学讲义》第1卷第4章中讨论的。

每一小节中的习题按照难度细分成几类。它们在每一小节里出现的次序是：容易的习题（*），中等习题（**），深奥而复杂的习题（***）。平均程度的学生做容易的习题应当没有困难，并且应当能够在适当的时间里——每题大约10到20分钟——做出大多数中等习题。更复杂的习题通常需要对物理有较深入的理解或更广泛的思路，主要为了使较好的学生感兴趣。

下文中图序号与题目序号一致，如图1-1表示题目1-1所对应的图。

5-1 能量守恒，静力学（第1卷，第4章）

* 1-1 半径为3.0 cm及重量为1.00 kg的球，静止于和水平面倾斜 α 角的平面上，它的一边紧靠垂直的墙面。两个表面上的摩擦力都可忽略不计。求球对各个平面的压力。

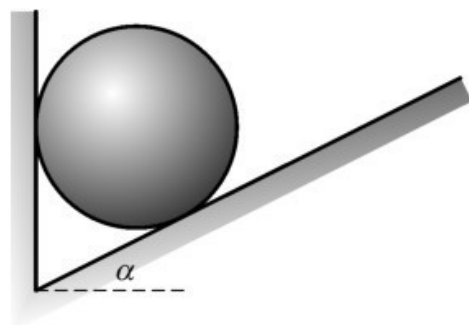


图 1-1

* 1-2 图中所示的是静力平衡系统。利用虚功原理求 A 和 B 的重量。忽略绳子的重量和滑轮的摩擦。

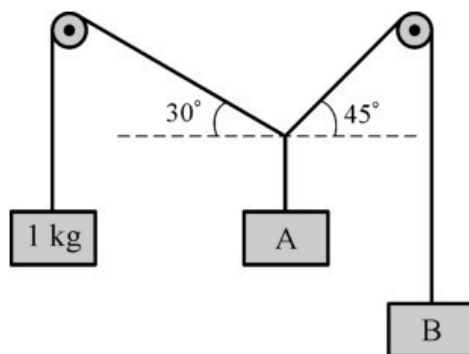


图 1-2

* 1-3 将重量为 W 、半径为 R 的轮子推上高度为 h 的台阶，需用多大的水平力（作用于轴上）？

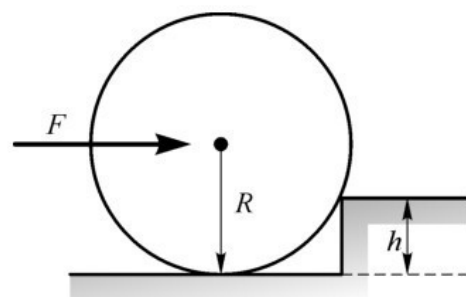


图 1-3

**** 1-4** 如图所示，质量 M_1 的滑块在高度 H 的 45° 斜面上滑动。该滑块通过一根质量可以忽略的柔性绳索，绕过一个小滑轮（忽略它的质量）连结到垂直悬挂的相等质量 M_2 上，如图所示。绳索的长度正好使两个质量都静止在 $H/2$ 的高度。滑块和滑轮的线度比之于 H 都可忽略不计。在 $t=0$ 时，两个滑块同时被释放。

a) 对 $t > 0$ ，计算 M_2 的垂直加速度。

b) 哪一个质量向下运动，它在什么时刻 t_1 撞击地面？

c) 假设（b）中的滑块在撞击地面时停止，而另一滑块继续运动，证明它是否会撞到滑轮。

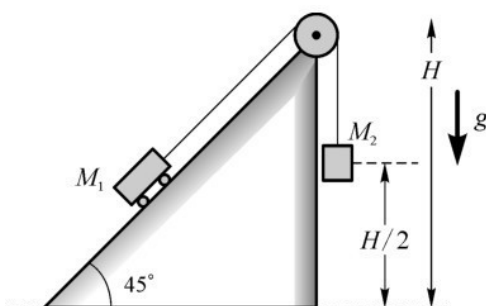


图 1-4

**** 1-5** 重量为 W 、长度为 $\sqrt{3}R$ 的板，放在半径为 R 、光滑的圆形凹槽上。板的一端有一重量 $W/2$ 的物体。求平衡时板与水平线的角度 θ 。

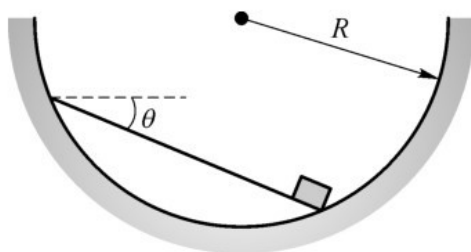


图 1-5

**** 1-6** 世界博览会的院子里的一个装饰物是由四个相同的、无摩擦的金属球组成，每个球重 $2\sqrt{6}$ 吨。这些球的安放如图所示，三个球放在水平面上，并互相接触；第四个球自由地放在其他三个球上。下面三个球相互接触的点用点焊焊住使不致分离。若允许的安全系数为3，那么点焊必须承受多大的张力？

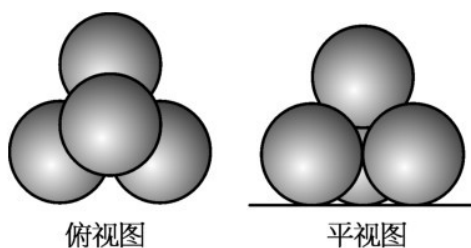


图 1-6

**** 1-7** 一个质量为 $M=3\text{ kg}$ 的线轴，芯子是半径 $r=5\text{ cm}$ 的圆柱，两端各有半径 $R=6\text{ cm}$ 的圆板，放在一个带槽沟的斜面上，它会沿槽沟滚动但不滑动。一个质量 $m=4.5\text{ kg}$ 的重物悬挂在绕线轴芯子圆柱的绳子上。观察到系统处在静平衡状态中，斜面的倾斜角 θ 是多少？

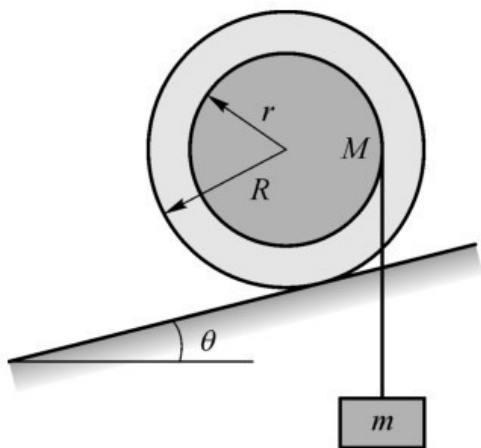


图 1-7

** 1-8 斜面上的一辆小车被重量 w 平衡，所有部件的摩擦力都可忽略。求小车的重量 W 。

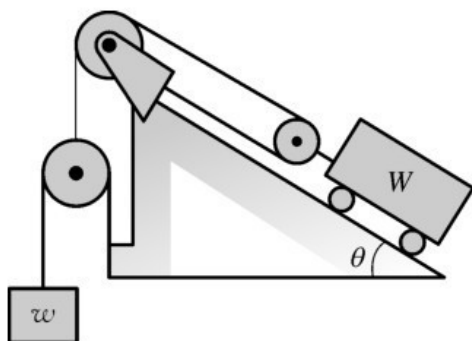


图 1-8

** 1-9 横截面为 A 的水箱装有密度为 ρ 的液体，液体从低于液体自由表面距离 H 处的一个面积为 a 的小孔自由地喷出。设液体没有内摩擦（黏性），它喷出时的速率是多少？

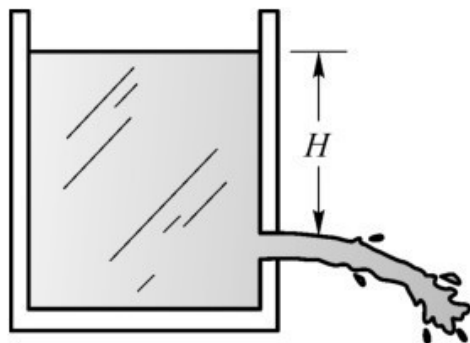


图 1-9

5-2 开普勒定律和万有引力（第1卷，第7章）

* 2-1 地球轨道的偏心率是0.016 7。求它轨道运动的最大速率和最小速率之比值。

** 2-2 真实的“地球同步轨道卫星Syncom”绕地球同步转动。它总是相对于地球表面上一点 P 保持固定不变的位置。

a) 考虑地球中心和卫星连结的直线。如果 P 点是这直线和地球表面的截点， P 能否有任何地理纬度，或必须有什么约束？试说明之。

b) 从地球中心到质量为 m 的同步卫星的距离 r_s 是多少？用地球到月球距离 r_{em} 为单位表示 r_s 。

提示：把地球看作均匀的球体，你可以设月亮周期为 $T_m=27$ 天。

5-3 运动学（第1卷，第8章）

* 3-1 负载科学仪器的高空探测气球以每分钟1 000英尺的速率上升。在高度30 000英尺时气球爆裂，负载自由下落。（这类灾难确实会发生！）

a) 经多少时间负载落到地面？

b) 负载撞击地面时速率多大？

忽略空气阻力。

* 3-2 设列车可以加速度 20 cm/s^2 加速，以 100 cm/s^2 减速。求列车在相距2 km的两个车站间运行的最短时间。

* 3-3 假如你在有阻力的真实空气中垂直向上抛掷一个小球，它上去和下来哪一个要更长的时间？

** 3-4 在一次课堂演示中，一个小钢球从钢板上弹起。在每一次反弹中，小球到达钢板的速率在反弹后减少一个因子 e ，就是：

$$v_{\text{向上}} = e \cdot v_{\text{向下}}$$

设开始时， $t=0$ ，小球从钢板上方高度50 cm处落下，30 s后，麦克风的声音静寂，表明小球停止弹跳。 e 的数值是多少？

** 3-5 汽车驾驶员跟着一辆卡车行驶时，突然发觉卡车后轮的两只后轮胎之间夹着一块石头。作为一个谨慎的驾驶员（也是一个物理学家），他立即使他和卡车的距离增加到22.5米，这样当石块松开飞出的情况下不致砸到他的车。卡车的运动速率是多大？（设石块在冲击地面时不会反弹。）

*** 3-6 没有和郊区交通警察打过交道的一位加州理工学院一年级新生，刚收到一张超速违章单据。因此，当他来到公路水平路段的“速率计测试”区时，他决定校验他的速率计读数。当他通过测试区起点的标记“0”时，他按下他的加速度计并在测试的整个时段内他使车子保持匀加速运动。他注意到当他经过0.1英里标杆时正好是他开始测试后16秒。8.0秒后，他通过0.20英里标杆。

a) 在0.20英里标杆处他的速率计读数是多少？

b) 他的加速度是多少？

*** 3-7 在爱德华兹空军基地的水平测试长轨道上，火箭和喷气马达都可试验。某一天，一台火箭发动机从静止开始，匀加速直到燃料消耗完以后它匀速前进。观察到火箭燃料用完时正当火箭经过测量的测试距离的中点。然后一台喷气马达从静止开始沿轨道运动，在整个路程中加速度是一个常数。观察到火箭和喷气马达二者都以完全相同的时间走完测试距离。喷气马达的加速度和火箭马达的加速度之比是多少？

5-4 牛顿定律（第1卷，第9章）

* 4-1 两个质量都是 $m = 1 \text{ kg}$ 的物体，用一根长度 $L = 2 \text{ m}$ 的紧绷的绳子连结，以不变的速率 $V = 5 \text{ m/s}$ 绕它们共同的中心 C ，在零 g 的环境中沿圆形轨道运动。绳子上的张力为多少牛顿？

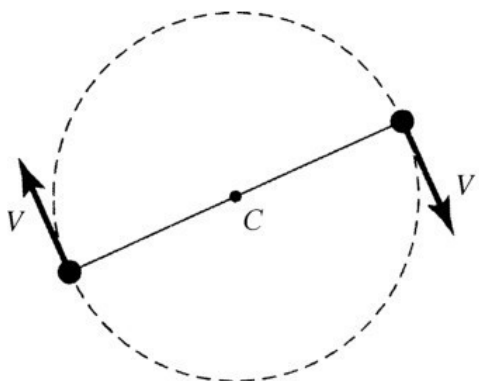


图 4-1

**** 4-2** 多大的水平力 F 必须不停地作用在 M 上使得 M_1 和 M_2 相对于 M 不动？忽略摩擦力。

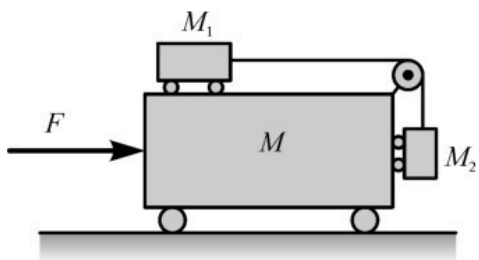


图 4-2

**** 4-3** 图中所示的是测量重力加速度的一种古老装置，称为阿特伍德机。滑轮 P 和绳索 C 的质量和摩擦都可忽略。系统中两边都用相等的质量 M 保持平衡，如图所示（实线）。然后在一边加上一个游码 m 。两个质量的组合起来就产生加速度，经过一定的距离 h 后，游码被一个环截住，然后两个相等的质量以不变速率 v 运动。用已知的 m 、 M 、 h 和 v 表示 g 的值。

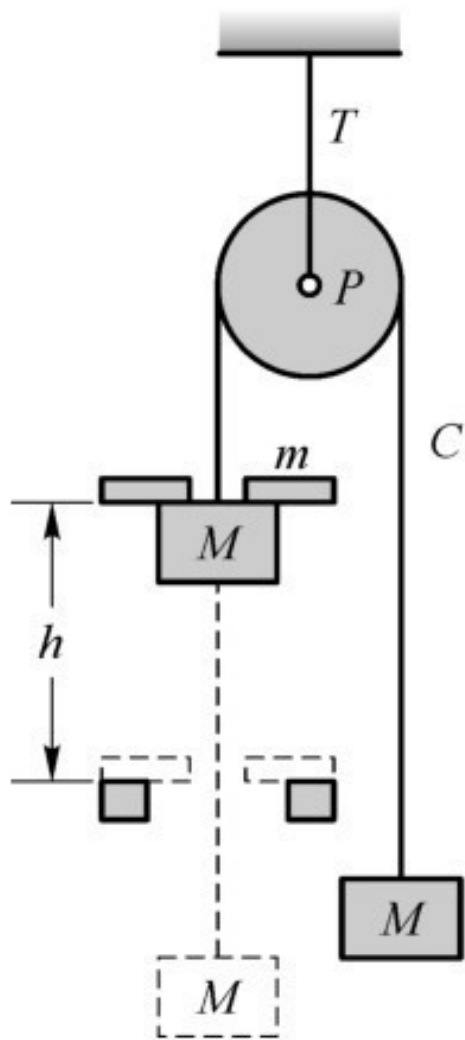


图 4-3

*** 4-4 一个重180磅的油漆工在高层建筑一边悬挂的“高空作业椅”上工作，他要想很快运动，他用力向下拉起重机的绳索，结果他作用于椅子上的压力只有100磅，椅子本身的重量为30磅。

- a) 油漆工和椅子的加速度是多大？
- b) 滑轮所支持的全部力多大？

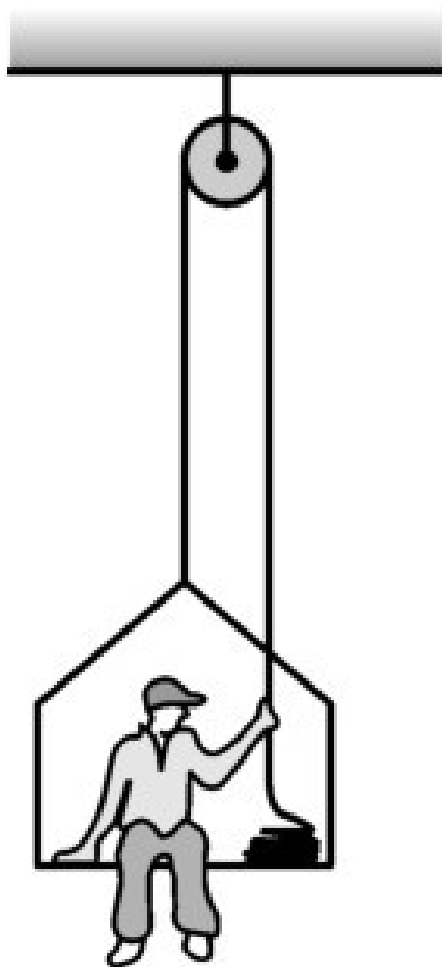


图 4-4

*** 4-5 一个准备到月球上去的空间旅行者有一台弹簧秤和一个质量为 1.0 kg 的物体 A 。在地球上把 A 挂在弹簧秤上得到读数为 9.8 牛顿。到达月球某处，这里的重力加速度的准确数值不知道，但知道大约是地球表面重力加速度数值的 $1/6$ 。他拾起一块石块 B ，用弹簧秤来称它，给出读数为 9.8 牛顿。然后他把 A 和 B 挂在一个滑轮上，如图所示。观察到 B 以加速度 $1.2\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 下落，石块 B 的质量是多少？

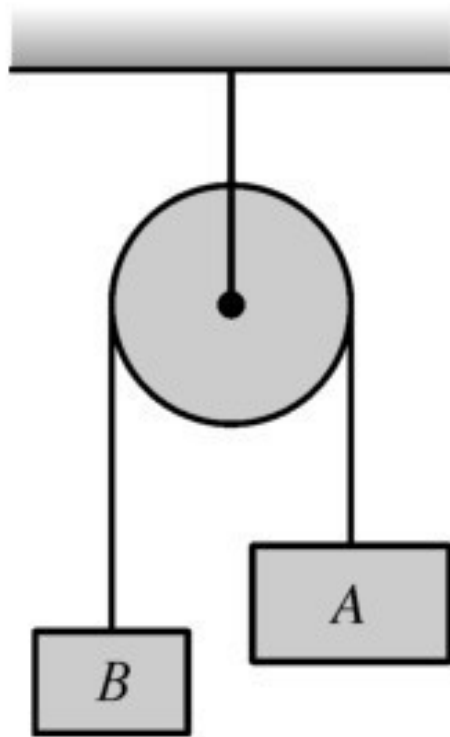


图 4-5

5-5 动量守恒（第1卷，第10章）

* 5-1 两个滑块在一根水平的气垫导轨上自由运动。一个滑块静止，另一滑块与它完全弹性碰撞。它们以相等、相反的速度弹开。它们的质量比是多少？

** 5-2 一挺机关枪架在10 000 kg、5 m长的平台的北端，平台可以在水平的气垫上自由运动。子弹射入装在平台南端很厚的靶中。机枪每秒发射10颗质量为100 g、枪口速度500 m/s的子弹。

a) 平台是否运动？

b) 向哪个方向？

c) 有多快?

**** 5-3** 单位长度质量为 μ 的链条，在 $t=0$ 时静止在桌面上。以不变的速率 v 将它垂直提起。估算作为时间函数的向上提举的力。

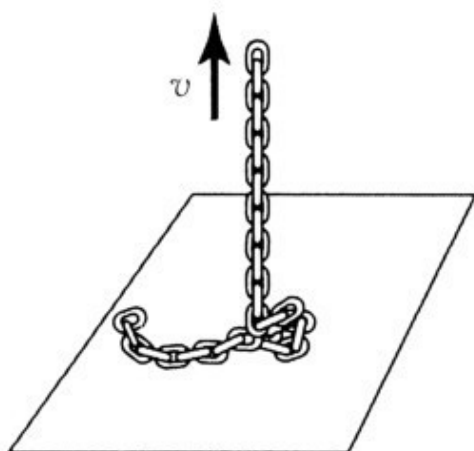


图 5-3

***** 5-4** 来复枪子弹的速率可以用冲击摆来测定。已知质量 m ，速率 V 未知的子弹射入质量为 M 的静止木块，木块悬挂构成长度 L 的摆。子弹射入木块使它摆动，摆动幅度 x 可以测量，利用能量守恒，木块在子弹撞击后即时的速度可以求出。用 M 、 L 和 x 表示子弹的速率。

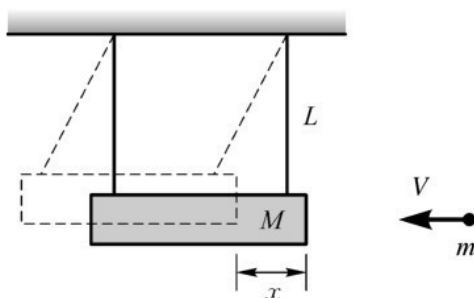


图 5-4

*** 5-5 两个质量相等的滑块在水平的气垫导轨上以相等、相反方向的速度 v 和 $-v$ 运动，它们作近乎弹性碰撞，反弹后速度变得较小。在碰撞中它们的动能损失了很小的一部分 $f \ll 1$ 。如果这两个同样的滑块中一块原来静止不动，碰撞后第二个滑块运动速率是多大？（很小的剩余速率 Δv 很容易用原来静止滑块的末速率 v 来表示，从而弹簧缓冲器的弹性就可以确定。）

提示：如 $x \ll 1$ ，则 $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ 。

*** 5-6 质量为10 kg、平均截面积为 0.50 m^2 的地球人造卫星沿圆形轨道在200 km高度运行，该处大气分子平均自由程是若干米，大气密度大约 $1.6 \times 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。做粗略的假设，分子和卫星的碰撞实际上是非弹性的（但分子并不是按字面上的意义粘在卫星上，而是以相对低的速度离开）。计算由于空气摩擦，卫星受到的减速力。这种摩擦力怎样随速度而变化？卫星的速率是否会因作用在它上面的净力影响而减小？

5-6 矢量（第1卷，第11章）

** 6-1 一个人站在宽度为1英里的河岸上，他想游到河的正对岸。他有两种方法去做：（1）对着上游某个地方游去，其结果是直接横穿河流。（2）向正对面游去，水流将他带到下游某地点上岸，从这里沿河岸步行到目的地。设他游泳速率2.5英里/时，步行速率4.0英里/时，水流速率为2.0英里/时。哪种方法是渡河最快的方法，快多少？

**** 6-2** 一艘摩托艇以恒常速率 V 相对于水行驶，水在直的运河中以不变速率 R 平稳地流动。首先，摩托艇从锚地出发，向着正上游距离为 d 的地点作来回行驶。然后它再从锚地出发，直接横穿运河到距离 d 的地点往返行驶。为简单起见，假设在所有情况中摩托艇都以全速行驶，并且在向外行程的终点到返回过程中没有损失时间。令 t_V 是船沿着水流在同一条线上往返航行所用的时间， t_A 为船横穿水流往返所用的时间， t_L 为船在平静的湖中行驶 $2d$ 路程所用的时间。

a) 比例 t_V/t_A 是多少？

b) 比例 t_A/t_L 是多少？

**** 6-3** 质量 m 悬挂在任意长度的绳索下端，绳索上端由无摩擦的支点固定。使该质量沿水平的圆形轨道旋转。轨道平面在支点下面，距离为 H 。求质量在它的轨道上旋转的周期。

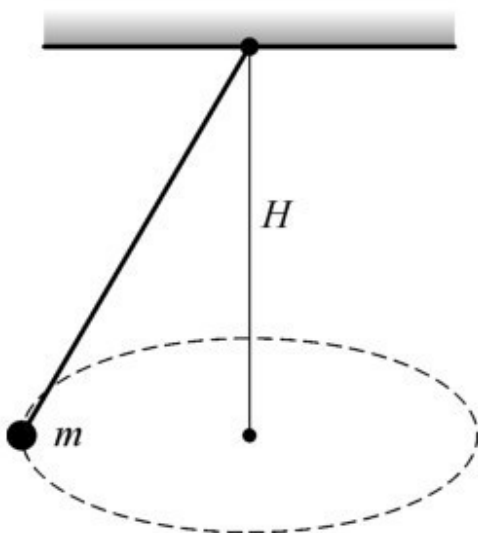


图 6-3

*** 6-4 你在向东以15节速率匀速航行的船上。观察到另一艘船在你的南方6英里处稳定的航线上，已知它的速率为26节；后来看到它经过你的后面，最近的距离为3.0英里。

a) 另一艘的航线是怎样的？

b) 它的位置在你的南面到离开你最近的位置之间有多少时间？

5-7 三维空间中非相对论两体碰撞（第1卷，第10章和第11章）

** 7-1 一个质量为 M 的运动着的粒子和一个质量 $m < M$ 的静止粒子作完全弹性碰撞。求入射粒子被偏转的最大可能角度。

** 7-2 质量为 m_1 的物体以直线速率 v 在实验室系统中运动，和静止在实验室中的质量为 m_2 的物体碰撞。碰撞以后，观察到在碰撞过程中，从质心系观察到动能损失了 $(1-\alpha^2)$ 。在实验室系统中能量损失的百分比是多少？

** 7-3 动能为1 MeV的质子和静止的原子核弹性碰撞并被偏转到 90° 方向。如质子现在的能量变为0.80 MeV，靶原子核的质量用质子质量为单位表示应是多少？

5-8 力（第1卷，第12章）

* 8-1 两个质量 $m_1=4\text{ kg}$, $m_3=2\text{ kg}$, 用重量可以忽略的绳子通过无摩擦的滑轮连接到第三个质量 $m_2=2\text{ kg}$ 上。质量 m_2 在摩擦系数为 $\mu=1/2$ 的长桌上移动。系统从静止释放后, 质量 m_1 的加速度是多少?

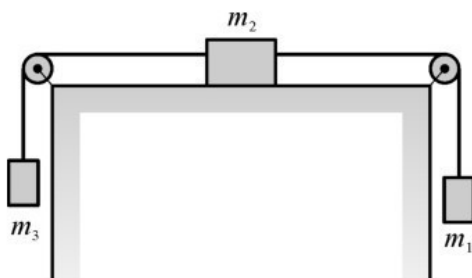


图 8-1

** 8-2 一颗 5 g 的子弹水平地射进静止在水平表面上的 3 kg 木块中。在木块和表面之间的滑动摩擦系数是 0.2 。子弹陷在木块中, 观察到木块沿表面滑动 25 cm 。子弹的速度为多大?

** 8-3 在考察汽车事故现场时, 警察通过测量发现, A 车在和 B 车碰撞之前留下刹车滑行痕迹 150 英尺长。他们还知道在橡胶和事故现场的路面之间的摩擦系数不小于 0.6 。证明车 A 在事故前的瞬间车速一定超过了明示的速率极限每小时 45 英里。(提示: $60\text{ 英里/时}=88\text{ 英尺/秒}$, 重力加速度 $=32\text{ 英尺/秒}^2$)。

** 8-4 一辆有空调的校车到达和铁路交叉的道口。一个孩子将一个氢气球拴在座位上。你观察到气球的系绳与垂直线成 30° 角, 偏向校车运动方向。驾驶员正在将车子减速还是在加速, 大小如何? (公路巡查员对驾驶员的技术会做怎样的评价?)

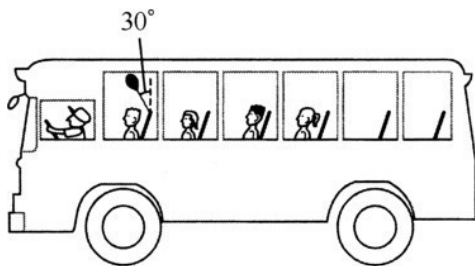


图 8-4

*** 8-5 重量为 W 的质点静止于粗糙的斜面上，斜面和水平面成 α 角。

a) 设静摩擦系数 $\mu = 2 \tan \alpha$ ，求能够引起质点运动的横着斜坡作用于质点的最小水平力 $H_{\min}$ 。

b) 它将沿哪个方向运动？

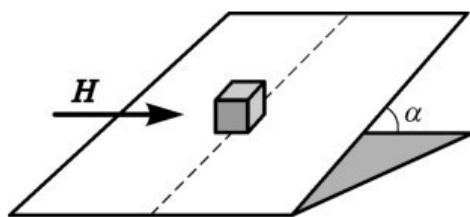


图 8-5

5-9 势和场（第1卷，第13章和第14章）

* 9-1 质量 m 和弹簧常量为 k 的弹簧碰撞。它第一次停止在哪个位置？忽略弹簧质量。

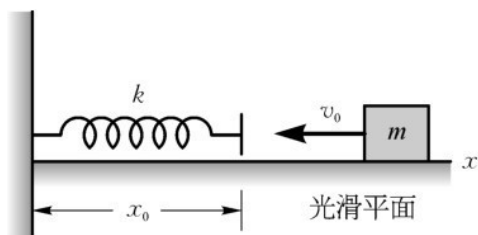


图 9-1

* 9-2 空心球形小行星在空间自由运动。它的内部有一个质量 m 的微小粒子。球内部哪一点是粒子的平衡位置？

* 9-3 物体摆脱地球引力场需要的速率（近似地）等于7.0英里/秒。给一个行星际探测器初速度8.0英里/秒，正好到达地球大气层之上。当它距地球 10^6 英里时，相对于地球运动的速率有多大？

** 9-4 一辆小型、无摩擦的车子沿倾斜的轨道滑行，轨道下端有半径为 R 的垂直圆形环路。要使小车不离开轨道，小车必须从垂直环路顶点以上多大的高度 H 开始下滑？

** 9-5 长度为 L 的柔性电缆，其重量线密度为 M kg/m，挂在一个质量、半径和摩擦都可忽略不计的滑轮上。开始时电缆正好平衡，给它微小的推动，破坏了平衡，于是它开始加速运动。求当其末端离开滑轮时的速率。

** 9-6 一个质点在半径为 R 的无摩擦的球体的顶点从静止开始在重力作用下沿球面滑动。到飞离球面以前，它从起点滑下了多少路？

** 9-7 重1 000 kg的汽车用一台额定功率为120 kW的引擎发动。如在 $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速率时这台引擎发挥出这一功率，在这速度下汽车可以达到的最大加速度是多少？

**** 9-8** 推铅球、掷铁饼和掷标枪的世界纪录（1960年）分别是19.30 m、59.87 m和86.09 m。上述这些投掷物的质量分别是7.25 kg、2 kg和0.8 kg。试比较各位创纪录者在他们创纪录的一次投掷中所做的功。假设各轨道都起始于地平线以上高度1.80 m，初始仰角45°，忽略空气的阻力。

***** 9-9** 一个质量为 m 的卫星在圆形轨道上绕一个质量 M （ $M \gg m$ ）的小行星运动。假如小行星的质量突然减少[2]到原来值的一半，卫星会发生什么变化？描写它新的轨道。

5-10 单位和量纲（第1卷，第5章）

*** 10-1** 生长在不同行星上的两位宇宙物理学家莫伊和乔伊在一次关于重量和测量的行星际专题讨论会上相遇，讨论建立一个普适的单位系统。莫伊自豪地描述了地球上所有文明地区都使用的MKSA系统的优点。乔伊同样自豪地描述了太阳系所有其他部分使用的M'K'S'A'系统的美妙。假设联系两个系统的基的质量、长度和时间标准的因子是 μ 、 λ 和 τ ，于是：

$$m' = \mu m, \quad l' = \lambda l, \quad \text{以及} \quad t' = \tau t$$

那么，速度、加速度、力和能量在这两个系统之间变换的因子是什么？

**** 10-2** 如果要按比例做一个太阳系的模型，用和太阳及地球同样相对平均密度的材料来制造，但所有的线度按比例因子 k 减小，行星的旋转周期如何依赖于 k ？

5-11 相对论性能量和动量（第1卷，第16章和第17章）

* 11-1

a) 用动能 T 和静止能量 $m_0 c^2$ 表示粒子的动量。

b) 动能等于它的静止能量的粒子速度是多少？

** 11-2 一个静止 π 介子（ $m_\pi = 273 m_e$ ）衰变成一个 μ 子（ $m_\mu = 207 m_e$ ）和一个中微子（ $m_\nu = 0$ ）。求用MeV表示的 μ 子和中微子的动能和动量。

** 11-3 质量为 m ，以速度 $v = 4c/5$ 运动的粒子，和同样的静止粒子非弹性碰撞。

a) 组合粒子的速率是多少？

b) 它的质量是多少？

** 11-4 一个光子（ γ ）被静止的质子吸收会产生质子——反质子对。

$$\gamma + p \longrightarrow p + (p + \bar{p})$$

光子必须具有的最小能量 E_γ 是多少？（用质子静止能量 $m_p c^2$ 表示 E_γ ）。

5-12 二维空间中的转动，质心（第一卷，第18章和第19章）

** 12-1 一个密度均匀的圆盘上挖去一个圆孔，如图所示，求质心。

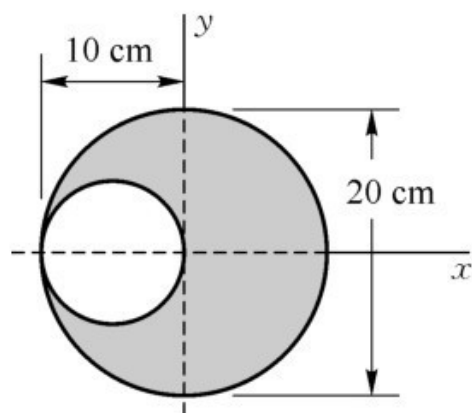


图 12-1

** 12-2 一个固体圆柱的四个象限有不同的密度，如图所示。图中数字表示相对密度，如 x - y 轴按图所示，则通过原点并通过质心的直线的方程式怎样表示？

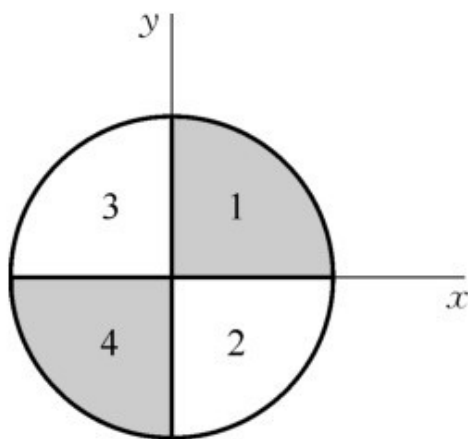


图 12-2

**** 12-3** 有一片正方形的均匀金属片，从它的一边截下一片如图所示的等腰三角形，如要求在截去的三角形的顶点 P 的位置将剩下的金属片悬挂起来，它在任何位置都会保持平衡。被截除的三角形的高度应该是多少？

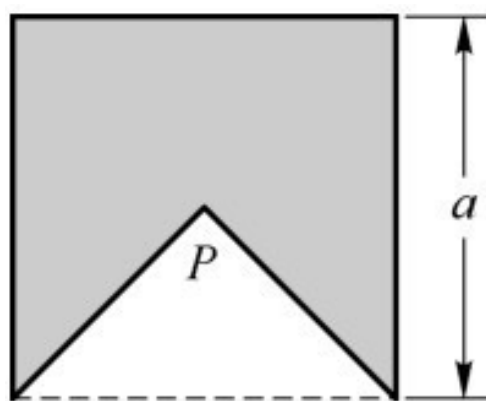


图 12-3

**** 12-4** 质量 M_1 和 M_2 放在长度 L 、质量可以忽略的刚性棒的两端； M_1 和 M_2 的线度比之于 L 可以忽略。使棒绕垂直于它的轴转动。为了使棒以角速度 ω_0 转动所需要的功为最小值，转轴应该通过棒的哪一点？

***** 12-5** 长度为 L 的均匀砖块平放在光滑的水平表面上。将另一些同样的砖块叠放到它上面，如图。这些砖块的左右两边形成连续的平面，但每一砖块的端点都与前一块相互错开一个距离 L/a ，其中 a 是一个整数。用这种方式最多可以叠上多少块砖而不致倒塌？

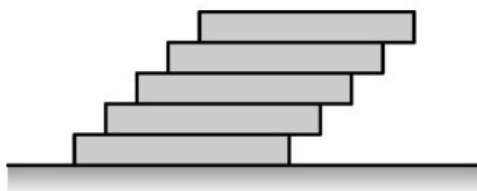


图 12-5

*** 12-6 如图所示的旋转节速器设计成当和节速器直接连接着的机器转速达到每分钟120转（120 rpm）时关闭动力。操纵环 C 重10.0磅，它能无摩擦地沿垂直杆 AB 滑动。 C 被设计为当距离 AC 减少到1.41英尺时关闭动力。设节速器框架无摩擦的支枢之间的四根连杆各长1.00英尺，可以不考虑它们的质量。如要节速器能够按所要求的条件操作，质量 M 的数值应该是多少？

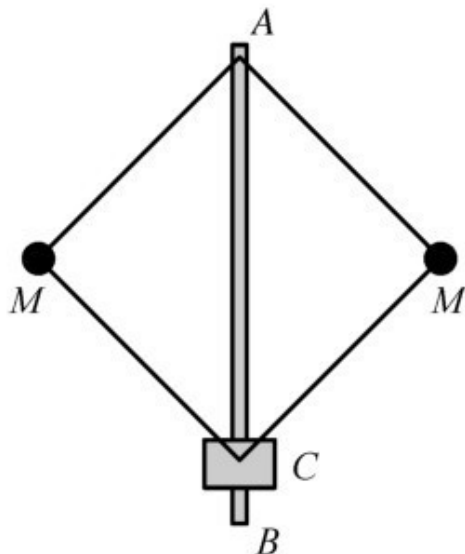


图 12-6

5-13 角动量，转动惯量（第1卷，第18章和第19章）

* 13-1 一根长度为 L 、质量 M 的直而均匀的金属线在其中点 A 弯折，形成角度 θ 。对于通过 A 点并垂直于弯折线所决定的平面的轴的转动惯量是多少？

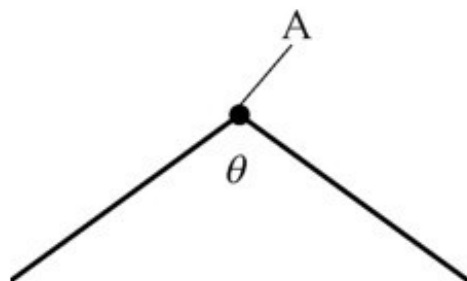


图 13-1

* 13-2 质量 m 挂在绕过质量 M 、半径 r 的圆柱体的绳子上，圆柱体的轴和轴承间的摩擦力可忽略，如图所示。求 m 的加速度。

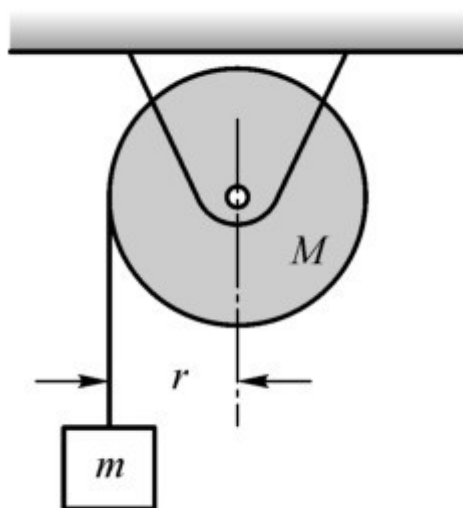


图 13-2

** 13-3 一根质量为 M 、长度为 L 的水平放置的细杆，一端放在支点上，另一端用绳子悬挂。当绳子刚被烧断时杆子即时作用在支点上的力有多大？

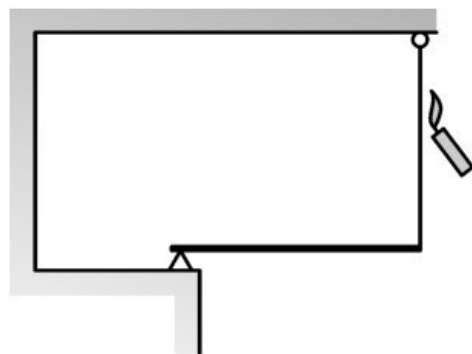


图 13-3

**** 13-4** 一个对称的物体从静止开始沿高度为 h 的斜面（无滑动地）滚下。对物体质心的转动惯量为 I ，其质量为 M ，滚动表面和斜面接触的半径为 r 。求到达斜面底部时质心的线速度。

**** 13-5** 在一条与水平成 θ 角的无限的传送带上放着一个均匀的圆柱体，它的轴水平并垂直于传送带边缘。圆柱体可以在传送带表面无滑动地滚动。传送带应当怎样运动使得圆柱体在自由释放后，它的轴始终不动。

**** 13-6** 半径为 r 的圆环无滑动地滚下斜面，起始高度为 h 时，圆环获得的速度正好沿垂直圆轨道转一圈，——就是说，在圆轨道顶点，圆环正好和轨道接触。 h 等于多少？

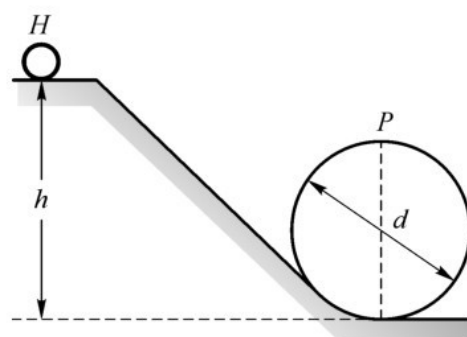


图 13-6

*** 13-7 半径 R 、质量 M 的均匀的保龄球开始抛出时使它以速率 V_0 在摩擦系数为 μ 的滑道上滑动而不滚动，球走了多远开始滚动而不滑动，这时速率是多少？

*** 13-8 一个有趣的把戏是在水平的桌面上用手指将一个弹子往下压挤，使弹子沿桌面以初始线速度 V_0 向前射出，同时弹子有一个初始向后转动的角速度 ω_0 ， ω_0 是对于绕垂直于 V_0 的水平轴的转动。弹子和桌面的滑动摩擦系数是常数。弹子的半径为 R 。

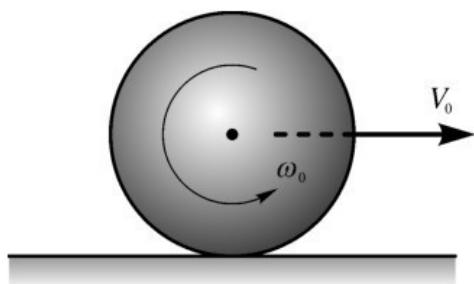


图 13-8

a) 在 V_0 、 R 和 ω_0 之间必须有怎样的关系才能使弹子滑动到完全停止？

b) V_0 、 R 和 ω_0 之间要有怎样的关系才能使弹子滑动到停止并随后开始回头向起始位置运动，并且其最终的恒常线速度为 $3/7V_0$ ？

5-14 三维空间中的转动（第1卷，第20章）

* 14-1 一架喷气式飞机上的所有引擎都按右手螺旋指向飞行的方向旋转。飞机向左转弯时，引擎的陀螺效应倾向于使飞机：

- a) 向右滚动。
- b) 向左滚动。
- c) 向右偏航。
- d) 向左偏航。
- e) 向上抬起。
- f) 向下沉降。

**** 14-2** 两个相同的质量用柔软的绳子连接起来。实验人员用手抓住一个质量并使另一个质量在水平的圆周上绕手上的质量运动，然后他松手放掉抓住的质量。

- a) 如果绳子在实验中断掉，它是在放手以前还是在放手以后断掉。
- b) 如果绳子没有断，描写放手后两质量的运动。

**** 14-3** 质量 m 、半径 R 的木质细圆环静止在无摩擦的水平桌面上。一颗质量也是 m 的子弹以水平速度 v 撞击圆环并嵌入其中，如图所示。计算质心速度，系统对质心的角动量，圆环的角速度 ω ，以及碰撞前后系统的动能。

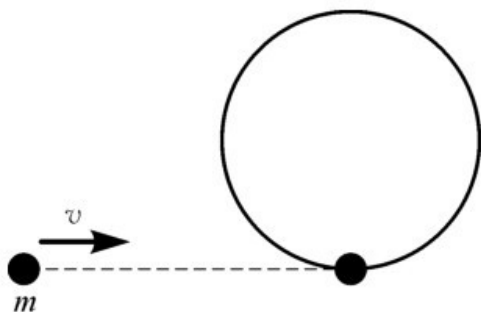


图 14-3

**** 14-4** 一根质量 M 和长度 L 的细杆平放在无摩擦的水平面上。一小块质量也是 M 的油灰，沿桌面垂直地向着杆子以速度 v 撞击杆子的一端并粘在上面，在非常短时间里发生非弹性碰撞。

- a) 碰撞前后系统的质心速度是多少？
- b) 碰撞前后系统对于它的质心的角动量是多少？
- c) 碰撞前后（对它的质心）角速度是多少？
- d) 碰撞中损失了多少动能？

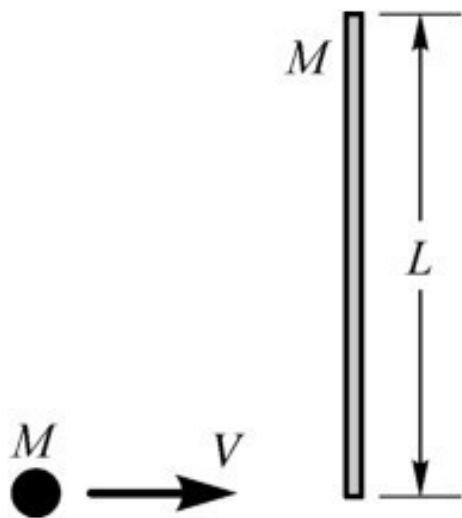


图 14-4

**** 14-5** 一根质量为 M 、长度为 L 的均匀细杆 AB 可以在垂直平面中绕位于端点 A 的水平轴自由转动。一块质量也是 M 的油灰，在杆子静止时以速度 V 水平地投向杆子下端 B 。油灰粘在杆子上，要使杆子能绕 A 转圈，油灰在碰撞前最小的速度应是多少？

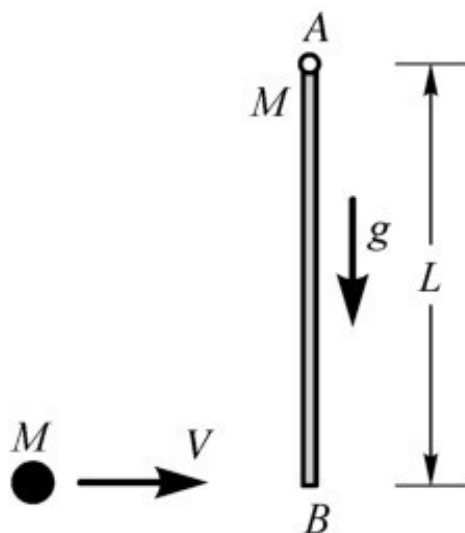


图 14-5

**** 14-6** 静止的转台 T_1 上安装着以角速度 ω 转动的另一转台 T_2 。在某一时刻，一个内部的离合器作用在 T_2 的轴上使 T_2 相对于 T_1 停止，但 T_1 仍可以自由转动。 T_1 本身具有质量 M_1 和相对于通过它的中心并垂直于它的平面的轴 A_1 的转动惯量 I_1 。 T_2 具有质量 M_2 和对于同样安置的轴 A_2 的转动惯量 I_2 。 A_1 和 A_2 的距离是 r 。求 T_2 停止后 T_1 的 Ω 。（ Ω 是 T_1 的角速度。）

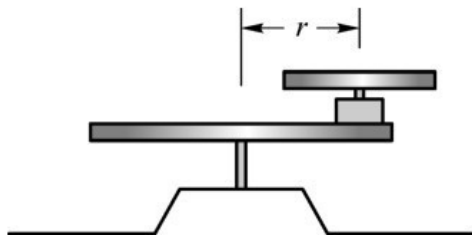


图 14-6

*** 14-7 一根质量为 M 、长度为 L 的直立杆子在它的基础上受到与水平成 45° 的向上冲量 J ，这冲力使杆子飞起。 J 应有多大的数值使得杆子重又垂直落下（即直立在 J 作用的一端上）？

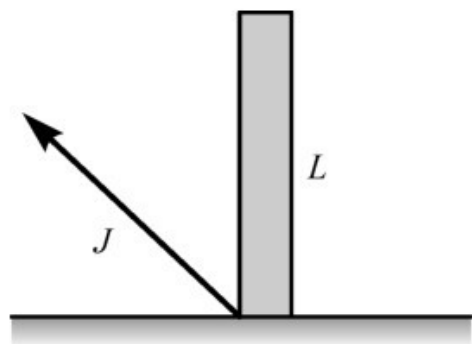


图 14-7

*** 14-8 转动惯量 I_0 的转台可自由地绕空心的垂直轴转动。质量为 m 的小车无摩擦地在转台的径向直线轨道上运动。一根连接小车的绳子通过小滑轮向下进入空心轴。开始时整个系统以角速度 ω_0 转动，小车在离轴距离 R 的位置。然后小车被作用在绳子上附加的力向里拉，最后到达半径 r 处，让它停留在这个位置。

a) 系统新的角速度是多少？

b) 详细证明系统在两种情况下能量的差等于向心力做的功。

c) 如放开绳子, 小车将以多大的径向速率 dr/dt 通过半径 R 处?

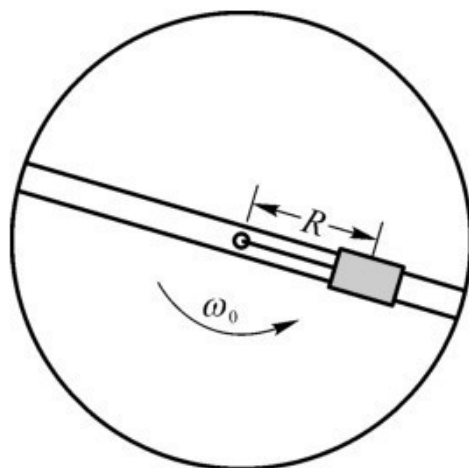


图 14-8

*** 14-9 质量为 10.0 kg , 半径 1.00 m 的均匀薄圆板形状的飞轮装在通过它的质心的轴上, 轴和飞轮平面成 $1^\circ 0'$ 的角度。如它以角速度 $25.0\text{ 弧度}\cdot\text{秒}^{-1}$ 转动, 轴承上需要施加多大的转矩?

[1] 采自罗伯特·B·莱顿和罗丘斯·沃格特《基础物理学习题》, 1969, 艾迪生-卫斯利, Library of Congress Catalog Card No 73-82143。参见本书迈克尔·戈特利勃的导言中“[习题](#)”一节。

[2] 这可能在这种情况下发生: 卫星被安置在离小行星很大的距离上以监视小行星上核武器试验。爆炸排出小行星质量的一半, 而不直接影响远距离的卫星。

习题答案

1-1 $F_P = \frac{1}{\cos \alpha}$ 千克重, $F_W = \tan \alpha$ 千克重

1-2 $A = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ 千克重, $B = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 千克重

1-3 $F = W \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$

1-4 a) $a = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) g$

b) M_2 , $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}}$

c) 没有

1-5 $\theta = 30^\circ$

1-6 2吨重

1-7 $\theta = 30^\circ$

1-8 $W = \frac{4w}{\sin \theta}$

1-9 $V = \sqrt{2gH}$

2-1 1.033

2-2 a) $\lambda=0$

b) $r_s = \frac{1}{9}r_{an}$

3-1 a) $t=1\,843.8$ 秒

b) $V \approx 1\,385$ 英尺/秒

3-2 $\approx 155\text{ s}$

3-3 向下时

3-4 $e \approx 0.98$

3-5 14.8 m/s

3-6 a) 52.5 英里/时

b) 2.75 英尺/秒²

3-7 $a_5 = \frac{8}{9}a_R$

4-1 $T=25\text{ N}$

4-2 $F = \frac{M_2}{M_1}(M + M_1 + M_2)g$

4-3 $g = \frac{V^2(2M + m)}{2mh}$

4-4 a) $a_{\text{上}} = g/3$

b) 280磅

4-5 $m_B \approx 5.8 \text{ kg}$

5-1 $m_2/m_1 = 3$

5-2 a) 是的

b) 向北

c) $V = 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

5-3 $F = \mu v (v + g t)$

5-4 $V = x \frac{m+M}{m} \sqrt{\frac{g}{L}}$

5-5 $\Delta v \approx v \frac{f}{\Delta}$

5-6 $F_R = 5.1 \times 10^{-3} \text{ N}$ $F_R \propto -v^2$

6-1 第二种方法, 4.0分钟

6-2 $\frac{t_V}{t_A} = \frac{V}{\sqrt{V^2 - R^2}}$ $\frac{t_A}{t_L} = \frac{t_V}{t_A}$

6-3 $T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}$

6-4 a) 正北

b) 0.17时

$$7-1 \quad \theta_{\max} = \sin^{-1} \frac{m}{M}$$

$$7-2 \quad \left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{\text{实验室}} = \frac{(1 - \alpha^2)m_2}{m_1 + m_2}$$

$$7-3 \quad \frac{M}{m_p} = 9$$

$$8-1 \quad a = -\frac{g}{8}$$

$$8-2 \quad v_0 = 595 \text{ m/s}$$

$$8-3 \quad 51.8 \text{ 英里/时}$$

$$8-4 \quad \text{加速} \quad a = \frac{g}{\sqrt{3}} \text{ m/s}^{-2}$$

$$8-5 \quad \text{a) } \sqrt{3}W \sin \alpha$$

$$\text{b) } \phi = 60^\circ$$

$$9-1 \quad x_0 - x = x_0 - v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$9-2 \quad \text{任何地方}$$

$$9-3 \quad v_\infty \approx 3.9 \text{ 英里/秒}$$

$$9-4 \quad H = \frac{1}{2}R$$

$$9-5 \quad v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

$$9-6 \quad \frac{R}{3}$$

$$9-7 \quad 7.2 \text{ m/s}$$

$$9-8 \quad \approx 625 \text{ J} \quad \approx 570 \text{ J} \quad \approx 330 \text{ J}$$

9-9 卫星会沿抛物线轨道逃逸。

$$10-1 \quad v' = \frac{\lambda}{\tau} v \quad a' = \frac{\lambda}{\tau^2} a \quad F' = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} F \quad E' = \frac{\mu \lambda^2}{\tau^2} E$$

10-2 T 不依赖于 k

$$11-1 \quad pc = T \left(1 + \frac{2m_0 c^2}{T} \right)^{1/2} \quad \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$11-2 \quad T_\mu = 4.1 \text{ MeV} \quad T_\nu = 29.7 \text{ MeV} \quad P_\mu = P_\nu = 29.7 \text{ MeV}/c$$

$$11-3 \quad \text{a) } c/2$$

$$\text{b) } \frac{4}{\sqrt{3}} m$$

$$11-4 \quad E_r = 4m_p c^2 \quad (3.8 \text{ GeV})$$

$$12-1 \quad x = 1.7 \text{ cm}$$

$$12-2 \quad y = \frac{1}{2} x$$

$$12-3 \quad \frac{a}{2} (3 - \sqrt{3})$$

$$12-4 \quad x = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2} \quad (\text{从 } m_2 \text{ 算起})$$

$$12-5 \quad n = a$$

$$12-6 \quad M = 4.0 \text{ 磅}$$

$$13-1 \quad I = \frac{mL^2}{12}$$

$$13-2 \quad a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$

$$13-3 \quad F = \frac{Mg}{4}$$

$$13-4 \quad V_0 = r \sqrt{\frac{2Mgh}{I + Mr^2}}$$

$$13-5 \quad a = 2g \sin \theta$$

$$13-6 \quad h = \frac{3d}{2} - 3r$$

$$13-7 \quad D = \frac{12V_0^2}{49\mu g} \quad V = \frac{5}{7}V_0$$

$$13-8 \quad \text{a) } V_0 = \frac{2}{5}R\omega_0$$

$$\text{b) } V_0 = \frac{1}{4}R\omega_0$$

$$14-1 \quad (\text{e})$$

14-2 a) 以前

$$\text{b) } V_{\text{CM}} = \frac{l}{2} \omega_0 \quad \omega = \omega_0 \quad (l \text{ 为绳子长度})$$

$$14-3 \quad V_{\text{CM}} = \frac{v}{2} \quad L = \frac{mvR}{2} \quad \omega = \frac{v}{3R}$$

$$K.E. \mid_1 = \frac{mv^2}{2}$$

$$K.E. \mid_2 = \frac{mv^2}{3}$$

$$14-4 \quad \text{a) } \frac{v}{2}$$

$$\text{b) } Mv \frac{L}{4}$$

$$\text{c) } \frac{6}{5} \frac{v}{L}$$

$$\text{d) } 20\%$$

$$14-5 \quad V = \sqrt{8gL}$$

$$14-6 \quad \Omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2 + M_2 r^2} \omega$$

$$14-7 \quad J = M \sqrt{\frac{\pi g L n}{3}} \quad (n = \text{整数})$$

$$14-8 \quad \text{a) } \omega = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} \omega_0$$

$$\text{b) } (\text{答案未给出})$$

$$\text{c) } v = \omega_0 \sqrt{\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}} (R^2 - r^2)$$

$$14-9 \quad T \approx 27 \text{ N}\cdot\text{m}$$

照片惠允

导言页 费曼 大约1962年（摄影者未知） 承蒙拉尔夫·莱顿提供

[此处](#) Jean Aston Rare Book and Manuscript Library, Butler图书馆, 哥伦比亚大学六楼, 535 West 114th Street, 纽约, NY 10027

[此处](#) 布里斯托（Bristol）大学, 物理系

[此处](#) 加利福尼亚理工学院

EXERCISES FOR THE
Feynman
LECTURES ON PHYSICS

The New Millennium Edition

费曼

物理学讲义
习题集

· 新千年版 ·

[美] 费曼 (Richard Feynman) [美] 莱顿 (Robert Leighton) [美] 桑兹 (Matthew Sands) 等著

[美] 戈特利布 (Michael A. Gottlieb) [美] 法伊弗 (Rudolf Pfeiffer) 编

杨文超 译



上海科学技术出版社

费曼物理学讲义习题集

(新千年版)

[美] 费曼(Richard Feynman)
莱顿(Robert Leighton)
桑兹(Matthew Sands)等 著
[美] 戈特利布(Michael A. Gottlieb)
法伊弗(Rudolf Pfeiffer) 编
杨文超 译

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

费曼物理学讲义习题集：新千年版 / （美）费曼（Richard Feynman）等著；杨文超译．—上海：上海科学技术出版社，2020.3

ISBN 978-7-5478-4716-9

I. ①费... II. ①费...②杨... III. ①物理学—高等学校—习题集
IV. ①O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2020）第032488号

EXERCISES FOR THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS

by Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, et al.,
edited by Michael A.

Gottlieb and Rudolf Pfeiffer

Copyright © 2014 by California Institute of Technology, Michael A. Gottlieb,
and Rudolf Pfeiffer

Originally published by Basic Books, A Member of the Perseus Books
Group

Simplified Chinese translation copyright © 2017 by Shanghai Scientific and
Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books
LLC
through Bardon-Chinese Media Agency
ALL RIGHTS RESERVED.

费曼物理学讲义习题集（新千年版）

[美] 费曼 (Richard Feynman) 莱顿 (Robert Leighton) 桑兹
(Matthew Sands) 等 著

[美] 戈特利布 (Michael A. Gottlieb) 法伊弗 (Rudolf
Pfeiffer) 编

杨文超 译

上海世纪出版(集团)有限公司 出版、发行
上海科学技术出版社

(上海钦州南路71号 邮政编码 200235 www.sstp.cn)

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16

印张 21

字数 450千字

2020年3月第1版 2020年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-4716-9/O·82

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

序

现在的这本与《费曼物理学讲义》相配套的习题全集有3个来源：莱顿（Robert Leighton）和沃格特（Rochus Vogt）的《物理学导论习题集》[*Exercises in Introductory Physics* (Addison-Wesley, 1969)] 以及加州理工学院编写的《费曼物理学讲义习题集》[*Exercises for The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, 1964—1965)] 的第2卷和第3卷。原先的习题以全新的面貌呈现：图形进行重绘，使用现代单位制^[1]。《费曼物理学讲义习题集》的第2卷和第3卷新加了很多题目，同时提供了习题解答，这在以前的版本中是没有的。这是《费曼物理学讲义》3卷的习题首次统一出版，也是首次提供几乎所有习题的答案。

这里的所有习题曾经是加州理工学院两学年必修课程上留给学生的家庭作业以及测验试题；费曼本人教学的1961年至1964年以及随后的近20年间（《费曼物理学讲义》是必修课指定教材）都是如此。其间，很多人对题目的设计、编写作出了重要贡献，在每一卷前言的感谢中将看到他们的名字。另外，我们还要感谢：

加州理工学院物理系、数学系和天文学系，他们许可我们编写出版这册习题集；

沃格特，他为我们提供了他的笔记本，这是他在加州理工学院多年教学的积累；

考恩（Eugene Cowan），他为我们提供了《费曼物理学讲义习题集》第2卷、第3卷习题解答的复印件；

齐默尔曼（Aaron Zimmerman），他审阅了提供给加州理工学院的新资料；

科克伦（Adam Cochran），他和Basic Books就出版协议进行了成功的协商。

戈特利布（Michael A. Gottlieb）和法伊弗（Rudolf
Pfeiffer）

《费曼物理学讲义：新千年版》编者

2013年12月

[1] 未使用国际单位制（SI）的地方参考附录A。——译者注

目 录

序

第1卷

导言

1 原子的运动

2 能量守恒，静力学

3 开普勒定律与引力

4 运动学

5 牛顿定律

6 动量守恒

7 矢量

8 三维空间中的非相对论性两体碰撞

9 力

10 势与场

11 单位和量纲

12 相对论性运动学和动力学，质量和静止能量等效性

13 相对论性能量和动量

14 二维转动，质心

15 角动量，转动惯量

16 三维转动

17 简谐振子，线性微分方程

18 代数

19 受迫阻尼振荡

20 几何光学

- [21 电磁辐射：干涉](#)
- [22 电磁辐射：衍射](#)
- [23 电磁辐射：折射，色散，吸收](#)
- [24 电磁辐射：辐射阻尼，散射](#)
- [25 电磁辐射：偏振](#)
- [26 电磁辐射：相对论效应](#)
- [27 量子行为：波，粒子以及光子](#)
- [28 气体分子动理论](#)
- [29 统计力学原理](#)
- [30 分子动理论的应用：均分定理](#)
- [31 分子动理论的应用：输运现象](#)
- [32 热力学](#)
- [33 热力学示例](#)
- [34 波动方程，声](#)
- [35 线性波系统：拍，模](#)
- [36 波的傅里叶分析](#)

[第2卷](#)

[导言](#)

- [37 电磁学](#)
- [38 矢量场的微分学](#)
- [39 矢量积分学](#)
- [40 静电学](#)
- [41 高斯定律的应用](#)
- [42 在各种情况下的电场](#)
- [43 在各种情况下的电场（续）](#)
- [44 静电能](#)
- [45 电介质](#)

- [46 在电介质内部](#)
- [47 静电模拟](#)
- [48 静磁学](#)
- [49 在各种不同情况下的磁场](#)
- [50 矢势](#)
- [51 感应定律](#)
- [52 麦克斯韦方程组在自由空间中的解](#)
- [53 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解](#)
- [54 交流电路](#)
- [55 空腔共振器](#)
- [56 波导](#)
- [57 用相对论符号表示的电动力学](#)
- [58 场的洛伦兹变换](#)
- [59 场的能量和场的动量](#)
- [60 电磁质量](#)
- [61 电荷在电场和磁场中的运动](#)
- [62 稠密材料的折射率](#)
- [63 表面反射](#)
- [64 物质的磁性](#)
- [65 顺磁性 with 磁共振](#)
- [66 铁磁性](#)
- [67 弹性](#)
- [68 干水的流动](#)
- [69 湿水的流动](#)

[第3卷](#)

[导言](#)

- [70 概率幅](#)

- [71 全同粒子](#)
- [72 自旋1](#)
- [73 自旋1/2](#)
- [74 概率幅对时间的依赖关系](#)
- [75 哈密顿矩阵](#)
- [76 氨微波激射器](#)
- [77 其他双态系统](#)
- [78 再论双态系统](#)
- [79 氢的超精细分裂](#)
- [80 在晶格中的传播](#)
- [81 半导体](#)
- [82 独立粒子近似](#)
- [83 振幅对位置的依赖关系](#)
- [84 角动量](#)
- [85 氢原子与周期表](#)

[附录](#)

- [A 单位和量纲](#)
- [B 物理学常数、常量](#)
- [C 答案](#)

[返回总目录](#)

第1卷

导言

这些习题编辑成册是为了在加州理工学院的第一学年基础物理课程上和《费曼物理学讲义》第1卷搭配使用。这些习题按照和《费曼物理学讲义（第1卷）》的内容一样的次序安排。在每一个主题内，根据普适性或难度，习题被细分为几个类别。在一个章节内，习题依照以下次序排列：证明和基本概念，简单习题，中等难度习题，更加复杂的题目。通常，证明和基本概念部分是对《费曼物理学讲义》中涉及的论述的补充，需要学生理解并能够使用。对于简单习题，一般水平的学生不应有什么困难。一般水平的学生也应该能在适当的时间内完成大部分中等难度习题——每个习题大概需要10—20分钟。更加复杂的题目往往需要具有更深刻的物理洞察力或更开阔的思想，这部分习题主要是为优秀学生设置的。

所选习题由很多人提供并进行了严格评估。大多数习题来源于原始的费曼讲座系列，由莱顿提供；一些题目经允许复制于斯特朗（Foster Strong）编辑的扩展习题集；很多习题由沃格特改编自加州理工学院基础物理课程上的测试题目。对于这些有名的，以及其他无名的贡献者，本书作者表示诚挚的感谢。

作者认为目前的工作远未完成。衷心希望，在日后的课程中，本书作者或加州理工学院的其他人会更新材料，增加新的习题和解释。这样，本习题集最终也许会成为一個可供自学的工作册，其用处将超越目前此书的使用范围。

莱顿
沃格特

1 原子的运动

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第1—3章。

运用这些章节所讲述的想法，并结合你的经验，发挥你的想象力，来分析以下习题。在大部分情况下，不要奢求得到精确的数值结果。

- 1.1 如果热仅仅是分子运动，那么一个热的、静止的棒球与一个冷的、快速运动的棒球有什么区别？
- 1.2 既然一切物体的原子都处于永恒的运动中，为何可以有恒定的物体存在，例如经年历久的印章痕迹？
- 1.3 定性解释：运动的物体为什么可以产生热？怎样产生热？如果你可以，也请解释：反过程为什么不可行，即利用热产生有意义的运动？
- 1.4 化学家已经发现，橡胶是由纵横交错的长链组成的。那么，请解释：当橡胶带被拉伸时，为什么会变热？
- 1.5 一个悬挂有一定重量的橡胶带，当被加热时，将会有什么现象发生？（试着通过实验看看结果如何。）

- 1.6 你能解释为什么晶体不可能由正五边形组成吗？（正三角形、正方形以及正六边形是晶体组成的常见形式。）
- 1.7 在你面前有大量铁球——直径全部是 d ，以及一个容器——体积是 V 。在任意维度上，容器的长度都远远大于铁球的直径。请问，把铁球放进容器里，最多可以放进多少个？
- 1.8 气体的压强 P 如何随气体中单位体积的原子数 n 以及原子的平均速率 $\langle v \rangle$ 变化？（是线性变化吗？还是 P 的变化行为比线性关系更迅速或更缓慢？）
- 1.9 一般空气的密度大约是 0.001g cm^{-3} ，液态空气的密度是 1.0g cm^{-3} 。请估测：
- (a) 1cm^3 一般空气中的分子数 n_G ； 1cm^3 液态空气中的分子数 n_L 。
 - (b) 一个空气分子的质量 m 。
 - (c) 在常温、常压的情况下（ 20°C ，1个标准大气压），在与其他分子碰撞前，一个空气分子所行走的平均距离 L 。这个距离被称为平均自由程。
 - (d) 真空系统应在多少压强 P （用标准大气压表示）下运行，以使得分子平均自由程大概为 1m ？

1.10 在 6.0×10^{-4} mmHg压强下，通过1.0mm厚度的氩原子层后，一准直钾原子平行光束的强度降低了3%。计算每个氩原子的有效靶面积。

1.11 X射线研究表明NaCl晶体是立方晶格结构。最近邻格点之间的距离是 $2.820 \text{ \AA}$ 。查阅NaCl的密度以及分子质量，计算阿伏伽德罗常数 N_A 。（这是测量阿伏伽德罗常数最精确的实验方法之一。）

1.12 博尔特伍德（Boltwood）和卢瑟福（Rutherford）发现：在镭及其裂变产物处于平衡时，每克镭每秒钟可以产生 13.6×10^{10} 个氦原子。他们同样测量出在标准温度及压强（Standard Temperature and Pressure，简写为STP，指 0°C ，1个标准大气压）下，192mg镭的裂变每天可以产生 0.0824 mm^3 的氦。利用这些数据计算：

（a）在STP情况下， 1 cm^3 氦气中氦原子的数目 N_H 。

（b）阿伏伽德罗常数 N_A 。

1.13 瑞利发现，当0.81mg橄榄油展开在水表面时，会形成直径84cm的单层分子层。假定橄榄油的构成分子 $\text{H}(\text{CH}_2)_{18}\text{COOH}$ 大致呈线性链状排列，橄榄油的密度为 0.8 gcm^{-3} ，据此判断阿伏伽德罗常数 N_A 应是多少？

1.14 在1860年左右，麦克斯韦提出气体的黏度可以表示为，

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v l,$$

其中， ρ 是气体密度， v 是分子平均速率， l 是分子平均自由程。麦克斯韦早前已经提出：

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi N_g \sigma^2},$$

其中， σ 是分子直径， N_g 是STP状态下 1cm^3 气体中所含有的分子数。洛施密特于1865年利用实验测量值 η ， ρ （气体）， ρ （固体）以及焦耳计算得到的 v 值，求得了 N_g 。

已知： $\eta = 2.0 \times 10^{-4} \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ， ρ （气体） $= 1.0 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$ ， ρ （固体） $= 1.0 \text{ g cm}^{-3}$ 以及 $v = 500 \text{ m s}^{-1}$ ，计算 N_g 。

1.15 一整杯水放于加利福尼亚的某个户外窗台上。

(a) 你认为这一杯水完全被蒸发掉需要多少时间 T ？

(b) 求以此蒸发速率，每秒、每立方厘米离开杯子的水分子数 J ？

(c) 以上答案与全球平均降雨量有关系吗？如果有，请简述之。

- 1.16** 午后，雷阵雨降临，一个雨滴落在一片古生代泥土之上，并留下一个印记。后来，这雨滴被一个又热又渴的地质学学生当作化石捡起。在他喝光水壶里的水，无所事事之际，想知道那滴古老的水滴中有多少水分子。运用你所知道的数据进行计算。（对你所不清楚的必要信息进行合理假设。）

2 能量守恒，静力学

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第4章。

2.1 图2-1所示是一非等臂杠杆。利用虚功原理（Principle of Virtual Work），建立平衡状态时应满足的方程（忽略杠杆本身的重量）：

$$W_1 l_1 = W_2 l_2。$$

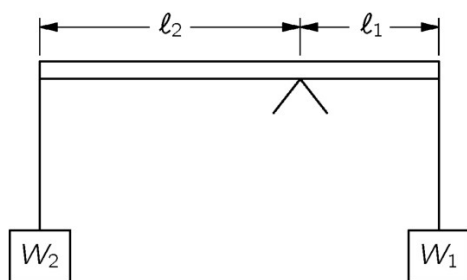


图 2-1

2.2 对于在离支点不同距离处悬挂多个重物的情形，推广习题2.1的结论。（对于支点一边的位置，距离取正值，对于支点另一边的位置，距离取负值。）

2.3 n 个力作用在一个物体上，物体处于静止状态。利用虚功原理证明：

（a） $n=1$ 的情形：力的大小为零。（一个显而易见的例子。）

- (b) $n=2$ 的情形：两个力大小相等，方向相反，作用在同一直线上。
- (c) $n=3$ 的情形：三个力共面，且三个力的作用线交于一点。
- (d) 对于任意 n ：所有力的大小 F_i 及其与任意确定直线的夹角 Δ_i 的余弦之积的总和等于0：

$$\sum_{i=1}^n F_i \cos \Delta_i = 0。$$

2.4 在无摩擦的情况下，有关静平衡的问题通过虚功原理可以简化为纯几何问题“当一点移动一确定距离时，另一点向何处移动？”运用下述三角形的性质（图2-2），很多情况下问题变得很容易回答。

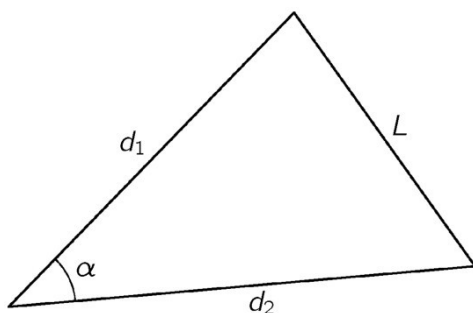


图 2-2

- (a) 当三角形的两个边长 d_1 和 d_2 保持不变，而角 α 有一小的改变量 $\Delta\alpha$ 时，角 α 的对边 L 的变化量为：

$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin \alpha \Delta \alpha。$$

(b) 如果直角三角形的三边 a ， b ， c （ c 为斜边）的改变量分别为 Δa ， Δb ， Δc ，则

$$a \Delta a + b \Delta b = c \Delta c。$$

证明之。

- 2.5** 长度为1.50m、质量为3.00kg的均匀平板，一端安放在支撑轴上，如图2-3所示。在重物 and 滑轮的作用下，平板平衡在水平位置。求为达到此平衡，求重物的重量 W 。忽略摩擦力。

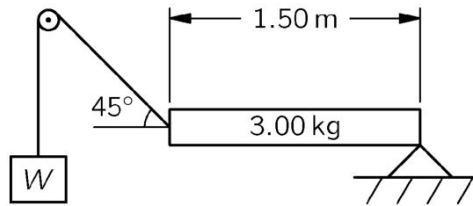


图 2-3

- 2.6** 如图2-4所示，半径为3cm、质量为1.00kg的球放在与水平方向成 α 角的平板上，同时和竖直墙壁相切。摩擦力可忽略。求球作用于墙上的力 F_W 和作用于板上的力 F_P 。

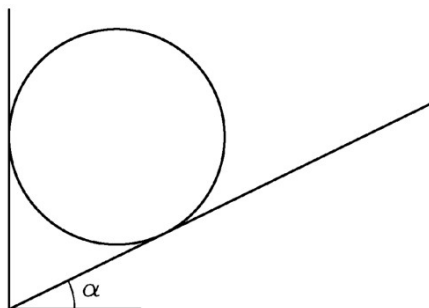


图 2-4

- 2.7** 如图2-5所示，联结而成的平行四边形框架 $AA'BB'$ 安放在枢轴 P 和 P' 上（在竖直平面内）。 A 、 A' 、 B 、 B' 、 P 、 P' 处的摩擦力都可以忽略。部件 $AA'CD$ 和 $B'BGH$ 是刚性的，尺寸相同。 $AP = A'P' = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}P'B'$ 。当不加负载 W_1 和 W_2 时，由于 w_C 的作用，框架处于平衡状态。如果质量为0.50kg的重物 W_1 挂在 D 点，为了达到平衡，挂在 H 点的重物 W_2 质量应为多少？

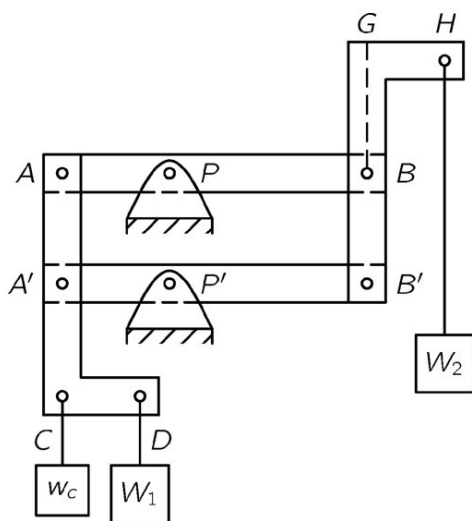


图 2-5

- 2.8** 图2-6所示系统处于平衡状态。利用虚功原理求重物 A 和 B 的质量。忽略绳子的重量和滑轮上的摩擦。

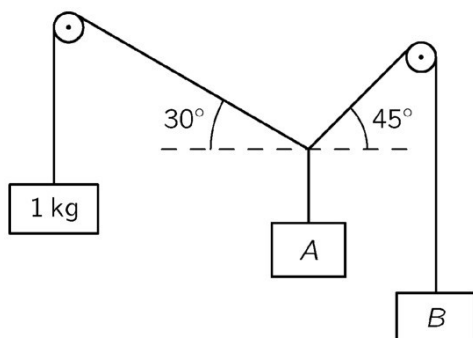


图 2-6

- 2.9** 如图2-7所示，质量为50lb的重物悬挂在金属丝 ACB 的中点。 $AC=CB=5\text{ft}$ ， $AB=5\sqrt{2}\text{ft}$ 。求金属丝上的张力 T_1 和 T_2 。

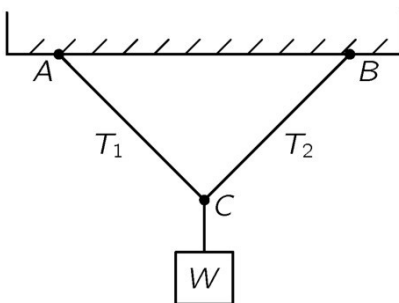


图 2-7

- 2.10** 图2-8所示的桁架由轻铝杆在各端点铰接而成，在 C 点有一个可在光滑平面上滑动的滑轮。当一个工人加热部件 AB 时，观察到长度增加了 x ，并且负载 W 在竖直方向上移动了 y 。

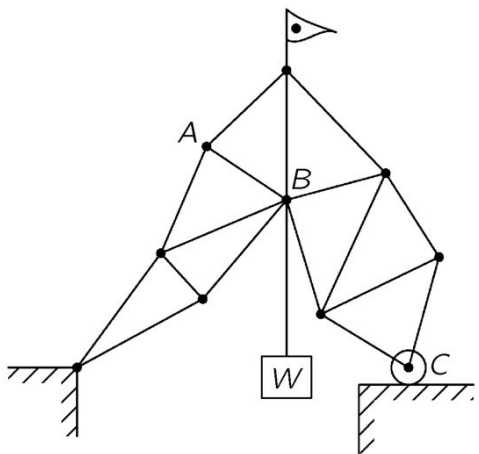


图 2-8

(a) W 的运动是向上还是向下？

(b) 求作用在部件 AB 上的力 F 。此力是张力还是压力？

2.11 如图2-9所示，为把重 W 、半径为 R 的轮子推上高度为 h 的障碍物，需要多大的水平力 F （作用在轮轴上）？

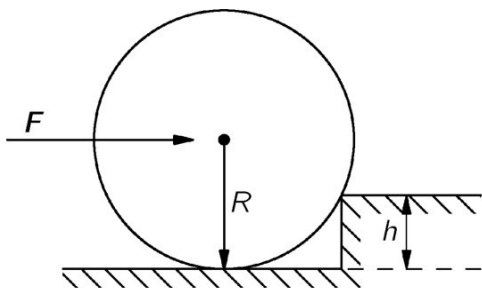


图 2-9

2.12 如图2-10所示，直径为 D 的水平转台安装在摩擦可忽略不计的轴承上。在转台平面内，两大小相等、相互平行、方向相反的水平力作用在转台直径相对两端。

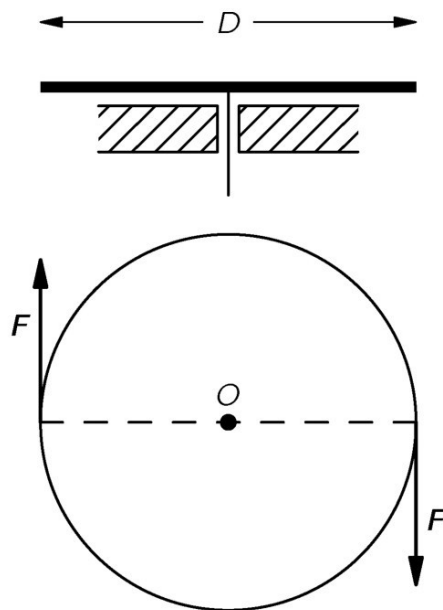


图 2-10

- (a) 求作用在轴承上的力 F_B 。
- (b) 对于过 O 点的竖直轴，力矩 τ_P 是多少？
- (c) 对于过平面内任意一点 P 的竖直轴，力矩 τ_P 是多少？
- (d) 下面的命题正确还是错误？请解释。

“作用在同一物体上的任意两个力可以合成一个单一的合力，对于物体其和原来的两个力有一样的效果。”

- 2.13** 浮在水银上的钢质平板受到三个力的作用，力作用点位于边长为 0.100m 的正方形的三个顶点，如图 2-11 所示。为了保持平板平衡，求第四个力 F （单一的一个力）。给出大小、方向以及沿直线 AB 的作用点。

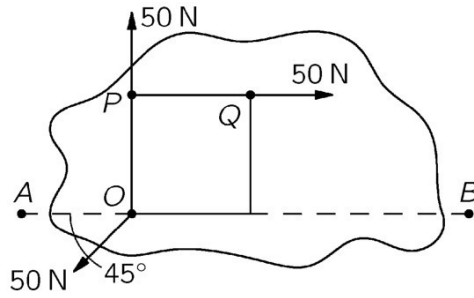


图 2-11

2.14 在没有摩擦的情况下，图2-12所示的重物 W_1 和 W_2 由静止开始，运动了距离 D 后，速度 v 是多少？

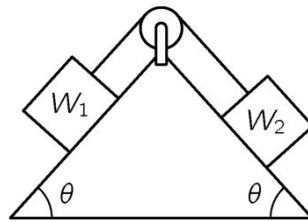


图 2-12

2.15 在图2-13中，两物体重量相等，摩擦可忽略。如果系统由静止释放，在移动距离 D 之后，物体的速率 v 是多少？

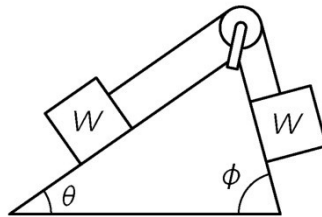


图 2-13

2.16 物体 M_1 在高为 H 、倾斜角为 45° 的斜面上滑动。一根柔软的绳子跨过一个小滑轮（质量不计）把 M_1 和同样质量的 M_2 相连。 M_2 被垂直悬挂，如图2-14所示。绳子的长度恰好能使两物体都静止在 $H/2$ 的高度。与 H 相比，两物体和滑轮的尺寸可以忽略。在 $t=0$ 时刻，两物体被释放。

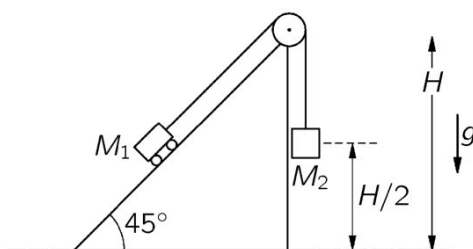


图 2-14

- (a) 对 $t > 0$ ，计算物体 M_2 的垂直加速度 a 。
- (b) 哪个物体向下运动？
- (c) 求 (b) 中物体落地时的时间 t_1 。
- (d) 当 (b) 中的物体落地停止运动后，另一物体继续运动，它将碰到滑轮吗？

2.17 如图2-15所示，起重机由长度为 L 的均匀吊杆和重物 w 组成，吊杆的下端安装在轴承上。在水平绳子的作用下（绳子系在吊杆上离轴承距离为 x 的一点），吊杆与竖直方向成 θ 角。重物 w 悬吊于吊杆顶端的绳子上。求水平绳子上的张力 T 。

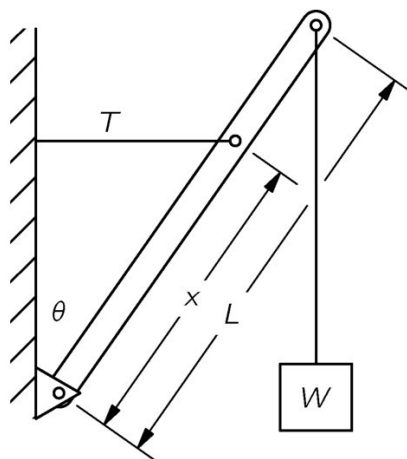


图 2-15

2.18 长度为10ft、顶部带有滚轮的均匀梯子斜靠在光滑的竖直墙壁上，如图2-16所示。梯子的质量为30lb。一个质量为60lb的重物挂在梯子的阶梯上，此阶梯离梯子顶部距离为2.5ft。

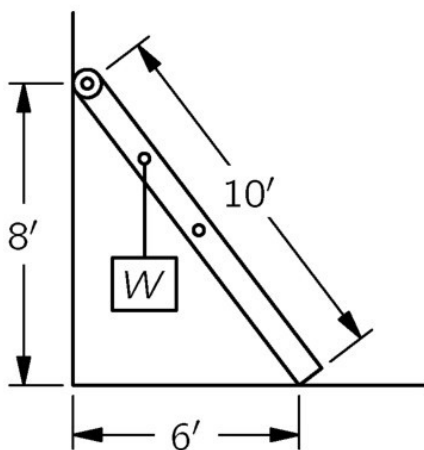


图 2-16

(a) 求滚轮对墙所施加的力 F_R 。

(b) 梯子对地面的水平力 F_h 和竖直力 F_v 。

- 2.19** 质量为 W 、长度为 $\sqrt{3}R$ 的木板躺在半径为 R 的光滑圆槽里，如图2-17所示。木板的一端有一质量为 $W/2$ 的重物。计算木板平衡时其与水平方向的夹角 θ 。

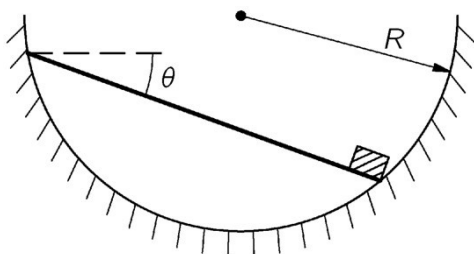


图 2-17

- 2.20** 长度为 l 、质量为 W 的棒两端由两个倾斜面支撑，如图2-18所示。利用虚功原理求棒平衡时的角度 α 。（摩擦力不计。）

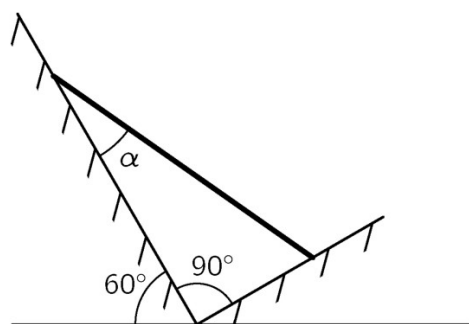


图 2-18

- 2.21** 半径为4.5cm、质量为 W 的实心小球通过一根弦悬挂在一半径为49cm、光滑的半圆形碗的上沿，如图2-19所示。一旦弦短于40cm，弦就断裂。利用虚功原理，求弦可以承受的最大力 F 。

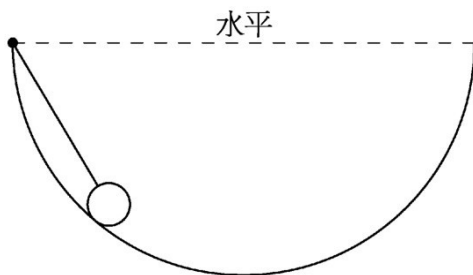


图 2-19

- 2.22** 世界展览会院子里的一个装饰物由四个一样的无摩擦金属球组成，每个金属球质量为 $2\sqrt{6}$ 吨。球的位置如图2-20所示：三个球放于水平面上，相互接触；第四个球自由地放于前三个球上面。为了避免分开，对下面的三个球的接触点进行焊接。安全系数取3，求焊点所能承受的张力 T 。

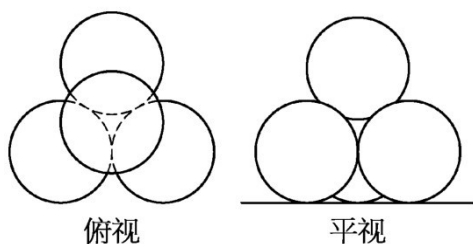


图 2-20

- 2.23** 一个刚性金属线框呈直角三角形，放置在竖直平面内，如图2-21所示。质量分别为 $m_1=100\text{g}$ 和 $m_2=300\text{g}$ 的两个有孔小珠无摩擦地在框线上滑动，两小珠由一根绳连接。当系统处于静态平衡时，求绳上的张力 T ，以及绳与第一根框线的夹角 α 。

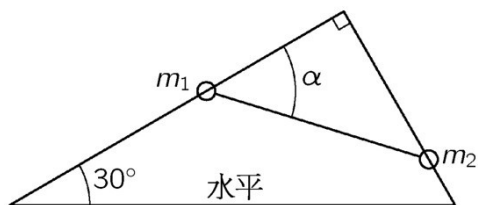


图 2-21

2.24 为使图2-22所示的推车保持平衡，张力 T 应为多少？摩擦力不计。

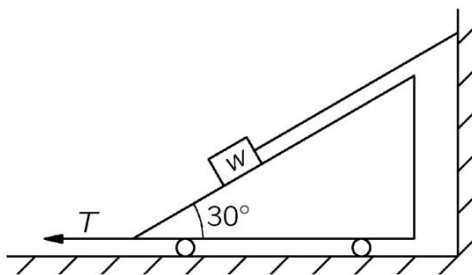


图 2-22

(a) 运用虚功原理求解。

(b) 用力的分解来求解。

2.25 质量 $M=3\text{kg}$ 的线轴由半径 $r=5\text{cm}$ 的中心圆筒和半径为 $R=6\text{cm}$ 的两个端板组成。线轴放置在开有槽沟的斜面上，在斜面上线轴只能滚动而无法滑动。质量 $m=4.5\text{kg}$ 的物体用绕线轴的绳子悬挂，如图2-23所示。观测到系统处于静止平衡，求斜面的倾斜角 θ 。

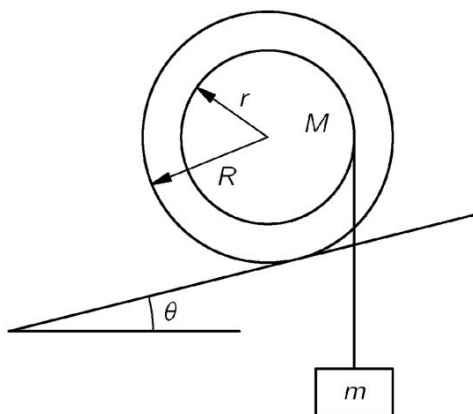


图 2-23

- 2.26** 总重量为 W 的柔软链环放于底面半径为 r 、高为 h 的光滑正圆锥体上，如图2-24所示。链静止在圆锥的一个平行圆截面上，其轴是竖直的。求链上的张力 T 。忽略摩擦力。

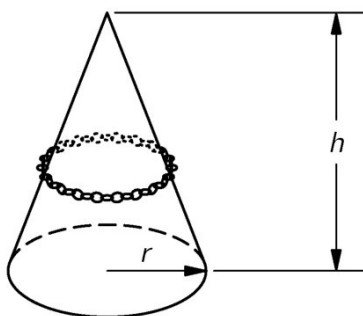


图 2-24

- 2.27** 斜面上的小车在重物 w （如图2-25所示）的作用下保持平衡。所有部分的摩擦均可忽略。求小车的重量 W 。

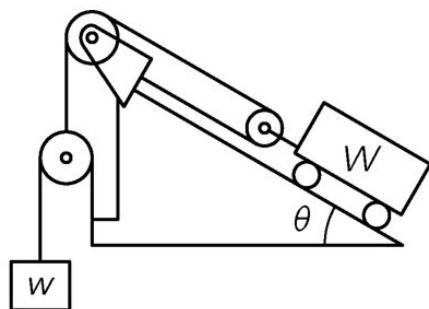


图 2-25

- 2.28** 一座桥的桁架结构如图2-26所示。所有的连接点可以看作是无摩擦的轴承。所有部件等长，都是刚性的，重量可忽略。求反作用力 F_1 和 F_2 ，以及部件 DF 所受到的力 F_{DF} 。

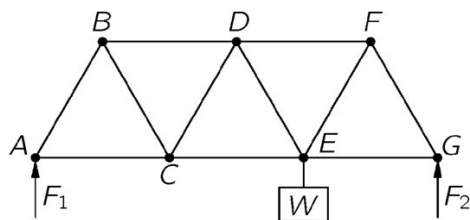


图 2-26

- 2.29** 在图2-27所示的桁架中，所有的斜杆长度都为5个单位，所有平行杆的长度都为6个单位。所有的连接点都是自由链接的。桁架的重量忽略不计。

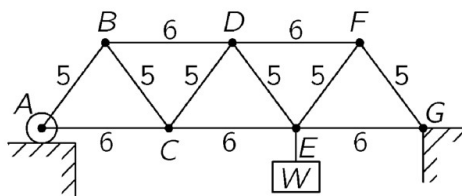


图 2-27

(b) 求作用在杆 BD 和 DE 上的力。

A diagram of a cable structure. A cable is fixed to a horizontal ceiling at a point on the left. A weight W is suspended from this fixed point by a vertical cable. The main cable then extends diagonally to the right, where it is supported by a vertical reaction force w at point A . The horizontal distance from the fixed point to point A is labeled as 4. The vertical distance from the ceiling to point A is labeled as 3. The length of the cable segment between the fixed point and point A is labeled as 5.

图 2-28

A diagram of a mechanical system. A horizontal beam of mass $2m$ is supported by two pulleys. A central pulley is suspended from the beam by two dashed lines. A mass m is attached to each end of the dashed lines, hanging vertically.

图 2-29

- 2.32** 横截面积为 A 的桶盛有密度为 ρ 的液体。液体从水面下方处面积为 a 的小孔自由喷出。如图2-30所示。如果液体没有内摩擦（黏滞性），求液体的喷射速率 v 。

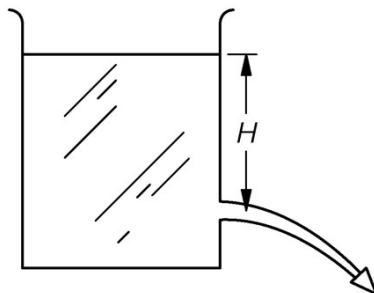


图 2-30

- 2.33** 货运卡车上装载相同的光滑原木。卡车驶离高速公路，停靠在路基上，其底部与水平方向成 θ 夹角，如图2-31所示。卸车时，当把图中虚线所示的原木卸掉后，剩余的3根原木正好处于将要滑动的状态，即：如果 θ 任意变小一些，原木将要掉落。求 θ 。

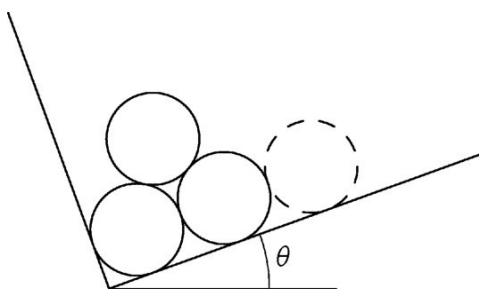


图 2-31

- 2.34** 重 w 、内外半径分别为 r 和 R 的线轴上缠有细线。通过缠绕在内径上的细线，线轴被悬吊在固定支持物上。重量为 W 的物体被缠绕在外径上的两根细线悬吊。如图2-32所示。 W 的选取正好使得线轴处于平衡。求 W 。

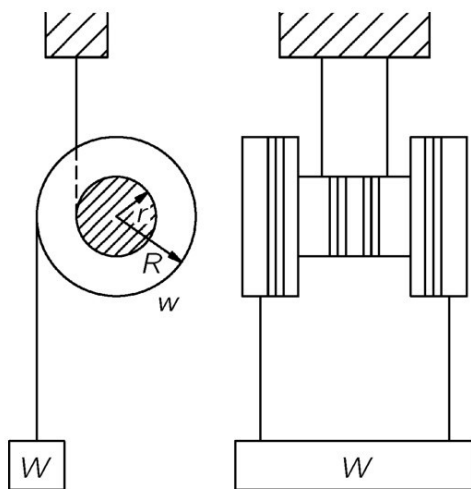


图 2-32

- 2.35** 吊桥横跨54m宽的深谷。桥面由间距为9.0m的六对竖直缆绳悬吊的钢桁架构成，如图2-33所示。每个缆绳承重相同，皆为 4.80×10^4 kg物体。靠中的二对缆绳长2.00m。假定纵向缆绳的末端与水平方向的夹角是 45° ，求其他缆绳 A 和 B 的长度，以及纵向缆绳上的最大张力 $T_{\max}$ 。

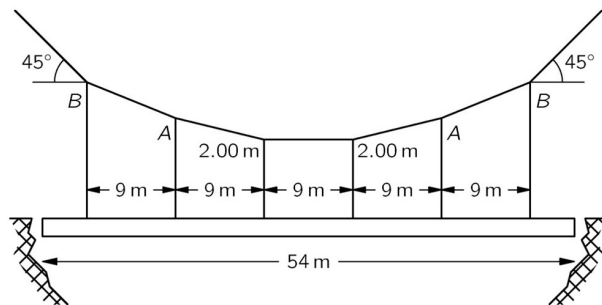


图 2-33

2.36 串联范德格拉夫起电机（Tandem Van de Graaff）的绝缘支撑如图2-34所示。密度均匀、长度为 L 、高 h 、重 W 的两个组件由竖直侧壁上的轴承点支撑，在两者中间的螺旋千斤顶的作用下保持分离。由于两组件不能承载张力，千斤顶必须调制而使上面轴承点所受的力为零。

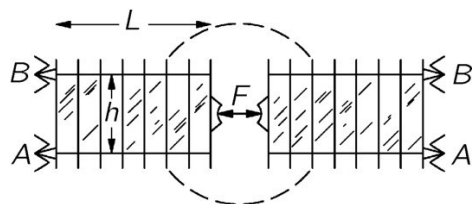


图 2-34

- (a) 求千斤顶施加的力 F 。
- (b) 求下面其中一个轴承点所受的合力 F_A （包括大小和方向）。

3 开普勒定律与引力

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第7章。

3.1 椭圆的一些性质

椭圆的大小和形状可以由以下任意两个量的数值确定（如图3-1所示）。

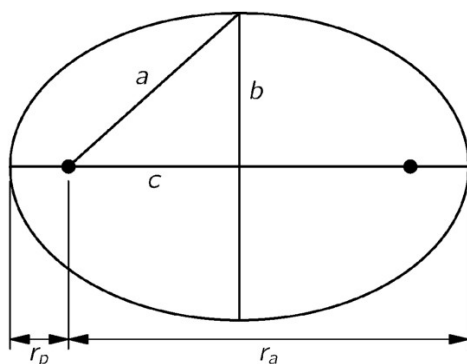


图3-1

a ：长半轴，

b ：短半轴，

c ：由椭圆中心到焦点的距离，

e ：偏心率，

r_p ：近日（地）距（从焦点到椭圆轨迹的最短距离），

r_a ：远日（地）距（从焦点到椭圆轨迹的最长距离）。

以上各量的关系如下：

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

$$e = \frac{c}{a} (e \text{ 的定义}).$$

试论证：椭圆面积 $A = \pi ab$ 。

- 3.2** 在近地点处月亮到地球中心的距离是363 300km，远日点处是405 500km。月亮绕地球旋转一周的时间是27.322日。某人造地球卫星在近地点时离地球表面高度为225km，远地点时为710km。地球的平均直径是12 756km。求此人造地球卫星绕地球旋转一周的周期 T 。
- 3.3** 地球轨道的偏心率是0.016 7。求地球运动轨迹上最大速率与最小速率之比 $v_{\max}/v_{\min}$ 。
- 3.4** 地球（E）与月亮（M）的半径分别为6 378km和1 738km。两者质量之比为81.3:1。计算月球表面的重力加速度 g_M 。（ $g_E = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。）
- 3.5** 在1456年，人们首次发现了哈雷彗星（Halley's comet），当时人们对此充满了恐惧。自那以后，到1986年时，哈雷彗星第七次光临地球（来到近日点附近）。在1910年4月19日，当哈雷

彗星位于近日点时，观测到其离太阳的距离是 0.60AU （ AU 是天文学上所使用的长度单位，是太阳和地球间的平均距离）。

（a）在其轨道的远日点处，距离太阳多远？

（b）最大轨道速率与最小轨道速率之比是多少？

3.6 近地表面、以圆形轨道运行的人造卫星的周期大约是 100min 。对于周期为 24h 的地球卫星，求其轨道半径应该是多少？（以地球半径 r_E 作为单位。）

3.7 考虑两个轨道半径相同的人造地球卫星，其中一个的轨道平面经过地球两极，另外一个的轨道在赤道平面内。问：哪个卫星需要更强大的发射火箭？为什么？

3.8 理想的“同步”卫星随地球同步转动。相对于地球表面上的某点 P 一直保持固定位置。

（a）考虑地球中心与卫星的连线。如果 P 点是此连线与地球表面的交点， P 点可能位于地球的任意纬度 λ 吗？如果不是，纬度 λ 有什么限制，为什么？

（b）质量为 m 的地球同步卫星到地球中心的距离 r_s 是多少？请用地球到月亮的距离 r_{E-M} 为单位来表示。

注：把地球考虑为均匀球体。月亮绕地球转动周期取27天。

3.9 (a) 比较地球绕太阳转动的运动轨迹数据和月亮绕地球转动的运动轨迹数据，请判断地球质量与月亮质量之比。

(b) 木星的某个卫星Io的转动轨道周期是1.769日，轨道半径是421 800km。用地球的质量 m_E 来表示木星的质量 m_J 。

3.10 两个星体 a 和 b ，在彼此的引力作用下，相互环绕运动。如果观测到它们相对运行轨道的长半轴为 R （以AU作为单位），运转周期为 T 年。求两者质量之和 $m_a + m_b$ 的表达式（用太阳质量来表示）。

3.11 有一个庞大的球形天体，质量为 M ，有一颗质量为 m 的卫星围绕其转动。如果两者之间的引力为：

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm\mathbf{R}}{R^{3+a}},$$

其中， $\mathbf{R}$ 是两者之间的距离矢量。那么，开普勒第二定律、第三定律应该如何修正？（讨论第三定律时，假设运行轨道是圆形。）

3.12 在实验室中进行 g 的测量，为了得到由于月球的引力所引起的 g 的日变化 Δg ，实验精度至少需要多少？为简单起见，假设实验室所在位置正好使得月亮从天顶和天底通过。潮汐的影响同样忽略。

3.13 交食双星系统（an eclipsing binary star system）是指这样的双星系统：双星的轨道面与视线几乎在同一平面上，因此，一个星体会周期性地遮掩另一个星体。两星体的相对轨道速度可以通过光谱线的多普勒效应测得。 T 是轨道的周期（以日为单位）， V 是轨道速度（单位是 km s^{-1} ）。求此双星系统的总质量（以太阳质量为单位）。

注：地球到太阳的平均距离是 $1.50 \times 10^8 \text{ km}$ 。

3.14 一颗彗星绕太阳转动，近日距 $r_p = 1.00 \times 10^6 \text{ km}$ ，此时的运行速度是 $v = 500.0 \text{ km s}^{-1}$ 。

（a）求轨道在近日点处的曲率半径 R_c （以 km 为单位）。

（b）对于长半轴为 a 、短半轴为 b 的椭圆，其在近日点处的曲率半径是 $R_c = b^2 / a$ 。在 R_c 与 r_p 已知的情况下，我们可以得到 a 与此两者的关系。试写出此关系式并求出 a 。

（c）如果你能够由以上信息求得 a ，那么你同样可以求得彗星的轨道运行周期 T_c 。试求出。

3.15 通过引力而相互吸引的两物体向彼此“坠落”，最终效果是：两者绕着某一固定点（它们的质心）运动。利用此想法证明：在两者保持距离不变的情况下，轨道的运行周期取决于它们的质量之和，与它们各自的质量无关。此结论对于椭圆轨道同样成

立。假设物体运行的椭圆轨道的长半轴是 R 和 r ，求轨道周期 T 。

3.16 如何求得月球的质量？

3.17 天狼星的三角视差（即天狼星对地球轨道半径的张角）是 0.378°arc 。由此，并结合图3-2中的数据尽你所能推算天狼星的质量（以太阳质量作为单位）。

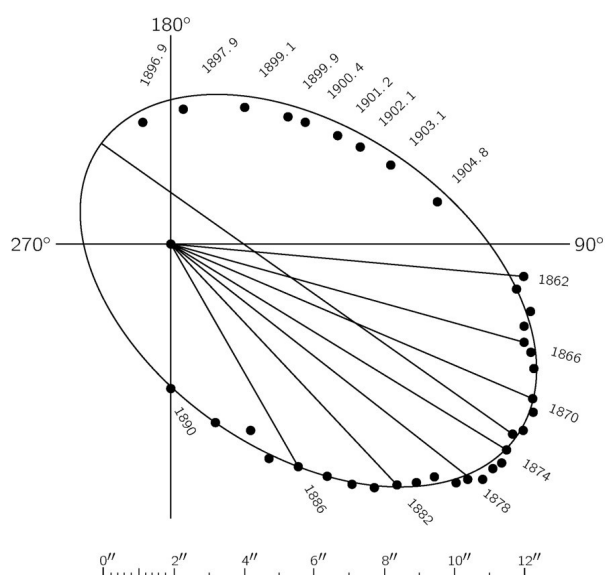


图 3-2

(a) 假设轨道平面垂直于视线；

(b) 轨道平面与视线有倾斜夹角的情况。

并回答：在 (b) 情况下所求的值是上限还是下限（或者两者都可能）？

4 运动学

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第8章。

- 4.1 (a) 物体做匀加速直线运动。在时间 $t=0$ 时刻，位于 $x=x_0$ 的位置，其速度为 $v_x=v_{x0}$ 。

求证：在时刻 t 时，物体的位置和速度分别是：

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2,$$

$$v_x(t) = v_{x0} + at。$$

- (b) 在以上公式中，把 t 消去，并证明在任意时刻，以下关系成立：

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0)。$$

- 4.2 把上述问题推广到三维的情况，沿三个坐标轴方向的加速度分别为常值 a_x ， a_y ， a_z 。

证明：

- (a)

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} a_x t^2,$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2} a_y t^2,$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t + \frac{1}{2} a_z t^2,$$

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t,$$

$$v_y(t) = v_{y0} + a_y t,$$

$$v_z(t) = v_{z0} + a_z t。$$

(b)

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ &= v_0^2 + 2a[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)], \end{aligned}$$

其中，

$$v_0^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2。$$

4.3 一段圆弧的长度可以用来度量与之对应的圆心角大小。如图4-1所示，设圆弧长度为 s ，圆半径为 R ，那么以弧度为单位，圆心角 θ 大小为：

$$\theta = \frac{s}{R}。$$

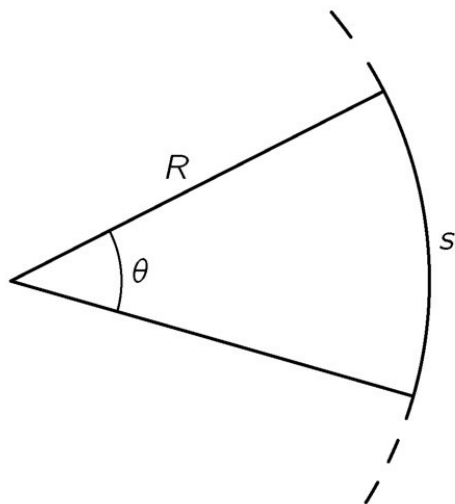


图 4-1

(a) 证明：如果 $\theta \ll 1$ 弧度，那么 $\sin\theta \approx \theta$ ， $\cos\theta \approx 1$ 。

(b) 利用以上结果以及正弦和余弦的两角和公式，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的导数。导数的定义是：

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}。$$

4.4 如图4-2所示，一个物体沿半径为 R 的圆周逆时针以速度 V 匀速运动。圆心位于直角坐标系 (x, y) 的原点， $t=0$ 时刻，物体位于 $(R, 0)$ 处。证明：

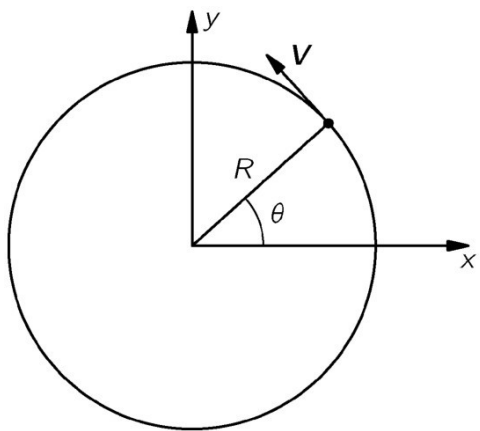


图 4-2

(a)

$$x = R \cos \omega t ,$$

$$y = R \sin \omega t ,$$

$$v_x = -V \sin \omega t ,$$

$$v_y = V \cos \omega t ,$$

$$a_x = -\frac{V^2}{R} \cos \omega t ,$$

$$a_y = -\frac{V^2}{R} \sin \omega t ,$$

$$a = \frac{V^2}{R} \circ$$

(b)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

其中, $\omega = V/R$ 是角频率。

- 4.5** 高空探测气球装载着科研设备以 $1\,000\text{ftmin}^{-1}$ 的速度升空。在 $30\,000\text{ft}$ 的高度, 气球破裂, 科研设备自由下落。(这种事故确实会发生!)

(a) 科研设备在下落过程中经历了多长时间 t ?

(b) 科研设备与地面相碰撞时速度 v 是多少?

忽略空气阻力。

- 4.6** 一列火车能以 20cm s^{-2} 的加速度加速, 能以 100cm s^{-2} 的加速度减速。求火车在相距 2km 的两个车站之间运行所需的最短时间 t 。

- 4.7** 在有阻力的真实空气中竖直上抛一个小球, 是上升过程还是下降过程所需的时间更长?

- 4.8** 考虑地球表面赤道上的某点:

(a) 相对于地球中心, 此点速度 v 是多少?

(b) 角频率 ω 是多少?

(c) 由于转动所引起的径向加速度 a 与引力引起的加速度 g 的比值是多少?

4.9 竖直发射的火箭, 在其发动机燃烧工作的50s时间内, 被观测到具有大小为 $2g$ 的均匀向上加速度。忽略空气阻力以及 g 随高度的变化。

(a) 画出全过程的 $v-t$ 图。

(b) 计算火箭所能达到的最大高度 $H_{\max}$ 。

(c) 计算火箭从点火发射到返回地面所经历的总时间 T 。

4.10 在课堂演示中, 一个小钢球在一块钢板上弹跳。小球下落到达钢板时的速度为 v_d , 被钢板反弹后, 速度以因子 e 衰减为 v_u , 即 $v_u = ev_d$ 。在 $t=0$ 时刻, 小球于钢板上方50cm处下落, 经过30s后, 扩音器的声音消失(这意味着钢球停止了弹跳)。求因子 e 的大小。

4.11 在平坦的地面上, 物体以初速率 v_0 发射, 发射角度与水平面成 θ 角。(忽略空气阻力。)求:

(a) 物体可以达到的最大高度 $H_{\max}$ 和射程 R 。

(b) 为了获得最远射程, 发射角 θ 应是多少?

4.12 射箭冠军射中靶心，靶被钉在与之相距 L 的墙上，靶心的高度比射箭者的弓高 h 。试推导箭离开弓时的初速度 v ，箭与水平面的初始夹角 θ ，高度 h 以及距离 L 的关系式。毫无疑问，射箭者知道这种关系。

注：射箭者不可能忽略掉空气阻力，但是你不妨这么做。

4.13 一个男孩以与水平成 70° 的仰角向上抛一小球。当小球经过位于男孩肩膀上方32ft的窗户时，小球速度恰好呈水平。

(a) 当小球刚刚离开男孩的手时，小球速度 v 是多少？

(b) 当小球穿过窗口时，运动轨迹的曲率半径 R 是多少？

你能求出运动轨迹在任何给定时刻的曲率半径吗？

4.14 一颗小卵石被嵌在轮胎胎面中，轮胎半径为 R 。车辆以速度 V 在水平路面上行驶（车辆轮胎只有滚动，没有滑动）。在 $t=0$ 时刻，小卵石与地面接触，取此时小卵石的位置坐标 x （水平坐标）和 y （竖直坐标）为零。求：

(a) 在 t 时刻时小卵石的位置，即 $x(t)$ ， $y(t)$ 。

(b) 在 t 时刻时小卵石的速度 $v(t)$ 。

(c) 在 t 时刻时小卵石的加速度 $a(t)$ 。

4.15 一辆小轿车司机正尾随一辆卡车行驶，他突然发现一块石头卡在了卡车的两个后轮胎之间。作为一个小心谨慎的司机（同时也是一位物理学家），他立即把两车距离拉大到22.5米，以防万一石头掉下时击中轿车。求卡车的行驶速度是多少？（假设石头掉地后不会被反弹跳起。）

4.16 一个马戏演员设计了一套新的演出动作。他把“人间大炮”和高空秋千结合起来。他从炮口被发射出时的速度为 V 。他希望可以到达足以抓到秋千（ $r=2\text{m}$ ）的高度，然后继续上升荡到离地面 $h=20\text{m}$ 的平台上。如图4-3所示。（高空秋千不应松弛，即在 r 和 h 两处，马戏演员的竖直速度必须为零。）

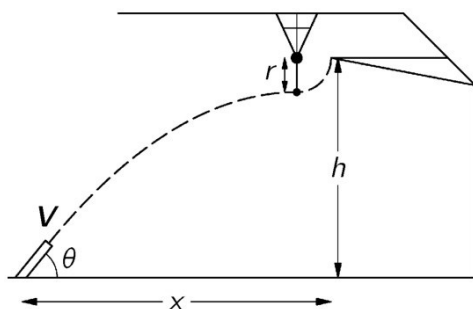


图 4-3

- (a) 求发射器必须被放置的角度 θ 。
- (b) 发射器和平台的距离 x 应该如何？
- (c) 发射初速度 V 应该多大？

4.17 迫击炮炮台安置在离峭壁边缘水平距离27 000ft处。以迫击炮炮台所在平面为基准，峭壁深度为350ft，如图4-4所示。现在

试图炮击隐藏在峭壁后的目标。如果炮弹的射出速度为 $1\,000\text{ft s}^{-1}$ ，求炮弹可以达到的落点离峭壁边缘的最近距离 d 。

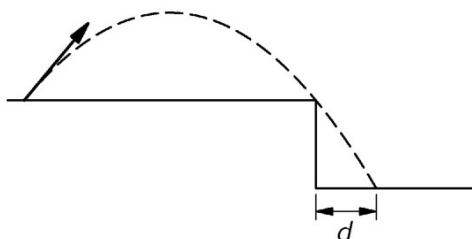


图 4-4

4.18 一个加州理工学院的新生（没有和郊区交通警察接触的经历）收到了一个超速罚单。于是，当他经过一段直道高速公路的“车速表检测”区间时，他决定检测一下自己的车速表读数。当他通过标示区间的“0”刻度点时，他按下加速器开始加速，并且在整个测试过程中，车辆保持匀加速行驶。他注意到，在开始测试 16s 后，他通过 0.10mi 路标；又过了 8.0s ，他通过 0.20mi 路标。

（a）在 0.20mi 路标处，他的车速表读数 v 应是多少？

（b）加速度 a 是多少？

4.19 在爱德华兹空军基地（Edwards AFB）的水平长实验轨道上，火箭发动机和喷气飞机发动机都可以进行测试。某一天的测试中，火箭发动机由静止开始进行匀加速运动，直到燃料耗尽后做匀速运动。观察发现，恰好当火箭通过试验距离的中点时，燃料耗尽。同样，一喷气飞机发动机从静止开始，在试验全程中保持匀加速运动。试验观测到，两者以完全相等的时间完成

了整个测试。求喷气飞机发动机加速度 a_J 与火箭发动机加速度 a_R 的比值。

5 牛顿定律

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第9章。习题5.1—5.13请使用解析方法解答，习题5.14—5.17请使用数值方法解答。

- 5.1** 水平表面上，质量分别为 $m_1=1\text{kg}$ ， $m_2=2\text{kg}$ 的两物体由细绳连接，并且通过滑轮和另一质量为 $m_3=2\text{kg}$ 的物体相连，如图5-1所示。忽略摩擦力以及滑轮和细绳的质量。

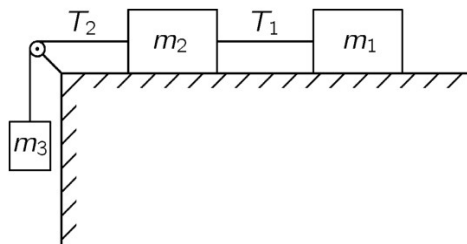


图5-1

- (a) 画出每个物体的受力图。
- (b) 求出每个物体的加速度 a 。
- (c) 如图所示，求出每段绳子上的张力 T_1 、 T_2 。
- 5.2** 质量为 m （以 kg 为单位）的物体通过绳子悬挂在电梯中，电梯以 $0.1g$ 大小的加速度向下坠落。求绳子上的张力 T 的大小（以 N 为单位）。

- 5.3 如图5-2所示，质量均为 $m=1\text{kg}$ 的两物体由长度 $L=2\text{m}$ 的紧绷的绳子相连，两者一起绕中心 C 做匀速圆周运动，速度大小 $V=5\text{ms}^{-1}$ 。在失重的环境下，求绳子上的张力 T 。

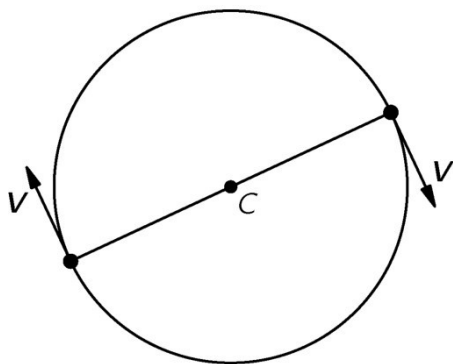


图 5-2

- 5.4 在图5-3中，为了使 M_1 、 M_2 相对于 M 静止，施加在 M 上的水平力 F 应为多少？忽略摩擦力。

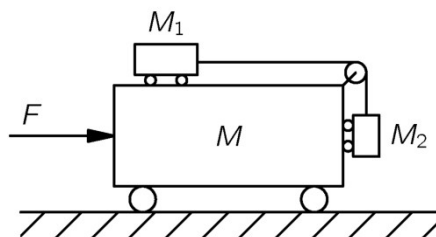


图 5-3

- 5.5 在图5-4中，为了使 m_1 （ $=5\text{kg}$ ）相对于 m_2 （ $=4\text{kg}$ ），施加在 M （ $=21\text{kg}$ ）上的水平力 F 应为多少？忽略摩擦力。

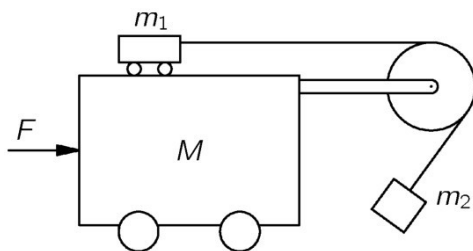


图 5-4

- 5.6 如图5-5所示的系统中， M_1 沿斜面无摩擦地滑动。 $\theta = 30^\circ$ ， $M_1 = 400\text{g}$ ， $M_2 = 200\text{g}$ 。求 M_2 的加速度 a 以及各段绳上的张力 T 。

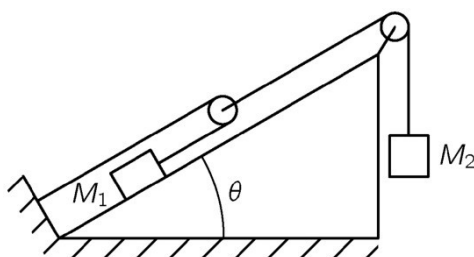


图 5-5

- 5.7 简易的起重机由两部分组成。其中，部分 A 质量为 M_A ，长度 D ，高度 H ，前后轮半径皆为 r ，两者间距离为 $D/2$ ；部分 B 是一均匀杆子，长度 L ，质量 M_B 。起重机的结构装配如图5-6所示。支点 P 位于部分 A 顶部的中间位置。部分 A 的重心位于两轮之间中点位置。

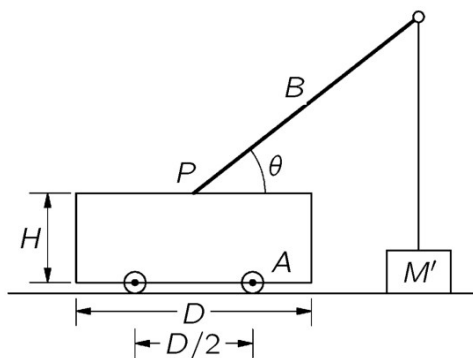


图 5-6

- (a) 当杆子 B 与水平面呈 θ 角时，在起重机不翻倒的情况下，其能举起的最大质量 $M_{\max}$ 是多少？
- (b) 如果在绳索的一段载有质量 $M' = 4/5 M_{\max}$ 的物体，问：为了把物体从地面举高一段距离 $L \sin \theta$ ，所需的最短时间是多少？（角度 θ 保持不变，绳索的质量可以忽略。）

5.8 图5-7所示是一件早期的用于测量重力加速度的装置，被称为“阿特伍德机”（Atwood's Machine）。滑轮 P 和绳索 C 的质量以及其间的摩擦力可以忽略。如图所示（实线部分），当绳索两端分别悬挂有质量为 M 的物体时，系统处于平衡状态；此时，在其中一端再加上质量为 m 的小砝码。于是，整个系统加速运行了一段距离 h 后，小砝码被环形架阻挡住。此后，相等质量 M 的两个物体以恒定速度 v 继续运动。测量得到 m ， h ， M 和 v 的大小，求重力加速度 g 的大小。

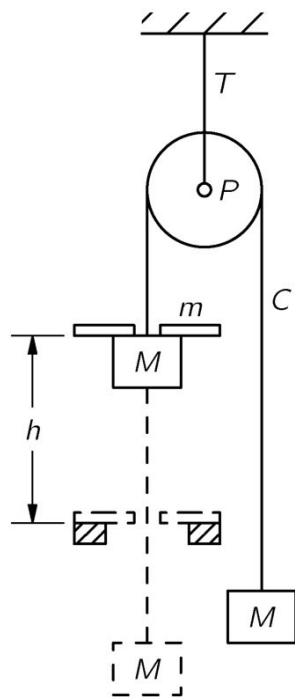


图 5-7

5.9 如图5-8所示，质量为 M_1 的物体悬挂在质量为 M_2 的电梯的天花板上。在恒力 F 的作用下，电梯向上加速运动。其中， $F > (M_1 + M_2)g$ 。起初，物体 M_1 位于电梯地板上方 s 处。

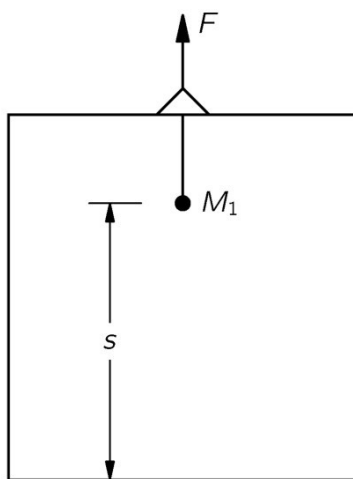


图 5-8

- (a) 求电梯的加速度 a_0 。
- (b) 连接物体和电梯的绳索上的张力 T 是多少？
- (c) 如果绳索突然断开，在断开的瞬间，电梯的加速度 a ，物体 M_1 的加速度 a' 分别是多少？

5.10 如图5-9所示的系统中，所有表面都是光滑无摩擦的。若将位于质量为 $M=1\ 650\text{g}$ 的基座上方 $d=1\text{m}$ 的质量为 $m=150\text{g}$ 的物体释放，问释放多久后，物体 m 将触碰到底座？

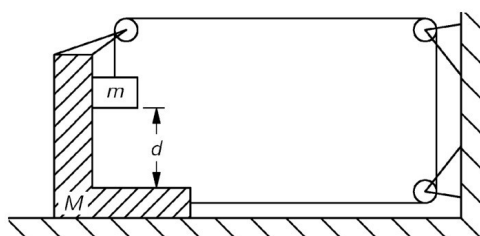


图 5-9

5.11 某运河渡口的渡船，无法同时承载两只袋鼠保罗（P，Paolo）和弗朗西斯卡（F，Francesca）。两只相亲相爱的袋鼠又不肯分开到两只船上。富有冒险精神的船夫吉赛贝（G，Giuseppe）为了得到运输费，设计了如图5-10所示的装置：用不计质量的绳和无质量的光滑滑轮把袋鼠P和F悬吊起来，在两只袋鼠还未碰到船板或吊杆前，把它们运送到河对岸。假设袋鼠P的质量是 90kg ，袋鼠F的质量是 60kg ，问船夫G通过此装置可以节省多少负荷量 W ？

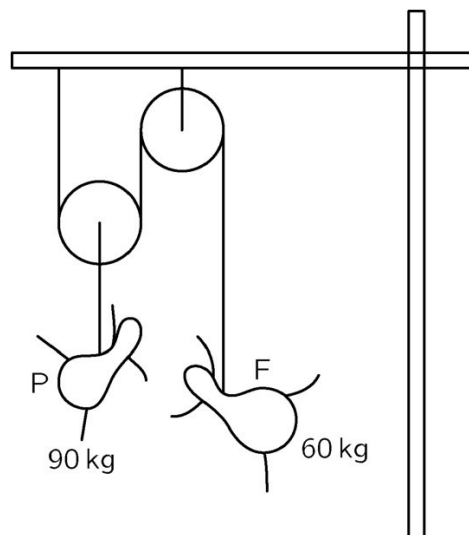


图 5-10

提示：注意，在不计绳、滑轮的质量以及滑轮摩擦的前提下，滑轮两侧绳的张力大小相同。

- 5.12** 如图5-11所示，油漆工人在吊椅上工作，吊椅悬挂在一栋高楼的一侧。为了可以快速移动，重180lb的这位油漆工人以很大的力向下拉动下垂的绳子，此时他对吊椅产生的压力仅为100lb。已知吊椅自身质量是30lb。求：

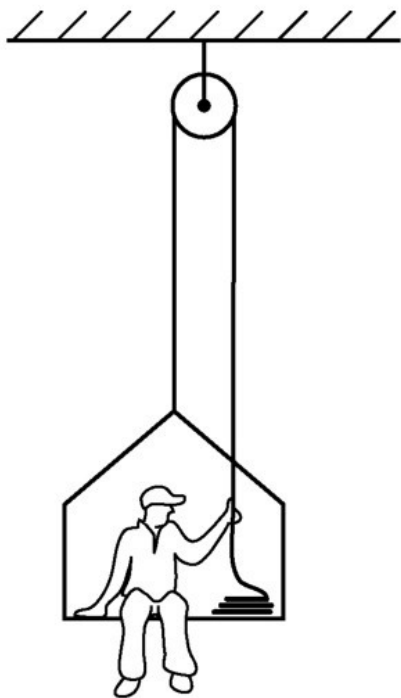


图 5-11

(a) 油漆工人和椅子的加速度 a 是多少？

(b) 滑轮所承载的总力 F 是多少？

- 5.13** 一个即将远赴月球的空间旅行者携带了一个弹簧秤和一个质量为 1.0kg 的物体 A 。在地球上时，当物体 A 悬挂在弹簧秤上达到平衡时，弹簧秤读数是 9.8N 。空间旅行者在月球的某处着陆，此处的重力加速度的确切数值未知，但其大小大约为地球表面重力加速度的 $1/6$ 。他捡起一块石头 B ，放在弹簧秤上达到平衡时，弹簧秤读数是 9.8N 。如图5-12所示，他把物体 A 与石块 B 放于滑轮的两侧，观测发现石块 B 以 1.2ms^{-2} 的加速度下落。问：石块 B 的质量 m_B 是多少？

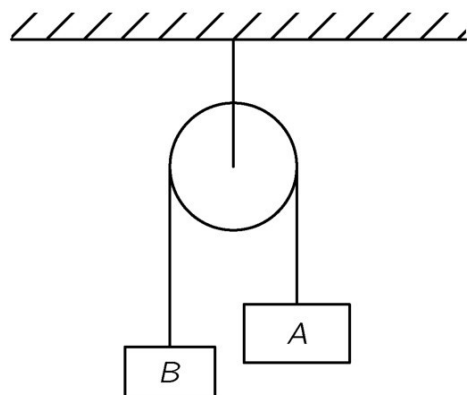


图 5-12

利用数值方法求解以下习题

5.14 一个物体悬挂在弹簧上，处于静止状态。给它一个适当的向上冲击后，物体初始恰好以单位速率运动。如果物体的质量和弹簧的弹性系数正好使得物体的运动方程为 $\ddot{x} = -x$ ，通过对运动方程进行数值积分，求物体可以达到的最大高度 $x_{\max}$ 。

5.15 质量为 m 的粒子沿直线运动。粒子受到与运动速度成正比的阻力， $F = -kv$ 。初始时间 $t = 0$ 时，粒子的位置 $x = 0$ ，速率 $v = v_0$ 。

(a) 利用数值积分，求 x 关于 t 的函数关系。

(b) 求速率减小到一半时所需的时间 $t_{1/2}$ 以及粒子可以达到的最大距离 $x_{\max}$ 。

注意：

- (a) 调整 x 和 t 的单位大小，使粒子的运动方程具有简单的数字系数。
- (b) 制定一个方案，通过较粗糙的时间间隔 Δt 得到较好的准确性。
- (c) 通过量纲分析推导 $t_{1/2}$ 和 $x_{\max}$ 对于 v_0 ， k 以及 m 的依赖关系，并对于某个方便计算的 v_0 值，比如 $v_0=1.00$ （使用 x ， t 调整后的单位）计算粒子的实际运行情况。

5.16 某带电粒子在一电场以及一磁场的作用下，按以下方程所描述的方式运动：

$$\frac{dv_x}{dt} = -2v_y,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 1 + 2v_x.$$

在 $t=0$ 时刻，粒子的初始位置为 $x=0$ ， $y=0$ ，初始速度为 $v_x=1.00$ ， $v_y=0$ 。利用数值积分确定粒子的运动性质。

5.17 一颗子弹以出口速度 $v=1\,000\text{ft s}^{-1}$ ，与水平面呈 45° 角射出。子弹所受阻力与运动速度的立方成正比，即 $F=-kv^3$ 。当子弹速度 $v=1\,000\text{ft s}^{-1}$ 时，系数 k 使得阻力是子弹所受重力的两倍。利用数值积分方法，近似求出子弹所能达到的最大高度 $h_{\max}$ 。

以及子弹水平射程 R ，并将计算结果与无阻力情况下的结果进行比较。

6 动量守恒

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第10章。

- 6.1** 两个物体沿一条直线运动时，存在一个特殊的坐标系，在此坐标系下，一个物体的动量与另一个物体的动量大小相等，方向相反。即，两个物体的总动量为零。这种参照系被称作“质心系”（center-of-mass system，简记为CM）。如果两物体质量分别为 m_1 和 m_2 ，运动速度分别为 v_1 和 v_2 ，试证明：质心系的运动速度为：

$$v_{\text{CM}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}。$$

- 6.2** 把以上结论推广至任意多个物体沿一条直线运动的情况。即，证明：质心系（满足体系总动量为零的坐标系）的运行速度是：

$$v_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}。$$

- 6.3** 在题目6.1中，用 T 表示两个物体的总动能，用 T_{CM} 表示质心系下体系的总动能，证明：

$$T = T_{\text{CM}} + \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) v_{\text{CM}}^2。$$

6.4 推广题目6.3的结论至任意多个物体的情况。证明：

$$T = T_{\text{CM}} + \frac{\sum m_i}{2} v_{\text{CM}}^2。$$

6.5 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个滑块沿一水平气垫导轨自由运动。其中，滑块 m_2 静止，滑块 m_1 与其发生完全弹性碰撞。碰撞后，两滑块以大小相等、方向相反的速度反弹开。求两滑块的质量比 m_2/m_1 。

6.6 一个动能为 E 的中子与一个静止的 ^{12}C 核进行正对相撞。完全弹性相撞后，中子以与入射方向相反的方向被弹开。求中子的末动能 E' 。

6.7 质量 $m=10\text{kg}$ 的物体竖直向上发射离开地球，发射初速度为 $v_p=500\text{m s}^{-1}$ 。

(a) 计算地球的反冲速度 v_E 。

(b) 计算在物体与地球分开的瞬间，地球的动能 T_E 与物体的动能 T_p 之比。

(c) 定型地勾画出地球以及物体的速度—时间图和动能—时间图。

忽略空气阻力以及地球的转动。

- 6.8** 质量 $m=1.0\text{kg}$ ，速度 $V=10\text{ms}^{-1}$ 的粒子与一质量 $M=4.0\text{kg}$ 的静止粒子相撞，相撞后以速度 V_F 被反弹开。反弹方向与入射方向相反。如果相撞过程中，有 $h=20\text{J}$ 的热量产生，求速度 V_F ？
(定义所有被引入的物理量，并明确说明你的原始方程是基于什么物理定律得到的。)
- 6.9** 平台质量为 $10\,000\text{kg}$ ，长度为 5m ，在水平气垫上可以自由移动，在其北端固定一架机枪，在其南端固定一个厚靶。机枪向厚靶发射子弹，每秒钟可以发射10颗子弹，每颗子弹质量为 100g 。子弹被发射出时的初速度是 500m s^{-1} 。问：平台会移动吗？如果如此，向哪个方向移动，移动速度是多少？
- 6.10** 如图6-1所示，质量为 m_1 的物体跨过滑轮，利用缆绳与水容器相连。水容器的初始质量为 $m_2(t=0)=m_0$ 。系统被释放，水容器以恒定速率向下喷射出水柱（在内置水泵的作用下），速率为 $dm/dt=r_0$ ，水柱相对于水容器的速度为 v_0 。求物体的加速度 a 关于时间 t 的函数。忽略滑轮和缆绳的质量。

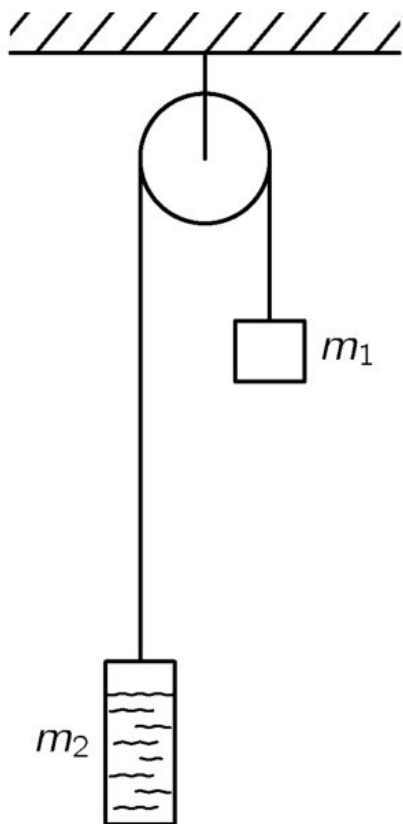


图 6-1

- 6.11** 雪橇沿积雪的斜坡无摩擦下滑，下滑过程中不断铲起积雪。斜坡的倾斜度为 30° ，雪橇每行进 1m 铲起 0.50kg 积雪。请计算，当雪橇速度为 4.0ms^{-1} ，质量（包括铲起的积雪）为 9.0kg 的瞬间，其加速度 a 是多少？
- 6.12** 如图6-2所示， $t=0$ 时刻时，把静止在桌面上的链以恒定速度 v 垂直向上提起，链条单位长度的质量为 μ 。求向上的提力 F 关于时间 t 的函数。

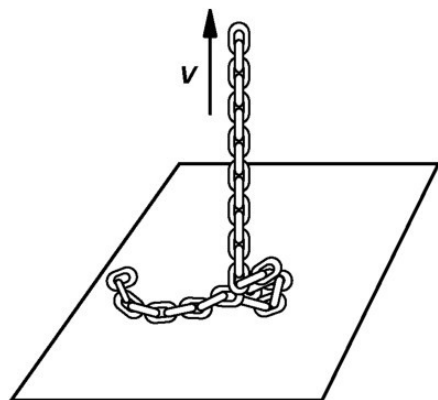


图 6-2

- 6.13** 步枪子弹的速率可以通过冲击摆来测量。悬挂着的质量为 M 的木块形成冲击摆，其摆长为 L ，如图6-3所示。一颗质量 m 已知、速率 V 未知待测的子弹射入初始静止的木块中，并嵌在其中与木块一起摆动，摆幅 x 可以测得。利用能量守恒定律可以求出子弹刚刚碰撞到木块后木块的速度。以 m 、 M 、 L 以及 x 为已知量，试推导出子弹速率 V 的表达式。

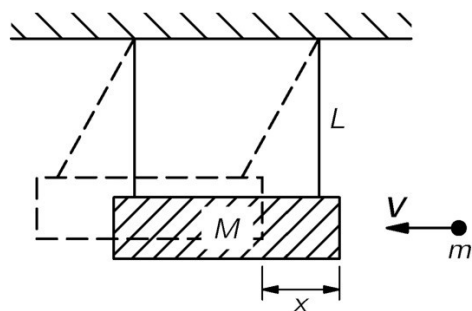


图 6-3

- 6.14** 两个滑块 A 和 A' 刚性地连接在一起，总质量为 M ，两滑块相距 $2L$ 。另一滑块 B 的质量为 m ，长度为 L ，被约束在 A 与 A' 间运动，如图6-4所示。所有的滑块在一很长的无摩擦直气轨上运

动。 (A, A') 和 B 之间的所有碰撞都是完全弹性的。起初，整个系统处于静止状态，滑块 B 和滑块 A 接触。然后， A 、 B 间的雷管被引爆，系统因而获得的总动能为 T 。

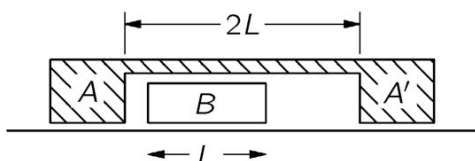


图 6-4

(a) 给出滑块 B 的运动的定性特征，即在气轨上的位置 x 、相对于气轨的速率 $\dot{v}$ ，并勾勒出 x 和 $\dot{v}$ 关于时间的函数图。对两个函数图使用相同的时间尺度。

(b) 计算周期 τ_0 ，用 T 、 L 、 m 、 L 表示。

提示： B 对于 (A, A') 的相对速度是

$$v_{\text{rel}} = v_B - v_{(A, A')}。$$

6.15 在水平气轨上以大小相等、方向相反的速度 v 和 $-v$ 运动的两个质量相等的滑块进行准弹性碰撞，以较原来略小一些的速率弹开。在碰撞中动能的损失比例 $f \ll 1$ 。如果两个这样的滑块相撞，但其中一个初始时处于静止状态，问碰撞后第二个滑块的速率是多少？

注意：如果 $x \ll 1$ ，则 $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ 。

6.16 初始质量 $m = M_0$ 的火箭以恒定的速率 $\frac{dm}{dt} = -r_0$ 和速率 V_0 （相对于火箭）喷射燃烧过的燃料。

（a）计算火箭的初始加速度 a （忽略重力）。

（b）如果 $V_0 = 2.0 \text{ km s}^{-1}$ ，为了达到 10^5 kg 重的推力，燃料的喷射速率 r_0 必须达到多少？

（c）写出联系火箭速率 v 和其残余质量 $m = M$ 的微分方程。如果你可以，求解此方程。

6.17 质量为 10 kg 、横截面积为 0.50 m^2 的地球卫星在 200 km 的高度绕地球作圆周运动。在那里，分子的平均自由程可达数米，空气密度约为 $1.6 \times 10^{-10} \text{ kg m}^{-3}$ 。分子与卫星的碰撞能有效地当作是非弹性的（实际上，碰撞后分子并非黏附在卫星上，而是以较低的相对速率离开），在这一粗略假设下，

（a）计算由于空气摩擦卫星所受到的减速力 F_R 。

（b）这一摩擦力如何随卫星的速率 v 变化？卫星的速率会因作用于其上的净力而减小吗？

7 矢量

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第11章。

7.1 两物体质量分别为 m_1 和 m_2 ，速度分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ ，证明：质心系的运动速度为

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}。$$

7.2 证明：质量为 m_i ，速度为 $\mathbf{v}_i$ 的 N 个物体，对于某坐标系，总动量为零，则这一坐标系的速度为

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}。$$

7.3 假定 T 是习题7.1中两物体的总动能， T_{CM} 是它们在质心系中的总动能，证明：

$$T = T_{\text{CM}} + \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) |\mathbf{v}_{\text{CM}}|^2。$$

7.4 推广习题7.3的结果至 N 个物体。证明：

$$T = T_{\text{CM}} + \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{2} |\mathbf{v}_{\text{CM}}|^2。$$

7.5 一个粒子初始位移是 $\mathbf{r}_0$ ，初始速度是 $\mathbf{v}_0$ ，在重力的作用下运动。求 $\mathbf{r}(t)$ 。

7.6 已知

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}。$$

求：

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

(b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(c) $\mathbf{a}_x$

(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$

(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

(f) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$

7.7 质量为1kg的粒子的运动方式可由下式描述：

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + (t + t^2/2) \mathbf{j} - (4/\pi^2) \sin(\pi t/2) \mathbf{k}.$$

(a) 分别求 $t=0$ 和 $t=1$ 时刻（单位：秒），粒子的位置，速度 $\mathbf{v}$ 和加速度 $\mathbf{a}$ 。

(b) 求产生这样运动方式所需的力 $\mathbf{F}(t)$ 。

(c) 求 $t=1$ 时刻，粒子的曲率半径 R 。

7.8 以100节速度飞行的飞行员打算向正北飞行。在与机场气象人员的通话中获悉，在他飞行的高度有一股由西向东、速率为25节的风。

(a) 他应向什么方向转头？

(b) 假定他的目的在100mi远的地方，求飞行时间 T 。（忽略着陆和起飞时间。注意：1节=1.15mi h⁻¹。）

7.9 一人骑车以10mi h⁻¹的速率向正北骑行，风由东、北之间一点以6mi h⁻¹的速率吹来，在骑车人看来，风来自北偏东15°的方向。

(a) 求风的真实方向。

(b) 如果骑车人返程时以同样速率行驶，在他看来风将是什么方向？

7.10 一人站于宽1.0mi的河的一岸，欲渡到河的正对岸。他有两种方法可供选择：

(a) 方向朝上游偏一些以使得速度合方向朝向河正对岸。

(b) 方向向正前方，当到达对岸时，由于水流把他冲向了下游，他需沿河岸向上行走，走到正对岸的地方。

如果他游泳速率为 2.5mi h^{-1} ，步行速度为 4.0mi h^{-1} ，水流速度为 2.0mi h^{-1} ，哪种方式更快？快多少？

7.11 一汽艇以相对于河水为 V 的恒定速率在直河道中行驶。河水以恒定速率 R 缓慢行驶。汽艇首先在确定的起点和正上游距离起点为 d 处进行往返行驶。接着在起点和径直横穿河流的方向上距离起点 d 处进行往返行驶。为简单起见，假定汽艇一直在全速行驶，并且在路程终点处转头的的时间不计。如果 t_V 是沿水流方向作往返行驶所需的时间， t_A 是横穿水流方向作往返行驶所需的时间， t_L 是汽艇在湖面上行驶 $2d$ 距离所需的时间。

(a) 求 t_V/t_A 。

(b) 求 t_A/t_L 。

7.12 利用矢量求地球上两点〔两点的纬度和经度分别为 (λ_1, ϕ_1) 和 (λ_2, ϕ_2) 〕间的大圆距离（great circle distance） D 。

7.13 求以下情况的月球加速度 a （包括大小和方向）。

（a）新月。

（b）弦月（1/4满月）。

（c）满月。

注意：地球、太阳间距离，地球、月亮间距离分别为：

$$R_{E-S} = 1.50 \times 10^8 \text{ km},$$

$$R_{E-M} = 3.85 \times 10^5 \text{ km}.$$

另 $M_S = 3.33 \times 10^5 M_E$ ，其中， M_S 和 M_E 分别为太阳和地球的质量。

7.14 用两个完全一样的、表面光滑的 45° 楔形物 M_1 和 M_2 推动表面光滑、质量为 $M=384\text{kg}$ 的物体，如图7-1所示。两个楔形物都放置在光滑水平面上。其中， M_2 靠在竖直墙面上；一 595kg 重量的水平力 F 作用在 M_1 上。

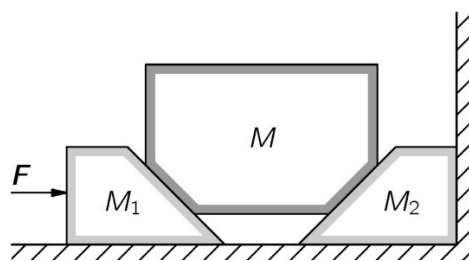


图 7-1

(a) 求可移动楔形物 M_1 的加速度 $\mathbf{a}_1$ (大小和方向)。

(b) 求物体 M 的加速度 $\mathbf{a}$ (大小和方向)。

(c) 求稳定楔形物 M_2 施加在 M 上的力 F_2 。

忽略摩擦力。

- 7.15** 质量为 m 的物体系于一根任意长的弦的一端，被悬挂在一无摩擦的枢轴上，并使其在水平圆轨道上旋转，旋转平面在枢轴点的下方 H 距离，如图7-2所示。求物体在轨道上的旋转周期 T 。

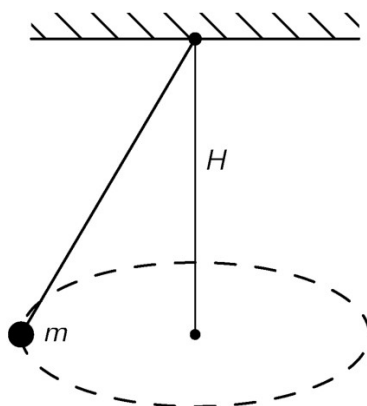


图 7-2

- 7.16** 两个黏性小泥球 a 和 b ，质量均为 1g ，在重力的作用下以 -9.8 k m s^{-2} 的加速度运动。给定初始条件： $t=0$ 时刻，

$$\mathbf{r}_a(0) = 7\mathbf{i} + 4.9\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_a(0) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_b(0) = 49\mathbf{i} + 4.9\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_b(0) = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

求 $t > 0$ 的所有时刻的 $\mathbf{r}_a(t)$ 和 $\mathbf{r}_b(t)$ 。

7.17 你在一艘以15节的速率向东定向行驶的船上。观测到另一艘船（已知此船在以26节的速率定向行驶）在你正南方6.0mi处；后来发现，此船穿越到你后面，其离你的最近距离为3.0mi。

（a）求另一艘船的行驶方向。

（b）从位于你正南方到离你最近，另一艘船行驶时间 T 是多少？

8 三维空间中的非相对论性两体碰撞

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第10、11章。

使用质心系通常能简化对两体碰撞问题的分析。考虑实验室参照系中两体碰撞的一般情形。质量分别为 m_1 和 m_2 ，速度分别为 v_1 和 v_2 的两物体碰撞。两物体可能会发生质量的部分交换，导致碰撞后的两物体质量分别为 m_3 和 m_4 ，速度分别为 v_3 和 v_4 ，如图8-1所示。能量守恒定律和动量守恒定律给出如下关系：

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + Q = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2,$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_3 v_3 + m_4 v_4。$$

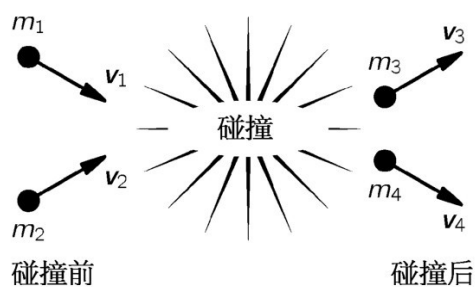


图 8-1

Q 值决定碰撞过程的非弹性。实验室参照系中的这种分析方法往往很冗长，并且难以揭示可能的规则或简单的关系。在大部分情况下，使用质心参照系更有优势，在质心参照系中，碰撞是一个线性过程。

(i) 确定质心的速度。

碰撞前：

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}。$$

碰撞后：

$$\mathbf{v}'_{\text{CM}} = \frac{m_3 \mathbf{v}_3 + m_4 \mathbf{v}_4}{m_3 + m_4}。$$

注意：在一切非相对论性碰撞中，

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4，$$

因此

$$\mathbf{v}'_{\text{CM}} = \mathbf{v}_{\text{CM}}。$$

在下面的讨论中，我们将考虑特殊情况：

$$m_1 = m_2，$$

$$m_3 = m_4。$$

(ii) 求质心系中，物体 m_1 和 m_2 的速度，如图8-2所示，

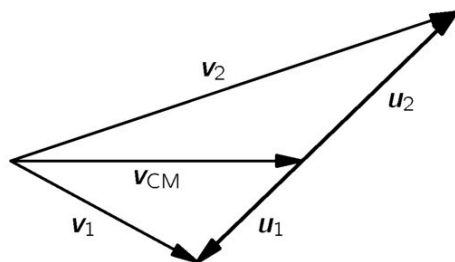


图 8-2

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{CM}},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{\text{CM}}.$$

在质心系中，两个物体的动量大小相等、方向相反，

$$m_1 \mathbf{u}_1 = -m_2 \mathbf{u}_2,$$

即：如果相撞的两物体可以看作是质点，则 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 是共线（collinear）的。

同样，

$$\frac{|\mathbf{u}_1|}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

(iii) 碰撞后，在质心系中，两物体的动量同样必须大小相等、方向相反，即

$$m_3 \mathbf{u}_3 = -m_4 \mathbf{u}_4,$$

$$\frac{|\mathbf{u}_3|}{|\mathbf{u}_4|} = \frac{m_4}{m_3}。$$

注意：在质心系中，两物体相对运动线在碰撞后可能被旋转到一新的方向，如图8-3所示。这一新方向并非由动量守恒定律和能量守恒定律决定，而是取决于相互作用力和初始相对运动的几何关系。碰撞后，速度 $\mathbf{u}_3$ 、 $\mathbf{u}_4$ 的大小可能大于、小于或等于 $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{u}_2$ 的大小，取决于碰撞中能量是否被释放、被吸收或不变。在几何表示中，速度矢量 $\mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{u}_4$ 一定共线，且它们的终点一定落在同心球（对于二维碰撞是圆）壳上，半径满足关系

$$\frac{|\mathbf{u}_3|}{|\mathbf{u}_4|} = \frac{m_4}{m_3}。$$

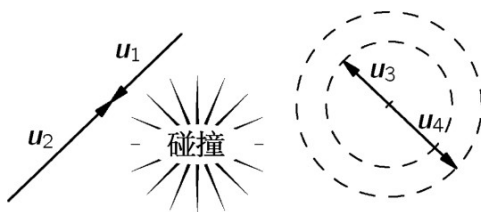


图8-3

$\mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{u}_4$ 的大小由能量守恒定律决定。习题7.3已经证明：两个物体的总动能可以表示为

$$T = T_{\text{CM}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) |\mathbf{v}_{\text{CM}}|^2,$$

其中

$$T_{\text{CM}} = \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{u}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\mathbf{u}_2|^2。$$

从动量守恒定律可知：

$$m_1 |\mathbf{u}_1| = m_2 |\mathbf{u}_2| = P,$$

于是，

$$T_{\text{CM}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{P^2}{2}。$$

注意，两个物体的“约化质量” m_{r} 定义为

$$\frac{1}{m_{\text{r}}} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}。$$

在这种符号下，

$$T_{\text{CM}} = \frac{P^2}{2 m_{\text{r}}}。$$

碰撞前：

$$T = T_{\text{CM}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) |\mathbf{v}_{\text{CM}}|^2。$$

碰撞后：

$$T' = T + Q = T'_{\text{CM}} + \frac{1}{2}(m_3 + m_4) |\mathbf{v}'_{\text{CM}}|^2。$$

在非相对论性碰撞中：

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m_3 + m_4, \\ \mathbf{v}_{\text{CM}} &= \mathbf{v}'_{\text{CM}}, \end{aligned}$$

于是

$$T'_{\text{CM}} = T_{\text{CM}} + Q = T_{\text{CM}} \left(1 + \frac{Q}{T_{\text{CM}}} \right)。$$

同样

$$T'_{\text{CM}} = \frac{1}{2} m_3 |\mathbf{u}_3|^2 + \frac{1}{2} m_4 |\mathbf{u}_4|^2,$$

由于

$$m_3 |\mathbf{u}_3| = m_4 |\mathbf{u}_4| = P',$$

于是有

$$T'_{\text{CM}} = \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) \frac{P'^2}{2}。$$

在我们要讨论的特殊情况（ $m_1 = m_2$ ， $m_3 = m_4$ ）中，有 $m_r = m'_r$ 。
。因而，由 $T'_{\text{CM}} = T_{\text{CM}} \left(1 + \frac{Q}{T_{\text{CM}}} \right)$ ，可得

$$P'^2 = \left(1 + \frac{Q}{T_{\text{CM}}}\right) P^2。$$

这个表达式给出了碰撞后在质心系中速度的大小。

(1) 弹性碰撞

$Q=0$: 在碰撞中动能不发生变化, $P'^2=P^2$ 。

于是,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_3| &= |\mathbf{u}_1|, \\ |\mathbf{u}_4| &= |\mathbf{u}_2|。 \end{aligned}$$

(2) 非弹性碰撞

$Q>0$: 碰撞中, 释放出动能;

$Q<0$: 碰撞中, 动能被吸收。

且 $P'^2 = \left(1 + \frac{Q}{T_{\text{CM}}}\right) P^2$ 。

于是,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_3| &= \left(1 + \frac{Q}{T_{\text{CM}}}\right)^{1/2} |\mathbf{u}_1|, \\ |\mathbf{u}_4| &= \left(1 + \frac{Q}{T_{\text{CM}}}\right)^{1/2} |\mathbf{u}_2|。 \end{aligned}$$

(iv) 碰撞后，在实验室系中的速度可以通过简单地把质心速度 $\mathbf{v}'_{\text{CM}}$ 加到 $\mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{u}_4$ 上求得，如图8-4所示，

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}'_{\text{CM}} + \mathbf{u}_3 ,$$

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}'_{\text{CM}} + \mathbf{u}_4 \text{。}$$

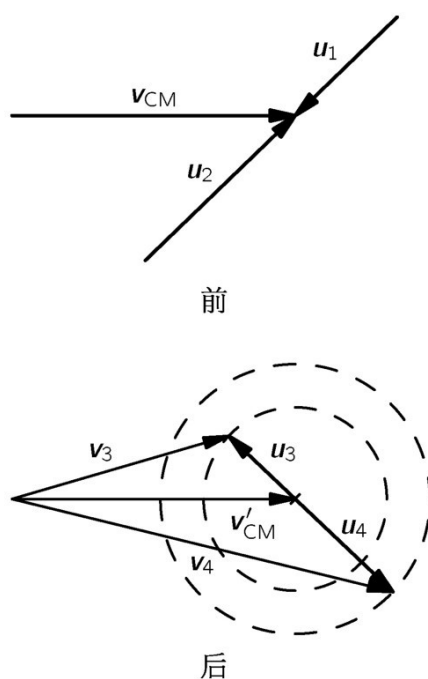


图8-4

两体碰撞的重要的一般性和具体信息常常能由上述散射运动学的几何表示直接推导而来。

8.1 类似上面的讨论，推导 $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ ，但 $m_1, m_2 \neq m_3, m_4$ 情况三维非相对论性碰撞的结果。即证明：初始动量分别为 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 的两物体相撞，末动量为

$$\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{P}_3 + m_3 \boldsymbol{v}_{\text{CM}},$$

$$\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{P}_4 + m_4 \boldsymbol{v}_{\text{CM}},$$

其中 $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ 是实验室系中物体 m_i 的动量, $\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{p}_i - m_i \boldsymbol{v}_{\text{CM}}$ 是质心系中物体 m_i 的动量, 且

$$|\boldsymbol{P}_1| = |\boldsymbol{P}_2| = \sqrt{2m_{\text{r}} T_{\text{CM}}},$$

$$|\boldsymbol{P}_3| = |\boldsymbol{P}_4| = \sqrt{2m'_{\text{r}} T'_{\text{CM}}}.$$

- 8.2** 一运动粒子与相同质量的静止粒子发生完全弹性碰撞。证明：碰撞后，两粒子的速度方向垂直。
- 8.3** 一质量为 M 的运动粒子与一质量为 m ($m < M$) 的静止粒子发生完全弹性碰撞。求入射粒子被偏转的最大可能角度 θ_{max} 。
- 8.4** 质量为 m_1 、速度为 $\boldsymbol{v}_1$ 的粒子与另一质量为 $m_2 = 3m_1$ 的静止 ($\boldsymbol{v}_2 = 0$) 粒子发生完全弹性碰撞。碰撞后，物体 m_2 运动方向与物体 m_1 的原始方向成 $\theta_2 = 45^\circ$ 夹角，如图8-5所示。求物体 m_1 运动方向与原方向的夹角 θ_1 ，以及两物体的最终速度大小 v'_1 和 v'_2 。

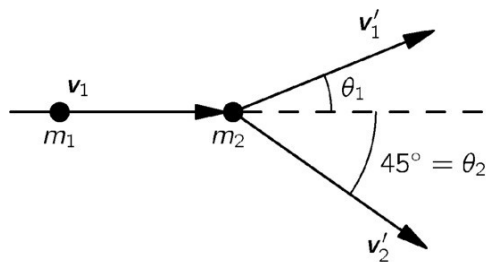


图 8-5

8.5 两个质量均为 m 的粒子以相等的速率沿相互垂直的方向相撞，碰撞后第一个粒子偏离其初始方向 60° ，且靠向另一粒子的入射方向，如图8-6所示。假定碰撞是弹性的，求第二个粒子朝第一个粒子的入射方向偏转的角度 α 。

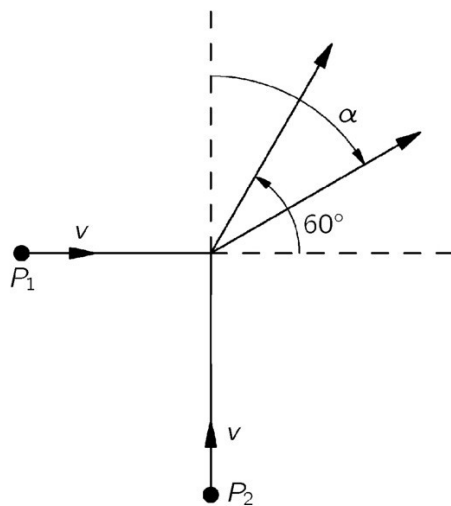


图 8-6

8.6 质量相等的两粒子沿相互垂直的方向运动，速率分别为 $v_1 = 8\text{m s}^{-1}$ ， $v_2 = 6\text{m s}^{-1}$ 。两粒子发生弹性碰撞。碰撞后，粒子 m_1 的运动方向与其原先方向成 $\theta = \arctan \frac{1}{2}$ 夹角，如图8-7所示。

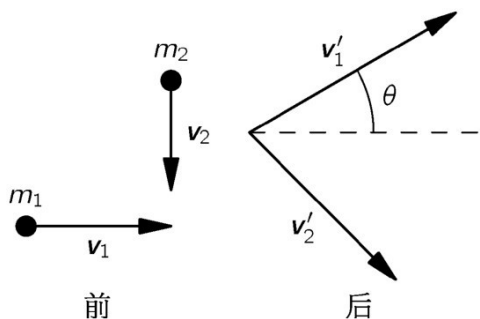


图 8-7

- (a) 求质心的速度矢量 $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ 。写出笛卡尔坐标系下的各分量。
- (b) 在质心系中，最终速率 u_1 、 u_2 分别是多少？
- (c) 求在实验室系中，粒子 m_1 的最终速度 $\mathbf{v}'_1$ 。

8.7 一沿 x 轴以速率 $v_0 = 1.00 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ 运动的质子与另一静止的质子发生弹性碰撞。碰撞后，一个质子在 xy 平面内沿与 x 轴成 30° 夹角的方向运动，求碰撞后两个质子各自的速度 $\mathbf{v}'_1$ 和 $\mathbf{v}'_2$ （包括大小和方向）。

8.8 一沿 x 轴以速率 $v_0 = 1.00 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ 运动的质子与一静止的铍（Be）原子核发生弹性碰撞。碰撞后，Be 原子核在 xy 平面内沿与 x 轴成 30° 角的方向运动。

- (a) 求在实验室系中 Be 原子核的速率 v_2 。
- (b) 求在实验室系中，质子的最终速度 $\mathbf{v}'_1$ 。

(c) 求在质心系中，质子的最终速度 $\mathbf{u}'_1$ 。

注：假定Be原子核和质子的质量之比是9:1。

8.9 一质量为100g、半径为2.00cm的充气圆盘与质量为200g、半径为3.00cm的静止充气圆盘发生弹性碰撞时，正在水平桌面上以 150cm s^{-1} 的初始速率运动。在碰撞的瞬间，两圆盘的中心连线与100g圆盘的初始运动方向成 60° 夹角。如果圆盘与桌面间、圆盘间都没有摩擦，求碰撞后，两个圆盘的各自速度 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 。

8.10 在实验室系中，质量为 m_1 、以线速率 v 运动的物体与一质量为 m_2 的静止物体发生碰撞。碰撞后观测发现：在质心系中，动能中的 $|\Delta T/T|_{\text{CM}} = 1 - \alpha^2$ 比例在碰撞中损失了。求在实验室系中能量损失的比例 $|\Delta T/T|_{\text{lab}}$ 。

8.11 (a) 一质量为 m 的粒子与一质量为 M ($M > m$) 的静止粒子发生完全弹性碰撞。入射粒子偏转了 90° 。求粒子 M 的反弹方向与粒子 m 的初始方向的夹角 θ 。

(b) 如果在碰撞中，质心系中的能量损失比例为 $(1 - \alpha^2)$ ，求粒子 M 的反弹角。

8.12 一动能为1MeV的质子与一静止原子核发生弹性碰撞，碰撞后角度偏转了 90° 。如果质子的能量现在为0.80MeV，求靶原子核的质量 M （以质子质量 m_p 为单位）。

8.13 质量为1kg、以速率 $v_1=6\text{ m s}^{-1}$ 向正北运动的圆盘与一质量为2kg的静止圆盘发生碰撞。碰撞后，1kg圆盘由原方向向东偏转 45° ，以速率 $v'_1=2\sqrt{2}\text{ m s}^{-1}$ 运动。

（a）碰撞后，求2kg圆盘的速度 $\mathbf{v}'_2$ 。

（b）在质心系中，动能损失的比例 α 。

（c）在质心系中，1kg圆盘的偏转角度 θ 是多少？

8.14 质量 $m_1=2\text{ kg}$ 、速度为 $\mathbf{v}_1=(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})\text{ ms}^{-1}$ 的“粒子”与另一质量 $m_2=3\text{ kg}$ 、速度 $\mathbf{v}_2=(-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k})\text{ m s}^{-1}$ 的“粒子”发生非弹性碰撞。

（a）求复合粒子的速度 $\mathbf{v}$ 。

（b）求碰撞前在质心系中粒子的总动能 T_{CM} 。

9 力

参考《费曼物理学讲义（第1卷）》第12章。

- 9.1 由于表面张力，肥皂泡内部压力 $P + \Delta P$ 大于外部压力 P 。请证明：半径为 R 的球形肥皂泡的表面张力以压力微分 ΔP 表示是

$$\sigma = \frac{R}{4} \Delta P。$$

- 9.2 某物体质量为3kg，处于运动状态，其运动过程由运动方程 $x = 6t^2 - 2t^3$ 描述（ x 以m为单位， t 以s为单位）。问：在 $t = 4$ （s）时，物体所受力 F 为多少？

- 9.3 两个物体 $m_1 = 4\text{kg}$ 和 $m_3 = 2\text{kg}$ 通过质量可以忽略的细绳（细绳经过完全无摩擦的滑轮，如图9-1所示）与物体 $m_2 = 2\text{kg}$ 相连接。物体 m_2 在长桌上运动，摩擦系数为 $\mu = 0.5$ 。系统由静止释放，问物体 m_1 的加速度 a 是多少？

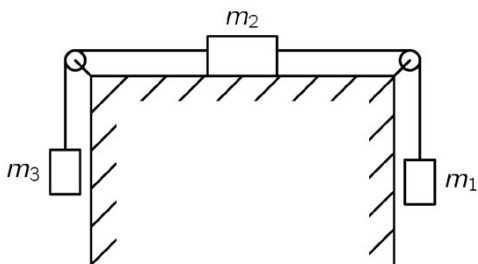


图 9-1

- 9.4 半径相同的两个肥皂泡通过细管相连，如图9-2所示，请描述将有什么现象发生？

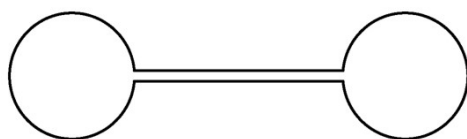


图 9-2

- 9.5 在轨道上快速行驶的火箭滑车，在滑车和轨道之间装配有带枢轴的刹车板，如图9-3所示。刹车板两端装有可更换的摩擦垫。摩擦垫和轨道之间的摩擦系数是 μ 。在火箭滑车运行过程中，摩擦垫材料的磨损速率正比于施加在摩擦垫上的摩擦力。假设刹车板枢轴中心点 P 位于轨道平面上方高 h 处，为使得两摩擦垫以同样的速率磨损， P 点与两摩擦垫间的竖直中心线的水平距离 x 应为多少？

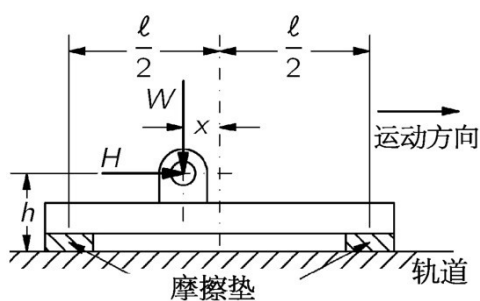


图 9-3

其中，

W ：刹车板上所承载的火箭滑车的重量

H : 刹车板枢轴中心点所受力的水平分量

l : 两摩擦垫中心之间的总长度

- 9.6 能在竖直柱上上下滑动的可调节支架在很多实际应用中都有用处。图9-4是一种这样的支架，实际尺寸在图中具体标出。竖直柱与支架之间的静摩擦系数是0.30。如果把一个支架重量50倍的负载放在支架的 x 位置处，在支架不发生滑动的条件下， x 最小应是多少？

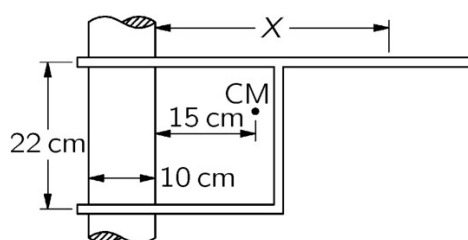


图 9-4

- 9.7 质量为 M 的立方体静止斜靠在墙壁上，如图9-5所示。不计墙壁和立方体之间的摩擦力，地面和立方体之间的摩擦力恰好维持立方体不发生滑动。在 $0 < \theta < 45^\circ$ 的条件下，求最小摩擦系数 $\mu_{\min}$ 关于 θ 的函数关系。计算 $\theta \rightarrow 0$ 和 $\theta \rightarrow 45^\circ$ 的 μ 值，以及 $\mu = 1$ 所对应的 θ 值，以验证你的答案是否合理。

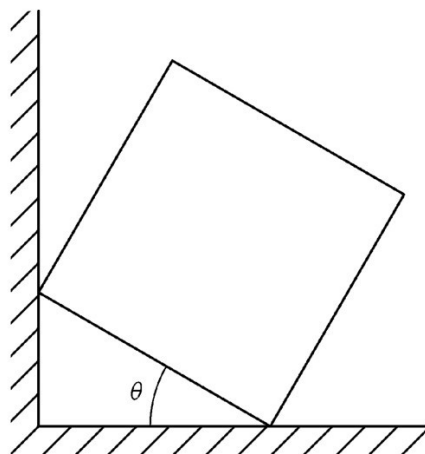


图 9-5

9.8 (a) 以低速 v 运动的绳子摩擦一圆柱，绳子偏离直线一个小角度 $\Delta\theta \ll 1$ ，如图9-6所示。设绳子在圆柱一边的张力为 $T + \Delta T$ ，而在圆柱另一边的张力为 T 。求由于摩擦而导致的张力差值 ΔT 。

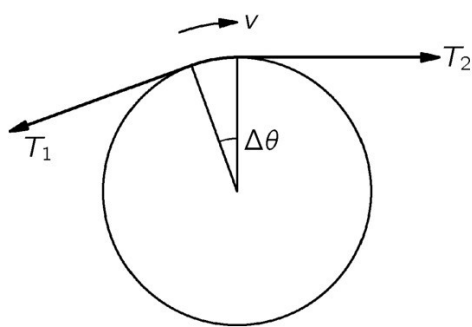


图 9-6

(b) 对上面所得方程进行积分，以求得当绕在圆柱上的绳子两端成一有限夹角 α ，并且拉动绳子使其滑动时，绳子两端张力之比 T_2/T_1 。

9.9 质量为5g的子弹水平射入静止于水平面上的木块中，木块质量为3kg。木块与水平面之间的摩擦系数为0.2。子弹嵌入木块后，观测到木块沿水平面滑行25cm。求子弹的入射速度 v_0 。

9.10 在汽车事故现场的调查中，通过测量，警察发现汽车A在与汽车B发生碰撞之前留下了长度为150ft的刹车痕迹。已知车轮与事故现场路面之间的摩擦系数不小于0.6。试求恰好在事故发生前汽车A的速度 v ，论证其一定超过了限定的极限速率45mph。

注：60mph=88ft s⁻¹，重力加速度 $g=32\text{ft s}^{-2}$ 。

9.11 一物体静止处在长1.00m、倾角20°的光滑斜面的底端。若斜面沿桌子以 $a=4.00\text{m s}^{-2}$ 的加速度做加速运动，求物体滑到斜面顶端所需时间 t ？

9.12 质量为 m 的滑块沿与水平面成 θ 角的斜面滑行。滑块与斜面之间的摩擦系数 $\mu < \tan\theta$ 。令 $m=1.00\text{kg}$ ， $\mu=0.20$ ， $\theta=30^\circ$ 。如果滑块沿斜面上抛的初速度为 3.00m s^{-1} ，

(a) 滑块沿斜面上行的距离 d 是多少？

(b) 滑块上行到最高点，再滑落到起点总共所耗时间 t 为多少？

(c) 求在此过程中，转化为热量的能量损耗 ΔE 。

- 9.13** 在图9-7所示的装置中，斜面长130cm，其上端高于下平面50cm。滑块 m_2 静止在平面上，质量为60g。滑块 m_1 质量为200g。两滑块之间的静摩擦系数是0.50；滑块 m_2 与斜面之间的摩擦系数是0.33。平行于斜面向上的力 F 作用在滑块 m_2 上。

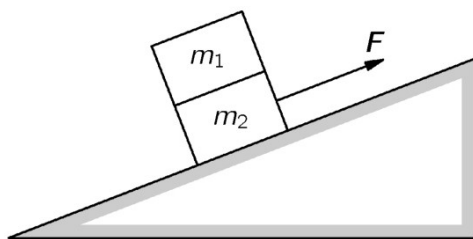


图 9-7

- (a) 求滑块 m_1 刚要滑动时，滑块 m_2 的加速度 a 。
- (b) 求滑块 m_1 相对于滑块 m_2 静止时，力 F 的最大值。
- 9.14** 质量为 m 的冰球以速度 v_0 (cm s^{-1}) 在冰面上无摩擦滑行，如图9-8所示。当它进入一小段宽 L (cm) 的断冰区时，所受摩擦力与速度成正比： $F = -k v$ 。求速度 v 关于位置 x 的函数表达式，并完成图9-8中的 v - x 曲线图。

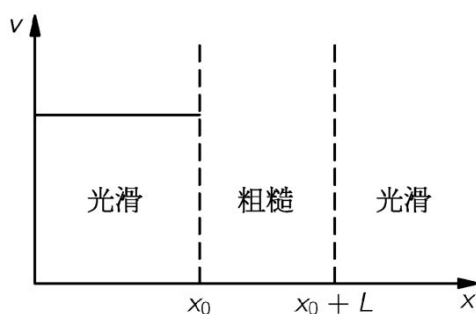


图 9-8

- 9.15** 如图9-9所示，当肥皂泡的半径有一微小增量 ΔR 时，为了克服表面张力 σ ，必须有外力做功，从而导致表面能增加 ΔE 。每改变单位表面积所产生的表面能变化 $\epsilon = \Delta E / \Delta A$ ，称为比表面能（specific surface energy）。从虚功原理求比表面能关于肥皂泡半径 R 、增压 ΔP 等的依赖关系。求比值 $|\sigma / \epsilon|$ 。

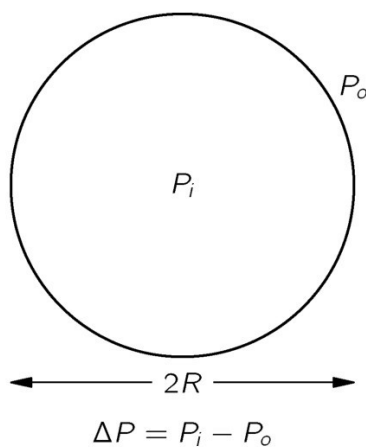


图 9-9

- 9.16** 一辆空调校车正在往一个铁路交叉口行驶。车上一个孩子把氢气球系在了椅子上。观测到，气球的拉线与竖直方向呈 30° 角向车行驶的方向倾斜，如图9-10所示。问司机是在加速还是减速，加速度是多少？（铁路巡视人员将会因司机的驾驶技术而表扬他吗？）

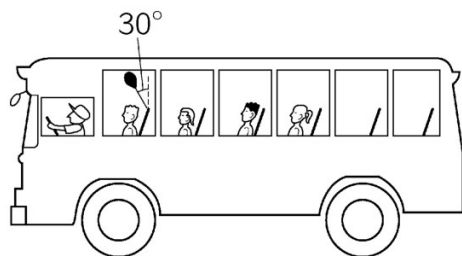


图 9-10

9.17 质量为 m ，电量为 q 的粒子在垂直于磁场 $\mathbf{B}$ 的平面内运动，速率为 v 。

(a) 证明：粒子在平面内做圆周运动。

(b) 求圆周半径 R 。

(c) 求粒子围绕圆周运行一周的时间 T 。

对于回旋加速器的运作，这个结果有重要意义。为什么？

9.18 质量为1 000g的物体悬挂在长5.0ft的绳子上，绳子的另一端系在可在水平杆上自由移动的圆环上，如图9-11所示。圆环与杆之间的静摩擦系数是0.75。另有一根绳子系在此物体上，绳子绕过一个滑轮另一端可以加载重物。滑轮固定在水平杆上，位于圆环左方 $\frac{1}{3}$ ft处。不断加载重量，直至圆环刚刚开始滑动。

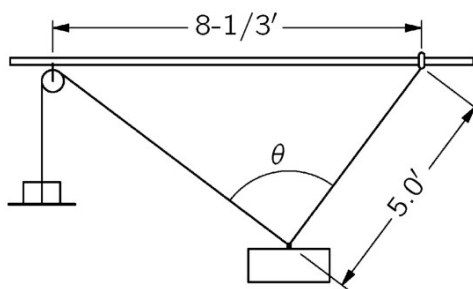


图 9-11

- (a) 此时，重量 W 为多少？
- (b) 长度为 5.0ft 的绳子上的张力 T 。
- (c) 求角 θ （如图所示）。

9.19 竖直门闩简化结构的侧视图如图9-12所示。下方部件 A 可以在水平槽内向前推进。槽表面光滑，摩擦力可以不计；部件 A 与部件 B 界面具有静摩擦系数 μ ，界面与水平面呈 45° 夹角。部件 B 质量为 m ，为了使门闩启动，施加在部件 A 上的水平力 F 至少是多少？

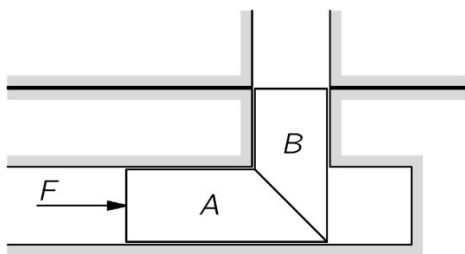


图 9-12

9.20 重 W 的粒子静止在粗糙斜面上，斜面与水平面夹角为 α ，如图 9-13 所示。静摩擦系数为 $\mu = 2 \tan \alpha$ 。

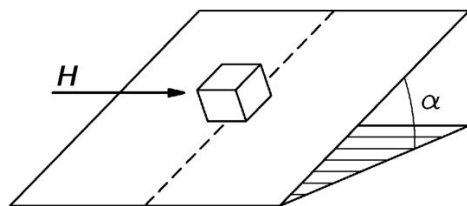


图 9-13

(a) 水平力 H 沿斜坡横向方向作用在粒子上, 为使粒子运动, 力 H 的最小值 $H_{\min}$ 是多少?

(b) 求粒子的运动方向与作用力 H 方向的夹角 ϕ 。

9.21 某瓶密闭的苏打水内部的计示压力为 $3.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。水的表面张力是 73 mN m^{-1} 。(假设 CO_2 气体和水交界处, 水的表面张力也是此值。)当缓慢打开瓶子时, 如果在局部成核中心开始形成的气泡初始半径大于某一临界值 R , 一个气泡就会在液体内生成。计算在上述条件下, 气泡生成的临界半径 R 。

9.22 电量为 q 、质量为 m 的粒子在同时存在的电场 E_y 、磁场 B_z 中运动。(其他场分量都为零。)

(a) 写出粒子的运动方程。

(b) 对该坐标体系进行如下伽利略变换:

$$x' = x - (E_y / B_z) t,$$

$$y' = y,$$

$$z'=z。$$

(c) 对于在相互垂直的电场和磁场中运动的自由粒子，你有什么结论？

10 势与场

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第13、14章。

- 10.1** 质量为 m 的物体以速度 v_0 在光滑水平面上滑行，并与弹性系数为 k ，长度为 x_0 的弹簧相撞，如图10-1所示。问：在何处时，物体第一次速度为零？不计弹簧质量。

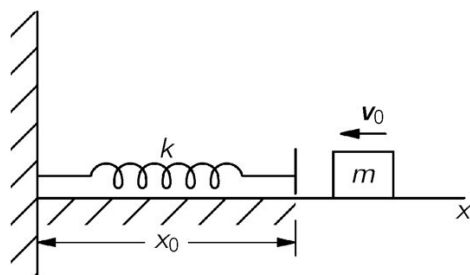


图 10-1

- 10.2** 一弹簧的弹性系数是 k 。在其线性范围内，以一恒定力 F 把弹簧拉到新的平衡位置，请证明：对于新的平衡位置，弹簧的弹性系数不变。
- 10.3** 一中空的球形行星在空间可以自由运行。在其内部，有一质量为 m 的小粒子。问：在行星内部何处小粒子处于平衡位置？
- 10.4** 脱离地球引力场所需速率为（近似地） 7.0mi s^{-1} 。某星际探测器刚刚离开地球大气层时的速率为 8.0mi s^{-1} 。求当此探测器距离地球 10^6mi 时，其相对于地球的速率 v 是多少？

- 10.5** 如果地球所携带的净电荷为1.00C，那么其电势 ϕ 将是多少？
- 10.6** 半径为0.50m的球壳上均匀带电，所形成电势为 10^6 V。求球壳所带总电量 Q 。
- 10.7** 在没有电火花（或电晕放电）的情况下，在一个大气压强下，干燥的空气所能承受的最大电场强度大约是 31kV cm^{-1} 。计算在空气中，直径为20cm的孤立光滑球体所能达到的最大电势 ϕ 。
- 10.8** 质量为6.0kg的物体沿 x 轴在无摩擦的轨道上运动。对于下面的每种情况，物体的初始情况皆为 $x=0$ ， $t=0$ 。
- （a）在 x 方向的作用力 $F=(3+4x)$ N的作用下，物体运行了3.00m。（ x 以m为单位。）
- 1) 求物体所达到的速度 v 。
 - 2) 求物体在该点的加速度 a 。
 - 3) 在该点力对物体所施加的功率 P 。
- （b）在 x 方向的作用力 $F=(3+4t)$ N的作用下，物体运行了3.00s。（ t 以s为单位。）
- 4) 求物体所达到的速度 v 。
 - 5) 求物体在该点的加速度 a 。

6) 在该点力对物体所施加的功率 P 。

习题10.9—10.11中，力 $\mathbf{F}=1.5y\mathbf{i}+3x^2\mathbf{j}-0.2(x^2+y^2)\mathbf{k}$ (单位：N) 作用于质量为1kg的粒子上。在 $t=0$ 时刻，粒子位于 $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ (单位：m) 处，以速度 $\mathbf{v}=2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (单位： ms^{-1}) 移动。

10.9 在 $t=0$ 时刻，求：

- (a) 粒子所受到的力 $\mathbf{F}$ ；
- (b) 粒子的加速度 $\mathbf{a}$ ；
- (c) 粒子的动能 T ；
- (d) 粒子的动能变化率 dT/dt 。

10.10 在 $t=0.01$ 时刻，采用近似，求：

- (a) 粒子的位置 $\mathbf{r}$ ；
- (b) 粒子的速度 $\mathbf{v}$ ；
- (c) 粒子的动能 T 。

10.11 粒子通过无摩擦轨道在力 $\mathbf{F}$ 的作用下（同时有约束力）从位置 $(0, -1, 0)$ 移至位置 $(0, 1, 0)$ 。在下列情况下，求力 $\mathbf{F}$ 所做的功 W 。

(a) 轨道是沿 y 轴方向的直轨道。

(b) 轨道是位于 yz 平面的圆形轨道。力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力吗？

10.12 一辆小车沿倾斜轨道无摩擦地向下滑行。轨道下部是半径为 R 的圆环。为使下车通过圆环而不离开轨道，应从圆环顶部上方多少高度 H 处释放小车？

10.13 如图10-2所示，无摩擦的滑道的最低端是半径为 R 的圆柱面的一部分。这部分圆柱面的两端对中心的张角均为 θ 。滑道的顶点距离其最低点的高度为 H 。质量为 m 的小物体从顶点处由静止开始下滑。

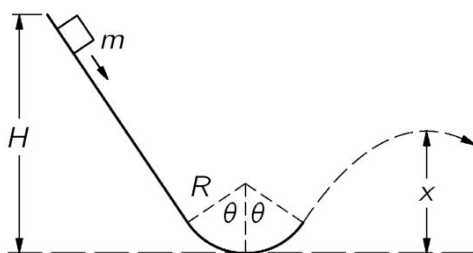


图 10-2

(a) 求小物体离开轨道后的运动轨迹相对于轨道最低点的最大高度 x 。

(b) 求小物体经过轨道最低点时对圆柱面所施加的力 $\boldsymbol{F}$ 。

10.14 质量为 m (kg) 的小滑块通过弹簧和 P 点连接。弹簧松弛时的长度可以忽略。弹簧的弹性系数为 k (N m^{-1})。弹簧的位置可以调节，但一旦调节好便被固定住，无法再移动。半径为 R

的圆环位于竖直平面内，小滑块可以在圆环的外表面上无摩擦地自由运动，如图10-3所示。 $\overline{OP} = d$ 。如果小滑块从圆环顶部的 A 点由静止开始滑动，当通过圆环底部的 B 点时，小滑块刚刚要脱离圆环，求 d 。

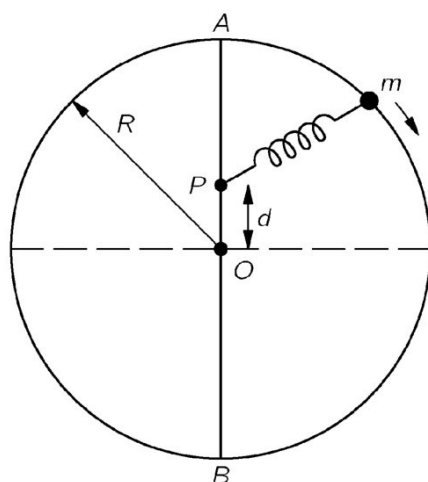


图 10-3

- 10.15** 长度为 L ，线密度为 M (kg m^{-1}) 的柔软缆绳悬挂在质量、半径、摩擦均可忽略的滑轮上。起初，缆绳刚好平衡。施加一微小的力，使缆绳偏离平衡，产生一加速度。求当缆绳的端点脱离滑轮时的速率 v 。
- 10.16** 一粒子位于无摩擦、半径为 R 的球面顶部，由静止开始，在重力的作用下沿球面滑行。求粒子离开球面时的位置在起点下方的距离 d 。
- 10.17** 质量为3 000lb的小汽车的发动机功率为85hp。以恒定速率30mph行驶所需功率为20hp。假定摩擦力不变，在同样速率

下，小汽车能驶上的最大坡度是多少？

10.18 质量为1 000kg的汽车以额定功率为120kW的发动机推动。如果发动机在速率为 60km h^{-1} 时达到这样的功率，求汽车的最大加速度 a 。

10.19 1960年，铅球（shot-put）、铁饼（discus）和标枪（javelin）的世界纪录分别为19.30m、59.87m和86.09m。三种投射物的质量分别为7.25kg、2kg和0.8kg。求创造世界纪录的一投各自所做的功 W_{shot} 、 W_{disc} 和 W_{jav} 。（假定运动员都是从离地面1.80m的高度开始，投掷仰角为 45° 。）

10.20 半径为 R 、质量为 M 的球体，其体内密度均匀。求引力势 ϕ 和引力场强度 g 关于到球心的距离 r 的函数关系，并画出图像草图。

10.21 如图10-4所示，求距离球表面为 x 的点 P 处的引力加速度 a 。球半径为 R ，密度为 ρ ，内含半径为 $R/4$ 的球形空腔。腔心位于 PC 延长线上，距离球心 C 为 $R/4$ 。

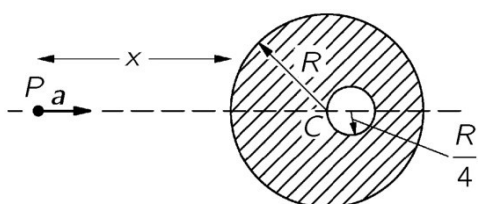


图 10-4

10.22 考虑一厚度为 d 的无限大平板，其材质密度为 ρ 。如图10-5所示，在坐标原点切出一半径为 r （ $r < d/2$ ）的球形腔。

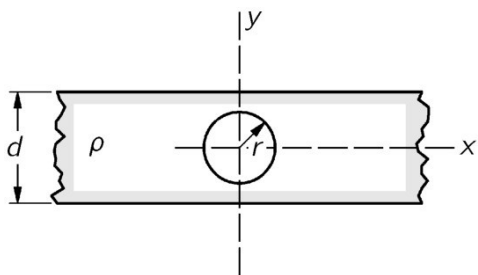


图 10-5

(a) 求位于 y 轴上任意一点 y 上的小质量物体 m 所受的引力 $\mathbf{F}$ 。

(b) 画出 F 关于 y 的函数图草图。

10.23 一质量为 m 的小物体在引力的作用下绕质量较大的物体 M 运动。运动轨迹是偏心率为 e ，长半轴为 a 的椭圆。（假定 M 保持静止。）计算物体 m 的总能量 E （动能、势能之和）。（注意： E 不依赖于 e 。）

10.24 (a) 推导开普勒第三定律。给出物体质量 M ，卫星质量 m ，卫星轨道的长半轴 a ，以及轨道周期 T 之间的关系。

(b) 证明：单位质量具有的总能量相同的所有轨道具有相同的周期。（简单起见，假设 $m \ll M$ 。）

10.25 通常，电容器由两个电量大小一样、符号相反的（金属）体组成。电容 C 定义为（金属）体所带的电量与它们之间的电位差

之比

$$C = \frac{Q}{\phi_2 - \phi_1}。$$

求半径分别为 A 和 B 的一对同心球壳的电容。

10.26 质量为25g的吊架连接在质量忽略不计的弹簧上。弹簧的弹性系数是 $k=15.3\text{ N m}^{-1}$ 。一质量为 $m=50\text{ g}$ 的物体从高度 $h=9.0\text{ cm}$ 处落在静止的吊架上，发生非弹性碰撞。求物体能到达的最低高度 $H_{\min}$ 。

10.27 水（密度为 62.5 lb ft^{-3} ）被泵抽进一光滑软管。软管的喷口横截面是 5.5 in^2 。喷口指向水平面上 30° 角。水流轨迹的最高点在喷口所在水平面上方16ft处。泵的入口与一水库相连，水库水面在喷口下方8ft处。如果泵和驱动电动机的总效率为60%，问电动机对电动机的输入功率 P 是多少（以kW为单位）？

10.28 以大气压（atm）为单位估计月球中心的压强。
（ $1\text{ atm}=1.02\times 10^5\text{ Pa}$ 。）使用以下有关月球的数据：

质量： $7.0\times 10^{22}\text{ kg}$ ；

半径： $1\,740\text{ km}$ ；

表面引力： 160 cm s^{-2} ；

平均密度： 3.34g cm^{-3} 。

- 10.29** 把一质量为 m_1 的岩石从地球表面移到月球表面最少需要做的功 $W_{\min}$ 是多少？（见图10-6。）

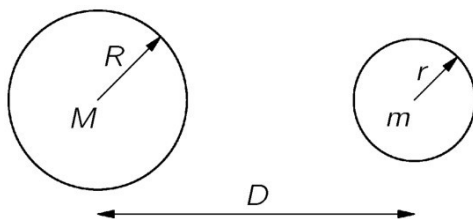


图 10-6

- 10.30** 一质量为 m 的卫星绕质量为 M ($M \gg m$) 的小行星作圆周运动。若小行星的质量突然减小至原来的一半，卫星将要发生什么？描述其新轨道。
- 10.31** (a) 从地球表面附近发射一个星际探测器，为使该探测器在逃离太阳系时相对于太阳有 10mi s^{-1} 的剩余速率，发射的最小速率 $v_{\min}$ 是多少？
- (b) 地球在其轨道上的速率是 18.5mi s^{-1} 。如果希望探测器在逃脱太阳束缚时以预定方向运动，那么可能的最大发射速度 $v_{\max}$ 是多少？
- 10.32** 要把一个太阳探测器送入近日距为 0.010AU ，且绕太阳运动的周期与地球相同的轨道。问探测器的发射速率 v_0 以及发射角

度 α （相对于地球-太阳连线）应是多少？

11 单位和量纲

11.1 写出下列各物理量的量纲：

(a) 弹簧的弹性系数；

(b) 功；

(c) 力矩；

(d) 表面张力；

(e) 摩擦系数；

(f) 黏滞系数；

(g) 引力场强度；

(h) 电场强度；

(i) 磁感应强度；

(j) E/B 。

注：质量、时间、长度以及电荷分别用 M 、 T 、 L 、 Q 表示。

11.2 请证明 $(\epsilon_0 c)^{-1}$ 具有电阻的量纲，并计算其数值。

11.3 莫（Moe）和乔（Joe）是在不同行星上成长的两位宇宙物理学家。在一次旨在探讨建立普适单位制的“重力与测量行星际会议”上他们相遇了。莫骄傲地介绍了地球上所有文明区域间都使用的MKSA单位制的优点。乔同样自豪地描述了太阳系其他地方所使用的M'K'S'A'单位制的美妙之处。对于这两种单位制，质量、长度和时间如果存在如下关系：

$$m' = \mu m ,$$

$$l' = \lambda l ,$$

$$t' = \tau t .$$

那么，两种单位制中，速度 v 、加速度 a 、力 F 以及能量 E 存在什么关联？

11.4 使用量纲分析推导图11-1所示单摆的周期 T 与其各物理参数之间的关系。

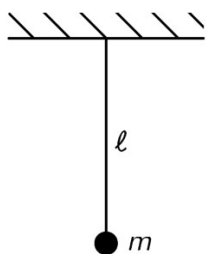


图11-1

11.5 如果长度以AU为单位，时间以年为单位，计算 GM_S 的数值。其中，AU是天文单位，表示地球距离太阳的平均距离， M_S

是太阳质量， G 是万有引力常数。

11.6 一个太阳系的标度模型如下构建：太阳和行星的各自平均密度和实际一样，而把所有的线度以尺度因子 k 约化。求行星的运转周期如何依赖于 k ？

11.7 从量纲分析来求图11-2所示的物体-弹簧系统的振动周期 T 与 m 、 k 等的依赖关系。（忽略摩擦力。）

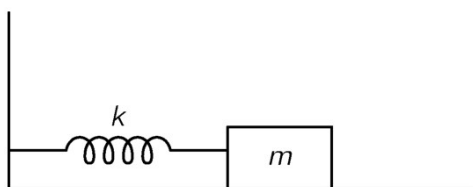


图 11-2

11.8 质量为 m 的物体系在长度为 l 的绳子端部，以速率 v 做圆周运动。（忽略重力。）问绳子上的张力 T 和物体的法向加速度 a 如何依赖于所给的参量。

11.9 质量为 m 的物体被射出，初始速率为 v ，发射角度与水平方向成 θ 角。问物体飞行的水平距离 R 和时间 t 和已知量的关系。

11.10 一半径为 R 、密度为 ρ 的液滴，表面张力 σ 作为回复力而产生振动。问振动周期 T 如何依赖于 R 、 ρ 和 σ 。

- 11.11** 一学生发现能通过改变金属线的张力来给钢琴调音。如果频率 ω 反比于线长，问频率如何依赖于线长 l 、张力 T 和线密度 σ 。
- 11.12** 观测发现，深海中水波的传播速率依赖于波长 λ ，而与振幅无关。问速率 v 如何依赖于波长和水密度 ρ 。
- 11.13** 容积为 V 的盒子内含有 N 个质量均为 m 的粒子，粒子运动速率为 v ，方向随机分布。利用量纲分析求这样的气体的压强 p 如何依赖于 N 、 V 、 m 和 v 。据此你能得出一些关于绝对温度本质的结论吗？
- 11.14** 将牛顿定律 $F = GMm/r^2$ 应用于运行轨道，来推导出开普勒第三定律 $\frac{r^3}{t^2} = c$ ，其中 c 为常量。

12 相对论性运动学和动力学， 质量和静止能量等效性

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第15、16章。

- 12.1** 对于坐标轴相平行的两个惯性坐标系（其中，一个坐标系相对于另一个以速率 V 沿 x 轴运动），从洛伦茨变换求解以 x' ， y' ， z' ， t' 表示的 x ， y ， z ， t 。
- 12.2** 以微分形式写出习题12.1中得出的洛伦茨变换，并用 v'_x ， V 等相关量表示 $v_x\left(v_x = \frac{dx}{dt}\right)$ 。相同的结论是否适用于 $v_y\left(v_y = \frac{dy}{dt}\right)$ ？
- 12.3** 一个粒子在坐标系 S 中沿 x 轴的速度为 v_x ，加速度为 a_x 。坐标系 S' 与坐标系 S 的坐标轴相平行，相对于坐标系 S 沿 x 轴方向以速度 v 运动。求坐标系 S' 中粒子的速度 v'_x 和加速度 a'_x 。
- 12.4** 在坐标系 S 中，棒静止，长度为 $L=5\text{m}$ ，方向与 x 轴呈 $\theta=30^\circ$ 夹角。另一坐标系 S' 与坐标系 S 平行，相对于坐标系 S 以 $v_x = \frac{c}{2}$ 的速率运动，问在坐标系 S' 中的观察者看来，棒的长度和方向如何？

12.5 μ 子形成于大气层的高处，在衰变前以速率 $v=0.990c$ 行走了5.00km。

(a) 在我们看来，这个 μ 子“生存”了多长时间 Δt ？在其自身参考系中，其寿命 $\Delta t'$ 又是多少？

(b) 在其自身参考系中， μ 子在大气层中的穿透距离 L' 是多少？

12.6 验证电子的静止质量 $m_e c^2=0.511\text{MeV}$ 。

12.7 质量为 m 的粒子在力的作用下沿直线运动，运动轨迹遵循如下条件：

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b。$$

问：为了达到这样的运动轨迹，在粒子上所施加的力 F 应满足什么条件？

12.8 美国1965年的总发电量为 1.05×10^{12} kWh。

(a) 在此过程中，有多少质量 M 转变为能量？

(b) 如果在氘转变为氦的反应中所有的质量变化都能被利用（实际上，部分以中微子的形式损失掉），为了提供发电所需的氘，每秒需要多少体积 V 的重水？

注： $M_{\text{H}^2} = 2.014\,7\,\text{u}$ ， $M_{\text{He}^4} = 4.003\,9\,\text{u}$ 。

12.9 在地球大气层顶部，来自太阳的入射总功率是 1.4kW m^{-2} 。如果这些能量全部来源于从普通氢到氦的转变过程，求太阳每秒燃烧多少氢？（忽略转变为中微子的损失。）

12.10 (a) 计算以“光年年⁻²”为单位的重力加速度数值。

(b) 如果一艘孤立的飞船在加速行驶，飞船上的乘客感受到与地球表面的重力加速度相同的恒定加速度。一个静态（无加速度）的观察者（在 $t=0$ 时刻，其相对于飞船静止）观测到飞船已经如此行驶了5年。求在这段时间的终点，飞船飞行了多少距离 x ，最终的行驶速率 v 是多少？

13 相对论性能量和动量

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第16、17章。

13.1 证明1GeV的电子，其速率与 c 相差 $1/(8 \times 10^6)$ 。

13.2 (a) 以粒子的动能 T 和静能 $m_0 c^2$ 表达其动量。(b) 一个粒子的动能等于其静能，求这个粒子的速率 v 。

13.3 质子的质量 $m_p = 938 \text{ MeV}$ 。通过非直接的方法探测到质量为 10^{10} GeV 的质子。假定具有如此质量的质子径直穿过直径为 10^5 光年的星系，求在质子自身参照系下，穿越星系需要多少时间 Δt ？

13.4 电量为 q 、动量为 p 的粒子沿半径为 R 的圆周运动，运动平面与磁场 B 垂直。

(a) 如果 q 以电子电荷为单位， p 以 MeV/c 为单位， B 以 G （高斯）为单位，那么 p ， B 和 R 具有什么关系？（记 $q = Zq_e$ 。）

(b) 动能为 60 GeV 的质子在磁场 $B = 0.3 \text{ G}$ 中运动轨迹的曲率半径是多少？

13.5 回旋加速器正被设计成能把质子加速到动能为150MeV。磁感应强度为 1.00×10^4 gauss。

(a) 磁极部分的最小半径 $R_{\min}$ 必须为多少？

(b) 加速电极的频率 f 必须达到多少？

(c) 在粒子加速期间，为了允许相对论效应，驱动频率必须以多大的幅度改变，即求 $\Delta f/f$ 。

13.6 在实验室中，静止的质量为 M 的物体分裂成质量分别为 m_1 和 m_2 的两部分。考虑相对论效应，确定分裂产物的动能 T_1 和 T_2 。

13.7 一个静止的 π 介子 ($m_\pi = 273m_e$) 衰变成一个 μ 子 ($m_\mu = 273m_e$) 和一个中微子 ($m_\nu = 0$)。求 μ 子的动能和动量 (T_μ, p_μ) 以及中微子的动能和动量 (T_ν, p_ν)。

13.8 一个总质量为 m 的受激原子，在某已知坐标系中静止。此原子由于发射了一个光子而损失能量 ΔE 。在考虑原子反冲的情况下，计算光子的能量 E_γ 。

13.9 质量为 m ，速率 $v = 4c/5$ 的粒子与静止的相同粒子发生非弹性碰撞。

(a) 求碰撞后复合粒子的速率 V 。

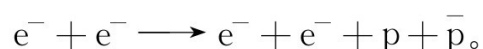
(b) 求复合粒子的质量 M 。

13.10 伯克利的bevatron加速器被设计成能够把质子加速到足够高的能量可以通过以下反应产生质子-反质子对：



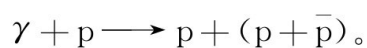
此反应的所谓阈能对应于以下情况：反应式右边的4个粒子一起运动，就如一个静止质量 $M=4m_p$ 的单一粒子一样。如果碰撞前靶质子处于静止状态，为了达到阈能，轰击质子必须有多大的动能 T ？

13.11 计算通过电子碰撞产生质子-反质子对（如下方反应式所示）所需的动能阈值 T_e 。



你可以使用 $m_e \approx 0.5\text{MeV}$ ， $m_p \approx 1\text{GeV}$ 。与习题13.10中质子碰撞所需能量做对比。

13.12 光子被静止质子吸收可以产生质子-反质子对。



求光子所需的最小能量 E_γ （以质子的静止能量 $m_p c^2$ 为单位）。与质子碰撞（习题13.10）、电子碰撞（习题13.11）所需能量做对比。

13.13 质量为 m_p 的质子与另一静止的质子迎面相撞，产生质量为 m_π 的 π 介子， $m_\pi \ll m_p$ 。

$$p+p \longrightarrow p+p+\pi。$$

（a）求入射光子的最小动能 T_p 。

（b）求在反应阈值， π 介子的动能 T_π 。

（c）使用非相对论表达式所产生的误差大约是多少？

13.14 一个处于静止或飞行状态的 π^0 介子可以衰变为两个 γ 射线，如图13-1所示： $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$ 。

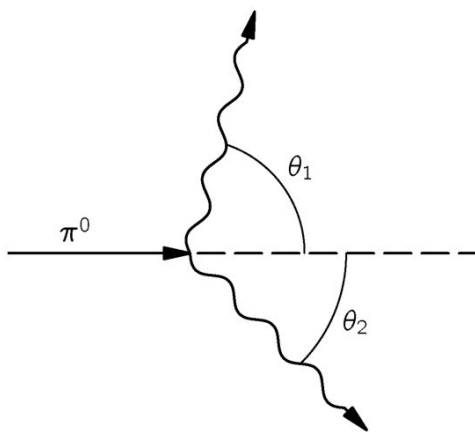


图 13-1

注：一个 γ 射线是一个光子， $E_\gamma = p_\gamma c = h\nu$ 。

- (a) 如果 π^0 介子的速度为 v ，质量为 m_π ， γ 射线的出射方向与 v 夹角为 θ 。求 γ 射线的能量 E_γ 关于 m_π 、 v 和 θ 的函数关系。
- (b) γ 射线可能具有的能量最大值 $E_{\max}$ 、最小值 $E_{\min}$ 分别为多少？相应的出射方向如何？
- (c) 你能找到一个无关于 π^0 介子速度的 $E_{\max}$ 和 $E_{\min}$ 的函数吗？其物理意义是什么？

14 二维转动，质心

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第18、19章。

- 14.1** 半径为 R 的刚性轮子在水平面上无滑动地滚动。轮面竖直，轮轴相对于水平面以速率 V 水平移动。如果轮轴平行于 z 轴， V 沿 x 轴正方向，自从轮子 P 点与地面接触起，轮子已经转过 θ 角度，证明： P 点的瞬时速度（大小和方向）为

$$\mathbf{v} = V \left[(1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \right]。$$

- 14.2** 平面曲线（或面积）扫过的表面面积（或体积）的有关知识可以被用来寻找薄膜、弯曲的均匀细丝、均匀平面薄板的质心。

（a）如图14-1（a）所示，证明平面曲线 C 绕其所在的平面内的转动轴 O 转过 α 角所扫过的面积 A 等于曲线 C 的长度 l 乘以质心 CM 所移动的距离 αr ，即

$$A = \alpha r l。$$

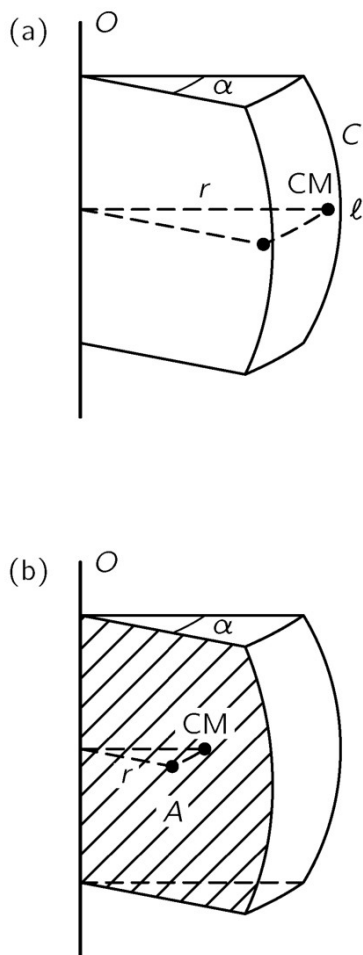


图 14-1

(其中, r 是质心CM到转动轴 O 的距离。)

(b) 如图14-1 (b) 所示, 证明平面 A 绕转动轴 O 转过 α 角所扫过的体积 V 等于平面面积 A 乘以质心CM所移动的距离, 即

$$V = \alpha r A .$$

14.3 证明任意粒子体系的质心的运动就像一个单一粒子的运动一样, 这个单一粒子的质量等于粒子体系中所有粒子的质量之

和，所受的力等于作用在各个粒子上的力的矢量和，即：

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i \mathbf{f}_i。$$

14.4 力 $\mathbf{F} = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$ (N) 作用在 $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (m) 处的一点上。求：

(a) 关于原点的力矩 τ 。

(b) 力臂大小 l 。

(c) 垂直于 $\mathbf{r}$ 的力分量 $F_{\perp}$ 。

14.5 悠悠球 (yo-yo) 可以在水平桌面上无滑动地自由滚动。当水平力 $\mathbf{F}$ 作用于其上，如图14-2所示，悠悠球将沿力的方向还是沿力的相反方向滚动？为什么？

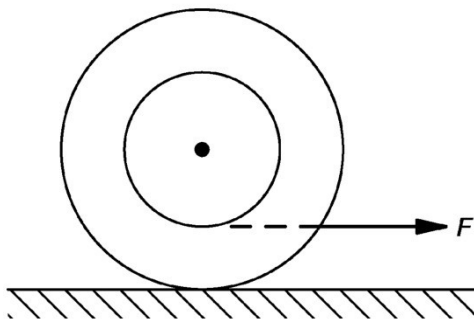


图 14-2

14.6 在什么纬度 λ 上，由于地球自转地球表面上一点的切向速率比洛杉矶（纬度 34°N ）的切向速率小 200m s^{-1} ？

- 14.7 如图14-3所示，与轴 AA' 相切的圆半径为 R ，圆绕轴旋转形成环，求环的体积 V 。

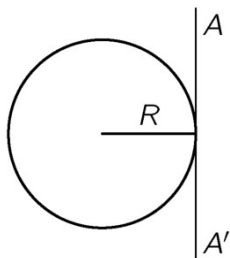


图 14-3

- 14.8 相隔距离为 R ，质量分别为 M 和 $2M$ 的物体绕它们的质心以角速度 ω 旋转，求它们的转动动能 T 。

- 14.9 (a) 长度为 L 的均匀细丝被弯曲成半径为 R ($R > \frac{L}{2\pi}$) 的圆弧，求其质心。如图14-4所示，坐标系原点位于圆心， x 轴通过细绳中点。

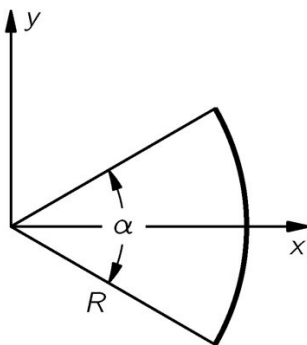


图 14-4

- (b) 用以上结果，求均匀金属薄片制成的扇形的质心。如图所示，扇形半径为 R ，圆心角为 α 。

14.10 如图14-5所示，均匀密度的圆盘被切掉一个洞。求其质心。

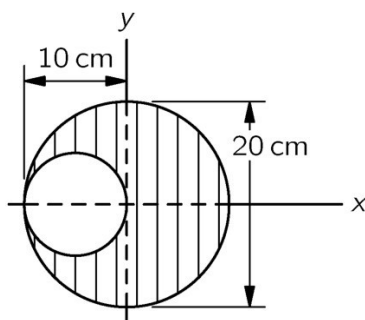


图 14-5

14.11 一实心圆柱体如图14-6所示，圆柱体在不同的象限内具有不同的密度，数字表示各象限内的相对密度。坐标轴的选择如图所示，求通过原点和质心的直线方程。

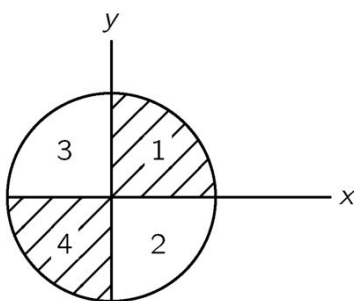


图 14-6

14.12 将一个半径为 π cm、质量为3kg的圆柱体切成三等分；另一个半径为 π cm、质量为6kg的圆柱体同样被切成三等分。从两个圆柱体中各取一分，用胶黏合在一起，位置如图14-7所示。半径 OA 处于水平。地板的摩擦力足够大，不会发生滑动，墙的摩擦力则可忽略。

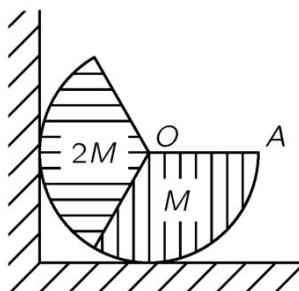


图 14-7

(a) 圆柱体对墙面的力 F 是多少？

(b) 如果将墙移去，为了保持平衡，需要在 OA 上离 O 点多远处安放质量为 M 的质点？

14.13 长度为 R 的棒由两段长度都为 $R/2$ 、质量各自均匀的棒组成，其中一个棒的质量是另一个棒的2倍。棒的两端用绳系住，悬挂在 P 点上，两段绳长都为 R ，如图14-8所示。当系统达到平衡状态时，棒与水平方向的夹角 α 是多少？

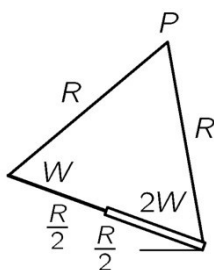


图 14-8

14.14 如图14-9所示，L形物体由厚度均匀的金属片组成，静止地处在无摩擦的水平桌面上。物体的 P 点遭到图示方向的力的突然撞击，观察发现物体移开，没有发生转动，问受力点 P 离顶点 O 多远？

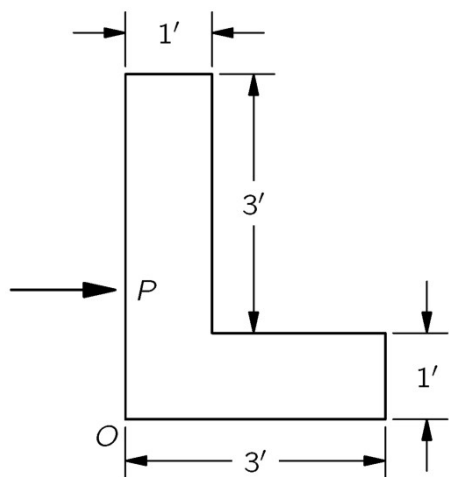


图 14-9

- 14.15** 从一个边长为 a 的正方形均匀金属薄片的一边切掉一个等腰三角形，如图14-10所示。将余下的部分在等腰三角形的顶点 P 悬起来，将随遇平衡。求切掉的等腰三角形的高 h 。

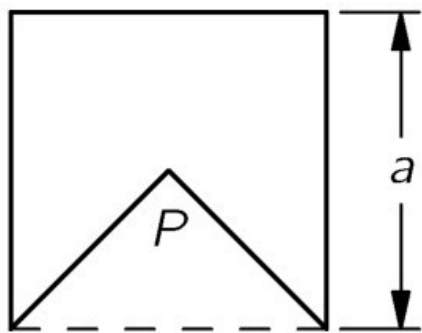


图 14-10

- 14.16** 质量分别为 M_1 和 M_2 的两物体，处于刚性杆的两端。杆的长度为 L ，质量可忽略不计，两物体的大小相比于杆可忽略。杆绕着一个与其垂直的轴转动，为了以最小的功使杆以角速度 ω_0 旋转，转动轴应穿过杆上哪一点，写出其距离 M_2 的距离 x ？

- 14.17** 一种简单调速器的基本要素如图14-11所示。水平杆对称地安装在竖直轴上，在杆的两端有两块可自由滑动的刹车蹄。当轴转动时，刹车蹄挤压在圆筒状刹车鼓的内表面上。假设每个刹车蹄的质量为 m ，其大小与刹车鼓的内径 r 相比可忽略。刹车蹄和刹车鼓之间的滑动摩擦系数是 μ 。试用 r ， m ， μ 和 f （轴的转动频率）写出使调速器运转所需功率 P 的表达式。

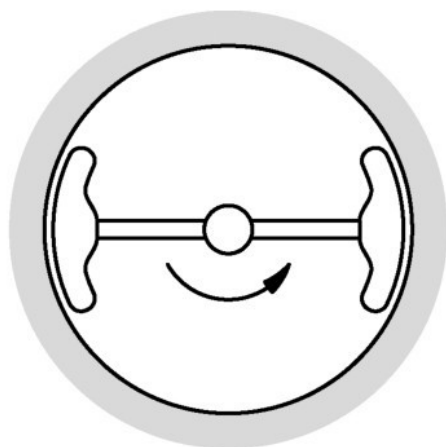


图 14-11

- 14.18** 均匀砖块长度为 L ，放于一光滑平面。若干相同的砖块如图14-12所示叠堆其上。砖块的侧面形成连续平面，端部则依次错开 L/a 的距离（ a 是整数）。问：如此，最多可以堆放多少块砖块？

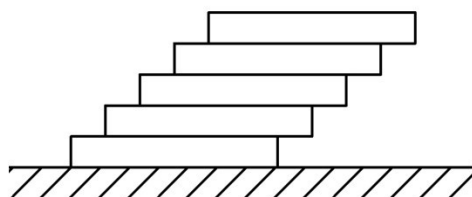


图 14-12

- 14.19** 如图14-13所示，旋转调速器设计目的是：当其直接相连的机器转速达到120rpm速率时，切断电源。操作圈 C 重10.01lb，可在竖直轴 AB 上无摩擦滑动。当 $\overline{AC}$ 减小到1.41ft时， C 切断电源。如果调速器构架的四个连接臂（连接点是无摩擦的枢轴）长度均为1.00ft，质量可忽略。问为了满足设计要求， M 应多大？

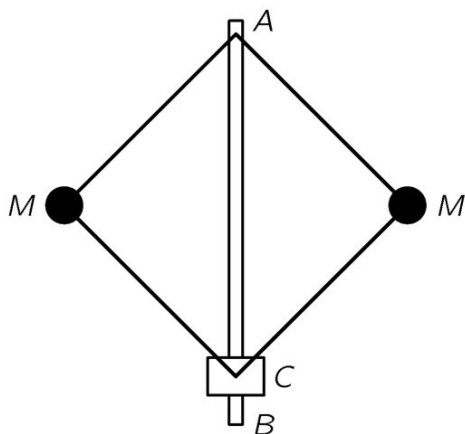


图 14-13

- 14.20** 处于无场空间中同一平面上的4个质量为 M 的物体通过很轻的、弹性系数为 k 的弹簧相连，如图14-14所示。系统以角速度 ω 绕通过对称中心且垂直于系统所在平面的轴转动。弹簧的自然长度为 L 。

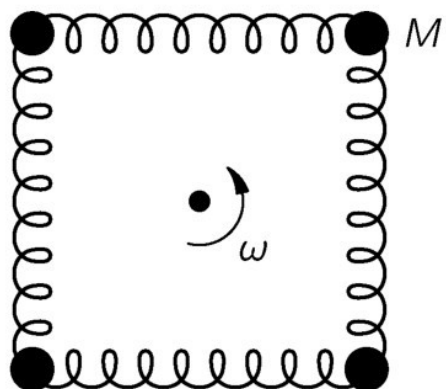


图 14-14

- (a) 问系统平衡时弹簧伸长量 ΔL 是多少?
- (b) 什么条件决定系统是否可以达到稳定平衡?

15 角动量，转动惯量

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第18、19章。

15.1 一质点在有心力（力的作用线通过一固定点的力）的作用下运动。证明：质点的角动量守恒；这与行星运动的开普勒第二定律等价。

15.2 在考虑所有力的情况下，包括惯性（赝）力，命题 $\tau = \frac{dL}{dt}$ 对于刚体普遍正确。如果在分析中没有考虑惯性力，则 $\tau = \frac{dL}{dt}$ 在以下情况仍然成立：

（a）对于刚体外的任意固定轴；

（b）对于通过物体质心的任意固定方向的轴；

（c）对于给定时刻，刚体转动所绕的轴（瞬时转轴）。

对于以上情况，你能证明几条？

15.3 如图15-1所示，长度为 L 、质量为 M 的均匀直细丝，在其中点 A 处折成 θ 角。求相对于过 A 点、垂直于折杆所在平面的转轴的转动惯量 I 。

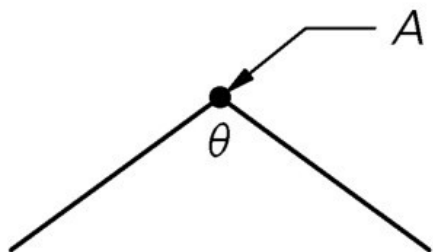


图 15-1

15.4 一扇薄而均匀的活板门宽为 l ，质量为 m ，其下沿与水平地板铰链在一起。活板门竖立。若门倒下，求落地时活板门的角速率 ω 。忽略铰链上的摩擦力。

15.5 如图15-2所示，质量为 m 的物体挂在绳子上，绳子缠绕在质量为 M 、半径为 r 的实心圆柱体上，在无摩擦的轴承上转动。求物体 m 的加速度 a 。

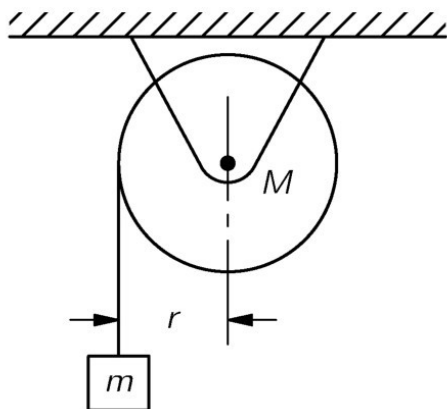


图 15-2

15.6 计算如图15-3所示的物体绕通过 A 点、垂直于图所在平面的轴的转动惯量 I 。物体为均匀细丝，由4个半径为 a 的半圆组成，总质量为 M 。

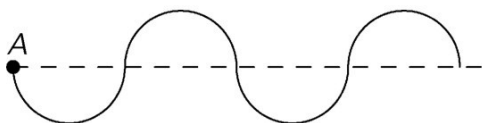


图 15-3

15.7 计算下列刚体的转动惯量 I ，每个刚体的质量为 m 。

- (a) 薄而均匀的直杆，长度 L ，绕通过一端端点、垂直于细杆的轴转动；
- (b) 薄而均匀的直杆，长度 L ，绕通过细杆中点、垂直于细杆的轴转动；
- (c) 半径为 r 的薄壁圆筒，绕其轴转动；
- (d) 半径为 r 的实心圆柱，绕其轴转动。

15.8 如图15-4所示，质量为 M 、长度为 L 的细杆水平放置，一端放于支点上，另一端用线悬吊。当线被烧断时，求杆施加在支点上的力 F 。

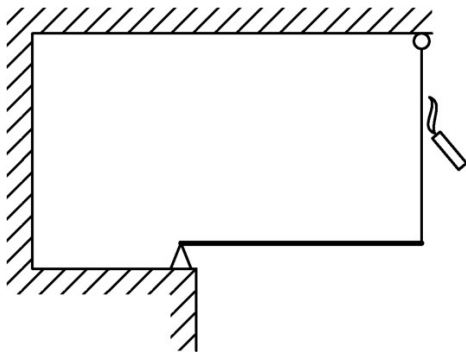


图 15-4

- 15.9** 长度均为 L 、质量均为 m 的8根均匀细杆被固定在质量可以忽略的框架上，如图15-5（a）所示。正方形可以绕过 O 点、与框架所在平面垂直的无摩擦轴转动，角速率为 ω_0 （ rad s^{-1} ）。旋转中，装置在框架上的一个内部机械装置 K （具有绕 O 的补编转动惯量 $40/3mL^2$ ）将正方形收缩成图15-5（b）所示的十字架形状。求在此过程中，机械装置所做的功 W 。

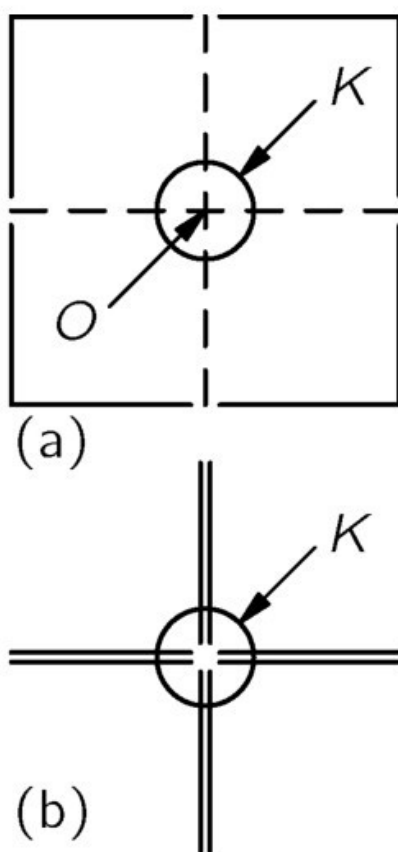


图 15-5

- 15.10** （a）从静止出发，一对称物体从高度 h 的斜面滚下（没有滑动）。物体关于其质心的转动惯量为 I ，质量为 M ，与

斜面接触的滚动表面的半径是 r 。求在斜面底部物体质心的线速度 V_0 。

(b) 应用上面得到的一般方程来确定以下情况的质心速度：

①物体是球；②物体是圆盘；③质量为 M_1 、外半径为 R_1 的圆盘，其中央是质量为 m_2 、半径为 r_2 的滚动轴。

15.11 一均匀圆柱体放于与水平方向成 θ 角的环形转送带上。圆柱体的轴沿水平放置，且与传送带的带边垂直。圆柱体在传送带上滚动，无滑动发生。问：传送带应如何运动才能使释放时圆柱体的轴不动？

15.12 质量相等、外表大小一样、看不出差别的两个圆柱体沿斜面往下滚。一个圆柱体比另一个先到达斜面底部。据此你能得出什么结论？

15.13 半径为 R 的球内含有一个半径为 r 的同心空洞（ $r < R$ ），如图15-6所示。在 r 与 R 之间，单位体积的质量是一常数 ρ 。求关于通过球心的转轴的物体转动惯量，分别以 r ， R ， ρ 和 r ， R ， M 表示。 M 为物体质量。

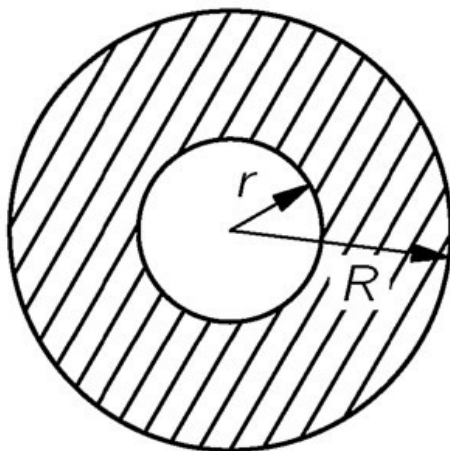


图 15-6

- 15.14** 一均匀实心球放置在倾斜角为 θ 的斜面上，如图15-7所示。当球与斜面之间的静摩擦系数 μ 的最小值 μ_0 是多少时，球才可以无滑动地滚下斜面？

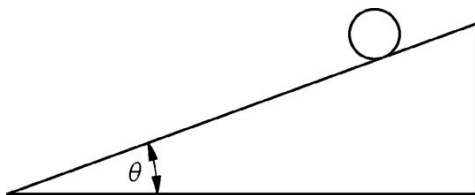


图 15-7

- 15.15** 一个线筒由相同的两个圆盘和一个轴组成，每个圆盘质量均为 M ，半径均为 R ，轴半径为 r ，质量可忽略，如图15-8所示。有线缠绕在轴上，线的一端系在天花板上。线筒位于天花板下方 D 处，将其由静止状态释放。

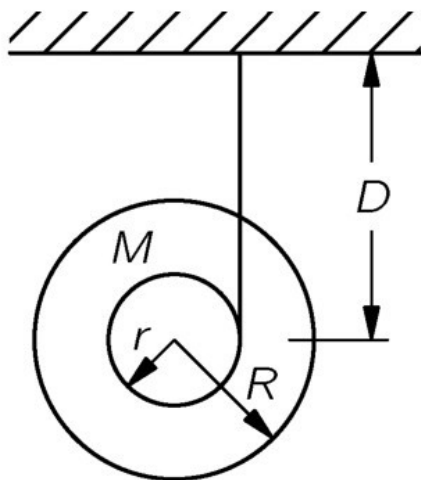


图 15-8

(a) 为了避免摆动，在释放线筒时，线与竖直方向的夹角 θ 应为多少？

(b) 线筒中心的下落加速度 a 是多少？

15.16 如图15-9所示，半径为 r 的圆环 H 无滑动地沿斜面往下滚。为了使圆环恰好达到“翻圈”所需速度，即正好使环在 P 点保持与圆轨道接触，圆环的初始高度 h 应为多少？

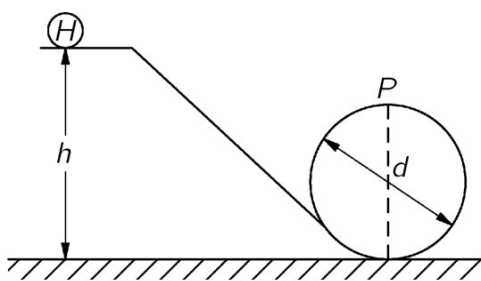


图 15-9

15.17 质量为 m 的物体由系于其上的细绳控制，细绳穿过桌面上的小孔伸到桌面下方。起初，桌面上的绳长为 r_1 ，物体以此为半径做速率为 v_1 的圆周运动。然后，通过孔向下拉绳，使桌面上的绳长为 r_2 。

- (a) 物体的末速率 v_2 是多少？
- (b) 桌面上绳长从 r_1 到 r_2 的过程中，拉绳所做的功 W 是多少？
- (c) 利用能量守恒定律求为了保持桌面上绳长不变所需力 F 的大小。

15.18 质量为 m 、外径为 R 、转动惯量为 I 的空心圆柱可以在桌面上无滑动地滚动。力 F 与水平方向成 α 角，作用在内径上，内径大小为 r 。见图15-10。

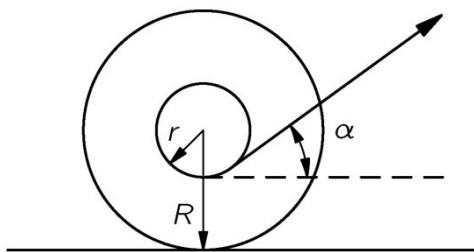


图 15-10

- (a) 在圆柱不离开桌面的情况下，求其加速度 a 。
- (b) 为了提起圆柱，使其离开桌面，与水平方向成 α 角的力 F 需多大？

- 15.19** 如图15-11所示，为使球以纯转动碰到台球桌内侧边的弹性衬里时以纯转动弹回，台球桌的边高 h 和台球半径 r 的比值 h/r 应为多少？假设在碰撞时台球边弹性衬里施于台球的力沿水平方向。

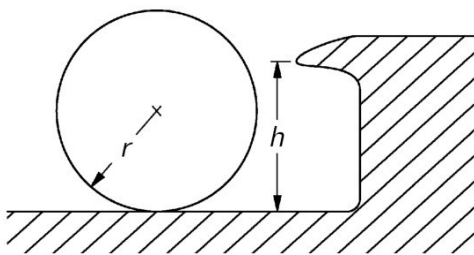


图 15-11

- 15.20** 厚度均匀、质量为 M 的不规则金属板质心位于点 C ，如图15-12所示。已知绕通过 A 点、垂直于金属板的轴的转动惯量是 I_A 。当 $r_1 = \overline{AC}$ 、 $r_2 = \overline{BC}$ 、 $r_3 = \overline{AB}$ 满足什么条件时，绕通过 B 点、垂直于金属板的轴的转动惯量 I_B 符合以下表达式：

$$I_B = I_A + M r_3^2。$$

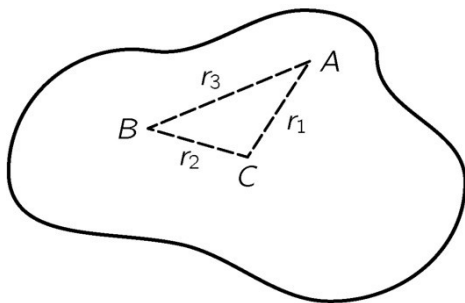


图 15-12

- 15.21** 图15-13是印刷机上的加墨装置。 K 是支撑牢固、可自由转动的墨辊，转动惯量可忽略不计。 P 是支撑牢固的印滚。 T 是可在 K 和 P 之间自由浮动的传递滚。 T 是半径为 r 、质量为 M 的实心圆柱，总在 K 和 P 之间无滑动地滚动。 T 、 P 的中心连线与水平方向成 θ 角。在保持 T 和 P 接触的情况下，求 P 的最大角加速度 $\alpha_{\max}$ 。

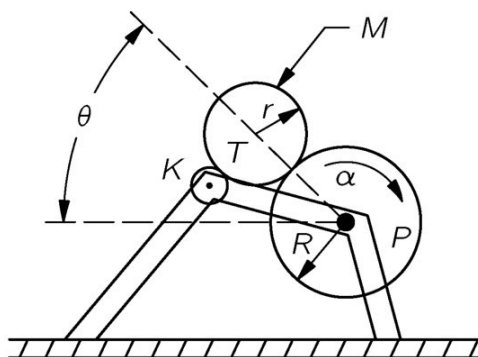


图 15-13

- 15.22** 长度为 $2l$ 的均匀细杆绕通过其中心的固定竖直轴在水平面内以角速度 ω_0 转动。将其轻轻地放在摩擦系数为 μ 的水平桌面上。假定桌面对细杆的支撑是均匀的，问需要多少时间 t 细杆停止转动？
- 15.23** 投掷一半径为 R 、质量为 M 的保龄球，使其初始时以速率 v_0 在摩擦系数为 μ 的球道上无滚动地滑行。
- (a) 多远以后，保龄球开始无滑动地滚动？
- (b) 求那时的速率 V 。

- 15.24** 一个有趣的小游戏是将手指按压在水平桌面上的弹子上，弹子以图15-14所示射出，初始线速率为 V_0 ，初始向后的转动角速率为 ω_0 （绕与 V_0 垂直的水平轴转动）。弹子与桌面间的滑动摩擦系数是常数，弹子的半径为 R 。

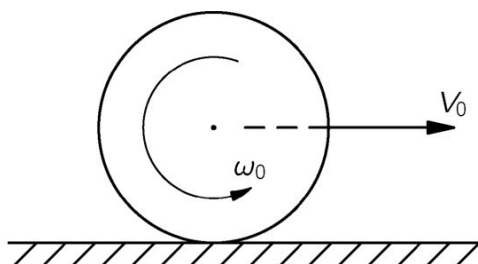


图 15-14

- (a) 弹子的 V_0 、 R 和 ω_0 满足什么关系时，弹子将滑动至完全停止？
- (b) 弹子的 V_0 、 R 和 ω_0 满足什么关系时，弹子将在停止后又向初始位置返回，最终的线速度为 $3V_0/7$ ？
- 15.25** 一半径为 R 、质量为 M 的均匀圆盘被设计为以其中点 P 为支点在水平面内以角速率 ω 自由转动。两小质量物体 m 用长为 l 、环绕在圆盘沿上的绳子系在盘沿上，如图15-15所示。当圆盘旋转时，同时释放两物体，而不干扰系统的角动量。当绳子向外展开到沿着径向时，立即将绳子从钉子 H 和 H' 上松开，两物体飞离圆盘。为了使圆盘在上述作用下停止运动，绳长 l 应为多少？

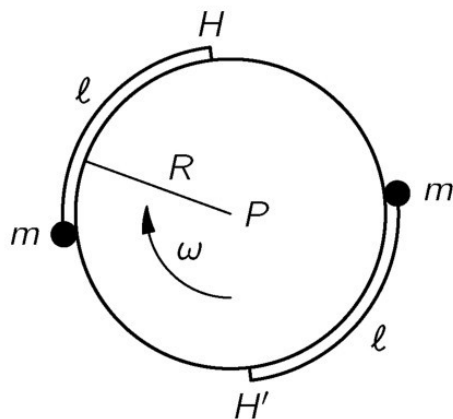


图 15-15

15.26 A （坐标为 x' ， y' ）相对于静止的 B （坐标 x ， y ）旋转。

（a）以 A 的视角看，写出作用于一质量为 m 的粒子所受到的外力分力的方程。

（b）证明：这些力除了包括 B 所看到的实际力 F 的各分量外，还有两个赝力：径向离心力和科里奥利力（Coriolis force）。

15.27 求在半径为 R 的圆轨道上运动的、质量为 m 的行星的角动量。利用此结果，推导：由于潮汐拖曳，经过漫长时间，月亮到地球的距离将增加。

同样，从月亮逃逸可能性的角度来讨论地球-月亮系统的能量守恒。

16 三维转动

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第20章。

- 16.1** 三个矢量 A 、 B 和 C 可以构成一平行六面体，见图16-1。证明平行六面体的体积为：

$$V = | \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) |。$$

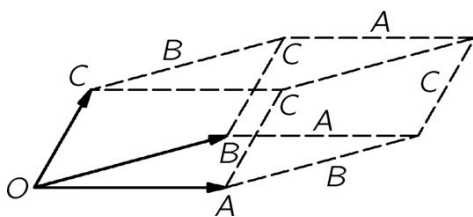


图16-1

- 16.2** 通过写下矢量的分量表达式，或用其他办法证明以下矢量方程：

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

- 16.3** 刚体以角速度 ω 绕一固定轴转动。证明：刚体内的任意一点 P 的速度为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

其中， $\mathbf{r}$ 是转轴上任意一点到点 P 的矢量。

- 16.4** 有质量分别为 m_i ，位置分别为 $\mathbf{r}_i$ ，速度分别为 $\mathbf{v}_i$ 的 N 个质点组成的体系具有角动量

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i。$$

另一方面，当从质心坐标系观察，体系的角动量为 $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ 。若体系质心的位置和速度分别为 $\mathbf{R}_{\text{CM}}$ 和 $\mathbf{V}_{\text{CM}}$ ，体系的总质量为 $M = \sum m_i$ 。证明：

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{CM}} + M \mathbf{R}_{\text{CM}} \times \mathbf{V}_{\text{CM}}。$$

- 16.5** 刚体绕某转轴旋转无限小角 $\Delta\theta_1$ ，然后再绕与前轴相较于 O 点的另一轴旋转无限小角 $\Delta\theta_2$ 。证明：有一旋转轴，使得刚体内任一点的总角位移都和刚体绕此轴旋转某一无限小的角位移相等。如何找到这一旋转轴以及旋转角？并由此进一步证明：当刚体同时绕不同的轴，以不同的角速度转动时，刚体就如同以一个角速度转动，此角速度等于各个角速度的矢量和，即

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2。$$

- 16.6** 如图16-1所示，平行六面体的一个顶点位于原点，与其相邻的三顶点坐标 (x, y, z) 分别为 $(10, -5, 3)$ 、 $(3, -4, 7)$ 和 $(-5, -6, 3)$ ，单位为米。求这个平行六面体的体积 V 。
- 16.7** 如果地球极地的冰盖融化了，地球的转动周期将如何变化？解释之。
- 16.8** 不敲破蛋壳，你如何区分生鸡蛋和熟鸡蛋？
- 16.9** 一个喷气式飞机的所有发动机沿飞行方向按右手螺旋方向转动。当飞机左转时，发动机的旋进效应（gyroscopic effect）将引起飞机
- (a) 右滚？
 - (b) 左滚？
 - (c) 向右偏转？
 - (d) 向左偏转？
 - (e) 上仰？
 - (f) 俯冲？

为什么？

16.10 质量相等的两个小球由一柔软的绳子连接，绳长为 l 。实验者握住其中一个小球，并使另一小球从静止开始，越来越快地绕第一个小球在水平面内作圆周转动。直至角速度达到 ω_0 ，然后松手放开小球。

(a) 实验过程中，如果绳子断裂，那么绳子是在放开小球之前还是之后断裂的？

(b) 如果绳子没有断裂，描述松手后物体的运动。

16.11 两个一样的均匀硬杆 AB 和 AC 在 A 点被自由地铰链在一起，并且位于光滑的水平桌面之上， $AC \perp AB$ ，如图16-2所示。一水平方向的打击垂直于 AC 且作用在 C 点。求打击后的瞬间， AC 的质心和 AB 的质心的速率之比 v_{AC}/v_{AB} 。

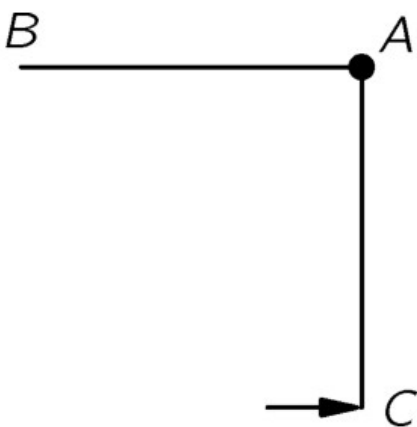


图 16-2

- 16.12** 质量为 M 、长度为 L 的一均匀细杆和质量为 m 的冰球在水平平面上无摩擦地滑动。在某一瞬间，细杆方向与其质心速度（ $\mathbf{V}_{\text{CM}} = +V\mathbf{i}$ ）的方向垂直，并具有绕质心的角速度 $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{k}$ ，如图16-3所示。在此瞬间，细杆被速度为 $\mathbf{v} = -v\mathbf{i}$ 的冰球撞击。求撞击后使细杆静止的球速 v ，以及撞击点到细杆质心的距离 a 。碰撞为弹性碰撞。

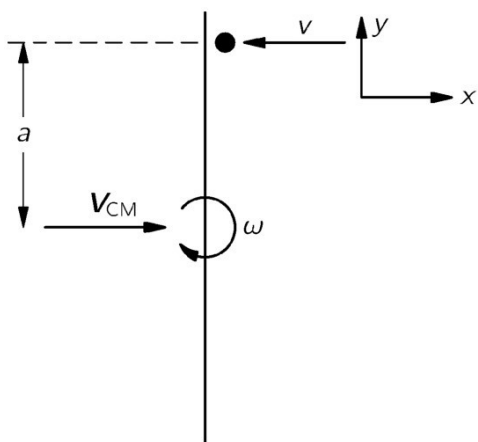


图 16-3

- 16.13** 质量为 m 、半径为 R 的圆形薄木环静止在无摩擦的水平面上。质量为 m 、以水平速度 v 运动的子弹打在木环上并嵌在其中，如图16-4所示。计算：

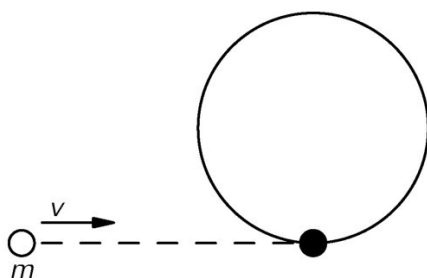


图 16-4

- (a) 质心速度 V_{CM} 。
- (b) 系统关于质心的角动量 L 。
- (c) 环的角速度 ω 。
- (d) 碰撞前和碰撞后系统的动能 T 。

16.14 如图16-5所示的4个物体 ($m_a = m_b = m_c = m_d/2$) 位于无摩擦的水平表面上矩形的4个顶点上。4个物体通过质量可忽略的硬杆连接。另一以沿 x 轴方向的速度 v 运动的质量 $m = m_a$ 的物体与 m_a 相撞，并黏附在 m_a 上。描述相撞后物体的运动。

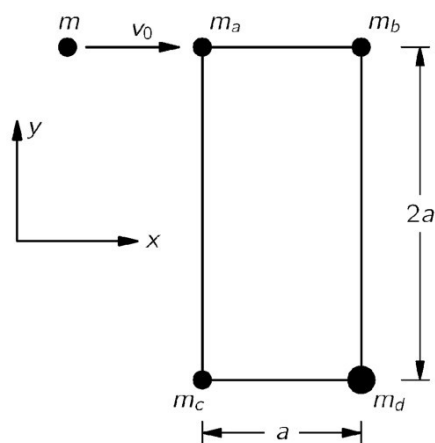


图 16-5

16.15 长度为 L 、质量为 M 的均匀杆静止在无摩擦的水平表面内。杆在 P 点受到作用时间很短、方向与杆垂直的冲量 $J = \int F \, dt$ 。
 $\overline{OP} = r$ 。见图16-6。

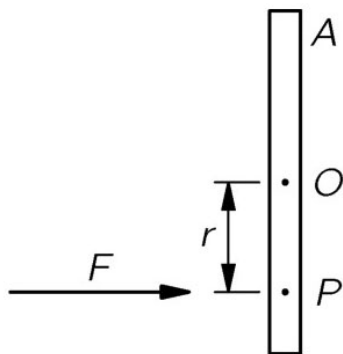


图 16-6

- (a) 碰撞发生后的瞬间，质心 O 的速度 V_O 是多少？
- (b) 关于 O 的角速度 ω 是多少？
- (c) 端点 A 的瞬时速度 V_A 是多少？
- (d) 求距离 $\overline{AP}$ ，对于 A 点，碰撞后的瞬间其速度为零。

16.16 如图16-7所示，长度为 L 、质量为 M 的细杆静止在无摩擦的水平表面内。质量同样为 M 的油灰，以与细杆垂直的速度 v 打在细杆的一端并黏附在细杆上（这一非弹性碰撞持续时间很短）。

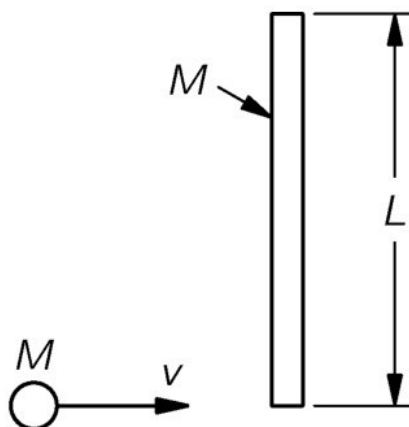


图 16-7

- (a) 求碰撞前和碰撞后的系统质心速度 V_{CM} 。
- (b) 碰撞前，关于质心的系统角动量 L 。
- (c) 碰撞后瞬间，系统的角速度 ω （关于质心）。
- (d) 求碰撞中动能的损失比例。

16.17 两个长度均为 L 、质量均为 M 的硬杆在水平面上无摩擦地自由运动。初始时，一杆静止，另一杆以速率 V 沿与两杆相垂直的方向运动，如图16-8所示。两杆碰撞，一杆的中心正好碰到另一杆的一端，碰撞后黏在一起。求碰撞后，系统的线速度 V_f 和角速度 ω_f 。

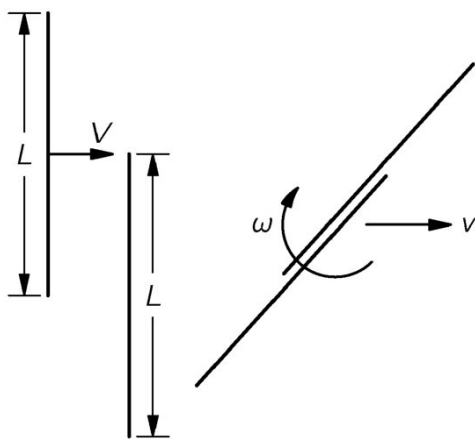


图 16-8

16.18 质量为 M 、长度为 L 的均匀杆 AB 可以在竖直平面内绕过端点 A 的水平轴转动，如图16-9所示。一质量同样为 M 的油灰在杆静

止时，以水平速度 V 投掷到杆的下端 B 点。油灰黏附在杆上。要使细杆可以绕 A 完整的旋转一圈，碰撞前油灰的最小速度应为多少？

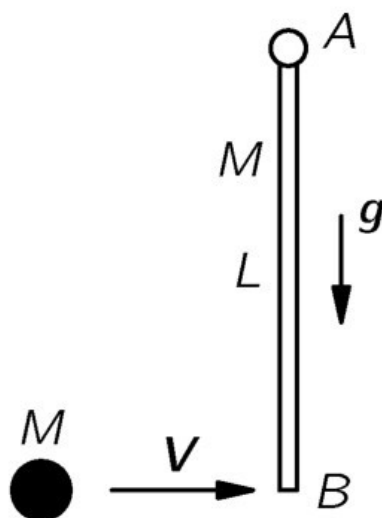


图 16-9

- 16.19** 如图16-10所示，质量为 M 、宽度为 w 、长度为 l 的刚性薄板竖直悬挂，其顶边是无摩擦的水平轴。一质量为 m 、速率为 v 的子弹垂直射到薄板上，击打点是薄板中心。

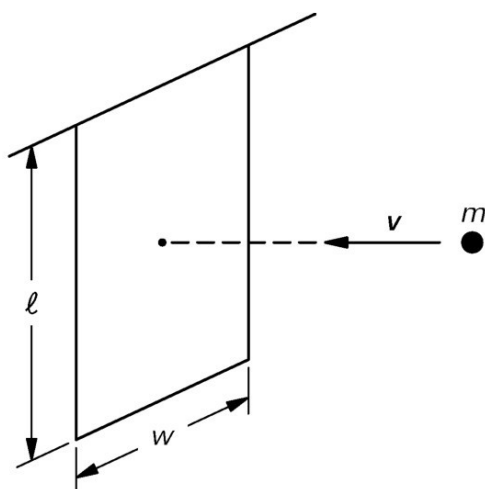


图 16-10

(a) 碰撞后的瞬间，子弹的速度 v_f 是多少？

(b) 求系统将转动的角度 θ 。

(c) 求轴承受到的冲量 J 。

16.20 如图16-11所示，一水平挺杆，半径为 r ，绕轴的转动惯量为 I_0 ，一绳系于其上，绳端有一质量为 m 的物体，与问题中的其他尺度相比，该物体的尺度可忽略不计。起初，挺杆绕水平轴以恒定的角速率 ω_0 转动，物体 m 以相同的角速率在竖直平面内作半径为 R 的圆周运动。 ω_0 足够大，重力的影响可以忽略。在 $t=0$ 时刻，制动器启动，挺杆经过几度后停止转动。

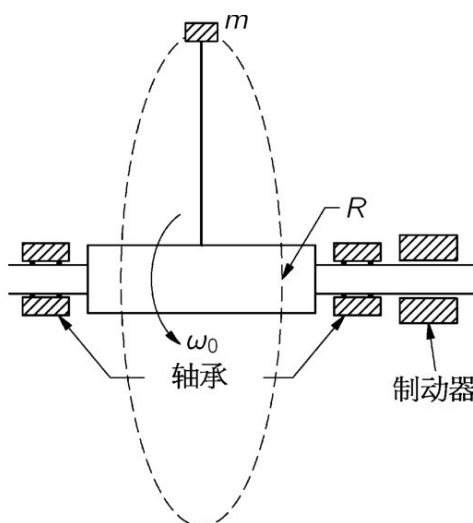


图 16-11

(a) 制动器施加的角冲量 (angular impulse) J 应达到多少？

(b) 当绳子在挺杆上绕了正好十圈时，绳子断裂。求使绳子正好断裂所需的力 F 。

- 16.21** 长度均为 l ，一端均系有质量为 m 的物体的两个杆子，如图16-12所示与轴成 θ 角被固定在轴上。（轴和杆在同一平面内。）如果 θ 可在 0° 到 90° 间任意取值，轴的最大角速度可达到 ω ，求轴承所能承受的转矩 $\tau_{\max}$ 。

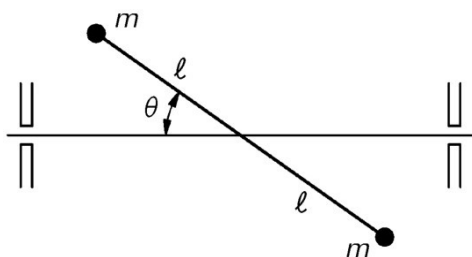


图 16-12

- 16.22** 如图16-13所示，质量为 M 、长度为 l 的均匀细杆的质心被固定在轴上，细杆与轴成 45° 倾斜角。

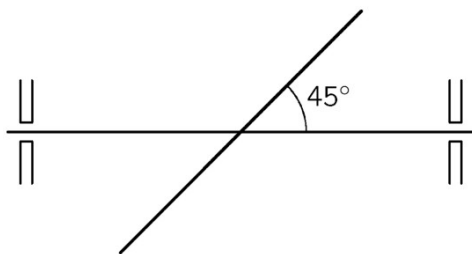


图 16-13

- (a) 求角动量矢量相对于转轴方向的角度 θ 。
- (b) 求以角速度 ω 转动时，轴承所承受的转矩 τ 。
- 16.23** 如图16-14所示，一水平轴上的薄实心轮子被限制在水平桌面上作半径为 R 的圆周运动。水平轴可绕竖直轴顶部的固定点 A

自由转动。如果轮子的质量是 m ，半径是 r ，绕轴的角速度是 ω ，求轮子对桌面的压力 F 。

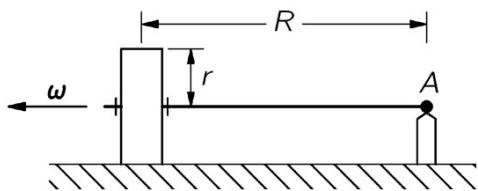


图 16-14

($m=1\text{kg}$, $R=50\text{cm}$, $r=10\text{cm}$, $\omega=12\,000\text{rad min}^{-1}$ 。)

- 16.24** 如图16-15所示，静止的转盘 T_1 上安装另一以角速度 ω_2 转动的转盘 T_2 。在某一时刻，内置离合器作用在 T_2 的轴上，使其相对于 T_1 静止，但 T_1 可自由转动。 T_1 的质量为 M_1 ，关于 A_1 轴（过 T_1 的中心，且与 T_1 所在平面垂直）的转动惯量为 I_1 ； T_2 的质量为 M_2 ，关于 A_2 轴（过 T_2 的中心，且与 T_2 所在平面垂直）的转动惯量为 I_2 。 A_1 与 A_2 的距离为 r 。求 T_2 停止后， T_1 的角速度 ω_1 。

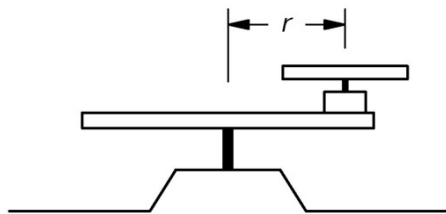


图 16-15

- 16.25** 一人站在转动平台上，到中心的距离为 R 。他以速率 V 把球扔给他处于同一直径上对面位置的另一人（到中心的距离也为

R)。如果转台以角速度 ω 转动, 则

(a) 从转台上看, 球运动轨迹的曲率半径 r 是多少?

(b) 为使另一人接到球, 求抛出方向与直径的夹角 θ 。

(c) 对于静止观测者, 球的运动轨迹如何?

注: 假定 $V \gg \omega R$, 这样离心力(贗力)可以忽略。

- 16.26** 某卫星发射火箭近似是一均匀圆柱体, 质量为 m , 半径为 a , 长度为 L ($L=6a$)。起初, 火箭绕其长轴以角速度 ω_0 旋转。由于微小的内振动, 能量逐渐转化为热。因此, 卫星逐渐“减慢”。如果能量尽可能转化为热, 请描述唯一可能的转动末态以及相应的角速度 ω_f 。

- 16.27** 如果地球上所有的冰都融化了, 海平面的平均高度将上升200ft。现存冰盖的平均纬度取为 80° , 忽略海洋的不规则分布, 求一天时间的增加量 ΔT 。

注: 假定地球半径为6 370km, 转动惯量为 $8.11 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ 。

- 16.28** 两个质量均为 m 的物体固定在一质量不计、相距 $2r$ 的杆的两端。它们被质量为 M 的物体吸引。 M 到杆中心 O 的距离为 R ($R \gg r$)。如图16-16所示, 杆与 R 的夹角为 θ 。求作用在杆上相对其中心的转矩 τ 的近似值。

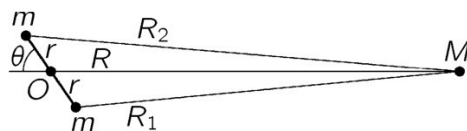


图 16-16

16.29 扭丝 (torsion fiber) 的弹性恢复力矩与其转角成正比, 即

$$\tau_{\text{fiber}} = -k\theta。$$

(a) 证明: 转角为 θ 的扭丝的势能为

$$U = \frac{1}{2} k \theta^2。$$

(b) 作用在电流计线圈上的转矩由下式给出:

$$\tau = nABi。$$

其中,

i = 通过线圈的电流

n = 线圈绕线匝数

A = 线圈的横截面积

B = 电流计永久磁铁产生的磁场

在实验室实验中, 电容器上电荷的测量方法是: 电容器通过电流计线圈放电, 记录下线圈的最大偏转角。这里, $|i| = |dq/dt|$ 。由于放电发生得很快, 在电流流过期间电流计线圈

没有明显偏离 $\theta=0$ 位置。摩擦力不计，证明：电流计的最大“冲击”偏转与电容器上的初始电量成正比。

- 16.30** 如图16-17所示，质量为 M 、长度为 L 的竖直杆在底部受到一个冲量 J 而飞起。 J 斜向上与水平方向成 45° 角。问：若杆落地时仍然竖立（受到冲量的一端着地）， J 应该多大？

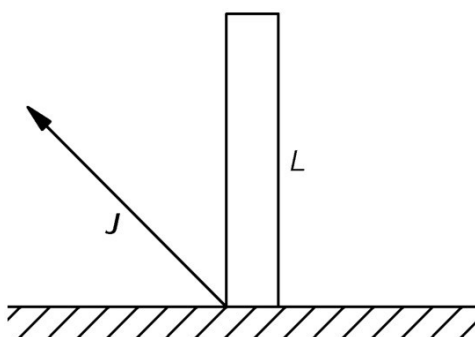


图 16-17

- 16.31** 转动惯量为 I_0 的转台绕中空竖直轴自由转动。质量为 m 的滑块在转台上沿直径轨道无摩擦地滑动。系在滑块上的绳子如图16-18所示绕过小滑轮再向下通过中空竖直轴。起初，整个系统角速率 ω_0 转动，滑块到轴的距离为 R 。然后滑块被外力通过绳子向里拉动，最终距轴为 r 。

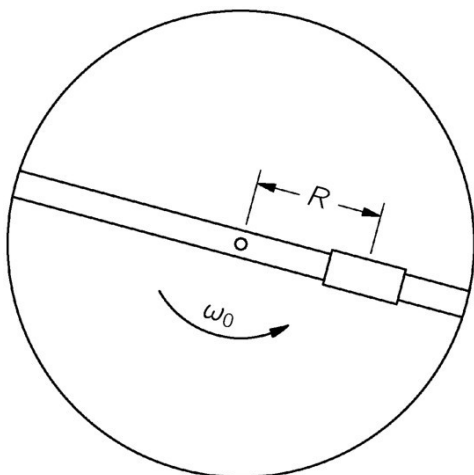


图 16-18

- (a) 求系统新的角速度 ω 。
- (b) 详细论证，两种状态下系统的能量差等于向心力做的功。
- (c) 如果松开绳子，则滑块经过半径 R 处时的径向速率 $r \cdot$ 是多少？

16.32 如图16-19所示，质量为 M ，边长为 a 、 b 的矩形薄板绕沿其对角线的轴以角速度 ω 转动。

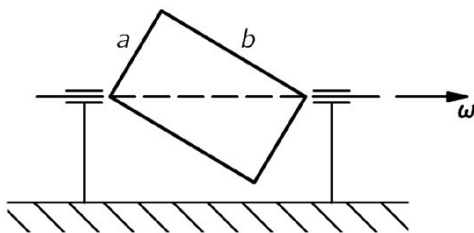


图 16-19

- (a) 求作用在轴承上的力 F 。

(b) 转动薄板的动能 T 。

16.33 均匀薄圆盘形状的飞轮，质量为 10.0kg ，半径为 1.00m ，被固定在过其质心且与其平面成 $1^\circ 0'$ 角的轴上。如果飞轮绕轴以角速度 25.0rad s^{-1} 转动，求轴承必须提供的力矩 τ 。

16.34 半径为 R 、质量为 M 的均匀薄圆盘安装在可绕任意轴转动的万能轴承上。起初，圆盘以角速度 ω_0 绕竖直轴（ z 轴方向）转动，如图16-20所示。一小质量物体（质量为 m ）以 z 轴正方向的速度 v_0 与圆盘边缘发生弹性碰撞，然后沿 z 轴负方向弹回。

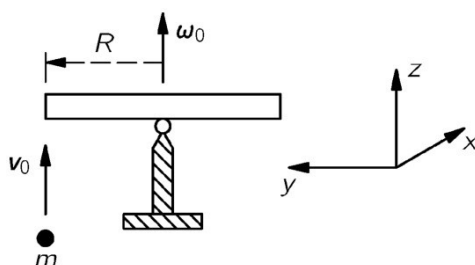


图 16-20

(a) 求碰撞后，圆盘角动量 L 的方向。

(b) 描述轴的运动。

16.35 无摩擦轴承上的一对半径为 10cm 、质量为 2kg 的圆盘飞轮以 1000rad s^{-1} 的角速度转动。飞轮以棒 AB （半径很小）作轴，支撑在万能轴承上。两个飞轮离 AB 的两端点分别为 $d = 15\text{cm}$ 。棒质量 $M = 1\text{kg}$ 、长度 $l = 4d$ 。如图16-21所示。

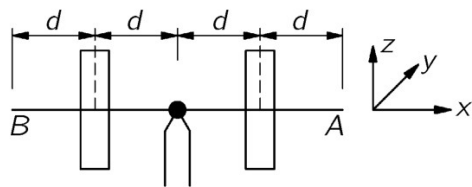


图 16-21

- (a) 如果一质量 $m=10\text{g}$ 的球从高度 $h=5\text{cm}$ 处落到棒的一端 A 上，并被弹回。求此时飞轮角动量 $\mathbf{L}$ 的各分量，并画出从 x 轴正方向看到的棒端运动图。同样，给出这一运动的角速度 Ω_n ，以及完成一次圆周运动，棒端经过的圆轨迹的半径 r 。
- (b) 如果同样的球不被弹回而是黏附在棒端 A 上，那么进动角速度 Ω_p 是多少（忽略章动）？相应的角动量 L_p ，转动动能 T_p 是多少？当端点降落到 xy 平面以下时，势能损失 ΔE 是多少？

16.36 由于地球是扁球形，太阳和月球都对地球施加一转矩。问哪个对地球施加更大的转矩？是另一个施加的多少倍？

提示1：从地球上看来，太阳和月球在天空的视角几乎一样。

提示2：太阳的平均密度是 1.41g cm^{-3} ；月球平均密度是 3.34g cm^{-3} 。

16.37 地球的赤道半径是 $6\,378.388\text{km}$ ，极半径是 $6\,356.912\text{km}$ 。地表下不同深度 D 的比重 ρ （specific gravity）如下表所示（*表示

不连续值)：

$D(\text{km})$	ρ
0	2.60
30 *	$\begin{cases} 3.0 \\ 3.3 \end{cases}$
100	3.4
200	3.5
400	3.6
1 000	4.7
2 000	5.2
2 900 *	$\begin{cases} 5.7 \\ 9.4 \end{cases}$
3 500	10.2
5 000 *	$\begin{cases} 11.5 \\ 16.8 \end{cases}$
6 000	17.1

利用这些值，估算：

(a) 地球的转动惯量 I_E 。

(b) 地球的转动角动量 L_E 。

(c) 地球的转动动能 T_E 。

(d) 求由于月球和太阳所施加的力矩，地球的转轴绕黄极进动所需时间 T 。

提示：地轴的倾角是 23.5° 。

17 简谐振子，线性微分方程

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第21章。

- 17.1** 如图17-1所示，一刚体悬挂着，悬挂点位于其质心上方，距离质心为 D 。论证在小振幅振动的情况下，运动由以下方程描述：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgD}{I}\theta = 0,$$

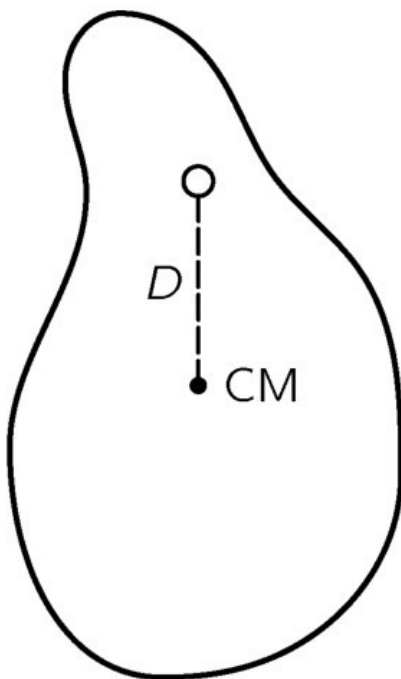


图 17-1

振动周期为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{MgD}},$$

其中, M 是刚体的质量, I 是刚体绕悬挂轴的转动惯量。

17.2 图17-2所示的哪种情况作简谐振动 (即正弦振动) ?

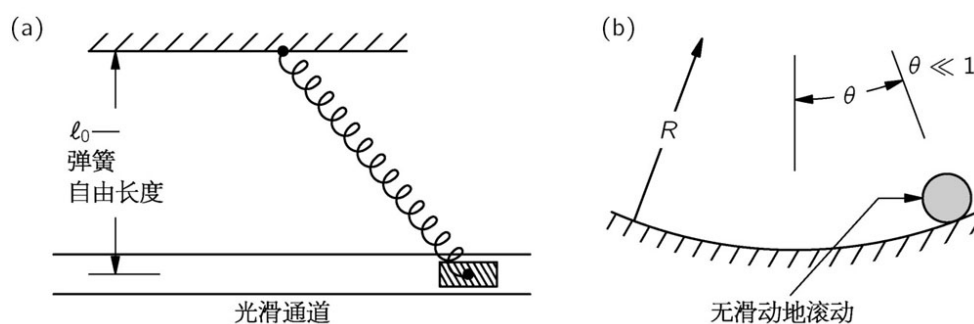


图 17-2

17.3 如图17-3所示, 质量为 M 、长 L 的均匀杆在两个水平弹簧的作用下进行摆动。两个弹簧质量可忽略不计, 弹性系数分别为 k_1 和 k_2 。当杆竖直时, 两弹簧均处于松弛状态。在振动情况下, 求振动周期 T 。

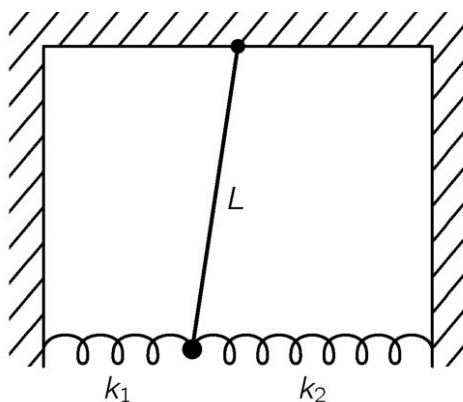


图 17-3

17.4 一个无阻尼的简谐振子，其最大振幅为 A 。当振子离开平衡位置的距离 x 为多少时，其动能正好等于势能？

17.5 两个粒子A和B在同一直线以相同的振幅（10cm）作简谐运动。对于粒子A， $\omega_A = 20 \text{ rad s}^{-1}$ ；对于粒子B， $\omega_B = 21 \text{ rad s}^{-1}$ 。如果在 $t=0$ 时刻，两个粒子都以 x 轴正方向通过 $x=0$ 位置（即“同相”）。

（a）在 $t=0.350\text{s}$ 时刻，两粒子相隔距离 Δx 是多少？

（b）在 $t=0.350\text{s}$ 时刻，相对于粒子A，粒子B的速度 V 是多少？

17.6 如图17-4所示，竖直U形管压力计的内横截面 A 为常数，管内含有的液体总长为 L 。求液体的振动周期 T 。忽略摩擦力，并假定振动时两液面都保持在管的竖直直线部分内。

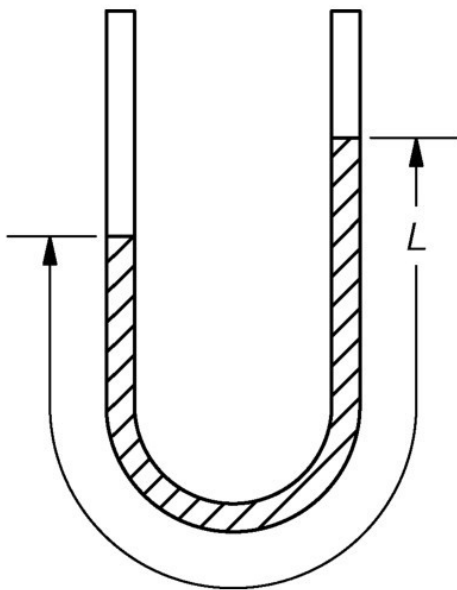


图 17-4

17.7 初始阶段，细菌菌落的增长率与细菌的数目成正比。写出表示这种关系的微分方程。

17.8 质量为 M 、半径为 R 的平圆盘从边缘被扭力丝悬吊起来，如图 17-5所示。丝的扭转常数是 K ，求扭转振动的周期 T 。

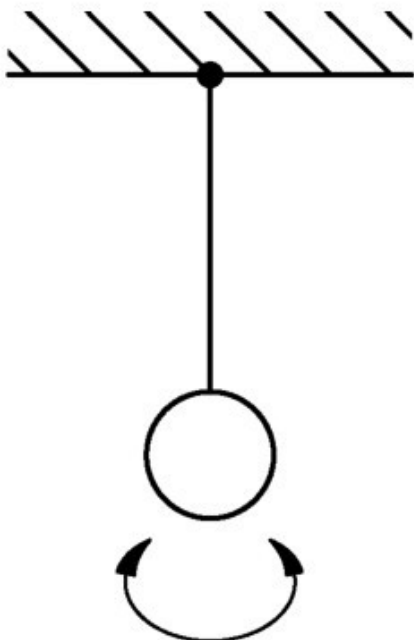


图 17-5

17.9 如图17-6所示，均匀截面、均匀密度的硬金属丝做成的框架由半圆弧 ACB 和直径 AB 构成。通过直径中点的孔将框架挂在不摩擦的钉子 P 上，使其像摆一样在其自身所在的平面内振动。框架的直径是50cm，求小弧度振动时的振动周期 T 。

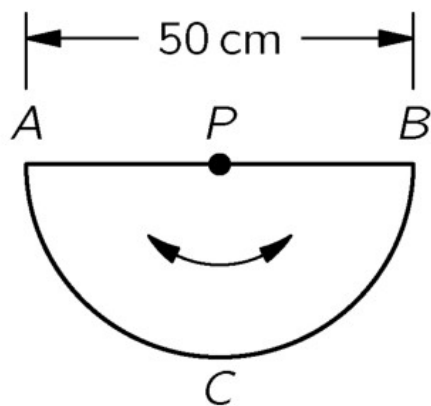


图17-6

17.10 质量为 M 的理想车轮绕其轴的转动惯量为 I_C ，摩擦力可忽略。车轮挂在长度为 d 的吊杆上。吊杆的质量和转动惯量均可忽略。吊杆可以在车轮所在平面内绕支点 X 自由转动。如图17-7所示。当吊杆和过 X 点的竖直线成 θ_0 ($\theta_0 \ll 1$) 角时。由静止状态同时释放吊杆和车轮。在以下A和B两种情况时，**A:** 车轮绕轴 C 无摩擦自由转动；**B:** 车轮和吊杆被固定在一起，作为一个刚体绕 X 运动。

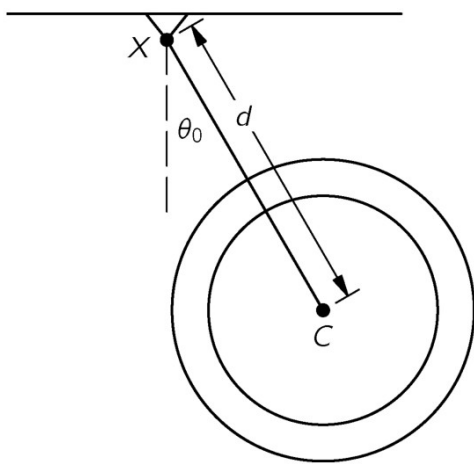


图17-7

求：（a）吊杆的运动周期；

（b）当 $\theta = \theta_0$ 时，角加速度 $\ddot{\theta}$ ；

（c）当 $\theta = 0$ 时，角速度 $\dot{\theta}$ 。

- 17.11** 如图17-8所示，两个均匀的平圆轮的质量皆为 1.00kg 。两圆轮共同支在与两者皆垂直且通过两者质心的水平轴 A 上。两圆轮的回转半径[1]相等，为 $R = 0.20\text{m}$ 。圆轮2同时装在一固定水平轴 B 上，轴 B 与圆轮2质心的距离是 k 。初始时，圆轮2静止不动。圆轮1以角速度 ω_0 绕轴 A 旋转。固定在圆轮1上的插杆 C 突然进入圆轮2的小孔，使两圆轮相对转动停止。这时，观察发现两圆轮的摆幅在竖直线两侧为 90° 。求 ω_0 。

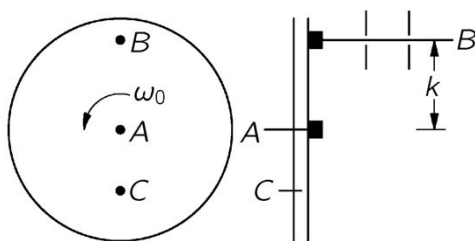


图 17-8

- 17.12** 如图17-9所示，质量为 M 的L形均匀刚体棒，两段长度各为 l ，悬挂于 A 点。棒可以在其自身所在平面内自由摆动。

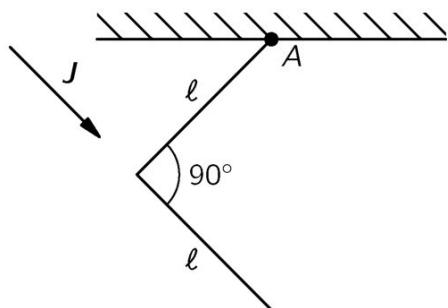


图 17-9

(a) 求静止时的悬挂角 θ_0 (与竖直方向的夹角)。

(b) 冲量 J 以图示方向作用于棒拐角处, 使棒产生一无阻尼的小振动。设施加 J 的时刻为 $t=0$, 求 $\theta(t)$ 。

17.13 嵌在均匀实心球体内的质点所受到的球体质量给予的引力和质点到球心的距离成正比。如果地球就是这样的球体, 沿着地球直径钻一个狭窄的洞, 求落入洞内的物体到达地球对面所需的时间 T 。

17.14 质量为 m 的物体在两个弹簧的作用下沿直线在无摩擦的水平面上运动。两弹簧的弹性系数分别为 k_1 和 k_2 。(在平衡点, 弹簧不对外施加力。) 对于如图 17-10 所示的两个体系,

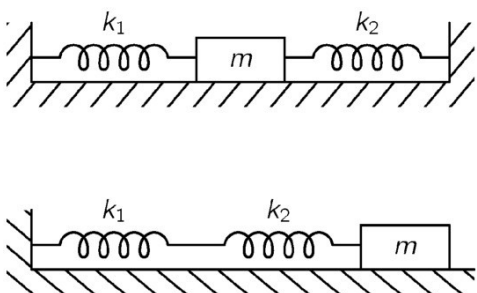


图 17-10

(a) 推导运动方程。

(b) 求振动周期 T 。

17.15 质量分别为 $3M/4$ 和 M 的粒子通过无质量的弹簧相连接。弹簧的自由长度为 L ，弹性系数为 k 。两粒子位于水平光滑平台上，初始时静止，相隔距离为 L 。质量为 $M/4$ 的另一粒子在以上两粒子的连线方向以速度 v 运动，与质量为 $3M/4$ 的那个粒子相撞，并与其黏在一起。求两粒子之间弹簧的振幅 A 和振动周期 T 。

17.16 两质量不等的物体由弹簧相连接，静止于无摩擦的桌面上，如图17-11所示。两物体质量分别为 $m_1=m$ ， $m_2=2m$ ；弹簧的弹性系数为 k 。如果 m_2 靠墙，弹簧被压缩一段距离 d ，然后将系统由静止释放。

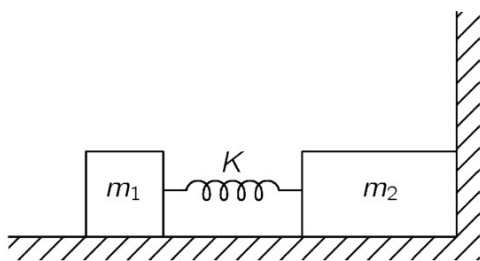


图 17-11

(a) 求在物体 m_2 开始运动前，物体 m_1 运动的距离 x 。

(b) 求物体 m_2 和墙壁分离后，质心速度 V_{CM} 以及振幅 A 。

- 17.17** 如图17-12所示，质量不相等（分别为 M_1 和 M_2 ）的两滑块以速度 v_0 沿水平气槽滑动。两滑块被一卡钳夹在一起，弹性系数为 k ，质量忽略不计的弹簧被压缩在两滑块之间，弹簧的压缩量为 X 。当卡钳突然释放时，弹簧驱使两滑块分离。求两滑块的最终速度 v_1 和 v_2 。

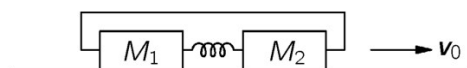


图 17-12

- 17.18** 图17-13所示是一无阻尼水平机械振荡器。当上方物体相对于下方物体没有滑动时，振动的最大幅度 $x_{\max}$ 是多少？两物体间的摩擦系数是 μ 。

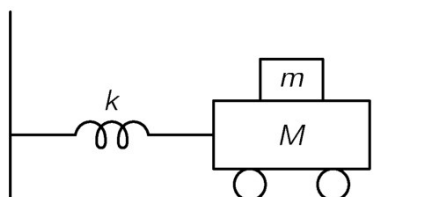


图 17-13

- 17.19** 质量为200g的物体受到轻弹簧的作用，在水平导轨上振动。其最大动能为 10^6 erg （ $1\text{J}=10^7 \text{ erg}$ ），振动周期为1s。

- (a) 求系统的总能量 E 。
- (b) 求弹簧的弹性系数 k 。
- (c) 求振动的振幅 x 。

17.20 如图17-14所示，喷气引擎的转动部件由转动惯量为 I_1 的涡轮圆盘（含叶片）和转动惯量为 I_2 的压缩机（含叶片）组成。涡轮圆盘和压缩机通过扭转系数为 k 的轴连接（轴的转矩等于 k 乘以涡轮圆盘和压缩机之间的相对角位移）。（ B 是轴承。）

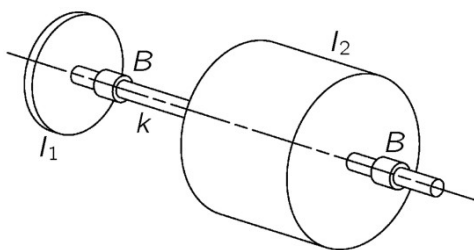


图 17-14

(a) 求引擎转子的扭转振动频率 ν 。

(b) 求涡轮圆盘和压缩机的扭转振动的振幅比 A_1/A_2 。

17.21 示波器荧光屏上光点的位置常常由施加在 x 轴和 y 轴上的两个简谐电压决定：

$$x = A_x \cos (\omega t + \delta_x) ,$$

$$y = A_y \cos (\omega t + \delta_y) .$$

作出以下情况的光点运动曲线，并进行讨论。

(a) $\delta_x = \delta_y$

(b) $\delta_x = \delta_y + \pi/2, A_x = A_y$

$$(c) \delta_x = \delta_y + \pi/2, A_x \neq A_y$$

$$(d) \delta_x = \delta_y - \pi/4, A_x = A_y$$

$$(e) \delta_x = \delta_y - \alpha, A_x \neq A_y$$

17.22 图17-15所示的双线摆由一段长为 L 、质量为 M 的杆以及悬挂此杆的两根长为 l 的细线组成。两线间距离 $d < L$ 。针对以下情况，求小振幅振动时的振动周期 T 。

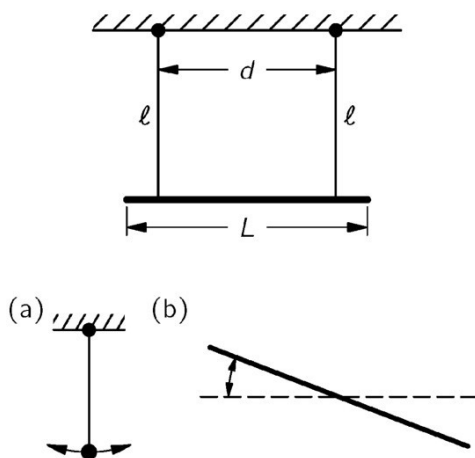


图 17-15

(a) 图17-15 (a) 所示，杆像普通摆那样摆动。

(b) 图17-15 (b) 所示，杆绕其质心振动。

17.23 如图17-16所示，在半径为 a 的实心圆柱体内部距离轴 $a/2$ 处，钻一与轴平行、半径为 $a/2$ 的孔。圆柱体位于水平桌面上，可无滑动地滚动。圆柱体以小位移偏离平衡位置时，求振动周期 T 。

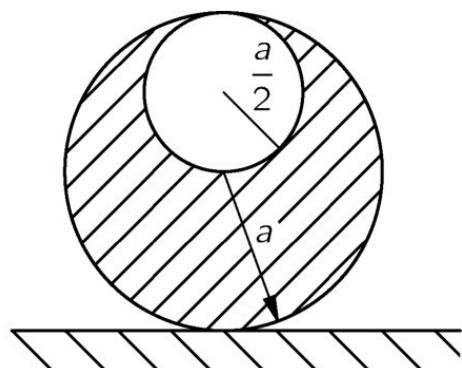


图 17-16

- 17.24** 质量为 M 的物体处于无摩擦的小轮上，可以在半径为 R 的圆形槽内作横向振动，振幅 $A \ll R$ 。如图17-17（a）所示。又将两个质量均为 m 的物体放于无摩擦小轮之上，两物体通过弹性系数为 K 、质量可忽略不计的压缩弹簧连接，并位于邻近 M 且与其路径平行的水平面上。如图17-17（b）所示。在 M 通过槽底的瞬间，释放弹簧。图17-17（c）所示是 M 随后几个 $1/4$ 周期时刻 M 的位置。求 m 的值。

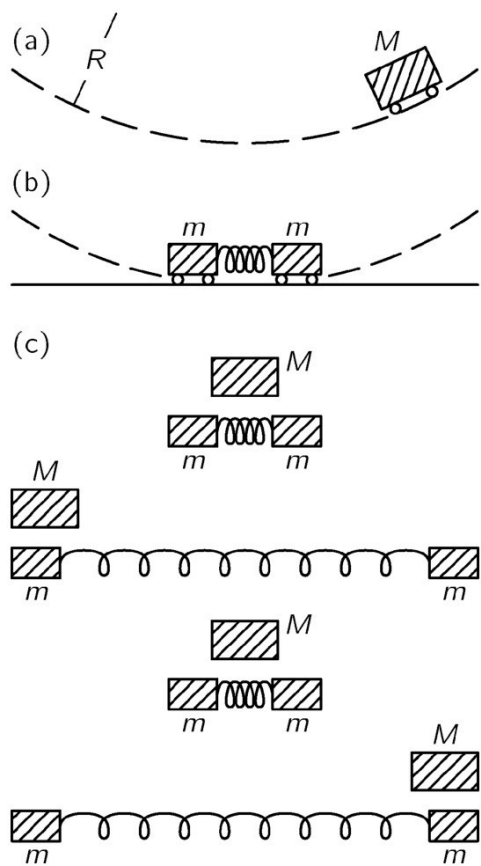


图 17-17

17.25 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个滑块处于无摩擦的气槽内。两滑块通过弹性系数为 k 、无质量的弹簧相连接，如图17-18所示。滑块间的距离比弹簧的静止长度长 A ，然后从静止状态释放。

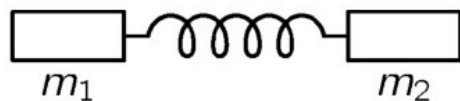


图 17-18

(a) 求 m_1 和 m_2 的振动周期 T 。

(b) 与单物体振子的周期相比，你发现了哪个物理概念（两物体相对运动中的一个典型概念）？

(c) 求振动能量 E 。

(d) 能量如何在 m_1 和 m_2 之间分配？

17.26 一单摆由长为 L 、无质量的杆和杆一端质量为 M 的摆锤组成，单摆可自由地绕枢轴 360° 摆动。在小振幅振动时，单摆的周期是 2π s。如果使摆小心地平衡在摆锤位于顶端的位置（不稳定平衡），然后以 1mm s^{-1} 的速度轻推一下，求质点移动10cm所需要的时间 T 。（假定在这个距离上，通常的“线性系统”近似是有效的。当然，这一近似对于整个圆周上的摆动不成立。）

17.27 如图17-19所示，扭杆的一端固定在转盘的中心，转盘在无摩擦的轴承上绕其竖直对称轴转动，扭杆的另一端被固定。扭杆的扭转常数为 K ，系统的总转动惯量为 I 。初始时，转盘以最大振幅 θ_0 作无阻尼简谐振动。在转盘通过平衡位置时，质量为 m 的飞镖竖直落在转盘上，距转轴为 a 。飞镖针尖立即牢固地刺入转盘。求刺入后的最大振幅 θ'_0 。忽略飞镖绕其轴的自旋，飞镖厚度相比于 a 可以不计。

17.28 质量为 M 的刚体支在无摩擦的水平轴上。刚体质心到水平轴的距离为 d ，刚体绕轴的转动惯量为 I 。

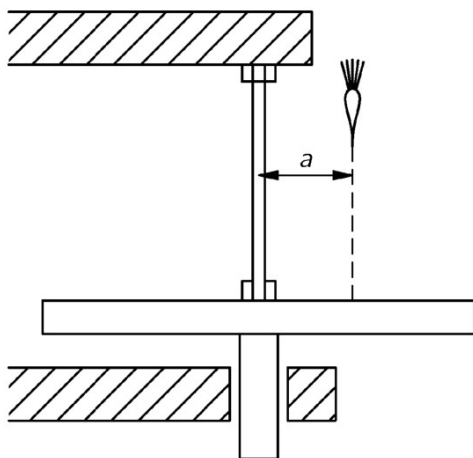


图 17-19

(a) 若 θ 是刚体与其平衡位置的偏角，写出描述角 θ 随时间变化的微分方程。

(b) 若刚体振动很小，则 $\sin\theta \approx \theta$ ，求振动周期。

(c) 若刚体关于其质心的转动惯量是 I_C 。写出小振动时的振动周期关于 d 和 I_C 的函数关系，并证明：

(1) 对应于一个指定周期， d 有两个取值 d_1 和 d_2 。

(2) 周期可用 d_1 和 d_2 来表示， $T = \frac{2\pi(d_1 + d_2)}{g}$ 。

(3) 当 $d = \sqrt{I_C/M}$ （回转半径）时，周期有最小值，求其最小值。

17.29 一线性弹簧的自由长度为 D ，将质量为 m 的物体挂在其下端，弹簧长度变为 $D+A$ 。挂有质量 m 的弹簧静止时，另一质量为 m 的物体从高度 A 处落到第一个物体上，发生非弹性碰撞。求后

来运动的周期 T 、振幅 a 和所达到的最大高度 H （相比于原平衡位置）。

- 17.30** 质量为20g的重挂钩连同挂于其上的质量5g的物体一起挂在质量可忽略的竖直弹簧上。将弹簧拉离平衡位置，整个系统以 $\pi/3\text{s}$ 的周期作竖直方向的简谐振动。若将5g物体换成25g物体，为确保其不跳离挂钩，释放前，弹簧偏离平衡位置的最大距离 z 是多少？

18 代数

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第22章。

满足基本代数规则的最一般的数的形式是复数。复数可以写成一个纯实数（正或负）和一个纯虚数之和。虚数是实数与单位虚数 i ($i = \sqrt{-1}$) 之积。（单位实数是 $1 = \sqrt{+1}$ 。）

$$u \text{ (复数)} = x \text{ (实数)} + iy \text{ (虚数)}。$$

对于任何代数方程，若所有 i 的符号都改变，则新的代数方程仍然正确。这一操作叫作取复数共轭。若 $u = x + iy$ ，则 u 的复数共轭，记为 u^* ，是 $u^* = x - iy$ 。

将代数规则应用于复数，有：

$$\text{I. } (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\text{II. } (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\text{III. } |u| = \sqrt{u u^*} = \sqrt{x^2 + y^2}。 \text{ 此为复数 } u \text{ 的模。}$$

实数的虚数次幂是复数，其模为1。随虚数幂次的大小增加，复数的实部和虚部像正弦和余弦函数一样变化。具体为：

$$\text{IV. } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta。$$

18.1 在方程

$$u + iv = (a + ib)(c + id)$$

中，记 $\frac{b}{a} = \tan \alpha$ ， $\frac{d}{c} = \tan \beta$ 。利用上面的式II和三角公式

证明：

$$(a) \quad \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$(b) \quad \frac{v}{u} = \tan(\alpha + \beta)。$$

18.2 利用式IV完成习题18.1。

18.3 证明：

$$\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2,$$

$$\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / 2i。$$

18.4 证明：

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{[ac + bd + i(bc - ad)]}{c^2 + d^2}。$$

18.5 定义如下的两个量 $\cosh \theta$ 和 $\sinh \theta$ 分别被叫作 θ 的双曲余弦和双曲正弦：

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2},$$

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}。$$

证明：

$$\cos i\theta = \cosh \theta,$$

$$\sin i\theta = i \sinh \theta,$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1。$$

18.6 利用微分基本公式

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

证明：

$$\frac{d e^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}。$$

18.7 (a) 通过逐次求导或其他方法，证明 e^x 可以表示为以下无穷级数：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots。$$

(b) 证明 $\cos x$ 和 $\sin x$ 可以表示为以下无穷级数:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots。$$

(这些级数对所有 x 都收敛, 特别当 $x \ll 1$ 时, 这些级数对于计算 e^x , $\cos x$, $\sin x$ 很有用处。)

18.8 求方程 $\sqrt[n]{1}$ 的全部代数根, 其中 n 为整数。

18.9 利用 $e^{in\theta}$ 的性质和二项式定理, 证明:

$$\cos n\theta = \cos^2 \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \pm \cdots。$$

18.10 (a) 从关系式 $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$ 出发, 证明两角和的正弦和余弦公式。

(b) 一复数 $A e^{i\theta}$ 被另一复数 $B e^{i\varphi}$ 相乘, 从几何的角度解释其意义。

18.11 由下方的11的逐次平方根表，计算 $\log_{11} 2$ 和 $\log_{11} 7$ ，精确到3位有效数字。

r	$1/r$	$\sqrt[r]{11} = 11^{1/r}$
1	1.000 00	11.000 0
2	0.500 00	3.316 6
4	0.250 00	1.821 2
8	0.125 00	1.349 5
16	0.062 50	1.161 7
32	0.031 25	1.077 8
64	0.015 63	1.038 2
128	0.007 81	1.018 9

（利用 $\log_a N = \log_a b \log_b N$ 检验计算结果。 a 、 b 是任意对数底。）

19 受迫阻尼振荡

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第23—25章。

19.1 画出下列运动的瞬时运动草图。

(a) 无阻尼振荡；

(b) 阻尼振荡；

(c) 过阻尼振荡。

以上3种运动初始时离开平衡位置的距离相同，同时由静止开始运动。

19.2 电感为10mH、电容为1pF的LC电路的共振频率 f 是多少？

19.3 1.00H的电感和377 Ω 的电阻串联，求频率为60Hz时的阻抗 Z 。

19.4 某线圈的电阻为20 Ω 。当其与方均根振幅为10V，频率为60Hz的电压源连接时，观测到电流的方均根值为0.3A。求线圈的电感 L 。

19.5 一个电感—电容串联电路在频率 1.0×10^4 Hz时发生共振。若 $L = 7.6 \times 10^{-2}$ H，求 C 。

19.6 求电感 L 与电容 C 以下列方式联结时阻抗 $\hat{Z}$ 关于频率 ω 的函数。

(a) 串联；

(b) 并联。

19.7 两个电容 C_1 和 C_2 以下列方式联结：

(a) 串联；

(b) 并联。

求两种情况下的有效电容 C 。

19.8 两个电感 C_1 和 C_2 以下列方式联结：

(a) 串联；

(b) 并联。

求两种情况下的有效电感 C 。

19.9 一共振电路由两个电感 L 和 $3L$ ，两个电容 C 和 $3C$ 组成，全部以以下方式联结：

(a) 串联；

(b) 并联。

求两种情况下的共振频率 ω_0 。

19.10 电阻—电容串联电路的“时间常数”是 RC ；电感—电容串联电路的“时间常数”是 $\sqrt{LC}$ 。从量纲来考虑，电阻—电感串联电路的“时间常数”应是什么？

19.11 频率为1 000Hz的音叉的近似 Q 值是多少？（利用你的生活经验。）

19.12 (a) 质量为 M 的物体在弹性系数为 k 的弹簧的作用下运动，所受到的摩擦阻力为 $-m\gamma v$ ，证实物体运动的微分方程是：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\text{其中 } \omega_0^2 = \frac{k}{m}。$$

(b) 假设解的形式是，求解上述方程（运用复变量）。并证实当 $\gamma < 2\omega_0$ 时，方程通解为：

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

$$\text{其中 } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}。$$

(c) 当 $\gamma > 2\omega_0$ 时，方程通解是什么？

(d) 在 $t=0$ 时刻, 物体的位置和速度分别为 $x=x_0$ 和 $\dot{x}=v_0$ 。
求系数 A 和 B 。

19.13 直线气轨上的滑块由于受到支持其的空气薄膜的摩擦阻力而速率降低。黏性力与速率成正比。

(a) 写出滑块运动的微分方程, 并求解方程。

(b) 假设沿 x 方向运动的滑块的初始位置和速度分别为 x_0 和 v_0 , 写出滑块的速度关于时间 t 的函数关系 $v(t)$ 和速度关于位移的关系 $v(x)$ 。

19.14 滑块位于倾斜气轨上, 在滑块内嵌有一磁铁。磁铁使气轨中产生涡流, 涡流反作用于磁铁而产生以精确正比于速度的阻力 $F=-m\gamma v$ 。滑块从静止开始运动, 求(作为气轨倾斜角和磁铁阻力系数 γ 的函数):

(a) 滑块能达到的最终速度 v_∞ ;

(b) 速度关于时间的函数 $v(t)$;

(c) 位置关于时间的函数 $x(t)$ 。

19.15 远洋油轮上的一名乘客不小心将质量为 1.0kg 的相机掉落水中。相机从静止状态开始下落, 初始点在水面上方 20m 处。撞击水面时, 相机损失了其一半动能。进入水中后, 相机受到的

浮力是其重量的一半，受到的阻力为 $1/3 \text{ kg s}^{-1} \times v$ ， v 是相机在水中的速率。求相机进入水中 3.0s 后，在水下的深度 d 。

19.16 一单摆的固有周期为 1.00s。其支点以振幅 1.00cm、周期 1.10s 的正弦运动方式被横向移动。当运动稳定后，求单摆摆锤的振动振幅 A 。

19.17 质量为 5.0kg 的物体悬挂于一弹簧上，发现物体作阻尼可忽略的振荡，在 10.0s 内，物体完成 10 次周期运动。然后，施加一微小的磁阻尼，阻尼力正比于运动速度。在 10 个周期内，振动振幅从 0.20m 减至 0.10m。

(a) 写出运动方程，其中 $\frac{d^2x}{dt^2}$ ， $\frac{dx}{dt}$ 和 x 的系数用 SI 单位制的数值来表示。

(b) 现在的运动周期是多少？

(c) 多少周期 N 后（初始时振幅为 0.20m），振幅将达到：

(1) 0.05m; (2) 0.02m?

(d) 在第一周期内，由阻尼产生的近似最大能量耗散率是多少？

19.18 电容为 C 的电容器先被充电到电压 V_0 。在 $t=0$ 时刻，该电容跨接在电阻为 R 的电阻器上。写出电容电压 V （是时间 t 的函数）的微分方程，并通过假定一指数形式解来求解方程。

19.19 如图19-1所示，不带电电容 C ，“纯”电感 L 和可变电阻 R 接到电位差为 V 的电池上。电键 S 闭合后，写出电路的方程，并对于不同的电阻值 R ，画出电容电压关于时间的函数图。

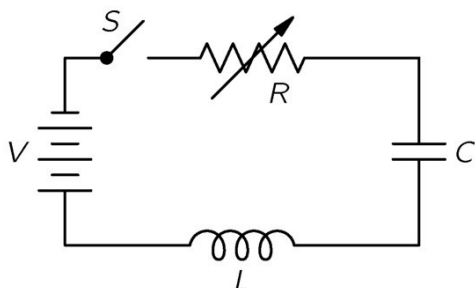


图 19-1

19.20 (a) 对于下述两种情况，写出描述稳态电流的微分方程，并解此方程。

(1) 角频率为 ω 的正弦电压加在电感 L 上。

(2) 角频率为 ω 的正弦电压加在电容 C 上。

(b) 利用 (a) 中的结论，求：

(1) 电感 L 的复阻抗 Z_L 。

(2) 电容 C 的复阻抗 Z_C 。

19.21 画出处于共振的 RLC 串联电路的相量图 (phasor diagram)。

19.22 画出下列情况的电压和电流相量图。

(a) 电压 $V_0 \cos \omega t$ 加在电阻 R 和电感 L 的串联电路上。

(b) 电压 $V_0 \cos \omega t$ 加在电阻 R 和电感 L 的并联电路上。

(c) 电压 $V_0 \cos \omega t$ 加在电阻 R 和电感 C 的串联电路上。

(d) 电压 $V_0 \cos \omega t$ 加在电阻 R 和电感 C 的并联电路上。

19.23 如图19-2所示的电路有以下特征：

$$V(t) = V_0 \cos \omega t,$$

$$V_0 = 10\text{V},$$

$$\omega = 25 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1},$$

$$L = 4 \times 10^{-3} \text{ H},$$

$$C = 4 \times 10^{-7} \text{ F},$$

$$R = 160 \Omega.$$

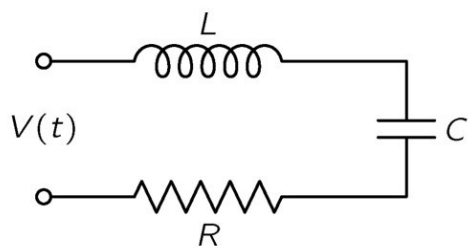


图 19-2

考虑电路处于稳态振荡的情况。

(a) 求电流 I_0 的振幅。

(b) 相较于所加激励电压，电流的相位差 δ 是多少？

(c) 画出表示电阻、电容和电感的电压的相量图。

19.24 在图19-3所示的电路中，驱动频率是 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 。

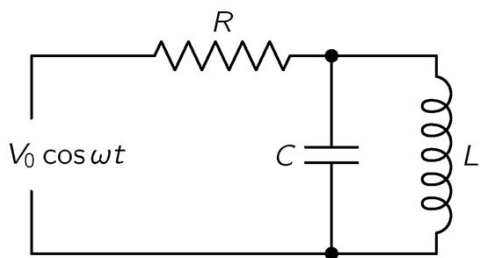


图 19-3

(a) 求通过 R 的电流 I_R 。

(b) 求通过 L 的最大电流 $I_{L, \max}$ 。

19.25 图19-4所示的 RLC 串联电路包含一个提供恒定频率为 ω 的交流电压的发生器。电容是可变的。

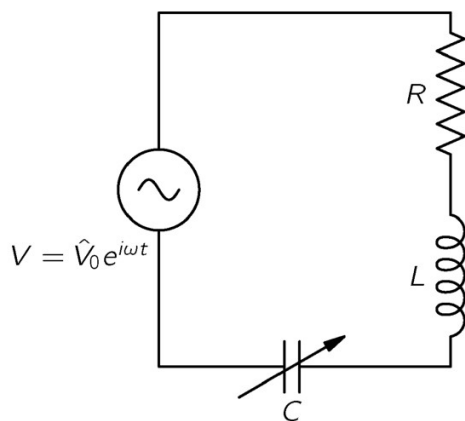


图 19-4

- (a) 对于 $C = C_1$ ，电流 I_1 与所加电压同相位。求 C_1 ，以 L 和 ω 表示。
- (b) 改变电容值到 $C = C_2$ ，发现电压相位超前电流 I_2 相位 45° 。求 C_2 ，以 C_1 、 R 和 ω 表示。
- (c) 求 I_1 / I_2 。

19.26 图19-5所示的电路中，开关初始时在 A 点上，在 $t = 0$ 时刻，开关被转向 B 点。经过一段长时间，

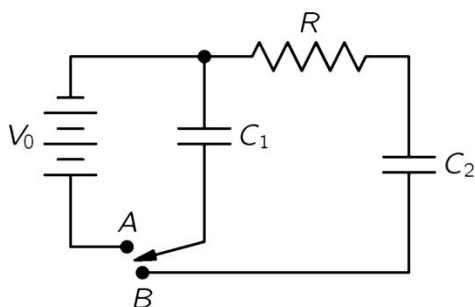


图 19-5

- (a) 在电阻中，多少能量 ΔE 以热的形式耗散掉？
- (b) 电容上如果还残有电压，电压 V_1 、 V_2 为多少？

19.27 图19-6所示电路中，在 $t < 0$ 时，开关打开，电容不带电。

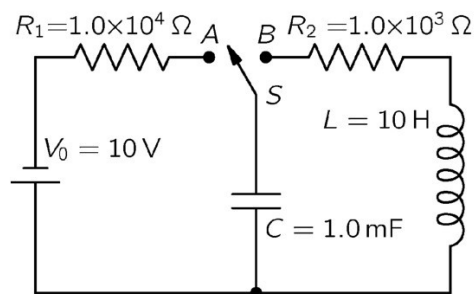


图 19-6

- (a) 开关合向 A 后，经过多少时间 t 电容器两端电压达到 8.0V ？
- (b) 在电容器两端电压达到 8.0V 的瞬间，开关转向 B ，则通过 L 的电流的初始值 I_0 是多少？

19.28 图19-7所示电路中，开关初始时关闭，有稳定电流 $I = V_0 / R$ 流过。在 $t = 0$ 时刻，突然打开 S 。求在电容器上观测到的最大电压 $V_{\max}$ 。

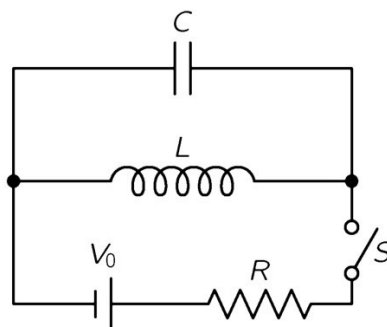


图 19-7

19.29 图19-8所示电路中，开关初始在 A 上。如果突然把开关转向 B ，则电容器上出现的最大电压 $V_{\max}$ 是多少？

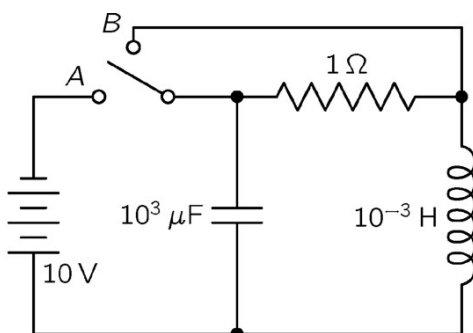


图 19-8

19.30 为了降低电源整流器发出的120Hz的嗡嗡声，可采用一种“平滑滤波器”。其最简单的构造是：由图19-9所示的一个电阻和一个电容串联而成。如果所加电压有直流分量 V_{DC} ，和振幅为 V_{AC} 的频率为120Hz的分量，求相应的电压 V'_{DC} 和 V'_{AC} 。

($R=10^3 \Omega$ ， $C=10\mu\text{F}$ 。)

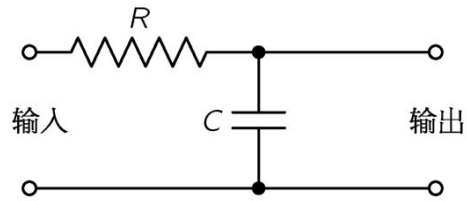


图 19-9

19.31 如图19-10所示，一横截面均匀的柱形浮标，当海洋中没有波时，竖直漂浮在水中，浸没长度为 L 。

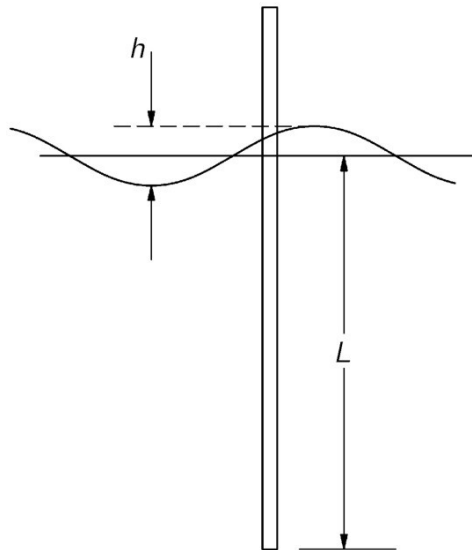


图 19-10

- (a) 当海洋中有高度为 h （波峰、波谷高度差）、周期为 T 的波浪时，浮标竖直运动的振幅 A （相对于海平面）是多少？（忽略流体摩擦以及浮标的非竖直运动。）
- (b) 如果没扰动时，浸没长度为100ft，波浪高度为10ft，波的周期为5s，求浮标运动的振幅。

(c) 浮标总长度 D 为何值时, (b) 中的波峰刚好达到浮标的顶端?

19.32 图19-11所示是高速离心气体压缩机的转动部分。质量为 M 的叶片被安装在质量可忽略不计的轴上, 且位于两轴承 B 的中间。当压缩机停止运转时, 叶片的质心偏离轴承中心线一微小量 e (在图中被严重放大了), 轴的弹性弯曲系数是 k 。

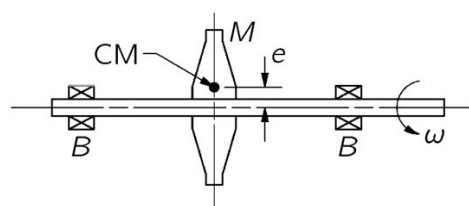


图 19-11

(a) 当机器不再运转时, 系统弯曲振动的圆频率 ω_0 是多少?

(b) 当机器以角速率 ω 运转时, 轴的弯曲偏离量 x 是多少?

(c) 求使机器失效的临界速率 ω_{cr} 。

(d) 如果偏心率减为原来的一半, 求临界速率 ω'_{cr} 。

19.33 阻尼谐振子: 质量为 m 的物体悬挂在弹性系数为 k 的弹簧上, 放于阻尼力为 $-m\gamma \, dx/dt$ 的介质中。

(a) 对于欠阻尼 (underdamped) 的情况, 求在 $t > 0$ 的全部时间的物体位置 $x = x(t)$ 的通解。物体所受的驱动力为

$$(1) \quad F = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

(2) 无驱动力，但在 $t=0$ 时刻，有一冲量 $J=J_x$ 。

$$(3) \quad F = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 \cos \omega_0 t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

(b) 如果振子受正弦力 $F_0 \cos \omega_0 t$ 驱动，经过长时间后，求使振幅达到最大值的频率 ω^* 。

19.34 质量为 m 的物体位于两个弹性系数皆为 $k/2$ 的相同弹簧之间，如图19-12所示。物体可在桌面上滑动，桌面的摩擦系数恒定，为 μ 。起初，物体被拉离中心，与中心距离为 A ，然后由静止释放。

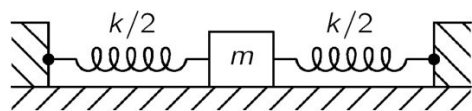


图19-12

(a) 写出运动的微分方程，并对于 $0 < t < \pi\sqrt{m/k}$ 时间段求解方程。

(b) A 具有如下特性：物体通过中心点正好 N 次后，在距离中心为 B 的位置（ $x = \pm B$ ）永远静止下来。

(1) 求 B 的可能值。

(2) 对于 $N=0, 1, 2, \dots$, 求 A 。

19.35 质量为 m , 电荷为 q 的粒子处于沿 x 轴的交变电场中,

$$E = E_0 \cos \omega t。$$

粒子同时还受到一正比于 x 坐标的三阶导数的力

$$F_x = \alpha \frac{d^3 x}{dt^3}。$$

求处于稳态时, 粒子的振幅 A 和相位 δ 。

19.36 图19-13所示的电路构成了一个张弛振荡器 (relaxation oscillator)。它由一个氖泡和一个电容器组成。电容器通过电阻由直流电源充电。在氖泡两端电压小于60V时, 其电阻无限大。当电压达到或超过60V时, 氖泡被击穿, 电阻变得很小, 使得电容放电。氖泡很快重回到无限大电阻。如果 $C = 0.10 \mu\text{F}$, $R = 10^6 \Omega$, $V_0 = 80\text{V}$, 求氖泡的闪光频率 f 。

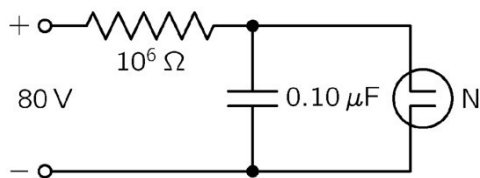


图 19-13

19.37 在很多情况，需要一种电路，可以对函数关于时间微分。一种简单的可完成这样任务的电路如图19-14所示。

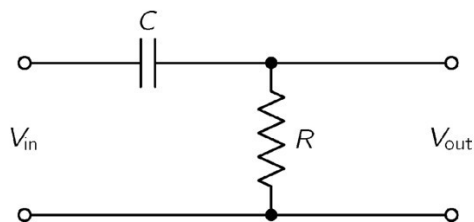


图 19-14

(a) 证明：当输入电压为 V_{in} 时，电路的输出电压 V_{out} 是
(对于 $|V_{out}| \ll |V_{in}|$ 情况)

$$V_{out}(t) = RC \frac{dV_{in}}{dt}(t)。$$

(b) 对于 $V_{in} = V_0 \cos \omega t$ ，求 V_{out} ，以检测 (a) 结论的正确性。

19.38 发明一种电路，可以对函数进行“积分”，并讨论其性质。

19.39 在电子电路中，经常需要提供一振幅恒定但相位可变的正弦电压。这种电路被称为相移网络 (phase-shifting network)。一个例子如图19-15所示。证明： A 、 B 端点间测得的电压 V_{out} 的振幅是输入电压 V_{in} 振幅的一半，而相位可以通过改变电阻 R' 在 0° 到 180° 之间调节。

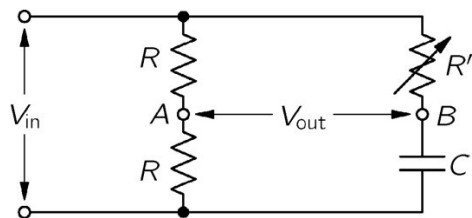


图 19-15

19.40 汽油机的点火系统如图19-16所示。当断路器触点 S 闭合时，电源电压 V_0 在线圈的初级绕组（primary winding）中产生电流。初级绕组的电感为 L ，内电阻为 R 。线圈的次级绕组的匝数是初级绕组的100倍，如此，火花塞间隙 P 处电压是线圈初级绕组电压的100倍。每当臂 D 与火花塞电路之一接触（如图示），断路器触点被分配器凸轮打开（未画出）。 C 是冷凝器的电容，连接在断路器触点两端。电路常量的典型值是： $V_0 = 12\text{V}$ ， $C = 0.25\mu\text{F}$ ， $R = 6\Omega$ ， $L = 2\text{mH}$ 。

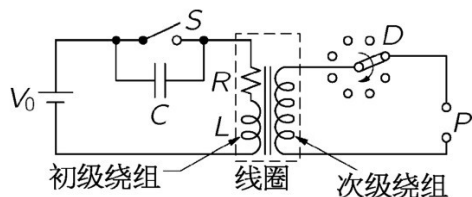


图 19-16

(a) 如果汽油机有8个汽缸，以每分钟4 200转运行，在30%的时间里断路器触点是断开的。问在断路器断开的瞬间，线圈的初级绕组中的电流 I 是多少？假设每次打出火花，系统中的电流在断路器接通前衰减至零。另外，每个汽缸在汽油机每隔一转点火一次。

(b) 当断路器断开时，如果没有产生火花，则火花塞间隙产生的最大电压 $V_{\max}$ 是多少？

(c) 求从断路器断开的瞬间到火花塞间隙电压达到最大值所用的时间 t 。

- 19.41** 计算汽车的一不平衡车轮开始跳离地面的汽车速率 V 。图19-17： W_1 是由这个车轮支撑的汽车重量部分。 W_2 是簧下重量（unsprung weight），包括车轮、轮胎、制动器及其他。 W_3 是不平衡的重量，与 W_2 相比很小，位于半径为 R 的轮胎胎面上。 K 是悬浮系统的劲度常量（stiffness constant），由 $K = W_1 / \delta_1$ 给出，其中 δ_1 是轮胎主轴相对于车体的静态偏移。 k 是轮胎的劲度常量，由 $k = (W_1 + W_2) / \delta_2$ 给出，其中 δ_2 是轮胎主轴相对于路面的静态偏移。忽略减振器和车体微小的竖直运动的影响。取以下典型数据： $W_1 = 750\text{lb}$ ， $W_2 = 75\text{lb}$ ， $W_3 = 0.125\text{lb}$ ， $R = 14\text{inch}$ ， $\delta_1 = 6\text{inch}$ ， $\delta_2 = 1.5\text{inch}$ 。

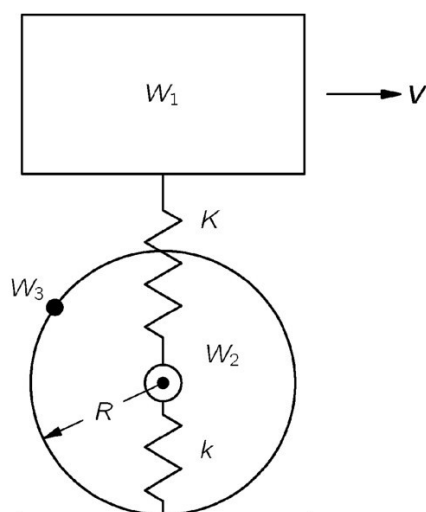


图 19-17

20 几何光学

参阅《费曼物理系讲义（第1卷）》第26、27章。

20.1 当我们站立于一面普通的平面镜前时，我们镜中之“像”表现为左右颠倒，即：我们的右手的像看起来是镜中“人”的左手。为什么镜子不能使上下颠倒呢？究竟是什么发生了颠倒？

20.2 如图20-1所示，一人在人行道上的速率为 5 ft s^{-1} ，而在粗糙的田野里速度仅为 3 ft s^{-1} 。从距离墙140ft的A点开始，他将走向人行道南面120ft的B点。

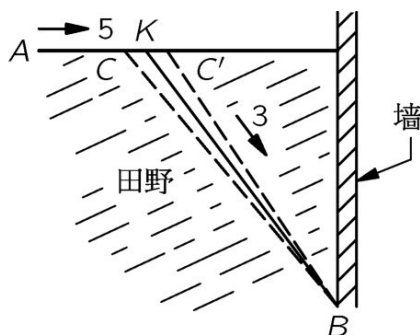


图 20-1

(a) 如果此人沿人行道行走至K点，接着穿越田野沿直线行走到B点。为了达到B点时用时最短，AK的长度应该为多少？

注：可以假定“折射定律”成立。然而，如果你有足够的信心，可以不做此假设来完成此题。

(b) 求最短时间 $t_{\min}$ 。

(c) 如果 $\overline{CK} = \overline{KC'} = 10 \text{ ft}$ ，沿 ACB 和 $AC'B$ 所需时间 t 分别是多少？

20.3 如图20-2所示，由光源 S 发出的一窄光束垂直于屏，光源与屏的距离为 1.0m 。光线射于屏上的 P 点。如果插入一折射率为 1.50 、厚度为 0.20m 的透明合成树脂片，光线以入射角 30° 射向此插片。

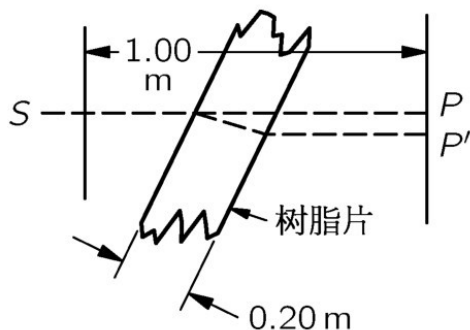


图 20-2

(a) 求光线的垂直位移 $\overline{PP'}$ 。

(b) 求光线沿 SP' 所需时间 $t + \Delta t$ 比沿 SP 所需时间 t 的增加程度。

20.4 一位饥饿的冒险家遇到一个直径为 80cm 的圆形雨水桶，桶内水深 100cm 。经过时，他注意到靠近他对面的桶壁有一条鱼。从鱼到人眼的光线在桶对称轴处射出水面，与竖直轴成 60°

角。如果人眼位于桶的边缘正上方，为了击中鱼，他射击的方向必须与射线成多大的角度 θ ？

- 20.5** 众所周知，当光束从一种透明介质射向另一介质时，并非所有的入射光都被折射，有一些光被反射（图20-3）。极其少的部分（如果有的话）被吸收或散射。如果光束原来在较密的介质中传播，当光射向两介质的界面时，将发生什么现象？针对不同的 θ 角进行讨论，画出各种情况的草图。

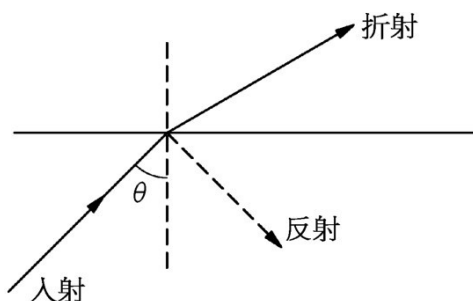


图 20-3

- 20.6** 两个平面镜相交，在竖直交线处形成严格的直角。画图来说明为什么在这种镜子中我们“看自己就如同别人看我们一样”。
- 20.7** 三个相互垂直的镜子相交形成一个内直角拐角。光线射到其中一个镜面上，然后到达另外一个或两个镜面上。证明：经过多次反射（假设镜面足够大），光线传播方向精确地与光线原方向相反，但有横向位移。这样的“反射器”有何实际应用？
- 20.8** 如图20-4所示，一束光线，与轴平行且靠近轴，射向半径为 R 的凹面镜上。

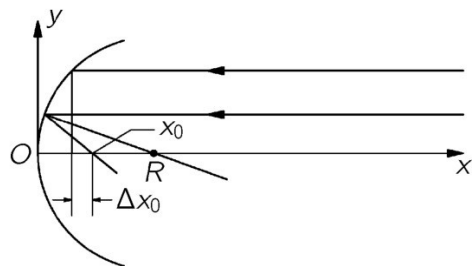


图 20-4

(a) 对于 $y \ll R$ 的情况，求焦点位置 $X_0 = X_0(R)$ 。

(b) 当 $y/R = 0.2$ 时（注意 $y \ll R$ 不再满足），求像点位置 $X = X_0 + \Delta X_0$ ，确定凹镜面的相对像差值 $\Delta X_0 / X_0$ 。

提示： $(1 - a^2)^{-1/2} \approx 1 + a^2/2$ 。

20.9 太阳对地球的张角近似为32分，求半径 $r = 400\text{cm}$ 的凹面镜形成的太阳像的位置 x 和直径 D 。

20.10 200in 海尔望远镜（Hale telescope）的焦距为160m。

(a) 求遥远恒星的焦平面与月球焦平面的距离 x 。

(b) 求遥远恒星的焦平面与斜距（slant range）为300km 的卫星的焦平面的距离 x 。

20.11 空气中一束平行光通过一个单独折射面而聚焦于一点，该折射面包围的是折射率为 n 的区域，如图20-5所示。（ y 是到轴的垂直距离。）

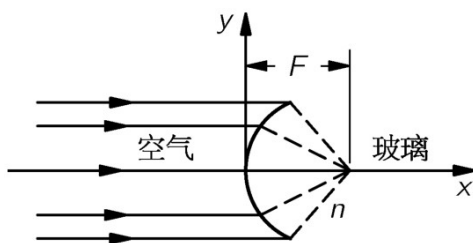


图 20-5

(a) 求折射面的可能形状。

(b) 透镜经常被做成球面，在什么条件下，这是可接受的？

20.12 一段玻璃毛细管的外径是 D ，其折射率是 n 。从侧面观察，毛细管的内径看上去为 d' 。求毛细管的实际内径 d 。

20.13 一玻璃球的半径为 2cm ，折射率为 $n=1.50$ 。如果一点光源放于离球心 12cm 处，则像将形成于何处？

20.14 对光学仪器进行校准，确定两条平行线的精确间距 y 是必需的。可用如下办法进行测距：让两条平行光线垂直且对称地射到一玻璃棒上。玻璃棒的横截面半径为 R ，折射率为 $n=1.60$ ，然后调节两平行线间的距离，直到两线正好聚焦在玻璃棒圆周上对面的一点，如图20-6所示。请以 R 来表示 y 。

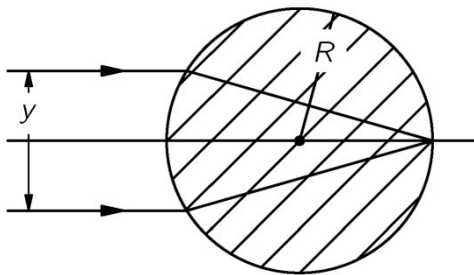


图 20-6

- 20.15** 在图20-7中, S 是光源, P 是透镜产生的像, $\overline{SC} = \overline{CP} = 1.00 \text{ m}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 0.10 \text{ m}$ 。透镜边缘处厚度为 3.0mm , 透镜折射率为 $n = 1.6$ 。问透镜在 C 处的厚度 d 为何值时, 光线经 SCP 的时间与经 SAP 和经 SBP 的时间相同?

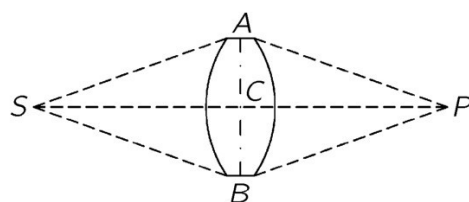


图 20-7

- 20.16** 一焦距为 F 的透镜对远处的物体成一实像, 通过焦距为 f 的放大镜对此像进行观察。求系统的视角放大率 M 。
- 20.17** 两个薄透镜 L 和 L' 的焦距分别为 f 和 f' , 两透镜相隔距离为 D 。求透镜组的等效焦距 F , 和主平面到相应透镜 L 和 L' 的距离 Δ 和 Δ' 。
- 20.18** 典型的人眼能对位于 25cm 到无限远处的物体聚焦。一个简单的薄放大镜焦距为 $f = +5\text{cm}$, 直接放在人眼前面。
- (a) 物体位于哪两个极限位置 d 之间时, 才能被看清楚?
- (b) 对于这些位置的每一个, 确定角放大率 M 。

- 20.19** 一照相组合系统由一个焦距 $f_1 = +30\text{cm}$ 的正透镜和一个焦距为 $f_2 = -10\text{cm}$ 的负透镜组成。两透镜相隔 27.5cm ，如图20-8所示。

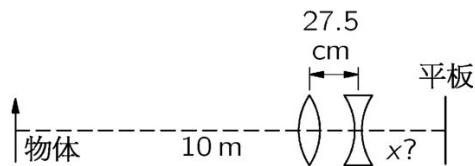


图 20-8

- (a) 为了对透镜前 10cm 的物体进行拍照，求照相底片的位置 x 。

- (b) 画出光路图。

- 20.20** 一简单天文望远镜由直径 4.0cm 、焦距 10.0cm 的物镜和焦距 2.0cm 的目镜组成。两个透镜光轴重合，相隔 12.0cm 。此望远镜被用来观测张角 5.7° ($\arctan 0.1$) 的恒星。为了收集来自物镜的全部光线，目镜的半径 r 必须多大？

- 20.21** 如图20-9所示，直径为 D 的发光圆盘垂直放在凸透镜的光轴上，其实像成于一固定屏上。当圆盘与透镜相距 L_1 时，像的直径是 d_1 。现在将圆盘移到更近些的距离 L_2 处，移动屏以重新聚焦。新的像的直径是 d_2 。

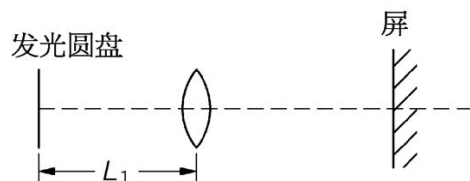


图 20-9

- (a) $d_1 > d_2$ 还是 $d_2 > d_1$?
- (b) 在第二种情况下, 为了成像, 屏幕必须移向还是移离透镜?
- (c) 求透镜的焦距 f 。

20.22 某束光会聚于一点 P , 如图20-10所示。要在给定的一轴点 Q 处插入一单独反射面以使光重新会聚于新的点 P' 。求所需反射面的形状。记 $\overline{QP'} = D$, $\overline{QP} = d$ 。注意考虑两种情况:

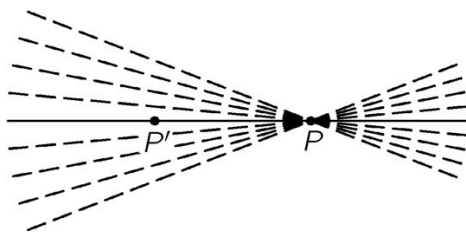


图 20-10

- (a) 在光线通过 P 之前, 反射面拦截到光线。
- (b) 在光线通过 P 之后, 反射面拦截到光线。

20.23 (a) 参照图20-11, 建立焦距 f 的抛物线方程

$$y = \frac{x^2}{4f}。$$

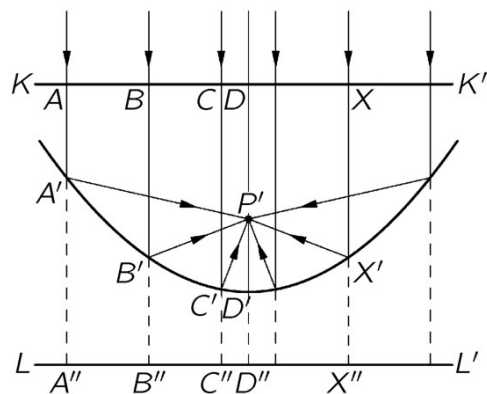


图 20-11

- (b) 一桶密度为 ρ 的流体绕竖直轴以角速度 ω 匀速转动。证明：液体的上表面是抛物线形状，并求此抛物线的焦距 f 。

21 电磁辐射：干涉

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第28、29章。

21.1 用几何方法解释下面两个复数问题，并证实每种情况 A 的模表达式。

(a)

$$A = r e^{i\theta/2} + r e^{-i\theta/2}$$
$$|A| = 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(b)

$$A = \sum_{n=0}^N r e^{in\theta}$$
$$|A| = r \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)}.$$

21.2 电荷 q 以角速度 ω 作半径为 a 的圆周运动。

(a) 计算距离电荷距离 R （很大），与圆的轴线成 θ 角处的电场 $\mathbf{E}(t)$ 。

(b) 求在圆平面内（ $\theta=0$ ）和圆的轴线上（ $\theta=\pi/2$ ）且距离电荷 R （很大）处的辐射强度 $I(\theta)$ 。

假定 $\omega a \ll c$, $a \ll R$ 。

21.3 电磁波在单位面积上产生的功率正比于均方电场强度。

- (a) 一振荡电荷的总辐射功率是 P_{total} , 问总辐射功率中有多大部分落于垂直于矢径 R 的单位面积上? 矢径 R 与振荡轴成 θ 角。
- (b) 如图21-1所示, 一竖直取向的偶极子悬挂于宇宙线无线电探空气球上, 气球高度为25km, 与接收机的水平距离为25km。若发射机的总功率为0.5W, 以 Wm^{-2} 为单位, 计算接收机的功率密度 P 。

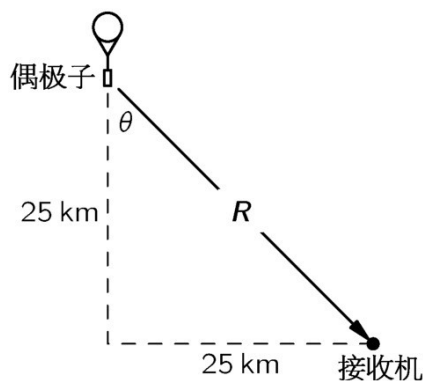


图 21-1

- ### 21.4 两竖直天线如图21-2所示放置。两天线被同相地激励, 问图中所示各方向观测到的辐射强度应是多少? 已知单独激励其中一根天线时, 在所有水平方向上辐射强度为 I_0 , 激励另一根天线时, 在所有水平方向上辐射强度为 $2I_0$ 。

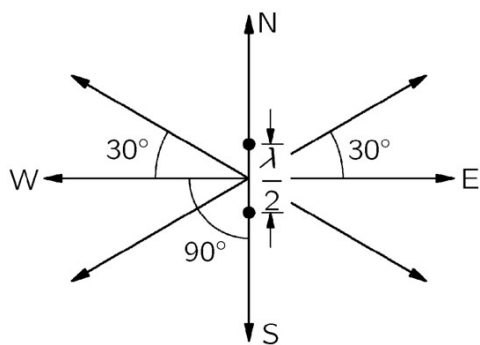


图 21-2

21.5 四个相同的偶极辐射体相互平行排列；间距相等，为 2.50cm 。其受激频率是 $3.00 \times 10^9 \text{ Hz}$ ，相位调制如下：从一端开始，每个偶极子的相位落后前者 90° 。求在偶极子的赤道面（垂直于偶极子的轴）内，远离偶极子处的辐射强度图样。并在图21-3所示的极坐标中画出这个函数的草图。这样的图被称作天线系统的辐射图 或叶瓣图。

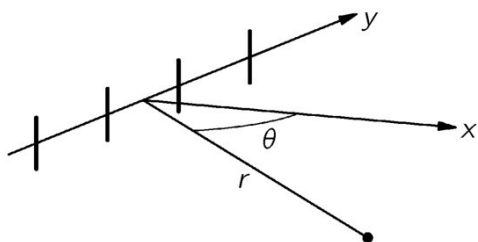


图 21-3

21.6 两个平行的偶极子相隔间距 $d = \lambda / 2$ ，以相同的频率和振幅振动（图21-4）。

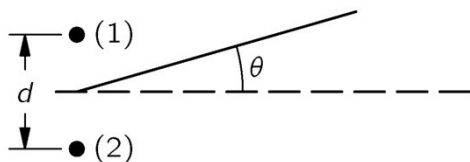


图 21-4

- (a) 若振子同相位，求赤道面内的 $I = I(\theta)$ (叶瓣图)，在极坐标中画出草图。
- (b) 为了使 $\theta = 210^\circ$ 处的观测者观测到最大的信号，振子2必须落后于振子1多少周期？当 θ 取何值时，观测者收不到信号？
- (c) 画出叶瓣图。

21.7 四个竖直的偶极子放于如图21-5所示的边长为 a 和 b 的水平矩形的顶角上。如果它们以同相位被激励，辐射波长为 λ ，为了在 $\theta = 30^\circ$ 的方向上远离电荷的地方产生最大强度， a 、 b 可取的最小值 (>0) 是多少？

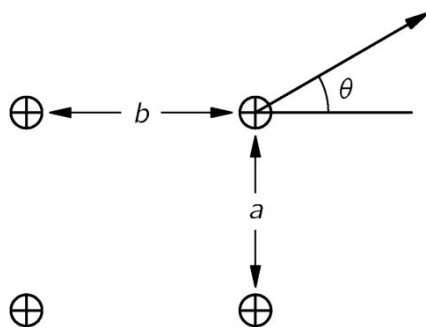


图 21-5

21.8 在 $t=0$ 时刻，两相同电荷 q 都通过原点，观测者距离电荷距离为 R 。一个电荷沿 z 轴运动： $z(t) = d \sin \omega t$ ；另一电荷沿 x 轴运动： $x(t) = d \sin \omega t$ 。在以下两点，电场大小 $E(t)$ ：

$$(a) \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad y = 0, \quad z = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$(b) \quad x = 0, \quad y = R, \quad z = 0。$$

假设 $R \gg \frac{c}{\omega}$, $\omega d \ll c$ 。

21.9 一位测试辐射图的野外工程师，以 120 mi h^{-1} 的地速作低空飞行。飞行轨迹是半径为 2.0 mi 的圆，圆心是南北线竖直放置的偶极发射天线的中点。对于测试频率，两天线相隔半个波长。正常情况下，操作员让两天线同相位运行。然而，天线操作员打算对野外工程师开个玩笑——他以某方式改变两天线的相位关系，使得工程师观测不到辐射强度的变化。当工程师在天线的正东方时，天线操作者开始调试相位关系，问工程师位于天线的东偏北 θ° 时，操作员改变相位的速率 $\frac{d\alpha}{dt}$ 是多少？

21.10 如图21-6所示，两个电偶极子 A 和 B 相距半个波长。两偶极子相互垂直，且都垂直于两者的连线。它们以相同的频率和相位被激励，偶极子 B 的振幅是 A 的2倍。求图示的 C 、 D 、 E 方向上，远离偶极子处的辐射强度 I 和 E 矢量的方向。

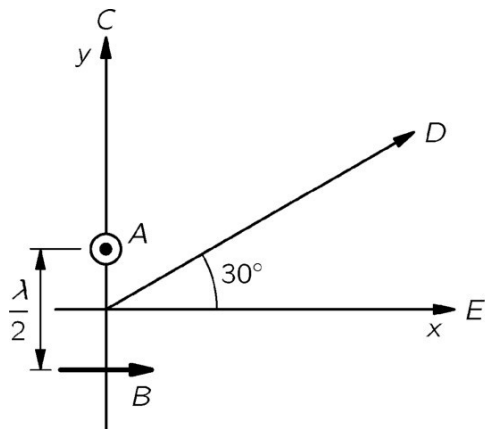


图 21-6

21.11 N 个振荡偶极子如图21-7所示等间距排成两排。 A 排中的偶极子以相同的相位被激励， B 排中的偶极子都落后于 A 排偶极子 90° 。画出赤道面内远离阵列处的辐射图。



图 21-7

21.12 长度为 L 的长、直导线中，导电电子都沿着导线作角频率 ω ，小振幅 a 的振荡。求与导线成角的远距离 R ($R \gg L$) 处的电场强度 $E(t)$ 。

22 电磁辐射：衍射

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第30章。

22.1 n 个偶极辐射体等间距排成一行，每个辐射体长 a ，相互间隔为 d ，如图22-1所示。每个偶极辐射体以相同的振幅 A ，频率 ω 沿直线方向振荡，相继有以相移 α 。每个偶极辐射体都由很多原子偶极子组成。证明：在 θ 角方向远离陈列处的衍射图由下式表示：

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2} \frac{\sin^2(n\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)},$$

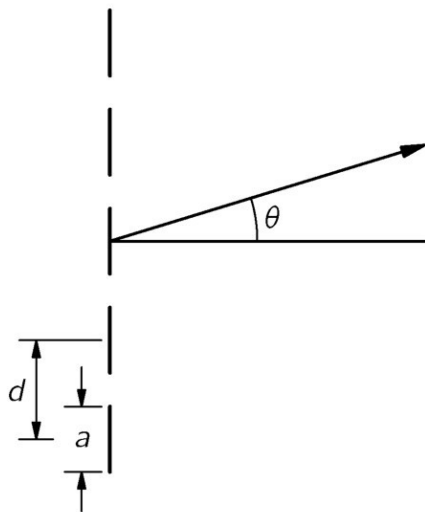


图 22-1

其中

$$\phi = \alpha + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta,$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta.$$

I_0 是在 θ 角方向上单个偶极子的强度。

22.2 某光谱线的波长是 $5500\text{\AA}$ ，宽度 $10\text{\AA}$ 。求此原子振荡器的 Q 值。

22.3 在什么条件下，被照亮的细缝会投射出其“几何”阴影？（即衍射效应可以忽略。）

22.4 一辆有两盏普通前灯（可看作点光源）的汽车沿直路从远处驶来。车的两前灯相距 120cm 。

（a）当观察者刚刚可以确定自己看到的是两盏灯而非一盏时，车距离观察者的距离 d 是多少？假设观察者的虹膜孔径是 0.5cm ，光的有效波长是 $5500\text{\AA}$ 。

（b）光是“白”色的（各波长光的混合）这一事实，使得分辨两个光源更困难了还是更简单了？

22.5 钠的D线的波长分别为 $5889.95\text{\AA}$ 和 $5895.92\text{\AA}$ 。为了分辨出这两条谱线，每毫米600条线的光栅长度 d 需要多大？

22.6 发射单一波长 λ 的点光源 L 位于理想的平面镜上方小距离 d 处。如图22-2所示，一屏立于平面镜的一端，距离 L 为 D 。 $D \gg d$ 。求屏上的相对光强 $I(z)/I_0$ 关于 z 的函数关系。

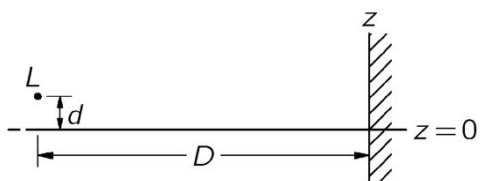


图 22-2

（注意：平面镜会使反射光的相位改变 180° 。）

22.7 波长为 λ 的平行光从左方垂直地投射到屏上的圆孔。在圆孔轴上、圆孔右方 $z=10\lambda$ 处的点对光强进行观测。

（a）为了在观测点产生最大的光强，圆孔半径 r 应为多少？

（b）如果把屏撤走，光强将减弱，求此时的光强与原光强之比 $I/I_{\max}$ 。

22.8 （a）一屏上有两个宽度 $a=6\text{cm}$ 的平行细缝，两缝间隔 $d=12\text{cm}$ ，如图22-3所示。波长 $\lambda=3\text{cm}$ 的微波辐射照射在屏上。计算透过屏的衍射图 $I(\theta)/I_{\max}$ 。

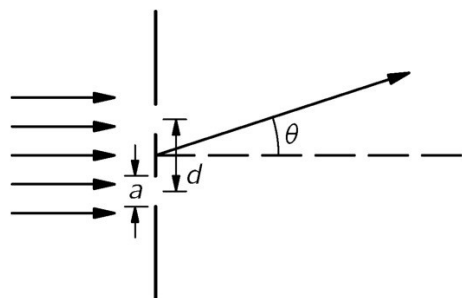


图 22-3

(b) 有多少级主极大？分别对应的 θ 值是多少？

(c) 求主极大位置的 $I(\theta)/I_{\max}$ 。

22.9 利用摄谱仪对谱线的波长进行测量，测量精度可达 $0.001\text{\AA}$ ；而摄谱仪的分辨率只有 $0.010\text{\AA}$ 。这是否违反了物理学基本定律？解释之。

22.10 法布里-珀罗干涉仪由一对相互平行、相距为 D 的非常光滑的平坦表面组成。表面镀有薄膜以反射和投射光——垂直投射在薄膜上的光强，被反射的部分为 R^2 ，被投射的部分为 T^2 。如图22-4所示，光强为 I_0 、波长为 λ 的光从左方入射到一个平面上。一部分光直接透过系统，而另有一些光被第二个表面反射，再被第一个表面反射后，从第二个表面透射出去。总体来说，透射出系统的光束由经过0、2、4、6……次反射后再透射出系统的光合成的。问相对透射光强 I_t/I_0 如何依赖于 D 、 λ 、 R 和 T ？

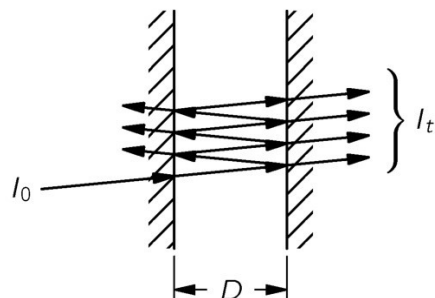


图 22-4

22.11 常见的一种光栅摄谱仪的结果如图22-5所示。从光源 L 发出的光通过狭缝 S ，再通过一准直透镜（或镜子） C_1 而成为平行光（这样光投射在光栅上如同从无限远处来的平面波）。然后，这一平行光被光栅 G 衍射；被衍射后的光（在一定的角度范围内向前传播）射在另一透镜 C_2 上，并被聚焦于平面 P 上。在平面 P 上，光谱呈现带状，在不同的位置也许被狭窄的光谱线穿过。记狭缝的长度和宽度分别为 h 和 w ， C_1 和 C_2 的焦距分别为 F_1 和 F_2 ，光栅法线和 C_1 、 C_2 轴线的夹角为 θ_i 和 θ_d ，光栅上每毫米的线条数为 N 。

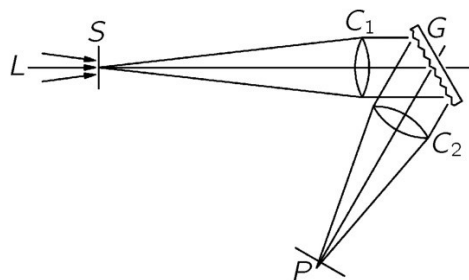


图 22-5

(a) 求平面 P 上出现的光谱带的宽度 h' 。

- (b) 在平面 P 上, 什么波长 λ_m 出现在 C_2 的轴上?
- (c) 波长差为 $1.00\text{\AA}$ 的两条光谱线在 P 处的焦平面上相距多远 D ? 这个量经常被称为仪器的色散 (dispersion)。
- (d) 如果狭缝宽度 w 远大于准直透镜的分辨率 $1.22\lambda F_1/A_1$, 其中 A_1 是准直透镜的孔径, 则平面 P 上光谱线的宽度 w' 是多少?

22.12 威尔逊山天文台的150ft塔式太阳望远镜上的摄谱仪是利特罗型的, 如图22-6所示。在这个装置中, 有一个透镜兼作准直透镜和摄谱透镜, 且 $\theta_i = -\theta_d$ 。光谱在狭缝旁的狭长地带形成。仪器的焦距是 $F = 23\text{m}$, 光栅的刻画面积是 $15\text{cm} \times 25\text{cm}$, 每毫米有600条线。

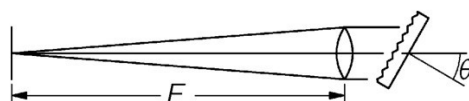


图 22-6

- (a) 光栅的倾斜角 θ 取何值时, 才能使中性铁 $\lambda = 5\,250.218\text{\AA}$ 的第五级谱线和入射狭缝符合一致?
- (b) 在 $3\,600 \sim 7\,000\text{\AA}$ 范围内, 还有什么谱线和入射狭缝符合一致?
- (c) 设计一个简单的方法来消除不需要的光谱线, 只留下第五级。

(d) 在 $\lambda = 5\,250\text{\AA}$ 第五级，仪器的色散是多少？

(e) 对于 $\lambda = 5\,250\text{\AA}$ 第五级，理论上仪器可以分辨的最小值 $\Delta\lambda$ 是多少？

22.13 当衍射光栅的槽的形状使大部分入射辐射被投向一个特定方向时，光栅被说成是在此方向上闪耀。假定能够制造成型图22-7所示的每个槽面倾角是 θ_b 的完美锯齿形槽。

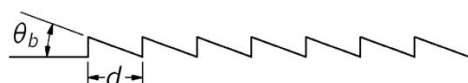


图 22-7

(a) 运用衍射是物质中振子发射的辐射（这些振子以与入射辐射相同的相位被激励）这一概念，推导如果 $\theta_i = 0$ ，在什么方向上衍射光栅的强度最大？

(b) 估计闪耀涉及的大致角范围。

23 电磁辐射：折射，色散，吸收

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第31章。

23.1 红光还是蓝光通过棱镜时偏转更大，为什么？

23.2 对于波长为 1.56×10^{-8} cm的X光，铝的折射率 n 是多少？假定铝中全部电子的固有频率都远小于X光的频率。

23.3 电离层对频率100MHz的无线电波的折射率 $n=0.90$ 。求电离层每立方厘米中的电子数 ρ 。

23.4 在折射率为 n 的介质中传播的光的电场为：

$$E = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)}。$$

(a) 证明：如果 $n = n' - in''$ ，则 $E = E_0 e^{-n''\omega z} e^{i\omega(t - n'z/c)}$ 。

(b) 利用方程

$$n - 1 = \frac{N q_e^2}{2 \epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

求频率严格等于原子的固有频率 ω_0 的辐射束的强度 I 的衰减率。

23.5 在《费曼物理学讲义（第1卷）》31-5部分，通过推导得到：波的瞬时能流密度是 $S = \epsilon_0 c E^2 \text{ W m}^{-2}$ 。

- (a) 求以振幅 x_0 ，角频率 ω 振荡的电子的能量辐射总功率 P 。
- (b) 比较每周辐射的能量和储存的能量 $m \omega_0 x_0^2 / 2$ ，并求阻尼常数 γ_R 。此过程被称作辐射阻尼。
- (c) 受激原子辐射出特定波长的光。如果谱线宽度完全来源于辐射阻尼，理论计算谱线的预期宽度 $\Delta\lambda$ 。（原子可看作是具有很大的 Q 值得微小阻尼振荡器。）

24 电磁辐射：辐射阻尼，散射

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第32章。

24.1 自由电子对光的散射如何依赖于波长？

24.2 一束光穿过一区域，该区域单位体积有 N 个散射体，对于光，每个散射体的散射截面是 σ 。证明：光束中剩余的光强关于通过距离 x 的函数关系是：

$$I = I_0 e^{-N\sigma x}。$$

24.3 利用散射截面公式^[2]

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

和气体折射率公式^[3]，证明： $N\sigma$ 可写成：

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2}{N} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4，$$

其中 N 是气体单位体积所含原子数。（这是最早的估算阿伏伽德罗常量的方法之一：利用蓝天的散射。）

24.4 太阳的内日冕（称作K日冕）是被自由电子散射的太阳光。在与太阳边缘相距一个太阳半径处，K日冕的视亮度是太阳表面亮度的 10^{-8} 倍。估计太阳附近每立方厘米中的自由电子数目 N_e 。

24.5 太阳穿过大气层时，在下列情况下，蓝光（ $\lambda = 4500\text{\AA}$ ）将减弱的百分比分别是多少？

（a）太阳在天顶时；

（b）太阳在地平线上 10° 时。

24.6 放置在雷达天线所发射的电磁波束中的一小段直铜导线会“散射”一部分电磁波。电磁波的电场会促使导线中的电子运动，此运动会引起“散射”波的辐射。对于一小段导线（长度远小于波长 λ ），我们可以假定：导线中，电子的平均位移沿铜线的轴方向，且大小正比于平行铜线的电场方向。即：若导线中有 N 个电子，电子平均瞬时位移是 d ，则 $d = \chi E_{\parallel}$ ，其中 $E_{\parallel}$ 是平行于铜线的电场分量。求（用 χ 和 N 表示）：

（a）若入射电磁波振幅为 E_0 ，频率为 ω ，求导线的最大散射截面 $\sigma_{\max}$ 。

（b）散射截面 σ 如何依赖于导线的取向 θ ？

24.7 一种新的发射被发现（被称作X射线，因为它们是新发现的），人们认为它也许像光一样是横波。已经观测到，此射线可以被物质中的电子散射。你如何证明这种射线是横波，并且可以被极化？

24.8 证明：如果带电振子的运动方程可以表述为：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \left(\frac{2 e^2}{3 c^3} \right) \frac{d^3 x}{dt^3} = F(t),$$

则三阶导数项能正确地描述在任何频率下辐射所产生的能量损失率。

提示：假定 $F(t) = A \cos \omega t$ 。

24.9 星际空间中存在由碳、冰和少量其他元素组成的尘埃云。估计当尘埃云单位面积达到多少质量时，人们对云后的星星的视觉感将模糊100倍（即5.0星等）。注意：尘埃可以通过简单的吸收和散射来移除星光。

25 电磁辐射：偏振^[4]

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第33章。

- 25.1** 光（如初升的太阳或月亮发出的光）被湖面斜向反射，其电场在竖直平面还是水平面内发生偏振？
- 25.2** 照相机常常利用黄色滤光片或偏振滤光片，以使云能在天空背景中显现。解释这两种情况的物理原理。
- 25.3** 两个偏振片，光轴相交成直角放置。然后，第三个偏振片插在它们之间，光轴与第一个偏振片的光轴成 θ 角。如果光强 I_0 的非偏振光垂直入射到上述偏振片组合上，透射光强 I_t 是多少？假定偏振片是理想的。
- 25.4** 对以恒定速率在圆形轨道上运动的电子所发射的辐射的强度和偏振进行讨论，特别注意圆轴线和圆平面上的点。
- 25.5** 一束平面偏振光投射在一偏振片上。若偏振片的光轴与光的偏振轴平行，透射强度与原强度之比是 α^2 ；若偏振片的光轴与光的偏振轴垂直，透射强度与原强度之比是 ε^2 。（如果偏振片是理想的，则 $\alpha^2=1$ ， $\varepsilon^2=0$ 。）强度为 I_0 的非偏振光垂直地

投射到光轴间夹角为 θ 的一对偏振片上。求透射光与入射光的光强之比 I_t/I_0 。（忽略反射效应。）

25.6 一个正在度假的加州理工学院大一学生正在与女朋友散步。当他看到地平线上 10° 的月亮被平静湖面反射时，回想起《费曼物理学讲义（第1卷）》第33章，试图计算湖中月影应该多亮（与月亮本身相比）。他假定月亮发射出的光近似是非偏振的。他将得到什么结果？证明：对于擦地入射的光，反射光与入射光光强之比 I_R/I_m 接近100%。

25.7 证明：布鲁斯特角（对于这样的入射角 i ，反射光是线偏振的）满足关系式 $\tan i = n$ ， n 为折射率。

25.8 如果光垂直入射到钻石（折射率 $n=2.40$ ）的平整侧面上。问：

（a）入射光中多大比例 f 的光被反射？

（b）钻石的布鲁斯特角 β 是多少？

25.9 有一平面偏振光，穿过一系列偏振片。偏振片共 n 个，每个偏振片相对于前一个偏振片顺时针转过 θ/n 角度；第一个偏振片相对于入射光的初始偏振面顺时针转过 θ/n 。

（a）如果初始光强是 I_0 ，求通过这些偏振片后的光强 I_t 。

(b) 求出射光的偏振方向。

25.10 线偏振光依次通过一 $1/4$ 波片和一偏振片。偏振方向和 $1/4$ 波片的光轴成 θ 角。当偏振片旋转时, 观测到透射光强的最大值 $I_{\max}$ 和最小值 $I_{\min}$ 。当 $\theta < 45^\circ$ 时, 求 $I_{\max}/I_{\min}$ 。假定垂直入射。

25.11 将一块折射率为 $n_o=1.553$ (寻常折射率) 和 $n_e=1.544$ (非常折射率) 的石英晶体打磨成厚度为 0.12mm 的薄片, 其光轴平行于薄片表面。将薄片插入两个相互垂直的偏振片之间, 薄片光轴与偏振片成 45° , 在可见光范围 ($4\,000\sim 7\,500\text{\AA}$) 内, 什么波长穿透上述系统后光强最大?

25.12 一石英晶体, 对于波长为 600nm 的光, 其寻常折射率和非常折射率分别为 $n_o=1.544$ 和 $n_e=1.553$ 。如果将石英晶体沿平行于其光轴的方向进行切割, 当光垂直入射并透过晶片时, 人们可以利用寻常光和非常光速率上的最大差异。

(a) 对于以上波长的光, 为了使寻常光和非常光的相对相位改变 90° , 晶体厚度 d 应为多少?

(b) 假定对于波长为 400nm 的光, 晶体的寻常折射率和非常折射率分别为 $n_o=1.557$ 和 $n_e=1.567$ 。将晶体切割成 $1/4$ 波片 (对于波长 600nm 的光而言)。若进入晶体前, 波长为 400nm 的光为线偏振光, 详细讨论透射光 E 的偏振状态。

25.13 给你一个抛光的黑曜石片，并要求你测量这种材料的折射率。你如何进行？你预期得到怎样的精度？

26 电磁辐射：相对论效应

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第34章。

- 26.1** 半径为 A 的圆盘在水平面上无滑动地滚动。求距离圆盘中心 $R \ll A$ 处的点的轨迹方程（以 A ， R 和圆盘转过的角度 θ 表示）。设 x 是以圆盘的中心为原点所测量的纵坐标， z 为横坐标。证明：

$$z = A\theta + R \sin\theta ,$$

$$x = R \cos\theta .$$

- 26.2** 讨论同步辐射和韧致辐射的偏振性质。
- 26.3** 如果你要对一个天体，如蟹状星云所发射的电磁辐射进行测量，你如何就同步辐射和韧致辐射进行区分？
- 26.4** 假设你沿着你的坐标系的 x 轴方向对蟹状星云的一小块区域进行观测，观测到 z 方向偏振的同步辐射。问磁场的方向，并讨论。
- 26.5** 一电子在均匀磁场中作高速（相对论效应不可忽略）圆周运动，就以下情况分别画出观察者所观察到的电场强度关于时间的函数草图（至少两周）。

(a) 观察者沿磁场方向进行观测。

(b) 观察者沿与磁场方向垂直的方向进行观测。

26.6 一给定光束，施加于黑体的辐射压力比施加于镜面的更大吗？为什么？

26.7 布拉德利于1728年发现光行差现象：由于地球在其轨道上的运动，恒星在天空中呈现移动。望远镜的方向必须“向前”移的最大角度（对于黄极附近的恒星）为 $20.5''$ 。如果光速已知为 $3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ，由观测结果能推导出的地球半径 R 为多少？

26.8 参照《费曼物理学讲义（第1卷）》第34章34-8部分，利用洛伦兹变换推导光行差表达式 $\sin\theta = v/c$ 。

26.9 以速度 $0.5c$ 行驶的飞船中的人对与其行驶方向成 90° 的方向上的一颗恒星进行观测。光谱中的一条线的频率为 ν_0 。现在他调转方向，以相同的速率沿原路返回。

(a) 求现在他看恒星的角度 θ_1 。

(b) 谱线频率 ν_1 是多少？

26.10 一空间探测器正沿径向方向远离观测者运动。观测者把频率为 ν_0 的雷达波束瞄向探测器射出，并测得经反射后返回的波束

频率为 ν 。求空间探测器相对于观测者的速率 v 。（假定在探测器的静止坐标系中，返回波束的频率较原波束不变。）

26.11 来自太阳赤道直径上相对两端的辐射谱线图显示， H_α 的6564.7Å线有0.1Å的偏离。求太阳赤道上的圆周速率 v 。

26.12 在某恒星的光谱中，观测到钠D线（实验室中测到波长为589.0nm）移至588.0nm。求相对于观测者，恒星的相对速度 v 。（在此情况下，非相对论多普勒公式是否足够精确？）

26.13 加州理工学院的天文学家施密特对来自遥远类星体的某些谱线的波长进行测量，发现 $\Delta\lambda \approx 2\lambda$ 的红移。据此推测该类星体的后退速率 v 。

26.14 在习题26.1中，如果 $z=ct$ ，求该点的横向加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 。这是为了计算沿半径为 R 的圆运动的粒子的辐射所需要的推迟加速度。

（a）以可观测量 R ， v （运动轨迹上粒子的速率）和 x （观测时刻粒子的视横向速率）表示结果。

（b）求粒子在圆轨道上朝向和远离观测者运动时所观测到的辐射强度最大值和最小值之比 $I_{\max}/I_{\min}$ 。

- 26.15** 如图26-1所示，初始静止于 $x=0, z=0$ 的电子在 $t > 0$ 时被施加一加速度 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{a}$ 在 xz 平面内，与 z 轴夹角为 θ 。计算（相对论性地）点 $z=R_0$ 处的电场 $\mathbf{E}(t)$ ，其中 R_0 是一“大”距离。以 $\mathbf{a}$ ， θ 和 $\beta=v/c$ 来表示结果，其中 v 是电子的真实速率。

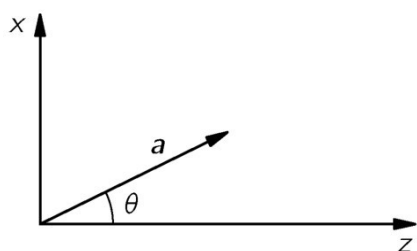


图 26-1

- 26.16** 面积为 A 、厚度为 d 的圆盘被波长为 λ 、光强为 I_0 的垂直入射光照亮。对于下述情况，分别计算由于辐射压而产生的力 F 。
- (a) 圆盘既不透明，也不反射。
 - (b) 圆盘折射率 $n=1.5$ 。
 - (c) 圆盘具有复折射率 $n=1-in''$ 。（ n'' 是实数。）
- 26.17** 半径为30m的气球外表面被制作成几乎完全反射，这可以避免太阳光的加热作用。当气球距离太阳1.0AU时，由于太阳光的反射而产生的力 F 是多少？
- 26.18** 在实现太空推力的一个设想方案中，由高反射率塑料薄膜制作的薄片被用作辐射压力“帆”。可以制备出100m×100m的平面方

板，飞船的质量为1 000kg。如果初始时飞船绕太阳作半径为1AU的圆周运动。

(a) 如何使用“帆”来增加轨道的平均半径？

(b) 求 $\frac{dR}{dt}$ 。

26.19 假定行星际空间充满了平均密度为 ρ 、形状大致为半径 R 的球形的“尘埃”小颗粒。

(a) 证明：对于任意大小的尘埃颗粒，指向太阳的引力与远离太阳的辐射压力之比与颗粒到太阳的距离无关。

(b) 已知在地球轨道上太阳辐射强度大致为 $1\,374\text{W m}^{-2}$ ，假定吸收截面是 πR^2 ，求辐射压力和引力平衡时的 R 。

(c) 考虑《费曼物理学讲义（第1卷）》第32章的结果，尘埃颗粒的有效截面可以明显比 πR^2 大吗？

27 量子行为：波，粒子以及光子

参阅《费曼物理系讲义（第1卷）》第37、38章。

27.1 晶胞大小相同、形状一样，但晶胞内原子排列不同的两块晶体的X射线衍射图样有什么区别？试定性说明。

27.2 动量为 p_0 的电子束穿过宽度为 W 的细缝。穿过细缝后，电子束的角宽展 θ 近似是多少？

27.3 (a) 热中子的动能为 $T = \frac{1}{40} \text{ eV}$ ，求这种中子的波长 λ 。

(b) 具有如下动能的电子的波长分别是多少？

(1) 1keV。

(2) 1MeV。

(c) 质量为50g，运行速率为 $1\,000 \text{ m s}^{-1}$ 的物体对应的波长是多少？

(d) 1MeV的X射线和总能量 $E = 1\text{MeV}$ 的电子，哪个的波长更短？

- 27.4** 在一光电池中，波长 $4\,100\text{\AA}$ 的光可以产生的电子最大动能为 1.0eV 。求这个光电池能响应的光的最大波长 λ_{max} 。
- 27.5** 氢原子基态电子的能量（动能和势能之和）是 -13.6eV 。如果一自由电子被一质子俘获而形成一基态氢原子，则
- （a）在此过程中发射出的光子波长 λ 是多少？
- （b）发射出的光处于光谱的可见光区域，红外光区域还是紫外光区域？
- 27.6** 一 μ^- 介子和一质子可以形成一（类氢）“介原子”。估计此原子的波尔半径 R ，以 $\text{\AA}$ 为单位。（ $m_{\mu^-} = 206\,m_e$ ）
- 27.7** 一谐振子的能量由 $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta x^2}{2}$ 决定，请估计此谐振子最小的可能能量。根据不确定性原理，动量 p 的减小只能以平均位移的增加为代价来实现，因此最小能量条件意味着这两种的一特定组合。最小能量 E_{min} 应为多少？
- 27.8** 电子从激发态向基态跃迁，辐射出的光谱线（ $\lambda = 5\,000\text{\AA}$ ）被观测到有 $0.01\text{\AA}$ 的展宽。平均而言，原子在激发态的存在时间 τ 有多久？
- 27.9** 观测发现，自由中子可以衰变为质子和电子。因此描述中子的一个可以想见的模型是：中子是电子-质子束缚态。如果中子

的半径被估计为 $1 \times 10^{-15} \text{ m}$ ，求在此模型中束缚电子的动能 T （以MeV为单位）的近似值。你对这个模型有何想法？

27.10 由于不确定性原理，在小时间间隔内，粒子的静能量是不确定的。例如，在原子核内，质子可以发射一个（虚） π^0 介子（ $m_{\pi^0} = 270 m_e$ ），此粒子在很短的时间内又被重新吸收。通过考虑 π^0 介子被吸收前所能穿越的距离（原子核内），来估算原子核的半径 R 。确定你的论证是自洽的。

27.11 《费曼物理学讲义（第1卷）》32-3章节讨论了一个激发态原子如何以一定的速率辐射掉其能量，这有两方面的效果：限定了激发态“寿命”；对于相应谱线，引入了一有限的展宽。证明：这两个效应〔可被解释为光子测量中能量和时间（或动量和位置）的不确定性〕和不确定性原理一致。

27.12 (a) 利用量纲分析对“波尔半径”进行检测。

(b) 利用不确定性原理证明：把氢原子中的电子从与其相伴的质子移除所需的能量是几个电子伏的量级。

27.13 (a) 波长为 $500 \text{ \AA}$ 的X射线被处于基态的氢原子吸收。求发射电子的动能 T ，以电子伏为单位。

(b) 能使未激发的氢原子电离的X射线的最小频率 $f_{\min}$ 是多少？

27.14 一个果农发现把两棵树排成一行很容易，但把三棵树排成一行就难些了。然而，经过切实、仔细的测量，果农把64棵树排列在东-西，南-北走向的正方形格点网上，共8行8列，每个基本单元格是6.0m×6.0m的正方形。果农站在果园的一个角上，他望见共有3条线，它们每条线上有8棵树；2条线，它们每条线上有4棵树；4条线，它们每条线上有3棵树（从他站立处的树开始计数）。

(a) 以上9条线中，相邻两线的最小夹角 $\theta_{\min}$ 是多少？

(b) 以上9条线中，相邻两棵树的距离 $d_{\max}$ 是多少？

(c) 在以6.0m×6.0m的正方形为基本单元格的“无限果园”里，从空中俯视，上述的9条线中的每一条线都显现为一组平行线（每条线由树组成）中的一条。对于任意一组平行线，相邻两线间的距离可以看作是“栅线间距”。求从南面算起到45°线止，每条线所在组的栅线间距 d 。

27.15 NaCl晶体的Na原子和Cl原子交替位于立方格子的顶角上，Na原子和Cl原子的最近距离是 $l = 2.82\text{\AA}$ 。

(a) 求NaCl晶体最大的5个晶面间距离 d 。

(b) 使用波长为 $1.50\text{\AA}$ 的X射线，对于这些晶面，在什么角度 θ 上发生第一级布拉格反射？

27.16 在氢原子的紫外光谱中，可以观测到一系列线，称为莱曼系（Lyman series）。莱曼系中波长最长的3条线的波长分别为： $1\,216\text{\AA}$ ， $1\,026\text{\AA}$ ， $973\text{\AA}$ 。仅凭借这些信息，以及里兹组合原则（Ritz combination principle），预测氢原子光谱中其他3条线的波长 λ 。

注：这3条线中，有两条位于可见光区域，属于巴耳末系（Balmer series）；另一条位于红外区域，是帕邢系（Paschen series）中的第一条线。

27.17 如图27-1所示，波长为 $\lambda = 3\text{\AA}$ 的光子被起初处于静止状态的自由电子以 90° 角散射。求反冲电子的动能 T 。

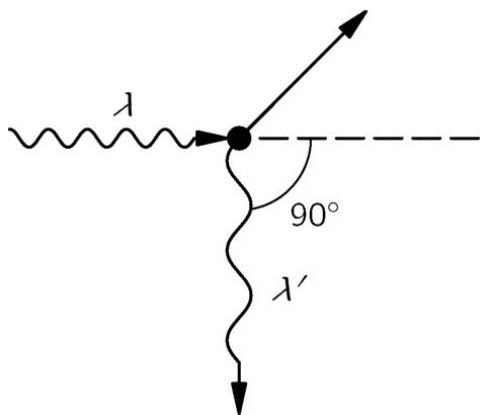


图 27-1

27.18 一“单色”中子束由“热”为 $1/40\text{eV}$ 的中子组成，中子束打在一晶体上。晶体中与表面平行的晶面间距离 $d = 1.2\text{\AA}$ 。

（a）多大角 θ 时，发生布拉格反射？

(b) 在某一能量 E_c 之下，将不再发生衍射，求这一临界能量 E_c 。

27.19 考虑对于布拉格面间距 $d=1.2\text{\AA}$ 的晶体的电子衍射。衍射装置允许使用如下能量的电子束：

$$(I) E_k=10.0\text{keV},$$

$$(II) E_k=0.5\text{MeV}.$$

(a) 分别在什么角度 θ ，对于以上两种情况，出现第一级衍射极大值？

(b) 如果你将要用此装置精确测定晶面间距 d ，应使用哪束？为什么？

27.20 一原子发射光子，从激发态 E_1 返回基态 E_0 。原子发射该光子所需的典型时间为 10^{-8}s 。

(a) 如果发射光子的波长为 $5\,000\text{\AA}$ ，求表示这个光子的波列的半宽 $\Delta\lambda$ 。

(b) 使用与光传播方向垂直的优质光栅可以对光子的波长进行测定。如果光栅间距使得在 45° 角发生第一级衍射极大，为了测量出(a)中所要求的半宽 $\Delta\lambda$ ，光栅的宽度 w 必须是多少（以米为单位）？

(c) 求原子激发态能量和基态能量之差 $E_1 - E_0$ ，以eV为单位。

27.21 在一个简单、非相对论性的氢原子模型中，假设：

(1) 电子和质子之间的力由以下表达式决定：

$$\mathbf{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{r},$$

其中， $\mathbf{r}$ 是电子和质子间的径向矢量。

(2) 电子在环绕质子的圆轨道上运动，符合以下规则：电子动量和轨道半径之积（角动量）满足

$$pr = n\hbar,$$

其中， $n=1, 2, 3, \dots$ ， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ， h 是普朗克常量。

(a) 计算第 n 轨道的半径以及其上电子的角速度 ω_n 。

(b) 求第 n 轨道上电子的动能 T_n ，势能 U_n 和总能量 E_n 。

(c) 原子中的电子由于从较高能级 n_i 向较低能级 n_f 量子跃迁，释放光子而损失能量。对于这个氢原子模型，氢原子释放的光子的能量 ΔE 有哪些可能值？

28 气体分子动理论

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第39章。

28.1 气体压强 P 如何随 N （单位体积的原子数）和 $\langle v \rangle$ （原子的平均速率）而变化？

28.2 当气体被绝热压缩时， PV^γ 是常值。另一方面，在任何情况下， PV/T 是常值。结合两者，在绝热压缩过程中，推导以下物理量的关系：

（a） P 和 T 。

（b） V 和 T 。

28.3 （a）初始体积都为 V_0 ，初始绝对压强都为 P_0 的两气体样品A和B突然被绝热压缩至原体积的一半。与原压力相比，每个样品最终的压强 P_A 和 P_B 分别为多少？假定 $\gamma_A = 5/3$ （单原子）， $\gamma_B = 7/5$ （双原子）。

（b）求完成上述两个压缩过程所需的功之比 W_A/W_B 。

28.4 如图28-1所示，体积 $V_1 = V_2 = V$ 的两个容器通过一有阀门的小管道相连。初始时，阀门关闭，两个容器都含有单原子气体，压强分别为 P_1 和 P_2 ，温度分别为 T_1 和 T_2 。阀门打开后，总

体系中气体的最终压强 P_f 和温度 T_f 是多少？（忽略体系中的热损失。）

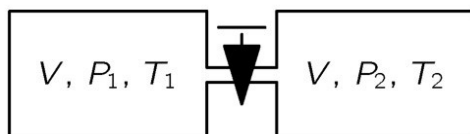


图 28-1

28.5 (a) 想象一高、竖直的气体或液体柱，其密度随高度变化。证明：压强关于高度的函数满足如下微分方程：

$$\frac{dP}{dh} = -\rho(h)g。$$

(b) 对于分子量为 μ 的理想大气，求解上述微分方程。在此情况下，温度是无关于高度 h 的常量。

28.6 带有不漏气、无摩擦活塞的气缸装有 1.0m^3 的单原子气体（ $\gamma=5/3$ ），气体表计压力为1个大气压（ $1.01 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ ）。保持温度不变，缓慢压缩气体，直至气体最终体积只有 0.4m^3 。为了完成上述压缩，必须做的功 W 是多少？

28.7 用一打气筒给自行车轮胎打气，初始时气体压强为 14.7lb in^{-2} ，温度为 20°C ，打完气后，压强指示为 50lb in^{-2} 。如果对于空气， $\gamma=1.40$ ，问气体离开打气筒时的温度 T 是多少？（忽略耗散到打气筒壁上的热损失。）

28.8 一个50L的容器通过一个压力释放阀与一个15L的容器相连，仅当大容器气体压力超过小容器气体压力880mmHg时，压力释放阀才允许气体由大容器流向小容器。如果在17°C时，大容器内气体为1个大气压，小容器被抽空，问当两容器温度都为162°C时，小容器中气体的压强 P 是多少？

28.9 如图28-2所示，体积分别为200cm³和100cm³的两泡由一塞有隔热多空塞的短管相连。多空塞允许两泡的压强趋于相同，而温度可以不同。温度为27°C，系统盛有的氧气压强为760mmHg时，系统被密封。小泡被浸在0°C的冰浴里，大泡放在100°C的蒸汽浴里。系统的最终压强 P 是多少？忽略泡的热膨胀。

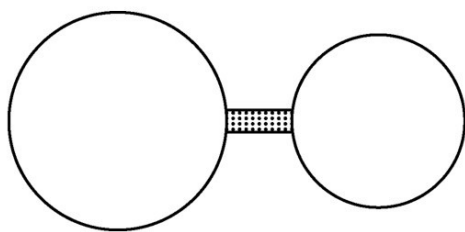


图 28-2

28.10 具有一可活动活塞的非隔热容器内盛有1摩尔气体，气体的初始状态为 P_1 ， V_1 ， $T_1=27^\circ\text{C}$ 。气体被8.31W h的总能量缓慢加热，等压膨胀到新的状态 P_1 ， V_2 ， T_2 。对气体新状态的能量含量和膨胀期间气体所做的功进行估计，并据此求：

(a) T_2 。

(b) V_2/V_1 。

28.11 两个相同的容器，每个容器的一半装有氦气，另一半被抽空。每个容器的两部分被活塞分隔，活塞上有穿过其的小活栓。如图28-3所示。进行如下两个实验。

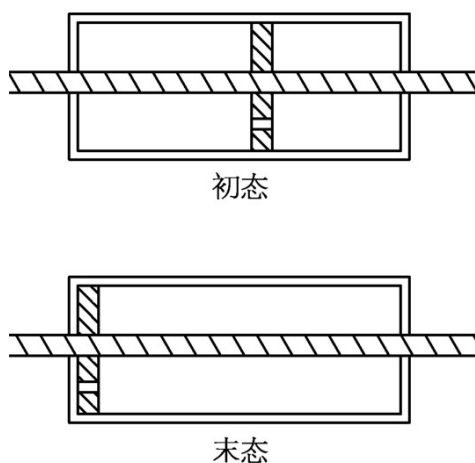


图 28-3

(a) 打开小活栓，气体从容器一端流向另一端，直至达到平衡。缓慢地移动活塞至容器的一端。

(b) 缓慢地移动活塞至容器的被抽空端，然后打开小活栓。

假定氦气初始温度为 T_0 ，压强为 P_0 。定量地比较两个容器里气体的末态 (T_f, P_f) 。

注：对于氦气， $\gamma=5/3$ 。忽略热损失和摩擦。

28.12 符合以下条件的大气被称为绝热大气：气体压强和密度关于高度的函数满足关系式 $P\rho^{-\gamma}=c$ 。

- (a) 证明：这样的大气的温度随高度的增加而线性递减，并求比例系数。温度梯度 $\frac{dT}{dh}$ 被称为绝热直减率（adiabatic lapse rate）。
- (b) 求地球大气的绝热直减率。
- (c) 从能量的角度考虑，论证大气的温度梯度小于（大于）绝热直减率将稳定（不稳定）。

28.13 盛有氩气的气缸装备着质量为 m ，面积为 A ，由弹簧推动的活塞。平衡时，氩气的总压力为 P_0 ，活塞距系统两端都为 L_0 ，如图28-4所示。弹簧（弹性系数为 K ）被压缩了 x_0 （自由长度为 $L_0 + x_0$ ）。如果气体等温压缩，求活塞小振动（ $x \ll L_0$ ）的角频率 ω 。

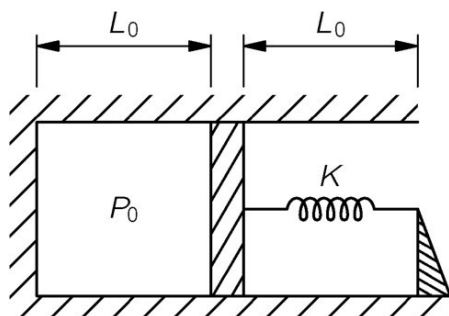
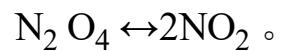


图 28-4

提示：当 $x \ll 1$ 时， $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ 。

28.14 通常温度下，四氧化二氮会部分地分解为二氧化氮，如下：



把0.9g，温度为0℃的液体 N_2O_4 装进体积为 250cm^3 的抽空烧瓶。当温度升高至27℃时，液体全部汽化，压强为960mmHg。求多少比例 f_d 的四氧化二氮已经分解？

29 统计力学原理

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第39、40章。

- 29.1** 在温度为 T 的气体中的质量为 m 的物体的均方根速率 v_{rms} 是多少？
- 29.2** 对于两个不同的温度 T_1 和 T_2 （ $T_2 > T_1$ ），画出麦克斯韦分布 $f(v_x) - v_x$ ， $f(v) - v$ 的草图。
- 29.3** 把某双原子气体的分子看作是刚性哑铃，可以自由转动和移动，但不能振动。在体积不变下，（经典）比热 C_V 是多少？
- 29.4** 物质的定容摩尔热容量 C_V ， m 是指一摩尔物质在保持体积不变的情况下，每升高 1°C 所需要的能量。求下面两种气体的定容摩尔热容量。
- （a）理想单原子气体。
- （b）理想双原子气体。
- 29.5** 在大气压力定律

$$n = n_0 e^{-mgh / kT}$$

中, $\frac{kT}{mg} = \frac{RT}{\mu g} = h_0$ 被称为标高 (scale height)。其中, μ 是分子质量。估算地球大气和太阳大气的标高。已知对于地球大气, $\mu = 29 \text{ g mol}^{-1}$, $T = 300 \text{ K}$; 对于太阳大气, $\mu = 1.5 \text{ g mol}^{-1}$, $T = 5500 \text{ K}$, $g = 2.7 \times 10^2 \text{ m s}^{-2}$ 。

29.6 考虑一根长、封闭圆柱, 圆柱长度为 L , 横截面积为 A , 向上竖立在地球的引力场中。圆柱体内盛满了等温、均匀的双原子气体 (共 N 个分子, 每个分子质量为 m)。求圆柱体两端的压强。

注: 明显地, $P(h=0) - P(h=L) = Nmg/A$ 。

29.7 在恒定引力场中的等温大气被局限在无限高、横截面积均匀 (大小为 A) 的柱体内, 大气两种分子, 一种分子的质量为 m_1 , 另一种分子的质量为 m_2 ($m_2 > m_1$); 两种分子的数目都为 N 。

(a) 求质量为 m_1 的分子的比例 $f_1(h)$ 关于地面 ($h=0$) 以上高度 h 的函数关系。

(b) 求 $f_1(h)$ 的最大值和最小值, 以及相应的 h 。

(c) 你站在地面以上某高度处, 大约 $63.2\% \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ 的质量为 m_2 的分子在你下方。在同样高度处, 在你下方的质量为 m_1 的分子的比例是多少?

29.8 麦克斯韦分布定律的一般形式是

$$\frac{dN}{dv} = A v^2 e^{-bv^2}。$$

这可以转化为 $y = x^2 e^{-x^2}$ 。

(a) 画出区域 $0 \leq x \leq 3.0$ 内的图像，说明 $y = x^2$ 曲线的增长是如何被指数函数抑制的。

(b) 求最大纵坐标。

(c) 你所画的曲线下方的面积在多大程度上接近于

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx。$$

29.9 根据麦克斯韦-玻尔兹曼分布定律，在给定体积内速率为 v ，在 dv 区间的分子比例由以下表达式决定：

$$f(v)dv = A v^2 e^{-mv^2/2kT} dv。$$

从上述分布计算具有动能 E ，在 dE 区间的分子比例 $F(E) dE$ 。

29.10 粒子群包含 N 个粒子，速率分布函数如下：

$$f(v) dv = kv dv \quad (0 < v < V)，$$

$$f(v) dv = 0 \quad (v > V)。$$

(a) 求 k 。

(b) 求平均速率 $\langle v \rangle$ 和均方根速率 v_{rms} 。

29.11 在热平衡的气体中，撞击容器表面的分子中多大比例 f 的分子具有的动能超过

(a) 分子平均动能？

(b) 3倍分子平均动能？

29.12 如图29-1所示，体积相同（ $V_1 = V_2 = V$ ）的两个容器通过细管相连。两容器分别保持温度 T_1 和 T_2 不变。所有的气体分子具有相同的质量 m 。求两容器中气体压强之比关于 T_1 和 T_2 的函数 $P_1/P_2 = f(T_1, T_2)$ 。

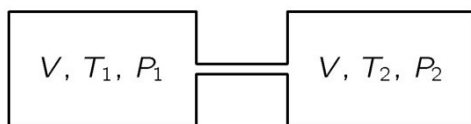


图 29-1

29.13 温度为 T 的火炉内，单位体积含有 n 个质量为 m 的原子，其中一些原子通过面积为 A 的小孔逃出。（孔足够小，火炉内的平衡不被扰动。）

(a) 求每秒速率介于 v 和 $v+dv$ 之间, 通过面积 A 逃出的原子数 dn 。

(b) 求逃逸原子的均方根速率 $v_{\text{rms}}^{(e)}$ 。

(如果不同于火炉内的均方根速率 $v_{\text{rms}}^{(i)}$, 请说明原因。)

29.14 气体放电管中 Na^{23} 蒸汽发射波长 $\lambda=5890\text{\AA}$ 的强黄线。如果蒸汽处于室温, 估计由于热运动引起的多普勒偏移, 黄线的展宽 $\Delta\lambda$ 。

(有用的信息: 对于 Na^{23} , $mc^2 \approx 23 \times 10^9 \text{ eV}$ 。)

29.15 吸收光谱系的可观测度取决于此系中最低能态上的原子数。氢原子莱曼系 (Lyman series) 的最低能态是 -13.6eV , 巴耳末系 (Balmer series) 的最低能态是 -3.4eV 。气体处于什么温度 T 时, 才能使产生巴耳末吸收光谱的原子数等于产生莱曼吸收光谱的原子数乘以 $1/e$ 。这是估计恒星温度的某一种方法的基础。

29.16 氢原子的基态有4个亚态, 它们具有相同或几乎相同的能量。类似, 第一激发态 (能量较基态高 10.2eV) 有16个亚态。在太阳表面 ($T=5700\text{K}$), 处于基态与第一激发态上的原子数之比 N_0/N_1 是多少?

29.17 在辐射计中，低压气体分子轰击一组薄而轻的叶片。叶片的一面是黑色的，而另一面是亮的。当辐射打在这些页面上时，吸收能量主要被打在每个叶片黑色一面的分子带走，由于这一不平衡的力^[5]的作用，叶片转动。考虑一容器，单位体积有 n 个质量为 m 的分子，温度为 T 。容器内单位面积的薄叶片以 11W 的速率吸收辐射能，这些能量被打在叶片一面上的分子（各向同性地）带走。对于室温空气，粗略估计叶片所受到的非平衡力 F 。

29.18 (a) 在自然状态下的空气以速率 v 流过横截面积不变（为 A ）的光滑管道。当空气经过一线网时（阻力可忽略），被加热。线网的能量输出功率是 W 瓦。空气流出管道时的速率是 v' 。写下空气通过管道过程中的质量、能量、动量守恒方程，并求：

(1) v' 。

(2) 末温度 T' 。

(3) 推力 F 。

注：这基本上是一个喷气发动机。

提示：为了简单起见，可以考虑一个“低效率”的发动机，其进口、出口处压强相等。

(b) 如果发动机每秒消耗 100kg 空气和 2.00kg 煤油，在(a)中结果的帮助下，计算推力 F 的近似值，并讨论喷气发动

机的性能。煤油燃烧的热量是 $4.65 \times 10^7 \text{ J kg}^{-1}$ 。什么复杂情况将使你的结论无效？

30 分子动理论的应用：均分定理

参阅《费曼物理系讲义（第1卷）》第41、42章。

30.1 计算：

- (a) kT 等于1eV时的温度 T 。
- (b) 室温下， kT 的大小（以eV为单位）。
- (c) 与能量为eV的量子跃迁相对应的光子的波长。

30.2 活化能（activation energy）、汽化热（heat of vaporization）、结合热（heat of formation）以及离解热（heat of dissociation）等通常用焦耳每摩尔，即 J mol^{-1} 或电子伏每原子，即 eV (atom)^{-1} 来表示。问多少 J mol^{-1} 等于 1eV (atom)^{-1} ？

30.3 在 $0\sim 300^\circ\text{C}$ 的范围内，汞的汽化热仅改变3%，平均值约为 $0.61\text{eV (atom)}^{-1}$ 。在计算 0°C 汞蒸气密度时，如果使用的是 300°C 时的汽化热而非 0°C 时的正确值，那么将产生多大的误差？

提醒：大指数上的一个小的误差也可以产生大的影响。

30.4 两个黑体源，温度分别为 $T_1=2\,000\text{K}$ 和 $T_2=4\,000\text{K}$ 。求对于两个黑体源，波长为 $\lambda=0.31\mu\text{m}$ 的光的相对光强比 I_1/I_2 。

30.5 (a) 在半对数坐标纸上，描点画出汞的蒸气密度关于 $1/T$ 的曲线。（从物理和化学手册中查找所需数据。）从图中推出汞的汽化热。查相关表来检验你的结果。

(b) 对于水，重复(a)的内容。

30.6 黑体辐射分布定律如下：

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1)}。$$

通过改变变量 ω 至 $\omega = \hbar \omega / kT$ ，证明：

(a) 对所有频率进行积分得到的总辐射强度正比于绝对温度 T 的四次方。

(b) $I(\omega)$ 取最大值时的频率 ω_m 正比于绝对温度 T 。

30.7 考虑一量子振子（例如，一个原子），其有以下4个能态：

$$E$$

$$E + \Delta E - \epsilon$$

$$E + \Delta E$$

$$E + \Delta E + \epsilon。$$

（为简单起见，你可以认为 ϵ 可忽略不计，即振子有1个能态 E 和3个能态 $E + \Delta E$ 。）

（a）假定你有 N_0 个这样的振子，系统在温度 T 时的比热 C_V 是多少？

（b） $T \rightarrow \infty$ 时，求 C_V 。给出其物理解释。

31 分子动理论的应用：运输现象

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第43章。

31.1 什么分子物理量（molecular physical quantity）的迁移分别导致以下宏观表现？

（a）热导（heat conduction）。

（b）黏滞性（viscosity）。

31.2 氢气中，慢中子的碰撞截面大约是 $20 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ 。在自然状态（NTP）下，氢气中的这种中子的平均自由程 l 是多少？

31.3 氧分子的“半径”粗略为 $3\text{\AA}$ 。估计在自然状态（NTP）下，氧气中的平均自由程 l 以及两次碰撞之间的平均时间 τ 。

31.4 如图31-1所示，一个“杜瓦容器（Dewar）”（例如，保温瓶）是一个用于绝热的双壁真空容器。假设杜瓦容器达到好的绝热效果的条件是 $l \geq 10D$ 。其中， l 是双壁间残余气体的平均自由程， D 是双壁间距。假定 $D=1\text{cm}$ ，残余气体是氧气。

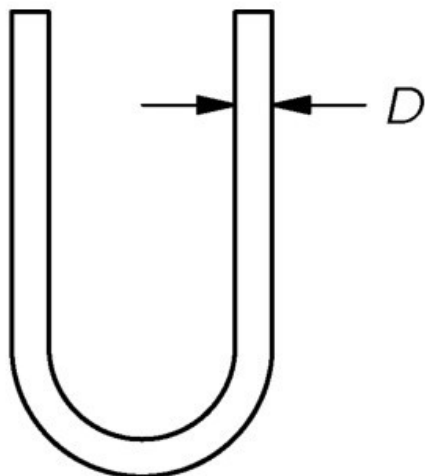


图 31-1

(a) 室温下，这个杜瓦容器所允许的压强 P 是多少？

(b) 对于压强 $P_1=400\text{mmHg}$ 和 $P_2=200\text{mmHg}$ ，达瓦气体的热导率（thermal conductivity）之比 κ_1/κ_2 是多少？

31.5 两种气体A和B，在一定温度 T_0 时密度分别为 ρ_A 和 ρ_B 。一离子被观测到在气体A中的迁移率为 μ_A ，在气体B中的迁移率为 μ_B 。在两种气体的混合物中（密度为 $\rho_A + \rho_B$ ，温度为 T_0 ）中，你将期望离子的迁移率 μ 是多少？

31.6 物质中若存在温度梯度，将导致一正比于温度梯度的能流。（忽略对流。）相对于单位面积、单位温度梯度的比例系数被称为热导率 κ 。于是， $\frac{dE}{dt} = \kappa A dT/dx$ 。证明：在没有对流的情况下，气体的热导率是：

$$\kappa = \frac{k n_0 v l}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k v}{\sigma}。$$

其中， n_0 是单位体积的气体分子数， v 是气体分子的平均速度， l 是平均自由程， σ 是碰撞横截面积， $(\gamma - 1) kT$ 是温度 T 时分子的平均能量。

31.7 当流体中存在一速度梯度（垂直与流动方向上有流速变化）时，会导致阻力，这被称为黏滞性（viscosity）。对于气体，这是由于来自一平面两侧的约一个平均自由程距离内的动量穿过此平面的迁移。假定流速沿 x 轴方向，在 y 轴方向存在 v_x 的梯度，那么垂直于 y 轴的平面上单位面积的阻力是

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy}。$$

证明：对于气体，黏滞系数 η 近似为

$$\eta = n_0 v m l = \frac{v m}{\sigma}，$$

其中， n_0 是单位体积的气体分子数， v 是气体分子的平均速率， m 是气体分子质量， l 是分子平均自由程， σ 是碰撞截面。

31.8 注意气体的热传导率和黏滞度都与压强无关。

(a) 两个面，其温度分别为 T 和 $T+\Delta T$ ，对于两者间的能量迁移 $\frac{dE}{dt}$ 给出合适的修正。假定自由程 l 远大于两面间距离 D 。（参见习题31.6。）

(b) 同样处理两面间的动量迁移（单位面积的阻力） F/A 。两面的运动速率分别为 U 和 $U+\Delta U$ 。（参见习题31.7。）

31.9 一容器含有一定量气体，共有约 10^{24} 个气体分子，气体分子的平均自由程为 l 。对于某长度 L ，“没有分子在经历下一次碰撞前行走超过 L 的距离”的概率是 $1/2$ 。求 L 。

31.10 几乎纯的硅的电阻率关于温度的函数如图31-2所示。对 300°C 以上及以下，该物质的电流本质作定量推断。

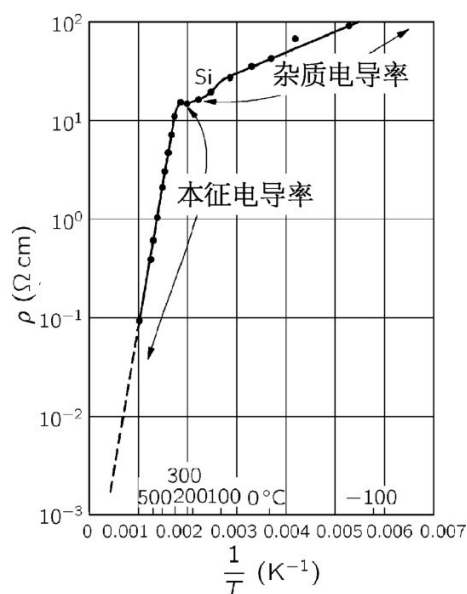


图 31-2

- 31.11** 在层流（laminar flow）中，液体的黏滞度完全决定了两个压强不同（ $P_1 > P_2$ ）的水库间的管道中液体传输的速率。在图 31-3 中，液体流过半径为 a ，长度为 L 的柱形管道（ L 远远大于自由程 l ）。液体的黏滞系数是 η 。证明：对于稳态，每秒由水库 1 流向水库 2 的液体流量是

$$V = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{P_1 - P_2}{L}。$$

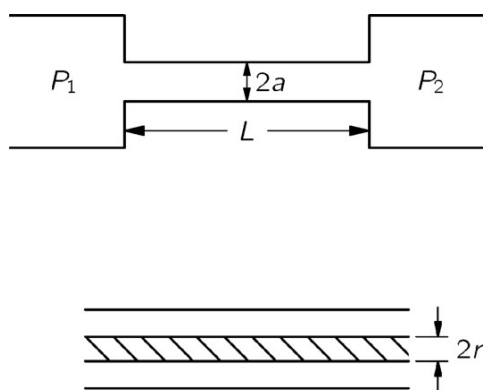


图 31-3

- 31.12** 图 31-4 所示是一单隙火花室，火花室的两铝板间的间隙为 d 。一带电宇宙射线粒子电离其轨迹上的氖（neon）分子。在时间 t 之后，一高压脉冲作用在两铝板间，沿粒子轨迹观察到火花。为了排除由于之前进入火花室的宇宙射线而存在于火花室中的冗余电子和离子，一直流电压 V_D 作用于两铝板间。这个“清除电压”同样扫除了我们想要观测的电子和离子。

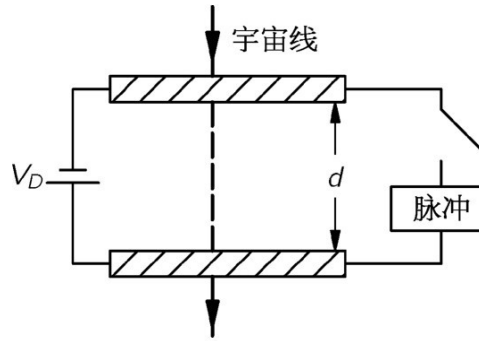


图 31-4

(a) 当加上脉冲时，多大的电压 V_D 将完全清除空间中的

(1) 电子。

(2) 氖离子。

(b) 对于一个间隙 $d = 0.63 \text{ cm}$ 的火花室，当 $V_D = 80 \text{ V}$ 时，在 $t = 0.4 \times 10^{-6} \text{ s}$ 时无法观测到火花迹象。问对于火花的形成，电子是必要的吗？（验证你的答案。）

有用的信息：氖的几何横截面积约为 $4 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ ，氖密度约为 $3 \times 10^{19} \text{ mol/cm}^3$ ， $m_e c^2 \approx 5 \times 10^5 \text{ eV}$ ， $m_{\text{neon}} c^2 \approx 2 \times 10^{10} \text{ eV}$ ，

$kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$ （室温）。

32 热力学

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第44章。

- 32.1** 理想的可逆卡诺热机反向运转，可作为冰箱用。如果在250K时吸热，在350K时向外放热，问从冰箱中每移去1J的热量，向外放出的能量 E 是多少？
- 32.2** 冰箱保持在 -3°C ，而外面温度为 27°C ，为了从冰箱内向外移除1J的热量，至少需要做多少功 $W_{\min}$ ？
- 32.3** 两个可逆热机在相同的最小体积和最大体积，最大压强和最小压强，最高温度和最低温度间进行卡诺循环。一个热机以氦作为工作物质，另一个以空气作为工作物质。问在一个循环中，哪个热机付出更多功？
- 32.4** 在蒸汽热电厂中，蒸汽发生器中的温度为 600°C ，用于冷却冷凝器的河水的温度为 20°C 。问最高效率 $\epsilon_{\max}$ 可以达到多少？
- 32.5** 一个绝热容器带有一个可移动、无摩擦的活塞。活塞质量为 M ，面积为 A 。初始，气体体积为 V_1 ，盛有 N g氦气，如图32-1所示。外部压强是 P 。气体被内部加热线圈非常缓慢地加热，直至气体体积达到 $2V_1$ 。求：

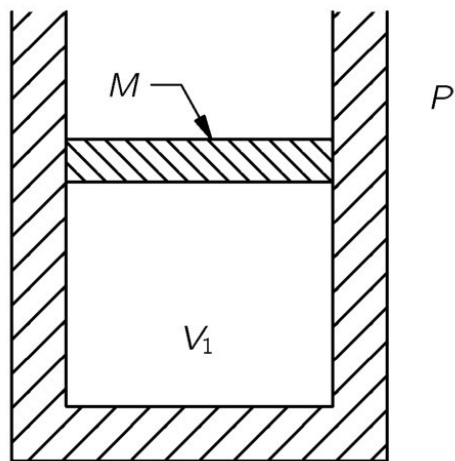


图 32-1

- (a) 气体所做的功 W 。
- (b) 提供给气体的热 ΔQ 。
- (c) 气体内能的改变量 ΔU 。
- (d) 气体的初始温度 T_i 和末温度 T_f 。

32.6 系数 γ 的理想气体初始状态为 $P_0=1\text{atm}$, $V_0=1\text{L}$, $T_0=300\text{K}$ 。依次进行如下操作。

1. 体积不变, 被加热至 $P=2\text{atm}$ 。
2. 压强不变, 膨胀至 $V=2\text{L}$ 。
3. 体积不变, 冷却至 $P=1\text{atm}$ 。
4. 压强不变, 压缩至 $V=1\text{L}$ 。

- (a) 画出该过程的 P - V 图。

- (b) 求每次循环所做的功 W 。
- (c) 求气体达到的最高温度 $T_{\max}$ 。
- (d) 求步骤1和2中输入的总热量 ΔQ 。
- (e) 求步骤1和2中熵的总变化量 ΔS 。

32.7 一理想热机以 $\gamma=4/3$ 的理想气体为工作物质，进行图32-2所示的循环（ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ ）。在 A 点， $P=1\text{atm}$ ， $V=22.4\text{L}$ ， $T=300\text{K}$ 。在 C 点， $P=2\text{atm}$ ， $V=33.6\text{L}$ ， $T=900\text{K}$ 。

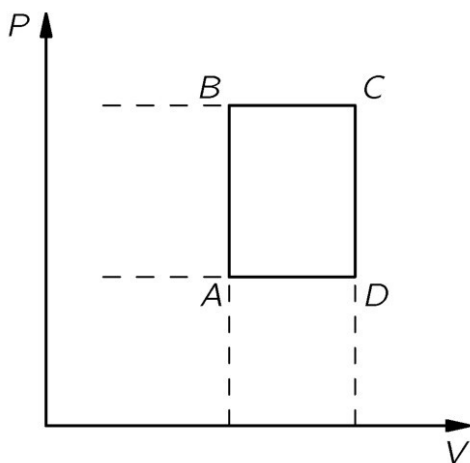


图 32-2

- (a) 求每次循环所做的功 W 。
- (b) 求 B 点的温度 T_B 。
- (c) 求过程 $A \rightarrow B$ 所需的热输入 $\Delta Q_{A \rightarrow B}$ 。
- (d) 求过程 $B \rightarrow C$ 所需的热输入 $\Delta Q_{B \rightarrow C}$ 。

(e) 如热机只在 900°C 和 300°C 的两个热源间工作，利用上述循环过程，热机能达到的最大效率是多少？

(f) 对于任何热机，在 900°C 和 300°C 的两个热源间工作，能达到的最大效率是多少？

32.8 $\gamma=4/3$ 的理想气体样本以两种路径从状态 A （压强 1atm ，体积 22.4L ，温度 300K ）变化到状态 C （压强 2atm ，体积 33.6L ，温度 900K ）—— ABC 和 ADC ，如图32-3所示。

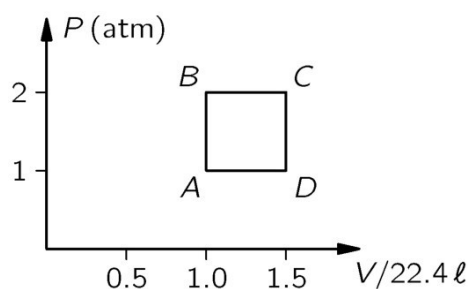


图 32-3

(a) 证明：两种路径的熵变化 ΔS 是一样的。

(b) 计算 ΔS 。

32.9 一理想可逆热机以 28g 氖气作为工作物质（ $\gamma=7/5$ ），进行没有阀门的循环操作 $abcd$ ，热源温度为 400K ，热汇温度为 300K 。在 a 点，气体的初始体积是 6.0L ，在 c 点，气体体积是 18.0L 。

(a) 在什么体积 V_b 时，气体由吸热（等温膨胀）变为绝热膨胀（从 V_b 到 V_c ）？

- (b) 在什么体积 V_d 时, 开始绝热压缩?
- (c) 在循环的 $V_a \rightarrow V_b$ 阶段, 多少热量 $\Delta Q_{a \rightarrow b}$ 进入体系?
- (d) 在循环的 $V_c \rightarrow V_d$ 阶段, 体系释放多少热量 $\Delta Q_{c \rightarrow d}$?
- (e) 求热机的效率 ϵ 。
- (f) 求在 $a \rightarrow b$ 和 $c \rightarrow d$, 每克工作物质的熵改变量 ΔS 。

32.10 容器中的1摩尔气体初始温度是 127°C 。在没有和外界发生热交换的情况下, 突然膨胀到初始体积的2倍。然后, 在温度不变的前提下, 气体被缓慢压缩至初始体积。最终温度是 -3°C 。

- (a) 求气体的 γ 值。
- (b) 熵有没有变化? 如有, 是多少?

32.11 体积 V_0 的气缸中的系数 γ 的气体 (压强 P_0 , 温度 T_0) 被缓慢、绝热地压缩至体积 $V_0/2$ 。待热平衡后, 气体缓慢、等温地膨胀至初始体积 V_0 。求活塞对气体所做的净功 W , 以 P_0 , V_0 , T_0 来表示。

32.12 将 P - V 图上的 T_1 和 T_2 以及 (P_a, V_a) 和 (P_c, V_c) 之间的理想卡诺循环 $abcd$ 转换为 T - S (温度-熵) 图, 以及相应的 $ABCD$ 点。

32.13 月亮上的第一代移民首先遇到的一个大问题是：保持他们的房间处于舒适的温度。考虑用卡诺热机来控制环境。假设月亮上白天的温度是 100°C ，夜晚的温度是 -100°C 。房间的温度需保持在 20°C 。通过房间墙壁的热传导速率是每度温差 0.5kW 。求白天必须提供给卡诺热机的功率 P_{day} ，以及夜晚必须提供给卡诺热机的功率 P_{night} 。

32.14 热容量恒定（为 C_p ）的两个“全同”物体，初始温度分别为 T_1 和 T_2 ，被用来作为卡诺热机（运转于无限小可逆循环）的热源，如图32-4所示。如果两物体保持压强不变，并且没有发生相变。

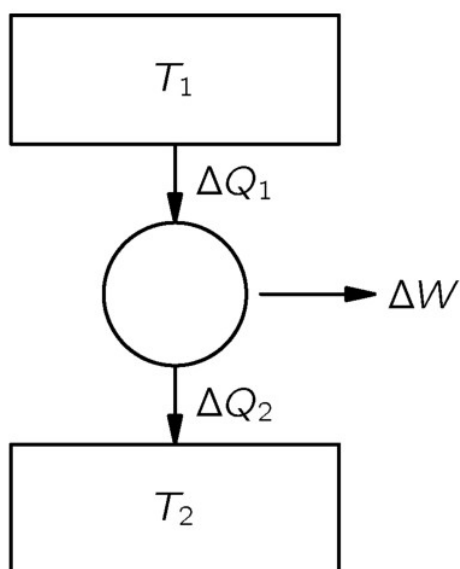


图 32-4

(a) 证明：热机停止运行后，最终温度 $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$ 。

(b) 求热机做的总功 W 。

32.15 一个不小心的实验人员没有关紧氦气瓶的阀门，周末期间氦气瓶有轻微漏气。气体初始处于200atm的压强，气体等温地（20°C）缓慢泄漏。问每千克气体的熵变化 ΔS 是多少？

32.16 理想的涡轮机热机循环包括：从 A 到 B 的绝热压缩，从 B 到 C 的等压吸热过程，从 C 到 D 的绝热膨胀，从 D 到 A 的等压放热过程；所有阶段都是可逆的。（见图32-5。）假设热机中的工作流体是理想气体，其定压比热和定容比热之比是 γ ，单位时间通过热机的气体是 $\dot{N}$ 摩尔。进一步假设，气体的最高温度 T_C 由热机的高温部分所能承受的最高温度决定，气体的最低温度 T_A 由周围的空气温度决定。

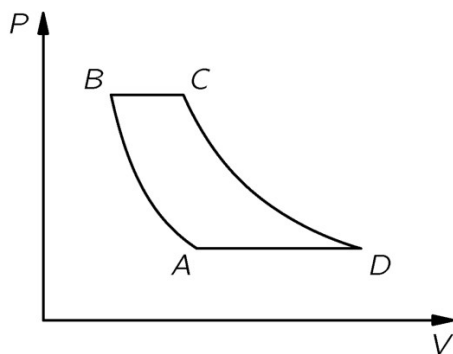


图 32-5

(a) 求热机产生的功率 $\dot{W}$ 关于压强比 $p = P_B/P_A$ 的函数关系。

(b) 求功率最大值时的压强比 p_m 。

(c) 求最大功率 $\dot{W}_m$ 。

(d) 求最大功率时的效率 ϵ_m 。

(e) 如果热机产生的功率是1MW，最高温度是 $T_C=1\,200\text{K}$ ，
那么在大气条件（ $P_A=1.013\times 10^5\text{ Pa}$ ， $T_A=300\text{K}$ ）下，
空气（ $\gamma=7/5$ ）在热机中的体积流速率 $\dot{V}_A$ 是多少？

(f) 求 (e) 中热机的效率 ϵ_e 。

(g) 求 (e) 中热机的压强比 p_e 。

33 热力学示例

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第45、46章。

33.1 黑体腔中的总辐射强度如何依赖于温度？

33.2 对于分子气体，封闭容器中的分子数不随温度变化。“光子气”也如此吗？解释之。

33.3 在恒定体积 V 和温度 T 下，计算“光子气”的比热 C_V 。

33.4 大小为10A的直流电流经10 Ω 的电阻。温度保持在10°C。

(a) 求电阻的熵变化率 $\frac{dS_R}{dt}$ 。

(b) 求对宇宙熵的变化所做的贡献 $\frac{dS_U}{dt}$ 。

33.5 对于内能仅依赖于温度 T 的理想气体，证明：定压摩尔热容量与定容摩尔热容量之差等于气体常数 R ，即

$$C_{P, m} - C_{V, m} = R。$$

33.6 水的汽化潜热大约是 $2.44 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ ，水蒸气密度在100°C是 0.598 kg m^{-3} 。利用克劳修斯-克拉珀龙方程（Clausius-

Clapeyron Equation) 求水平面附近沸点关于高度的变化率 $\frac{dT}{dz}$, 以 $^{\circ}\text{C km}^{-1}$ 为单位。假定空气温度是300K。

33.7 湖面表层的初始温度是 0°C 。冷风袭来, 湖面温度维持在 0°C 以下 ΔT 。

(a) 求冰层厚度的增长率 $\frac{dz}{dt}$, 假定降低已经形成的冰的温度所要求的热量损失远远小于形成新冰所要求的。(同样假设冰层温度随深度线性变化。)

(b) 用(a)中的结论, 计算冰冻一小时后的冰层厚度 z 。假定 $\Delta T=10^{\circ}\text{C}$ 。

有用信息: 冰的热导率: $\kappa = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, 结冰潜热: $L = 3.3 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$ 。

33.8 两体积被一旋塞隔开, $t=0$ 时刻, 旋塞打开。 $V_2=2V_1$ 。(见图33-1。) 很长时间后, 对于下述两种情况:

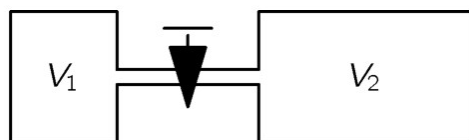


图 33-1

(1) V_1 盛有1摩尔氦气, V_2 盛有2摩尔氩气,

(2) V_1 盛有1摩尔氦气, V_2 盛有2摩尔氦气,

计算

(a) 气体的熵变化量 ΔS ;

(b) 环境的熵变化量 ΔS ;

(c) 宇宙的熵变化量 ΔS 。

33.9 就以下情况, 计算熵变化量 ΔS 。

(a) 辐射 (光子气) 从体积 V_1 到 V_2 等温膨胀。

(b) 保持体积不变, 辐射 (光子气) 从温度 T_1 被加热到 T_2 。
。

(c) 利用 (a) 和 (b) 的结论, 求光子气的熵 $S(V, T)$ 。
光子气初始时体积为 V_0 , 温度为 T_0 。

33.10 阳光垂直地照射在赤道非洲的一处黑色铺砌的大广场上。如果广场像黑体一样辐射, 广场可以达到的最高温度 T 是多少?
(太阳常数: $1\,395\text{W m}^{-2}$ 。)

33.11 太阳的辐射近似是一 $5\,700\text{K}$ 的黑体。如果一个黑色铜球在离太阳1个天文单位的地方被照射, 问铜球将达到的平衡温度 T 。
(太阳直径对地球的张角为 0.50° 。)

33.12 体积为 V_0 的等温腔内的黑体辐射被压缩至 $V_0/2$ (温度不变)。求辐射压变化的倍数 f 。

33.13 半径为 R 、热容量可忽略的薄球壳具有一个黑色的内表面和一个对于黑体辐射吸收系数为 A 的内表面。球壳漂浮在真空中, 在 $t=0$ 时刻盛有温度为 T_0 的“光子气”。求 $t \geq 0$ 时的温度 T 。

33.14 (a) 考虑一个黑色薄球壳, 半径为 R , 盛有温度为 T_0 的理想单原子气体。如果球绝热地缩小至半径 $R/2$, 在一个遥远的观测者看来, 辐射强度改变的倍数 f 是多少? 忽略压缩过程中气体的引力变化。

(b) 在 (a) 中, 如考虑到引力变化, f 将变大还是变小?

33.15 考虑一个黑色薄球壳 (热容量可忽略), 半径为 R , 盛有温度为 T_0 的黑体辐射。如果球绝热地缩小至半径 $R/2$, 在一个遥远的观测者看来, 辐射强度改变的倍数 f 是多少?

33.16 一个表面涂黑的实心铜圆柱体长 2.0cm , 底面积 10.0cm^2 , 被一根热绝缘细线悬吊在半径为 25.0cm 的真空球形空心腔里。空腔具有黑色的壁。腔壁温度维持在 27°C 。

(a) 如果铜柱和腔达到了热平衡, 铜柱以什么速率 dE/dt 向腔壁辐射能量? 以 Js^{-1} 为单位。

(b) 如果铜柱被加热到 150°C ，然后开始冷却。当温度到达 $T=127^{\circ}\text{C}$ 时，温度下降速率 dT/dt 是多少？（假设在任何瞬间，铜柱的所有部分温度一样。）

有用的信息：铜密度为 $8\,950\text{kg m}^{-3}$ ，铜的等压比热为 $390\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ 。

33.17 太阳中心的密度大约为 80g cm^{-3} ，中心温度大约为 $13\times 10^6\text{K}$ 。物质几乎全部由质子和电子组成。求太阳中心的气体压强 P_G 和辐射压强 P_R 。

33.18 在 0°C 时，饱和水蒸气的比容是 $206\text{m}^3\text{kg}^{-1}$ 。求此温度下的汽化潜热 L ，以 J kg^{-1} 为单位。

33.19 (a) 从热力学的角度论证，如果物质冷凝时膨胀，则冷凝温度一定随压强的增加而降低。

(b) 要是滑冰成为可能，估算滑冰场冰面的最低温度。

33.20 如果一物体对入射在其表面的所有辐射的吸收比例都为 A ，其余的反射出，证明：在温度 T 时，单位面积发射的量为 $A\sigma T^4$ ，其中 σ 是黑体辐射的斯特藩-玻尔兹曼常数（Stefan-Boltzmann constant）。见《费曼物理学讲义（第1卷）》第45章：

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}。$$

33.21 半径为 r 、温度为 T 的黑体被一半径为 R 、两面皆黑的薄壳包围。求这个辐射屏蔽体以什么因子 f 降低物体的冷却速率？（球间被抽空，无热传导损失。）

33.22 在行星际空间的一个特定位置，黑色球壳的平衡温度为 T_0 。如果同样的球壳镀上了铜，新的平衡温度将大于、小于还是等于 T_0 ？铜的反射率关于波长的函数的典型值如下：

$\lambda(\mu\text{m})$	0.305	0.385	0.450	0.550	0.600	0.700	1.00	3.0	9.0
$R(\lambda)$	0.25	0.29	0.37	0.48	0.72	0.83	0.90	0.97	0.98

$$R(\lambda) = \frac{I_{\text{反射}}}{I_{\text{入射}}}。$$

把太阳考虑为5 700K的黑体辐射体。参见习题33.20。

34 波动方程，声

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第47章。

- 34.1** 一液体的压缩弹性由体积弹性模量（bulk modulus） M 来度量。 M 定义如下：

$$dP = -M \frac{dV}{V}。$$

其中， $\frac{dV}{V}$ 是由外压力的改变 dP 所引起的体积变化率。利用量纲分析，确定声在液体中的传播速率 v 关于 M 的函数关系。

- 34.2** 两根相同的轻绳悬吊在一支持点上，分别被质量1kg和2kg的物体拉伸。求沿两根绳子传播的横波的波速之比 v_1/v_2 。

- 34.3** 求相同温度下，氦气中的波速 v_{He} 和氢气中的波速 v_H 之比。

- 34.4** 两根汽笛A和B长度相同。吹笛子时，向A吹入的是液态空气温度（-180°C）的冷空气，而向B吹入的是热空气。一根汽笛的音调正好比另一根高八度（频率是另一个的2倍）。求吹入B的air的温度 T 。

- 34.5** 证明： $u = A e^{i(\omega t - kx)}$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ω 和 k 满足 $\omega = vk$ 。

34.6 一根均匀、密度为 σ (kg m^{-1}) 的完全柔软的弦，被拉紧的张力是 T 。

(a) 推导支配横向位移 y 的波动方程。

(b) 推导沿弦的扰动传播速率 v 。

假定任意点，任意时刻 $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ ，只考虑平面内振动。

注：弦上的张力沿横向的分量很接近 $T \frac{\partial y}{\partial x}$ 。

34.7 一简单乐器构造如下：一根质量可忽略不计的弦紧绷在两端点之间，距一端 x 处，挂有一质量为 m 的物体，如图34-1所示。物体被拉而偏离平衡位置一小段距离 A ($A \ll x$, $A \ll l - x$)，然后发生振动。

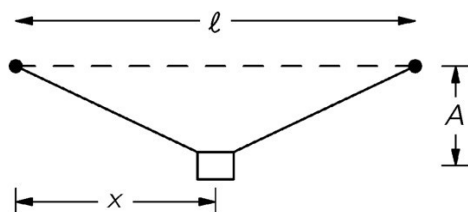


图 34-1

- (a) 求声波的频率 ν 。
- (b) 写出物体偏离平衡位置的距离关于时间 t 的函数 $y(t)$ 。
- (c) 当 x 变化时，求声波可达到的最高频率和最低频率。忽略重力作用。

34.8 一声波通过密度为 ρ_0 、压强为 P_0 的气体。气体分子的位移由方程 $\xi = \xi_m \cos(\omega t - kx)$ 描述。

- (a) 求气体压强 P 关于 x 和 t 的方程。
- (b) 求在 yz 平面内截面为 A ，在 x 轴方向长度为 λ 的体积内声波引起的运动动能 T 。

34.9 一张轻而软的膜位于风琴管的一个节点上，声级是120dB，频率是100Hz。介质是自然状态（NTP）的空气。

- (a) 膜振动的振幅 χ_m 是多少？以cm为单位。
- (b) 气体温度变化的振幅 ΔT 是多少？

34.10 如果吸入氦气，讲话时声音会听起来不自然，音调偏高。

- (a) 如果你的共鸣“腔”全部充满氦气而非空气，则每一个共振频率大约增加多大一个因子 f ？

(b) 你将要唱一个音调，氦气对你所要唱的音调有何影响？
请讨论。

34.11 用两只手的指甲夹住一根长约5cm橡皮带的两端，拨动橡皮带以观测其音调。然后，不改变两指甲间橡皮带的质量而将其拉长至原来的2倍、3倍、4倍、5倍。同样拨动使之发声。就观测到的结果进行讨论。同样的事情为什么不会发生在小提琴的琴弦上？

34.12 考虑一频率为1 000Hz的稳态平面声波。其压强峰值相对于大气压强 $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ 为 $\pm 0.1 \text{ Pa}$ 。

(a) 伴随这一声波，密度变化是多少？

(b) 求最大粒子位移 χ_m 。

(c) 求波的强度 I ，以 Wm^{-2} 为单位。

注：声速取 340 m s^{-1} 。

35 线性波系统：拍，模

参见《费曼物理学讲义（第1卷）》第46、49章。

35.1 波动方程如下：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}。$$

求相速度 v_{ph} 和群速度 v_{g} ，以 c 表示。

35.2 在介质中，如果群速度等于相速度，我们称之为色散。下列情况有色散吗？

(i) 空气中的可听声（audible sound）。

(ii) 拉紧的铜线中的波。

(iii) 水波。

35.3 波长为 λ 的水波的相速度为（忽略表面张力和有限深度效应）：

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{g\lambda/2\pi}。$$

(a) 证明群速度是相速度的一半。

(b) 求波长为1 000m的水波的群速度和相速度。

- 35.4** 如图35-1所示，六个质量都为 m 的滑块用相同的弹簧连接，被限制在一直线气槽内运动。有多少个独立的振动模式？

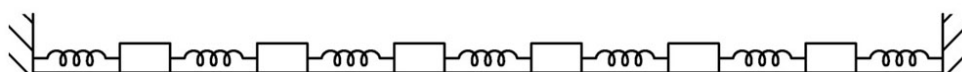


图 35-1

- 35.5** 如图35-2所示，长方形板的边缘被夹住，写出描述其振动模式的波动方程的解 $u=u(x, y, z)$ 。假设振动在板上的传播速率为 c ，振幅为 A 。

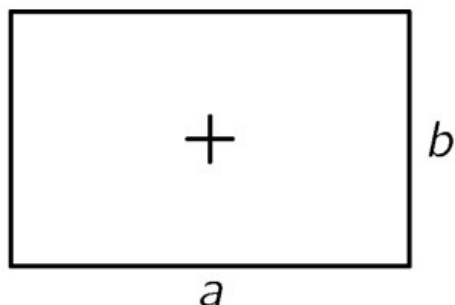


图 35-2

- 35.6** 一理想的、均匀拉伸的弦长度为 L ，两端被固定，在弦的中点，沿与弦长垂直的方向把弦拉出一个距离 A ，然后释放。利用沿相反方向运行的无限长周期波列的概念，推断释放后将会发生什么？画出半个周期内，不同时刻的一些代表性图像。
- 35.7** 考虑表面张力，在密度为 ρ 、表面张力为 T 的液体上的表面波的相速度是（液体深度足够大）

$$v_{\text{ph}} = \left(\frac{2\pi T}{\lambda_{\rho}} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}。$$

求这样一种波的群速度 v_g 。

35.8 在以下情况下，求波长为1.0cm的涟漪的相速度 v_{ph} 。

(a) 在水中（表面张力为 $7 \times 10^{-4} \text{ N cm}^{-1}$ ）。

(b) 在酒精中（表面张力为 $2.6 \times 10^{-4} \text{ N cm}^{-1}$ ）。

35.9 求以最小速率行进的水的涟漪的

(a) 波长 λ 。

(b) 频率 ν 。

(c) 速率 c 。

35.10 两个声源 S_1 和 S_2 相隔10m，如图35-3所示。与声源在同一直线的两点 A 和 B 处有两个观测者。 S_1 发射一稳定平面波，其超压由 $p_e = A \cos(200t)$ 给定； S_2 发射的稳定平面波超压由 $p_e = A \cos(210t)$ 给定。 $\overline{S_1 S_2} = \overline{S_2 A} = \overline{AB} = 10 \text{ cm}$ 。对于(a)和(b)，声速取 340 m s^{-1} 。

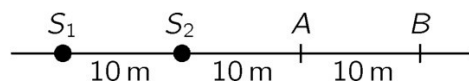


图 35-3

- (a) 求每个观测者听到的拍频 ν 。
- (b) A 和 B 听到的最大脉冲的时间间隔 Δt 是多少?
- (c) 如果介质有色散而使得高频波的传播速率是 341m s^{-1} ,
低频波的传播速率是 340m s^{-1} 。求这两种声波形成的拍
从 A 到 B 的传播速率 ν 是多少?

35.11 一长列柴油货车在笔直的铁道上以 5.0m s^{-1} 的速率向山上行驶。当车接近一峭壁处的隧道口时, 火车司机鸣号, 发出长时间的稳定的号声, 其主频率是 340Hz 。号声本身以及回声都被
(a) 货车司机和 (b) 靠近车尾的地面工人听到。他们听到的拍频分别是多少?

35.12 有以下函数:

$$f(x, y, z, t) = Ae^{i\omega t} \sin(l\pi x/a) \sin(m\pi y/b) \sin(n\pi z/c),$$

其中

$$\omega^2 = v^2 \pi^2 (l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2),$$

l, m, n 是整数, 全部 ≥ 1 。

- (a) 证明该函数满足三维波动方程。

- (b) 证明在 $x=0$ 和 $x=a$, $y=0$ 和 $y=b$, $z=0$ 和 $z=c$ 处, 函数值为零。
- (c) 证明函数随时间作正弦振动。
- (d) 如果 $a:b:c=1:2:3$, 则最低频率 ω_0 是多少?
- (e) 计算最低的十个频率, 以 ω_0 来表示。

35.13 在直气轨上, 质量为 m_1 和 m_2 的两滑块, 分别用劲度系数为 k_1 和 k_2 $\left(\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2 \right)$ 的弹簧系于墙壁上, 两滑块之间用劲度系数为 k 的弹簧连接, 如图35-4所示。

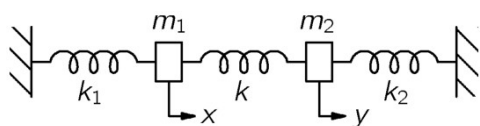


图 35-4

- (a) 写出两滑块的运动方程组。
- (b) 将 $x=Ae^{i\omega t}$ 和 $y=Be^{i\omega t}$ 代入上述方程组, 求解两种正则振动模式的频率和振幅。

35.14 三个摆的摆长均为 l , 如图35-5所示对称地排放。质量为 $2m$ 的中间摆锤通过劲度系数为 k 的两根弹簧与两侧的质量均为 m 的摆锤连接。当它们振动在系统的三种正则模式中的每一种时,

频率和三个摆锤的相对位移 (x_1, x_2, x_3) 是多少？只考虑在图所在的平面内振动。

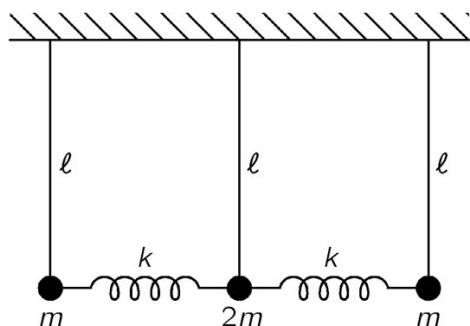


图 35-5

- 35.15** 两个一样的圆柱，转动惯量为 I ，通过扭转常数为 K 的相同钢丝悬挂起来，如图35-6所示。不允许任何摆动发生。有多少振动模式？并求每种模式的周期 T 。

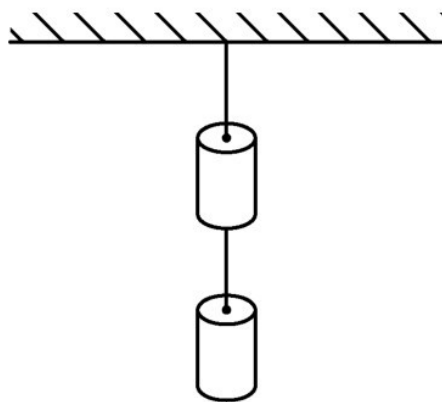


图 35-6

- 35.16** 质量为 m 的两个相同物体挂在两个相同的弹簧上，弹簧的弹性系数是 k ，如图35-7所示。求正则模式的角频率 ω 。不允许任何摆动发生。

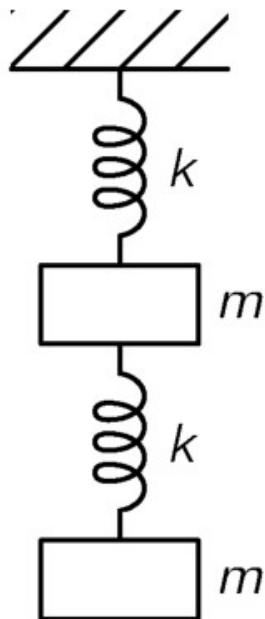


图 35-7

35.17 质量为 M 、长度为 L 的细棒在无摩擦的水平桌面上运动。棒的质心被限制在直线 $a-a'$ 上运动，如图35-8所示。两根相同的弹簧系在棒的两端。弹簧的弹性系数为 K ，平行于 $a-a'$ 作用。

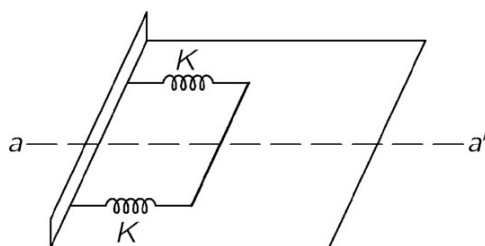


图 35-8

- (a) 对于小振幅振动，求振动基模的频率。
- (b) 对于小振幅振动，描述基模的运动。

35.18 紧绷的弦上的驻波可以由方程 $y = A \sin(kx) \cos(\omega t)$ 来描述。沿驻波的每个质量元 σdx 可以当作是围绕 $y=0$ 振动的无限小谐振子。确定在一个波长 λ 范围内，蕴藏在驻波内的能量 E 。

35.19 质量为 m 的一非相对论性电子被限制在相距 L 的两平板间。

(a) 利用不确定性原理，计算动能的最小可能值 $T_{\min}$ 。

(b) 利用下述条件计算动能的最小可能值：描述电子的波函数是驻点在边界上的正弦驻波。

(c) 电子的平均动量 $\langle p \rangle$ 是多少？（注意：考虑到大小和方向。）

36 波的傅里叶分析

参阅《费曼物理学讲义（第1卷）》第50章。

36.1 给出下列函数的傅里叶展开：

(a) $y=c$, c 为常数。

(b) $y=\sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)。

36.2 图36-1所示的方波的傅里叶展开是

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right),$$

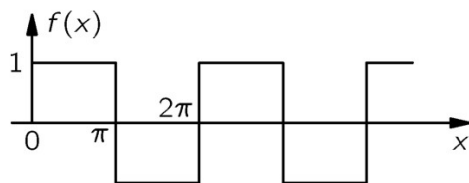


图 36-1

由此证明：

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \pi/4$,

(b) $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \pi^2/8$,

$$(c) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{35} + \cdots = (4/3) \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots \right) = \pi^2/6。$$

36.3 (a) 将图36-2所示的周期函数 $g(x)$ (显示出一个周期) 分解成傅里叶分量, 并证明与将习题36.2中的函数积分所得的结果一致。

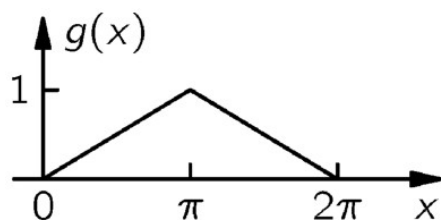


图 36-2

(b) 用 (a) 中结果证明:

$$(1) \quad 1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \dots = \pi^4/96,$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \frac{2^4}{2^4 - 1} (1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \dots) = \pi^4/90。$$

36.4 在《费曼物理学讲义 (第1卷)》第45章中, 需要计算

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}。$$

现在你可以这样计算: 将分子和分母各乘以 e^{-x} , 并作如下展开

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots,$$

然后逐项进行积分。这样我们将得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} &= \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \times (1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \cdots) \\ &= 6 \times \pi^4 / 90 = \pi^4 / 15. \end{aligned}$$

试试看。

36.5 如图36-3所示，一根吉他弦从长度的中间拉起。计算前三个谐波的振幅 A_1 ， A_2 ， A_3 （相对于基波振幅 A_0 ）。

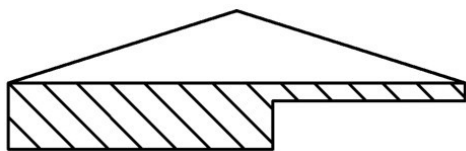


图 36-3

36.6 求图36-4所示的示波器水平扫频电路中锯齿函数的傅里叶级数。

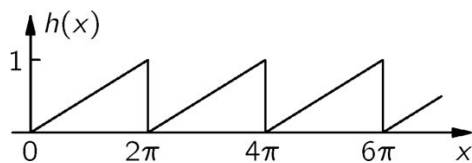


图 36-4

36.7 一长度为 L 的弦质量线密度是 σ ，处于张力 S 之下。在 $t=0$ 时刻，弦的形态由下式给定

$$y(x) = 3\sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{3\pi x}{L}。$$

(a) 求振动周期 T 。

(b) 在 $t=T/2$ 时，弦的形态如何？

36.8 全波整流器是一种可以把振幅为 V_0 的正弦波转换为图36-5所示波形的仪器。

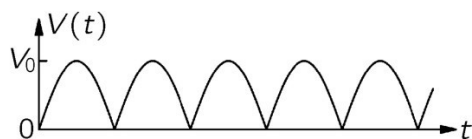


图 36-5

(a) 计算 $V(t)$ 的平均值。这将是直流输出电压。

(b) 求输出电压二级谐波分量的振幅 A_2 。

36.9 某种变压器的输出电压 V_{out} 和输入电压 V_{in} 有如下关系

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} + \epsilon (V_{\text{in}})^3。$$

(a) 当输入电压是正弦波 $\sin x$ 时，分析三次项对输出电压的影响。

(b) 当输入电压是频率不同的两个或多个正弦波的组合时，分析三次项对输出电压的影响。

[1] 质量为 M 的物体绕某轴的转动惯量为 I ，则其关于此轴的回转半径定义为 $R = \sqrt{I/M}$ 。

[2] 《费曼物理学讲义（第1卷）》第32章公式（32.19）。

[3] 《费曼物理学讲义（第1卷）》第31章公式（31.19）。

[4] polarization，也译作极化。

[5] 叶片黑色面比亮面粗糙，打在叶片粗糙面的分子在被反弹走前会“陷”在叶面上一段时间，而打在叶片光亮面的分子立即被反弹走。于是，被“陷”分子倾向于和叶片达到热平衡，而直接被反弹走的分子则不会。

第2卷

导言

这里的习题源于1962—1964年间给加州理工学院大二学生设计的习题，这是加州理工学院进行教学改革而使用费曼教授的物理学讲义为教材的前两年。这些习题最初用于家庭作业或考试测验，因此在难度上差异很大。在每一章内，习题大概按照由易到难排列，但并非严格如此。和习题集的第1卷一样，这卷习题并非“最终”版本，随着课程的进展，必定会进行题目的更新和增加。

大概一半题目的想法源于费曼教授。其余的由历年教授大二物理课程的授课教师提供。他们是：J. Blue, T. Caughey, G. Chapline, M. Clauser, R. Dashen, R. Dolen, R. Griffith, F. Henyey, W. Karzas, R. Kavanagh, P. Peters, J. Pine, M. Plesset, M. Sands, I. Tammaru, A. Title, C.H. Wilts。

包含大部分题目的首次编辑工作由威尔茨（C.H. Wilts）和我本人在1962—1963学年结束后完成。尽管绝大部分习题是原创的，有一些题目直接来自：弗兰克（N.H. Frank）的《电学与光学导论（第二版）》[*Introduction to Electricity and Optics* , Second Edition (McGraw-Hill, 1950)]，哈里德（D. Halliday）和瑞斯尼克（R. Resnick）的《写给科学与工程学生的物理学》[*Physics for Students of Science and Engineering* (Wiley, 1960)]。这些作者和出版社允许我们出版这些题目，我们表示感谢。

最早的草稿以及最终的版本的打字工作都是由沃伦（F.L. Warren）女士完成的，深表谢意。

纽格鲍尔 (G. Neugebauer)

37 电磁学

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第1章。

37.1 (a) 假设静止的两个质子之间的引力和电力大小相等，则质子的质量 M 应该多大？将这一结果和质子的实际质量 m_p 比较，结果如何？

(b) 位于10m讲台两端有两个硬币，如果每个硬币上的核电荷和电子电荷有大约1%未彼此抵消，则它们之间的电力 F 将是多少？你能想到一个物体，其质量与这个力大小相当吗？（假定硬币由纯银制成，质量为 2.5×10^{-3} kg。）

37.2 (a) 粗略估算，把两个相等的“半铀核”合成一个整体，抵抗电力所必须做的功 W_U 。

(b) 粗略估算，把两个氦核合成一个氦核，抵抗电力所必须做的功 W_{He} 。

37.3 在铜中，每个原子有一个“传导”电子。当10A的电流流经一10号规格的铜线（ 31.8 ft lb^{-1} ）时，传导电子的平均速率 $\langle v \rangle$ 是多少？ $\langle v \rangle^2 / c^2$ 多大？

37.4 在某空间区域，有一沿 x 轴正方向、大小为 $10\,000\text{V cm}^{-1}$ 的均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 。在同一区域，还有沿 y 轴方向的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 。速度为 $v=c/3$ 的 μ 子束沿 z 轴正方向沿直线 穿过该区域，如图37-1所示。

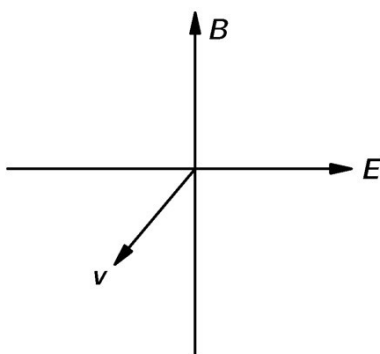


图 37-1

已知： μ 子的质量是电子的207倍，所带电荷大小和电子相同。

(a) 求磁场的大小。

(b) 据此实验，你能判断出 μ 子的电荷是+还是-吗？

37.5 在某空间区域，有一均匀电场 $\boldsymbol{B}$ ， $B_x=0$ ， $B_y=0$ ， $B_z=B_0$ 。磁场不随时间变化，在该区域没有电流或电场。质量为 m ，电量为 q 的粒子初始时位于 $x=0$ ， $y=0$ ， $z=0$ 点，速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 $+x$ 方向。

(a) 画出粒子的运动路径，并用 B_0 ， m ， v ， q 定量地描述粒子路径。

(b) 假定 $B_x=0$, $B_y=0$, 但 $B_z=B_0+ax$, 其中 $a>0$ 。对于 ax 与 B_0 相比一直较小, 但不可忽略的情况, 画图定性地描述粒子的运动路径。

(c) 证明: (b) 中所假设的场, 当其所在的有限空间内没有电流或电场时, 与麦克斯韦方程组中的一个方程不相容。

37.6 质量为 m , 电量为 $+q$, 位于位置 $x=z=0$, $y=a$ 的粒子以速度 $\mathbf{v}=v_0 \mathbf{e}_x$ 运动。粒子受到位于原点的负电荷 $-Q$ 和沿 $+z$ 方向的均匀磁场 B_0 的影响。

(a) B_0 必须达到多大时, 粒子围绕一稳定粒子做半径为 a 的圆周运动?

(b) 如果磁场大小与此不同, 解释为什么粒子速率只与径向距离有关。

(c) 如果粒子从位置 $x=z=0$, $y=a$ 静止释放, 定性地画出几圈粒子轨道。

38 矢量场的微分学

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第2章。

38.1 半径为 a 的铜线外面包裹一同轴的绝缘外层，外径为 b 。导线通以电流，使其温度升至 T_1 ，而绝缘层外部温度保持在 T_2 （接近室温）。

(a) 求绝缘层内的温度梯度 ∇T ，以 a ， b ， T_1 ， T_2 表示。

(b) 如果20A的电流通过10号规格铜导线，绝缘层是厚度为0.2cm的橡胶，橡胶的热导率是 $1.6 \times 10^{-3} \text{ Wcm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ，求温度差 $T_1 - T_2$ 。（10号规格铜导线的直径为0.13cm，电阻密度是 $1\Omega/1000\text{ft}$ 。）

38.2 通过直接计算证明：

(a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ 。

(b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 。

38.3 $\mathbf{R}$ 是由原点指向 (x, y, z) 的矢量，证明：

(a) $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$ 。

(b) $\nabla \times \mathbf{R} = 0$ 。

除 $R=0$ 外,

$$(c) \nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = 0.$$

$$(d) \nabla \times (\mathbf{R}/R^3) = 0.$$

$$(e) \nabla (1/R) = -\mathbf{R}/R^3.$$

(f) 从 (b) 以及《费曼物理学讲义 (第2卷)》方程 (2.46) 可知: $\mathbf{R}$ 可以写成 $\mathbf{R} = \nabla \varphi$ 。问 φ 是什么?

38.4 麦克斯韦方程组是

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0,$$

$$(2) \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t,$$

$$(3) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(4) \epsilon^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t + \mathbf{j} / \epsilon_0,$$

电荷守恒可以写成

$$(5) \nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t.$$

(a) 证明: 上面方程 (3) 和方程 (2) 的散度是协调的。

(b) 证明: 方程 (5) 可以通过对方程 (4) 取散度得到。

(c) 证明: 在 $\mathbf{j}=0$, $\rho=0$ 的空间, 电场 $\mathbf{E}$ 满足波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0。$$

(d) 证明：在 $j=0$, $\rho=0$ 的空间，磁场 $\mathbf{B}$ 满足一样的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0。$$

(e) 证明：方程 (2) 意味着 $\mathbf{E}$ 可以写成

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

其中 $\mathbf{A}$ 由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 定义。

(f) 为什么 $\mathbf{B}$ 可以写成 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$?

38.5 刚体绕轴转动的速度是一个场 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 。证明：

(a) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 。

(b) $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ ，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是角动量。

38.6 (a) 通过直接计算证明：如果 $\mathbf{A}$ 是常矢量， $\mathbf{R}$ 是径矢量，则

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 2\mathbf{A}。$$

(b) 我们已经知道

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C}。$$

这使我们想到

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{R}) - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{R} = 3 \mathbf{A} \quad (\text{错误})$$

为什么把 $\mathbf{B}$ 替代为 ∇ 导致了错误？

38.7 一根长钢轴按照设想进行热处理。在冷却过程中的某一时刻，温度分布 $T(x)$ 如图38-1 (a) 所示。每 10°C 间隔的等温线如图38-1 (b) 所示。我们一直假定温度仅依赖于 x (到轴的一端的距离)。

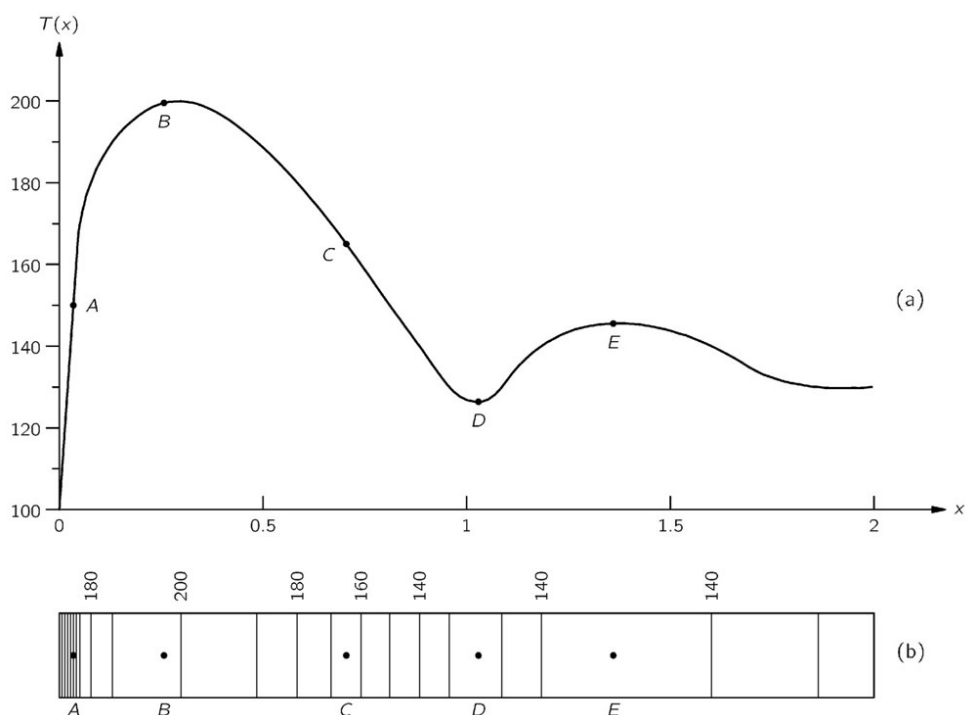


图 38-1

(a) 在 A , B , C 点，画出表示 ∇T 方向和大小箭头。

(b) 在标记出的五点中，哪个点热流 h 的散度最大？

(c) 标记出的五点中，有几处 $\nabla \times \mathbf{h} = 0$?

39 矢量积分学

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第3章。

39.1 (a) 在《费曼物理学讲义（第2卷）》第1章，给出了麦克斯韦方程组的一种表达形式，在第2章给出了其微分形式。证明这两种表达形式是等价的。

(b) 如果 ρ 是单位体积的电荷， $\mathbf{j}$ 是电流密度，证明：方程

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

等价于电荷守恒的表达。

39.2 球面上有放射性物质涂层。该物质放射高能 α 粒子。假设粒子只沿径向由球面向外发射。这种带电粒子的流动形成电流。这一电流能否产生磁场？

39.3 位于原点的点电荷的场有如下形式

$$\mathbf{E} = \frac{K}{r^3} \mathbf{r},$$

其中 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ， $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ， K 是常数。

- (a) 计算通过以原点为中心， a 为半径的球面的 $\mathbf{E}$ 通量。
- (b) 利用高斯定理，将通过球面的 $\mathbf{E}$ 通量和对 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的体积分联系起来。你能解释此结果吗？
- (c) 计算矢量 $\mathbf{E}$ 在 xy 平面内围绕路径 s 的线积分，如图39-1所示。利用斯托克斯定理确认结果。

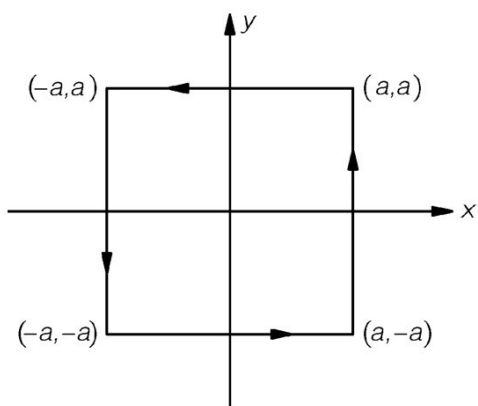


图 39-1

- 39.4** (a) 利用习题38.3 (a) 中的结果，寻找一个公式，可以把体积 V 区域的积分转化为在其表面 S 上的积分。
- (b) 就球面和长方体两个特例，检测 (a) 中的结果。

40 静电学

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第4章。

40.1 参照图40-1。

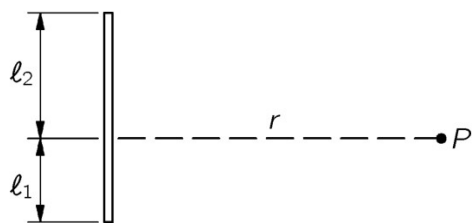


图 40-1

- (a) 有一长度为 $(l_1 + l_2)$ m，电荷密度为 λ C/m 的线带电体， P 点到线的距离为 r 。求 P 点处的电势 ϕ 。
- (b) 将 (a) 中的结果与 $r \gg l_1 + l_2$ 时的预期电势作比较。
- (c) 通过比较由电势 ϕ 和高斯定理推导出的电场 $\mathbf{E}$ ，来检测 $r \ll l_1 + l_2$ 的极限下 (a) 中的结论。

40.2 如图40-2所示，一半径为 R 的薄圆盘具有均匀的表面电荷密度 σ 。 P 点在圆盘的轴上，到圆盘中心的距离为 r 。求 P 点的电场 $\mathbf{E}$ 。

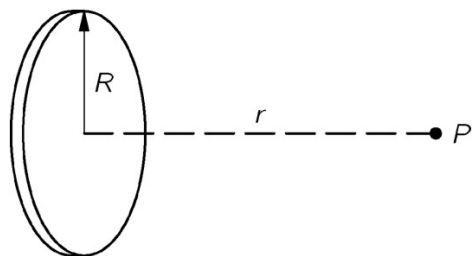


图 40-2

40.3 如图40-3所示，两同心金属球，内球带电 q' ，外球带电 q 。

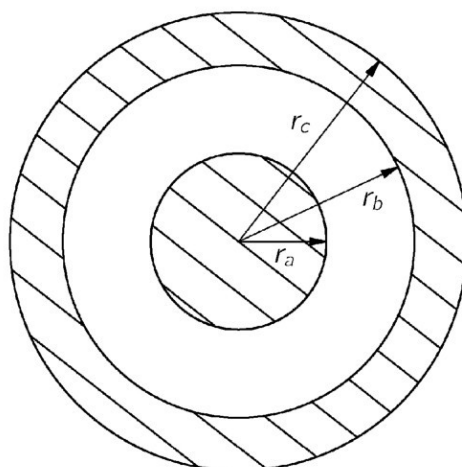


图 40-3

- (a) 画出电场径向分量 E_r 关于径向距离的函数图。
- (b) 画出电势（相对于无穷远处）关于径向距离的函数图。
- (c) 求内球表面上的势 ϕ 。
- (d) 如果内球球心和外球球心移离一段距离，对于 $r_b < r < r_c$ 和 $r > r_c$ ，电场发生什么变化？

41 高斯定律的应用

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第5章。

- 41.1** 证明电势 ϕ 具有如下有趣的性质：在一假象的球面上的电势平均值等于球心处的电势，如果球内没有电荷的话。你能想到这性质的一个应用吗？
- 41.2** 一极其长的圆柱体电荷密度均匀，为 ρ 。求在圆柱体内，但远离圆柱体端点处的电场 $\mathbf{E}$ 。注意这一结果与均匀带电球体内部电场的区别。
- 41.3** 两个大金属板平行放置，两板间距离为 d 。两板的一个端点由金属带连接。一面电荷密度为 σ 的薄塑料片置于两板之间，与上板的距离为 $d/3$ 。如图41-1所示。分别计算上板附近和下板附近的电场 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 。

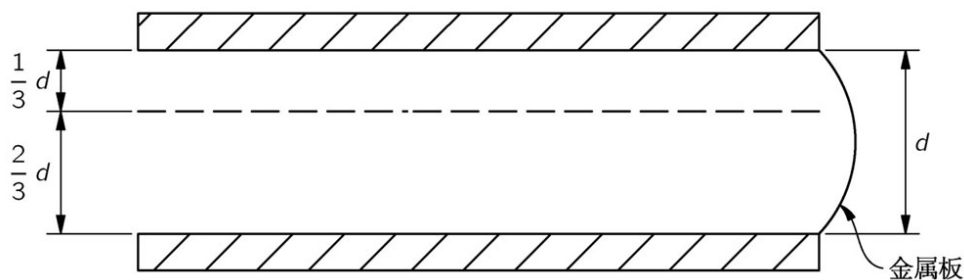


图 41-1

41.4 如果整个空间中，电荷密度只随 x 变化，求 x 处电场的 x 分量 E_x 的一般公式。

41.5 在一电子管中，电子由一热金属平面（发射板）发射，并被另一平行于发射板的金属平板（接收板）收集。两金属平板相距 d 。如图41-2所示。（与金属平板的横向尺度相比，距离 d 很小。）两板间的电势由 $\phi = kx^{4/3}$ 给出，其中 x 是到发射板的距离。

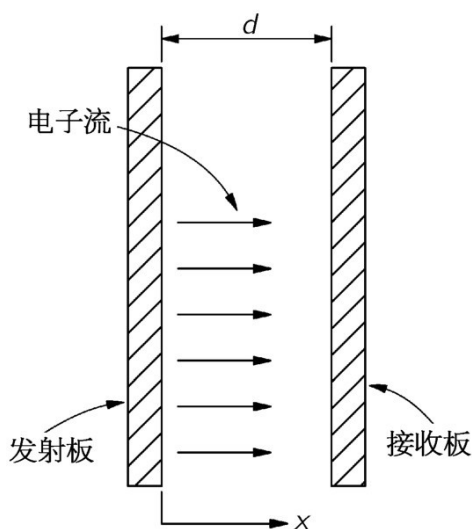


图 41-2

(a) 求发射板上的表面电荷密度 σ_e 。

(b) 求接收板上的表面电荷密度 σ_e 。

(c) 对于 $0 < x < d$ ，体电荷密度 $\rho(x)$ 是多少？

41.6 考虑一导体，其表面电荷密度是 $\sigma \text{ C/m}^2$ （ σ 不必是常数）。证明：在小面积元 dA 上，作用在电荷上的力垂直于表面，为 $(\sigma^2/2\epsilon_0) dA$ 。

41.7 真空中，在场致发射（field emission）发生前，导体表面能够存在的最大电场强度大约为 10^8 V m^{-1} 。如果导体由铜组成（密度为 8.9 g cm^{-3} ），产生这一场的表面电荷是负的，则

（a）比较单位面积的电子数 N_e 和原子数 N_a 。

（b）比较在这一场中作用在电子上的力 F_e 和离质子一个典型“原子距离”（ $\approx 0.5 \text{ \AA}$ ）处电子受到的力 F_a 。

41.8 负 μ 子的带电量 and 电子相同，但质量是电子的207倍。当一个负 μ 子停在物质中时，被原子核吸引，可能取代原子中的一个电子而形成“ μ ”原子。由于 μ 子质量更大， μ 子将更靠近原子核。对于重核，在最低能态时， μ 子甚至会处在核内。 μ 子不通过核力而仅通过电力与核发生相互作用，并且对于 μ 子，核可看作是均匀带电球体。从其他核物理实验中得知，核半径由 $R=R_0 A^{1/3}$ 给出，其中 R_0 近似为 $1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ ， A 是质子和中子总数。

考虑一个 μ 原子的模型，其中 μ 子穿过铅核中心沿直线来回振荡。

（a）求振荡的固有频率 ω 。

- (b) 你的 μ 原子模型中，最低的两个能态的能量差是多少？
- (c) 实验观测发现，当铅中形成 μ 原子时，发射出6MeV的X射线。你如何解释这一现象？

41.9 想象地球密度均匀，沿直径打通一条隧道。

- (a) 如果一物体落入隧道，它将以周期 P 振荡。 P 和卫星绕贴近地面的轨道运动的周期相同。
- (b) 计算 P 。

41.10 我们知道，地球每年以热的形式散发出约 8×10^{20} J的能量。在细致研究解释这一事实的热模型前，考虑一下明显过分简化但仍能给出量级估算的模型，将会有益。作为例子，考虑这种可能性：热量完全由均匀分布在地球内的放射性物质产生，放射性物质在衰变中发射的粒子的能量转变为了热。估计地球中心的温度粗略为 2500°C ，地球典型物质成分的热导率大约是 $0.03 \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 。上面描述的模型是否与这些估计一致？

41.11 两个长同心导体圆筒彼此绝缘且带电。在远离两端处，内圆筒静电荷密度为 $+\lambda_1 \text{ C m}^{-1}$ ，外圆筒静电荷密度为 $+\lambda_2 \text{ C m}^{-1}$ 。内圆筒的内、外半径分别为 r_1 和 r_2 ；外圆筒的内、外半径分别为 r_3 和 r_4 。

- (a) 对以下情况求 $\mathbf{E}(r)$ 。

(1) 接近中部的点 (边缘效应可忽略)。

(2) 刚好在外圆筒的外部。

(b) 定性描述电场和电势的任何变化, 如果

(1) r_1 减小。

(2) r_2 增加。

(3) 内圆筒的外横截面是边长为 $2r_2$ 的正方形 (假设 $\sqrt{2} r_2 < r_3$)。

42 在各种情况下的电场

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第6章。

42.1 如图42-1所示，电荷 Q 到两互相垂直的半无限大导体平面的距离分别为 a 和 b 。用镜像法求作用在电荷 Q 上的力 F 。

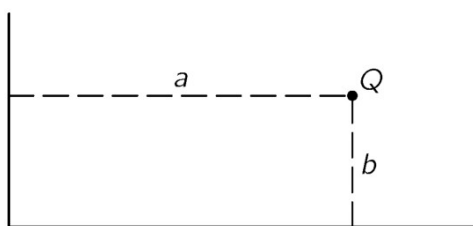


图 42-1

42.2 有一接地的大导体平板，在距离其表面 x_0 处释放一带电量为 q 的粒子。粒子被平板吸引，由静止向板运动。

(a) 求动能关于到平板距离 x 的函数关系。

(b) 在你的答案中，你发现什么非物理的结果吗？

(c) 只有距离小至原子距离时（约 $1\text{\AA}$ ），一个真实的金属平板可看作是理想的导体面。如果电子在距离导体表面 1cm 处由静止释放，估计电子到达金属板时的动能。以 eV 为单位。

42.3 $1\text{cm}\times 10\text{cm}\times 100\text{cm}$ 的矩形塑料盒电荷分布均匀，电荷密度为 ρ Ccm^{-3} 。考虑垂直于 $10\text{cm}\times 100\text{cm}$ 面且通过矩形中心的一直线。粗略画出沿该直线的电势 ϕ 关于到中心的距离 x 的函数图。对于 x 从 0.001cm 到远大于 100cm 的范围内，采用对数坐标更合适。在同一张图上大致画出表征电场 E 大小的曲线。

42.4 地球持续地受到来自太阳系之外的高能宇宙射线的轰击。高空气球和卫星的高空测量表明：宇宙射线几乎全部由质子组成，尽管也含有一些 α 粒子、较重的核、电子。轰击质子的平均能量大约几个 10^9 eV。到达地球大气的质子强度大约是每平方厘米每秒一个质子。有人也许会想：因宇宙射线而来到地球的电荷不断提高地球的势，待地球的势足够高，以至于质子无法在到达地球，需要多久？这一时间 T 与地球约50亿年的年龄相比如何？如果 T 小于地球年龄，我们就面临一个问题：为什么宇宙射线仍然能到达地球？

42.5 (a) 一长圆柱形电容器由一个半径为 b 的圆柱体和一个与其同轴、处于其内部的一半径为 a 的导体圆柱体组成。求这一电容器单位长度的电容 C_l 。

(b) 如果结构有缺陷，在外壁上有尖锐的鼓包，请定性分析将有什么结果？

42.6 如图42-2所示，到一半径为 a 的不带电绝缘导体球距离为 b 处有一电荷 $+q$ 。

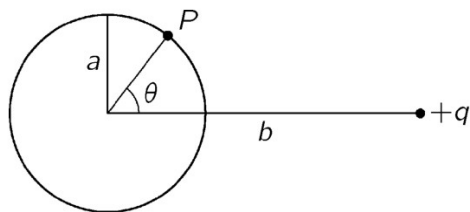


图 42-2

- (a) 求球的电势 ϕ 。
- (b) 在图中标记的 P 点，在球上感应的表面电荷密度 $\sigma(\theta)$ 是多少？
- (c) 如果球的电势升高到 V ，求电荷与球之间的力 F 的大小。

42.7 在《费曼物理学讲义（第2卷）》第6章定性地论证了如何求解表面电荷密度按 $\cos\theta$ 变化的球体外面的电场。现在定量地完成求解过程，解出表面电荷密度为 $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ (σ_0 是常量， θ 是极角) 的球外面以及内部的电场。

.....

42.8 《费曼物理学讲义（第2卷）》中，方程 (6.14) 和 (6.15) 给出了偶极子 $\mathbf{p}$ 的场强。

- (a) 求在点 (r, θ, φ) ，偶极子场 $\mathbf{E}$ 的径向分量和切向分量。
- (b) 证明：在通过偶极子点的任意一给定直线上，所有点上的电场方向相同。

- (c) 在离偶极子任一给定距离，在相对于 $\mathbf{p}$ 的方向角度为 $0, \pi/4, \pi/2$ 处，求 $\mathbf{E}$ 的方向和相对强度。

42.9 考虑一放于电场中的偶极子，该电场在偶极子放入前是均匀的，强度为 E_0 。

- (a) 如果偶极子指向外场方向，则有一等势面包围住偶极子。证明该等势面是球面。
- (b) 当球面半径是 a ，求偶极矩的大小。
- (c) 大致画出球外的电场。
- (d) 如果在该等势面上放一具有相同电势的薄导体壳，电场将如何变化？
- (e) 球面上的表面电荷密度 $\sigma(\theta)$ 将如何？
- (f) 该电荷密度的偶极矩将为多少？
- (g) 你将如何利用以上结论？

42.10 有一长导线，单位长度上的电荷为 λC (λ 是常数)。在到导线距离为 r 的地方有一电偶极矩为 $\mathbf{p}$ 的粒子。偶极矩位于导线和粒子所确定的平面内，如图42-3所示。

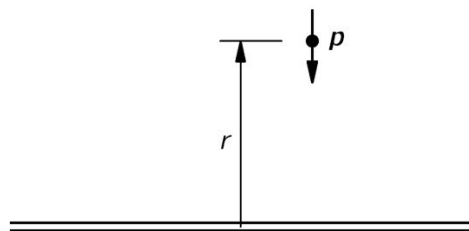


图 42-3

(a) 下面两种情况，求作用在粒子上的力 $\mathbf{F}$ 和转矩 τ 。

(1) $\mathbf{p}$ 垂直于导线。

(2) $\mathbf{p}$ 与导线平行。

(b) 证明：在电场 $\mathbf{E}$ 中，偶极子 $\mathbf{p}$ 受到的力 $\mathbf{F}$ 的一般形式为 $\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ 。

42.11 有一很大的偶极子层，单位面积上有 N 个偶极子，每个偶极子的偶极矩为 $\mathbf{p}$ ， $\mathbf{p}$ 垂直于层面。求距离层面 r 处的势 ϕ 。

42.12 如图42-4所示，电荷 $+q$ 均匀分布于一半径为 a 的细圆环。圆环位于 yz 平面，环心位于原点，在环心处放置一电荷 $-q$ 。

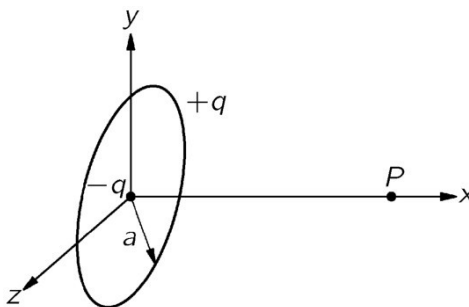


图 42-4

- (a) 求点 $P = (x, 0, 0)$ 处的势 ϕ 。
- (b) 求 P 点的电场 E 。
- (c) 对于 $x \gg a$ ，电场如何变化？
- (d) 在远距离处，电场如何变化？与偶极子的场作比较。你能解释原因吗？

42.13 一平行板电容器的电容为 100pF ($1\text{pF}=10^{-12}\text{F}$)，两板间隔为 1cm ，用电池给电容充电至电势差为 10V 。然后电场与电容分开。用蓝光照射下极板，使得动能为 $0\sim 1.5\text{eV}$ 的电子被发射。电池电压使得这些电子被吸引到上极板。总电流关于时间的函数如图42-5所示。

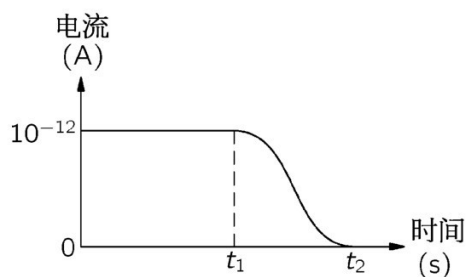


图 42-5

- (a) 经过多长时间（图中的 t_1 ），两板间的电势差变为零？
- (b) 时间远大于 t_2 时，电势差 V 如何？
- (c) 在电容器充电前，如果把平板间距离加倍，（a）中你的答案将如何改变？

(d) 在电容器充满电以及电池断开之后，如果把平板间距离加倍，(a) 中你的答案将如何改变？

42.14 有一根长度为1m，半径为1cm的绝缘棒，其轴沿 x 轴，两端分别位于 $x = -0.5\text{m}$ 和 $x = +0.5\text{m}$ 处。其体电荷密度由 $\rho = ar^2$ 给定，其中 r 是到轴的距离， a 是一正的常量—— 2Cm^{-5} 。

(a) 对于点 $y = 0, 0.5, 1.0, 2.0\text{cm}$ ($x = z = 0$)，求电场 $\mathbf{E}$ 的大小。

(b) 对原点的电势作一好的估算（设无穷远处的势为零）。给出估算的不确定范围，并进行检验。

(c) 在 $x = 0.5\text{m}, y = z = 0$ 处的势是大于、小于还是等于原点的势？

43 在各种情况下的电场（续）

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第7章。

43.1 (a) 证明符号相反的两平行线电荷的等势面是圆柱面。假设两线相隔距离为 d ，电荷密度分别为 $+\lambda \text{ C m}^{-1}$ 和 $-\lambda \text{ C m}^{-1}$ 。

(b) 利用 (a) 的结论求两平行导线单位长度的电容 C_1 。两导线的半径均为 r ，导线中心之间的距离为 d 。

(c) 证明：如果 $x, y \gg d$ ，则电势可以由如下复变函数求得

$$f(z) = U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}。$$

44 静电能

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第8章。

- 44.1** 在《费曼物理学讲义（第2卷）》第8章中有以下论述：原子核中包含 Z 个质子，在一定程度上质子均匀地分布于半径为 r 的球体，静电能的值约为

$$U = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r}。$$

你同意这一说法吗？

- 44.2** 一无线电调谐电容器具有的最大电容是100pF。通过旋转可动板，电容能够降到10pF。假设在最大电容时，对电容充电，电势差达到300V。然后，转动旋钮至最小电容档（板上的电荷保持不变）。

（a）求电势差的最终值 V_f 。

（b）转动旋钮时，必须做的功 W 是多少？

- 44.3** 电容为 C_1 和 C_2 的两个电容器初始时分别被充电至所带电量为 Q_1 和 Q_2 。

(a) 证明：除特殊情况外，当把两电容并联时，所贮存的静电能 U 减小。

(b) 失去的能量去哪儿了？

(c) 问联接在一起而不损失能量的条件是什么？

44.4 (a) 证明：偶极矩为 $\mathbf{p}$ 的偶极子位于电场 $\mathbf{E}$ 中，其静电能为

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}。$$

(b) 计算电场 $\mathbf{E}$ 作用在偶极子上的转矩。利用上面的能量关系直接进行计算。

(c) 如果将偶极子的两个电荷先后放入电场，静电能和上面的结果一样吗？如果不同，计算差值。如果相同，给出物理的解释。

44.5 在平行板电容器的板上，电荷为 Q ，证明两板的相互吸引力大小为 $F = Q^2 / (2\epsilon_0 A)$ ，其中 A 是平行板的面积。

44.6 π 介子被发现有三种带电状态，即有正、负和中性三种 π 介子。带电 π 介子的质量（乘以 c^2 ）是139.6MeV，而中性 π 介子的质量是135.0MeV。在 π 介子的一种模型中，质量差别被认为源于静电能。如果进一步假设带电 π 介子可以用球体表示，且电荷在球体上均匀分布，则可能据此计算 π 介子的“半径”。

在这些假设前提下，计算 π 介子的半径 r_π 。（你的结果和核大小的其他估算一致吗？）

44.7 有一金属球壳，其内径为 a ，外径为 b ，球心位于原点。在壳上的一点有一小孔。

（a）如果在壳上没有静电荷，把电荷 q_1 从无穷远处，通过小孔，拉到原点，需要多少功 W_a ？

（b）如果壳上总电荷为 q_2 呢？

45 电介质

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第10章。

45.1 如图45-1所示，一平行板电容器由大小相等，介电常数不等（分别为 κ_1 和 κ_2 ）的电介质填充。

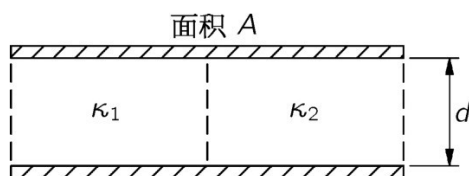


图 45-1

(a) 通过简单的论证，说明电容为（忽略边缘效应）

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

其中， A 是平板面积， d 是两板间距离。

(b) 利用《费曼物理学讲义（第2卷）》中方程（10.26），给出更详细的证明。

(c) 利用《费曼物理学讲义（第2卷）》中方程（8.30），你能想到另一种证明吗？

45.2 平行板电容器的极板是边长为20cm的正方形，两板间距为1cm。电容器充电至电势差为10V，然后与电池断开。如图45-

2所示，将厚度略小于1cm的一大面积正方形介质板插入两板间，使得电容器中10cm×20cm的面积被电介质填充。电介质的介电常数是4.0。



图 45-2

- (a) 求两板间的吸引力大小 F 。
- (b) 在电容器内部的位置（因此边缘效应可忽略），电介质单位体积的偶极矩 P 是多少？
- (c) 假设介质板由介电常数为4.0的物质组成，在其中嵌入了均匀分布的小金属球。现在两板间的电势差是大于、小于还是等于原来的电势差？

45.3 一两板间距为 d 的平行板电容器，其在空气中的电容为 C_0 。介电常数为 κ 、厚度 $t < d$ 、面积与极板面积相同的绝缘板插入电容器中。绝缘板与电容器极板平行。忽略边缘效应，证明现电容为

$$C = \frac{C_0}{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{t}{d}}。$$

45.4 一孤立金属球，半径为 a ，在其表面有自由电荷 Q 。该球被介电常数为 κ 、内径为 a 、外径为 b 的均匀介质层覆盖。

(a) 计算在电介质的内、外表面的表面极化电荷 σ_{pol} 。

(b) 求电介质内，极化电荷的体密度 ρ_{pol} 。

45.5 一平行板电容器与电池相连，保持两极板间电势差为 V 。一介电常数为 κ 的板插入两极板间，完全填满两极板间的空间。

(a) 证明在插入过程中，电池做功为 $W_{\text{batt}} = qV (\kappa - 1)$ ，其中 q 是电介质插入前，极板上的电荷。

(b) 当介质板插入时，机械力所做的功 W_{mech} 是多少？这个功是由插入者做的，还是作用于插入者的？

(c) 如果我们不是把介质板插入电容器，而是通过改变两极板间的距离来实现相同的电容，则 W_{batt} 和 W_{mech} 有什么关系？

45.6 把半径分别为 a 和 b 的两同轴金属管竖直放入一个大油库中。如果在两管间施加电压 V ，则两管间的油位将升至

$$H = \frac{V^2 (\kappa - 1) \epsilon_0}{\ln(b/a) \rho (b^2 - a^2) g},$$

其中 κ 是介电常数， ρ 是油密度。

45.7 当一电场线穿过介电常数分别为 κ_1 和 κ_2 的两电介质的界面时，电场线与两介质表面的法线的夹角为 θ_1 和 θ_2 ，满足关系式 $\kappa_1 \cot\theta_1 = \kappa_2 \cot\theta_2$ 。请证明。

提示：假设界面上没有自由电荷。

46 在电介质内部

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第11章。

- 46.1** 考虑一半径为 a 的电介质材料球体，该球被均匀极化，体极化密度为 $\mathbf{P}$ ，如图46-1所示。求球内和球外的电场。

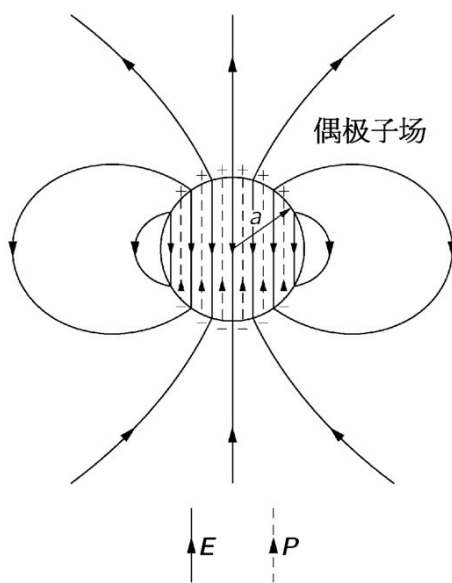


图 46-1

- 46.2** 在 0°C 和 1atm 下，氦的介电常数是 $1.000\,074$ 。求氦气处于 100V m^{-1} 的电场中时，在每个氦原子中感应的偶极矩 p 。
- 46.3** 水蒸气是极性气体，其介电常数明显与温度有关。下表是关于这一效应的实验数据。

$T(\text{K})$	$P(\text{cmHg})$	$(\kappa-1)\times 10^5$
393	56.49	400.2
423	60.93	371.7
453	65.34	348.8
483	69.75	328.7

(a) 假设水蒸气符号理想气体定律，计算分子极化率 α 关于温度倒数 $1/T$ 的函数关系，并画出点图。

(b) 从曲线的斜率中，推出水分子的永偶极矩 p_0 。

46.4 (a) 考虑一两个原子组成的系统，两原子之间的距离固定为 a ，每个原子的极化率为 α 。当该系统处于铁电状态时，求 a 与 α 的关系。

(b) 如果你觉得(a)太过简单，那么考虑由氧原子组成的一条线，原子规则排列，相邻原子的距离为 a 。再假设相邻两个氧原子正中间有一个钛原子，如图46-2所示。记氧的极化率为 α_O ，钛的极化率为 α_T 。若该系统是铁电体， α_O 和 α_T 应满足什么条件？

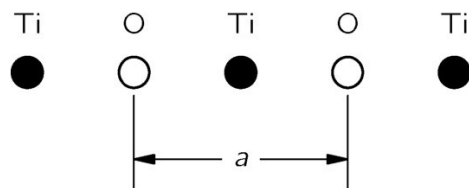


图 46-2

注：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.20。$$

46.5 一“介电”材料由直径为 d 的铜球规则排列而成。相邻铜球的中心相距 $3d$ 。假设每个铜球仅受外加电场的影响（即忽略邻近球对电荷分布的影响），求这种材料的介电系数 κ 。

47 静电模拟

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第12章。

47.1 半径为 a 的环由半径为 b 的铜导线制成（ $b \ll a$ ）。环嵌入半径为 R 的塑料球的球心（ $a \ll R$ ）。一交变磁场使得环中感生电流。电流加热导线，以功率 W （ Js^{-1} ）产生热量。大球的外表面温度为 T_R 。处于稳态时，环心的温度 T_0 是多少？塑料的热导率等于 K 。

47.2 在习题41.10中，考虑过一个简单的地球热模型。另一种模型（同样过于简化）是：在地球内部，有一导热率极高的球形核。如果该核温度为 $2\,500^\circ\text{C}$ ，包围该核的地壳的热导率是 $0.03\text{W cm}^{-1}\text{K}$ ，地球每年发出的热量为 $8 \times 10^{20}\text{J}$ ，求该核的半径 a 。

47.3 (a) 对于一定的几何和物理情况，将势写成如下形式是有好处的，

$$\varphi = f(r) \cos \theta = f(r) \frac{z}{r},$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。将 $f(r)$ 展开成幂级数

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n,$$

如果 φ 满足拉普拉斯方程，则 b_n 中只有两个非零。求之。

(b) 对于类似的二维问题，势可以写成

$$\varphi = g(\rho) \cos \theta = g(\rho) \frac{z}{\rho},$$

其中 $\rho^2 = y^2 + z^2$ 。将 $g(\rho)$ 展开成幂级数

$$g(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n,$$

如果 φ 满足拉普拉斯方程，哪些 c_n 非零。

注：使用笛卡尔坐标进行计算。

- 47.4** 两水管相距为 d ，垂直进入并穿过厚度为 t 的一面大墙，如图47-1所示。墙的热导率是 K ，远离管子的地方温度为 T_0 。在 $x = +d/2$ 处，热水在管中流动，以 W 瓦特的速率向墙传热，在 $x = -d/2$ 处，冷水在管中流动，以 W 瓦特的速率从墙吸热。作为二维问题考虑，并且忽略管的有限尺寸效应。求点 P ($x = 100d$, $y = 100d$) 处的温度 T_P 。令 $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $d = 50\text{cm}$, $K = 0.03\text{Wcm}^{-1}\text{K}$, $W = 200\text{W}$, $t = 10\text{cm}$ 。在计算中做适当的近似。

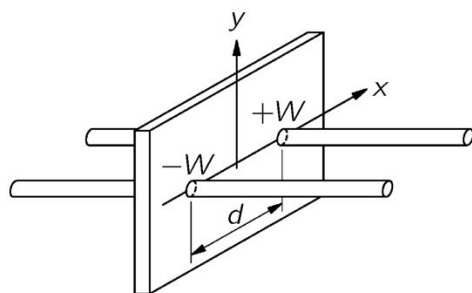


图 47-1

48 静磁学

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第13章。

- 48.1** 四根10号规格铜导线相互平行，它们的横截面构成一边长为20cm的正方形。每根导线中通有20A的电流，如图48-1所示。

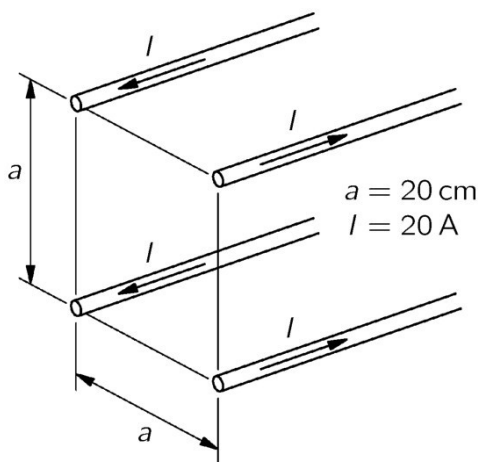


图 48-1

- (a) 正方形中心的磁场 $\mathbf{B}$ 方向和大小如何？
- (b) 左下方导线每米所受的力 $\mathbf{F}$ 大小和方向如何？

- 48.2** 一根长的实心电介质圆柱体，半径为 r ，被永久极化，极化方向处处径向向外，且大小与到轴的距离成正比。即单位体积的偶极矩是 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \mathbf{r} / 2$ 。圆柱体以恒定角速度 ω 绕轴转动。求在轴上离端点不是太近的地方的磁场 $\mathbf{B}$ 。

48.3 一长同轴电缆由两同心导体组成，如图48-2所示。两导体中电流 I 大小相同，方向相反。可以假设，电流在导体中均匀分布。

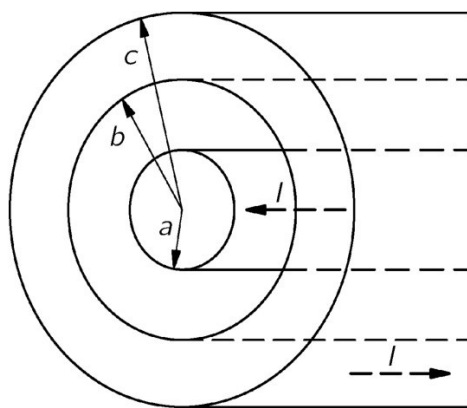


图48-2

(a) 求径向距离为 r ($r < a$) 处的磁场 $\mathbf{B}$ 。

(b) 求两导体间 ($a < r < b$) 的 $\mathbf{B}$ 。

(c) 求 $b < r < c$ 处的 $\mathbf{B}$ 。

(d) 求 $r > c$ 处的 $\mathbf{B}$ 。

48.4 一长导线，电流为 I_1 。一长方形线圈，长 l ，宽 w ，电流为 I_2 。导线位于线圈所在平面内，且与线圈长边平行，如图48-3所示。

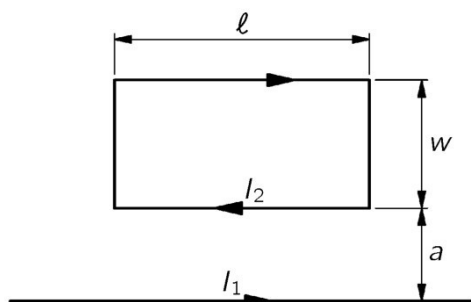


图 48-3

- (a) 求线圈所受的力 F_{loop} 。
- (b) 求导线所受的力 F_{wire} 。
- (c) 求线圈所受的转矩 τ_{loop} 。

48.5 电视显像管的扫描功能通过磁场使电子束偏转来实现。磁场来自套在显像管颈部的一组偏转线圈。电子束由电子枪射出，能量约为3.0keV（偏转前）。偏转后电子进一步加速。各部分尺寸如图48-4所示。

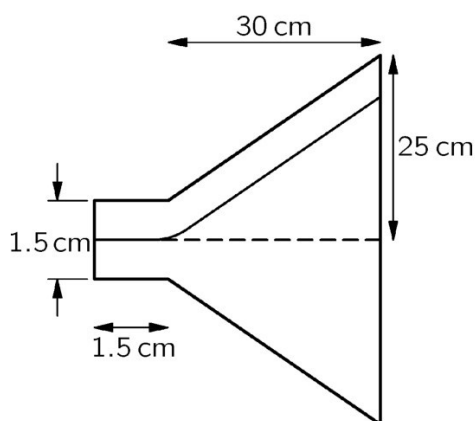


图 48-4

(a) 在最大偏转时，估算磁场 $\mathbf{B}$ 的大小。

(b) 估算这时线圈的安培匝数 nI 。

- 48.6** 一根很长的导体棒，半径为 a ，在其内部有一半径为 b 的孔。孔轴与棒轴平行，相距为 d ，如图48-5所示。均匀电流 $+j$ 流过导体。求在孔轴上远离端部的地方，磁场 $\mathbf{B}$ 的大小是多少？

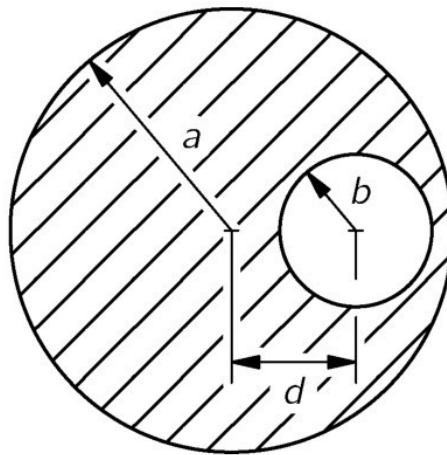


图 48-5

49 在各种不同情况下的磁场

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第14章。

- 49.1** 在一家塑料薄膜工厂，一薄塑料宽带以速率 v 在两个相邻滚筒间运动，如图49-1所示。在制造过程中，薄膜积累了均匀的表面电荷 σ 。

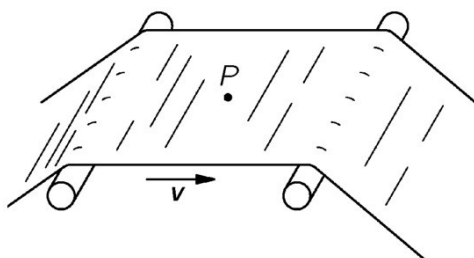


图 49-1

(a) 求图示 P 点附近的矢势 $\mathbf{A}$ 。

(b) 求同一区域的磁场 $\mathbf{B}$ 。

- 49.2** 如图49-2所示的导线中，电流为 I 。在半圆中心处，由以下各部分贡献的磁场 $\mathbf{B}$ 分别是多少？

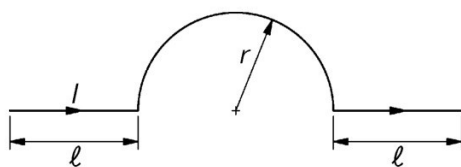


图 49-2

(a) 每一长度为 l 的直线段。

(b) 长度为 πr 的半圆。

(c) 整个导线。

49.3 在实际的磁装置中，均匀磁场经常是必需的。亥姆霍兹线圈（电流方向相同的两个同轴线圈）产生的磁场的均匀性是其重要特征之一。假设线圈半径为 a ，轴在 x 轴上，每个线圈电流为 I ，两线圈相距 b ，如图49-3所示。

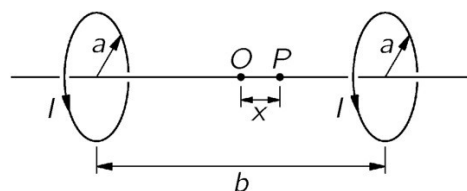


图 49-3

(a) P 点在线圈轴上，到中点 O 的距离为 x 。求 P 点的磁场。

(b) 把磁场的表达式展开为幂级数，保留到 x^2 阶次。

(c) 要使 x^2 项为零， a 和 b 必须满足什么关系？这有什么重要意义？

(d) 证明在 (c) 的条件下，线圈产生的磁场为

$$B_x = \frac{8I}{5^{3/2} a \epsilon_0 c^2} \circ$$

49.4 一边长为 a 的正方形线圈，电流为 I 。

(a) 利用毕奥-萨伐尔定律 (Biot-Savart law) 证明: 线圈轴上到线圈中心距离为 x 处的电场为

$$B = \frac{4a^2 I}{\pi \epsilon_0 c^2 (4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}。$$

(b) 利用矢势得出相同结果。

提示:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \int f(x, y) dy = \int [\lim_{x \rightarrow c} f(x, y)] dy。$$

49.5 有一半径为 a 的圆环, 电流为 I 。利用矢势计算圆环轴上任意一点的磁场。

49.6 一半径为 a 的导体球, 电势被升至 V 。球绕一个轴以角速度 ω 转动。证明球外的磁场和一磁偶极子的磁场相当, 该磁偶极子的偶极矩为

$$\mu = \epsilon_0 \omega V \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)。$$

同样证明球内的磁场为

$$B_{\text{int}} = \frac{2\omega V}{3c^2}.$$

49.7 已经指出，地球的转动可以由以下方法测量：把一带电圆柱导体放于北极，轴指向地心，测量导体中心和边缘的电势差，据此可测得地球的转动。

(a) 假设圆柱体相比于其半径很长，测量在中心附近进行，这样边缘效应可以忽略。证明电势差可写成

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{v}{c} \right)^2,$$

其中 v 是圆柱体外部边缘处的速度， λ 是单位长度的表面电荷。

(b) 为了测量这一效应，你所设想的仪器合理参数是多少？

50 矢势

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第15章。

50.1 超导体具有如下性质：在超导体内部，磁场 $\mathbf{B}$ 和电场 $\mathbf{E}$ 都为零。

(a) 对于 $\mathbf{E}$ ，我们发现，超导体表面处的边界条件是： $\mathbf{E}$ 必须垂直于表面，即电场切向分量为零。对于 $\mathbf{B}$ ，类似边界条件是什么？

如图50-1所示，一磁矩为 μ 的小电流环到一无限大超导平板的距离为 d ，与平板法线的夹角为 θ 。

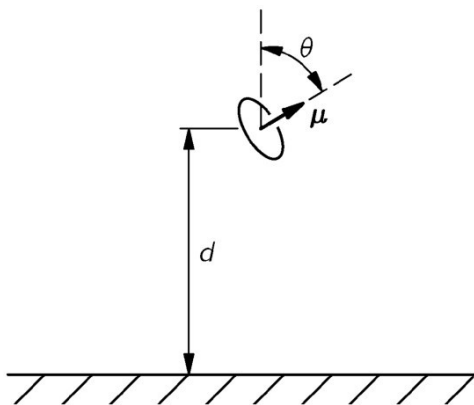


图 50-1

(b) 用几句话概述如何求每一处的磁场。假定你已经知道了磁偶极子的场。

(c) 求作用在偶极子上的转矩 τ 关于角度 θ 的函数关系。

(d) 推导平衡角度。哪个是稳定平衡，哪个是非稳定平衡？

(e) 求力关于 θ 的函数关系。指向还是离开超导体？

51 感应定律

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第17章。

- 51.1** 图51-1所示是一被限制在半径为 r 的圆柱体积内的均匀磁场 $\mathbf{B}$ 。磁场大小以恒定速率 100gauss s^{-1} 减小。求位于 P_1 , P_2 , P_3 处的电子的瞬时加速度（包括方向和大小）。假设 a 是 5.0cm 。

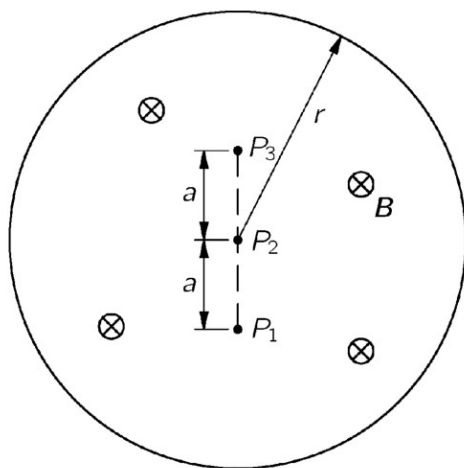


图 51-1

- 51.2** 一硬导线弯曲成半径为 r 的半圆，以频率 f 在均匀磁场中转动，如图51-2所示。如果仪表 M 的内阻是 M_R ，其余电阻忽略不计。

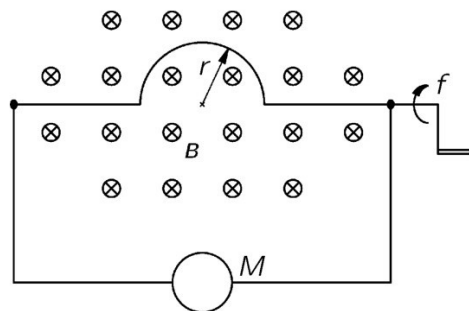


图 51-2

(a) 求感应电压的振幅 V_0 和频率 ω_V 。

(b) 求感应电流的振幅 I_0 和频率 ω_I 。

51.3 半径为 a 的小圆环 (1) 中有稳定电流 I 通过。另一圆环 (2)，半径同样为 a ，与 (1) 同轴。两圆环相距为 R ， $R \gg a$ 。两圆环面平行。如图 51-3 所示。圆环 (2) 现绕其某一直径以角速度 ω 转动。圆环 (2) 断开，因此无电流通过。求产生的电动势 $\mathcal{E}$ 。

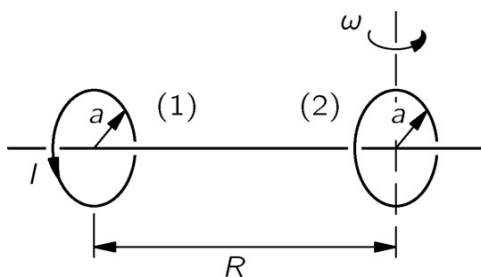


图 51-3

51.4 如图 51-4 所示，一质量为 m 的金属线在两根相距为 d 的导轨上无摩擦地滑动。导轨位于竖直的均匀磁场 B 中。

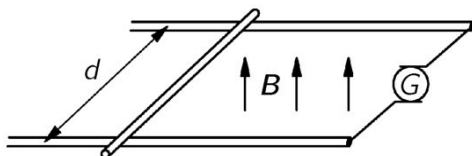


图 51-4

- (a) 从发电机 G 流出的恒定电流 I 流入导轨，再沿另一导轨流回。求导线的速度关于时间的函数 $v(t)$ 。（在 $t=0$ 时刻，导线静止。）
- (b) 用恒定电动势 ε 的电池替代发电机 G 。导线速度最终趋于一恒定值。求此速度。
- (c) 求与（b）相应的电流 I 。

51.5 一电路由两个电感分别为 L_1 和 L_2 的线圈串联而成。两线圈的互感为 M 。

- (a) 求电路的总电感 L 。
- (b) 如果一个线圈的导线反接，电感如何变化？

51.6 一“同轴”电缆由一根导线以及围绕它的同轴导体圆筒组成，导体圆柱可以携带电流回流。内部导线半径为 a ，外面圆筒半径为 b ，如图51-5所示。

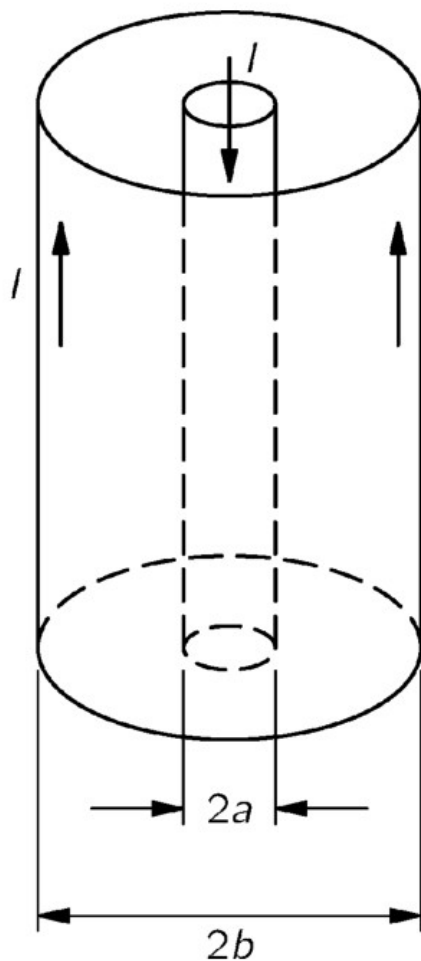


图 51-5

- (a) 证明：如果内部导线的电流沿导线表面流过，则电缆单位长度的自感为

$$L = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \epsilon_0 c^2}。$$

- (b) 如果电流在内部导线中均匀分布，计算单位长度的电感。比较两个结果，可以看出电流分布假设的重要性。

51.7 一环形线圈共 N 匝，其横截面是边长为 a 的正方形。圆环面内径为 b （外径为 $b+a$ ）。

(a) 证明自感是

$$L = \frac{N^2 a}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)。$$

(b) 计算由线圈和沿线圈对称轴的长直导线组成的系统的互感 M 。假设与长直导线组成闭合电路的导体与线圈相距很远，它们的影响忽略不计。

(c) 求线圈自感与系统互感之比。

51.8 有两平面电流回路，每个面积为 A ，载有电流 I 。两电路之间距离为 r 。两电流回路的法线分别为 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ ，与两回路连线的夹角分别为 α_1 和 α_2 。矢量 $\mathbf{n}_1$ 、 $\mathbf{n}_2$ 以及两回路中心的连线共面，如图51-6所示。

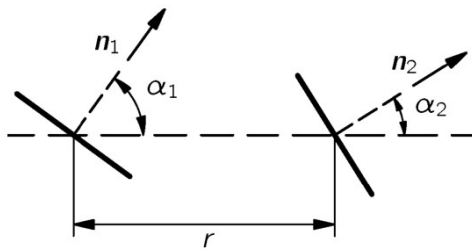


图 51-6

(a) 求系统的互感 M 。假设每个回路的半径远小于两回路间距离。

(b) 利用 M 的表达式，求两回路间力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向。

(c) 如果一个线圈中电流反向，或两电流都反向，则力 $\boldsymbol{F}$ 将有何不同？

51.9 考虑一半径为 r_1 的单匝线圈，该线圈位于螺线管线圈的中心并与其同轴。螺线管长 l ，缠有 N 匝半径为 r_2 的线圈， $r_2 \gg r_1$ ，如图51-7所示。如果称单匝线圈为电路1，螺线管为电路2，求 M_{12} 和 M_{21} 。

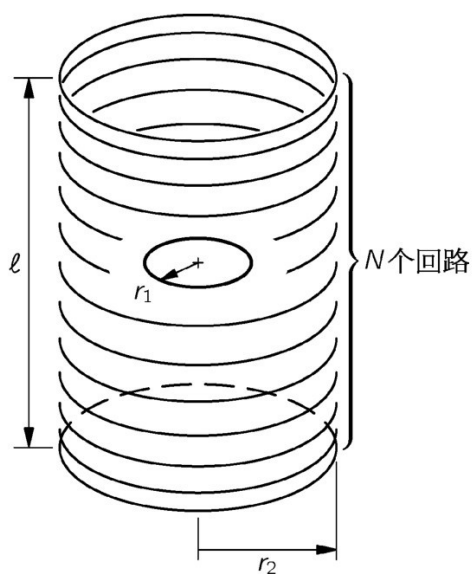


图 51-7

51.10 如图51-8所示，两导轨的一端通过电阻 R 相连，一导线在导轨上，以速度 v 运动。有一均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ ，垂直于纸面向里。

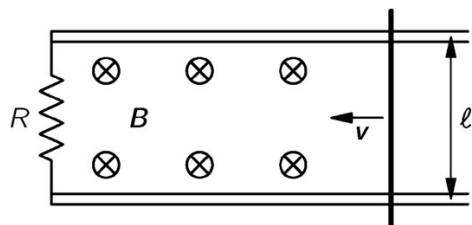


图51-8

- (a) 如果 $v = 100 \text{ cm s}^{-1}$, $l = 10 \text{ cm}$, $B = 0.1 \text{ Wb m}^{-2}$, $R = 10 \Omega$, 求通过 R 的电流 I 。(忽略该电流产生的场。)
- (b) 如果考虑感生电流产生的场, 则你对感生电流的估测将如何变化?
- (c) 如果产生 B 的磁铁以与导线相同的速度 v 运动, 你的答案将如何改变?
- (d) 感生电流流经的电路的自感随着时间将增大、减小还是不变?

51.11 考虑两个同轴回路, 半径都为 a , 相距为 d , $d \gg a$ 。如图51-9所示, 电流 $I = K_0 t^2$ 通过回路(1); 回路(2)的电阻为 R 。

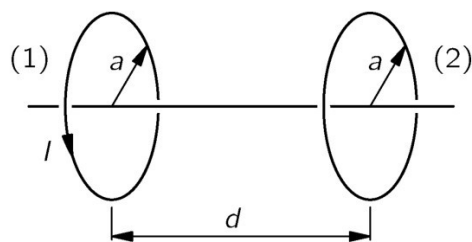


图51-9

- (a) 忽略自感, 求作用在回路(2)的转矩 τ 。

(b) 证明：忽略自感，作用在回路 (2) 的力是

$$F = \frac{24 \pi^4 a^8 K_0^2 t^3}{(4\pi \epsilon_0 c^2)^2 d^7 R}.$$

(c) 问力的方向？

(d) 真实的力和转矩和你的估计（定性地）有何不同？即：自感如何影响力和转矩？

(e) 如果线圈 (2) 绕垂直于两回路共同轴的一轴转动 90° ，解释上述 (a) 和 (b) 的结果如何变化？

52 麦克斯韦方程组在自由空间中的解

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第20章。

52.1 有时考虑微分方程的复数解是方便的。

(a) 如果场随时间和坐标 x 正弦变化，证明

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{+i(\omega t - kx)},$$

的每个分量都满足波动方程。

(b) 确认 E 的实部相当于一沿 x 轴传播的平面波。问这波向什么方向行进？

(c) 证明算子 ∇ 作用于类似 (a) 中的函数时，

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{e}_x (-ik),$$

其中， $\mathbf{e}_x$ 是 x 方向的单位矢量。可以用简单的乘法取代 ∇ 的作用。

(d) 对时间的求导函数有什么类似的性质？

(e) 利用 (c) 的结论，对于随时间和 x 正弦变化的场，写下麦克斯韦方程组。 k 和 ω 有什么关系？

(f) 如果场有以下形式，你的答案如何改动？

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{+i(\omega t + kx)}$$

52.2 一频率为 ω 的平面电磁波被镜面反射，镜面以速度 v 运动，运动方向与波的传播方向一致。

(a) 运用麦克斯韦方程组计算静止观测者看到的反射波的频率 ω' 。

(b) 将此结果与《费曼物理学讲义（第1卷）》34-6章节用相对论得到的结果比较。

53 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第21章。

53.1 完成《费曼物理学讲义（第2卷）》公式（21.26）的推导细节。

53.2 《费曼物理学讲义（第2卷）》公式（21.1）给出了计算运动电荷产生的电场的方法。考虑一沿 z 轴振荡、由正、负电荷组成的偶极子，如图53-1所示，即正电荷运动为 $z_+ = \left(\frac{d}{2}\right) \cos \omega t$ ，负电荷运动为 $z_- = -\left(\frac{d}{2}\right) \cos \omega t$ 。偶极矩因此定义为 $\mathbf{p} = d \cos \omega t \mathbf{e}_z$ 。证明用上面的方程可以计算偶极子的总电场：

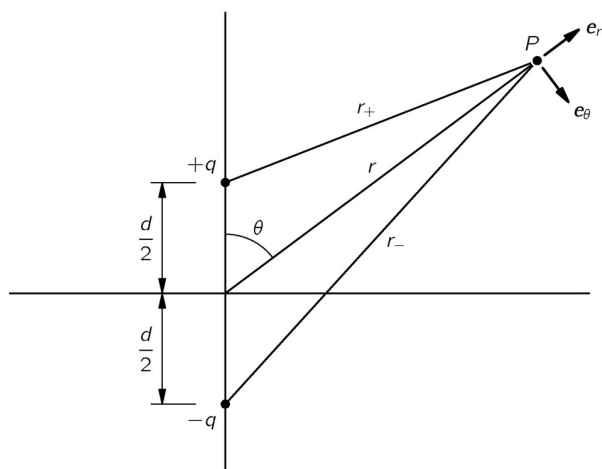


图53-1

$$E_{\varphi} = 0,$$

$$E_{\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \right],$$

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta \left[\frac{1}{r^3} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \right].$$

假设 P 点到偶极子的距离 r 远大于 d 。

53.3 由麦克斯韦方程组的对称性和振荡电偶极子的电场、磁场形式，推导振荡磁偶极子的场。

53.4 在习题53.2中，振荡偶极子由两个运动电荷组成。另一种产生偶极子的方式是：两个导体小球通过长度为 d 的导线相连，形成一个偶极子。导线中是振荡电流，使得两端有静电荷 $\pm q(t)$ ，但导线仍是中性的。 $q(t)$ 可以由 $Q_0 e^{i\omega t}$ 的实部表示。在场中与偶极子的距离 $r \gg d$ 的任意点 P ，如图53-2所示，对推迟势的积分给出 ϕ 的精确表达式

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos\omega(t - r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos\omega(t - r_2/c)}{r_2} \right].$$

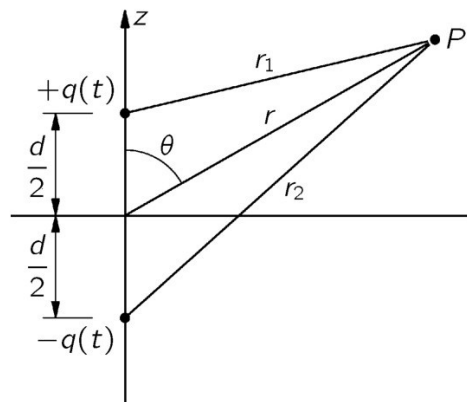


图 53-2

(a) 假设 $\frac{\omega d}{2c} \ll 1$ ，证明

$$\phi \approx \frac{Q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} \cos \omega(t - r/c) - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) \right)。$$

(b) 进一步证明

$$A_z \approx - \frac{Q_0 \omega d \sin \omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}。$$

(c) 证实由这些势导出的电场和磁场（正比于 $1/r$ 的部分）和以前的结果一致。

53.5 使用频率为 $\omega = 2\pi c / \lambda$ 的天线由两根共线导线组成，每根导线的长度为 $1/4$ 波长，在它们的连接处用相应频率的正弦电压驱动。导线中的电流分布是

$$i = -i_0 \sin \omega t \cos \frac{2\pi z}{\lambda},$$

其中 $-\frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4}$ 。见图53-3。为了求天线的辐射，可以将其看作是很多偶极子（每个偶极子位于一个点 z ，长度为 Δz ，各个偶极子强度不同）的叠加。

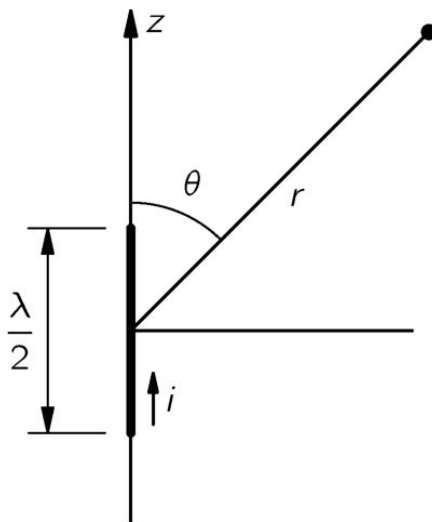


图 53-3

(a) 证明可能的偶极子强度是

$$\Delta p = \left[\frac{i_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \right] \Delta z。$$

(b) 证明：在远处，整个天线的场为

$$E_{\theta} = \frac{i_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$B_{\varphi} = \frac{1}{c} E_{\theta}$$

(c) 画出这种情况以及单一偶极子情况下的 $E_\theta \sim \theta$ 图，将两者比较。

53.6 如图53-4所示，一电荷为 q 的粒子以匀速 v 作半径为 a 的圆周运动。当粒子位于 P 点时，

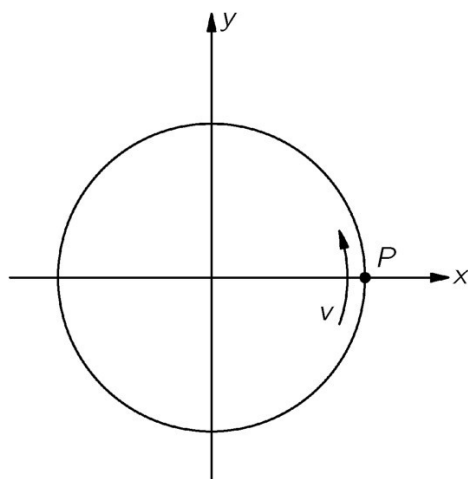


图 53-4

(a) 求圆心处的势 ϕ 。

(b) 求圆心处的矢势 $\mathbf{A}$ 。

(c) 利用《费曼物理学讲义（第2卷）》方程（18.19）和（18.16），求圆心处的电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 。

(d) 求电场方向（相对于指向 P 的矢径）。

(e) 利用《费曼物理学讲义（第2卷）》方程（21.1）完成以上问题。

54 交流电路

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第22章。

54.1 一立方体框架形状的网格，每个顶点都是接线柱。每条边的电阻为 1Ω 。求所有的两接线柱之间的等效电阻。

54.2 (a) 求图54-1所示电路中的电流 I 。

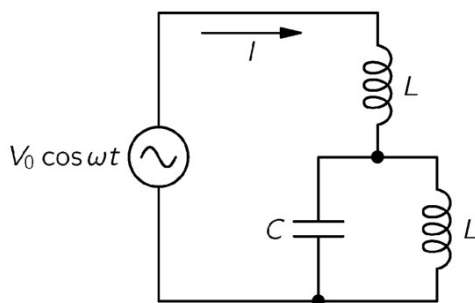


图 54-1

(b) 如果两个电感间互感为 M ，求电流 I 。

54.3 高保真系统的交叉网如图54-2所示。每个扬声器的有效电阻是 R 。

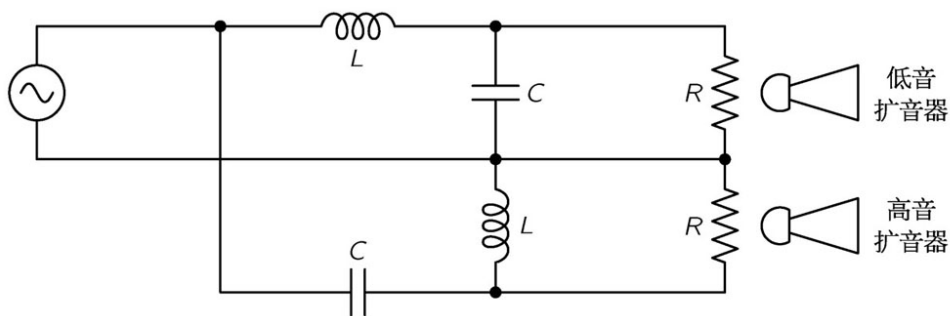


图 54-2

- (a) 证明：如果 $R^2 = L/2C$ ，则输入阻抗 Z 为纯电阻，阻值为 R 。
- (b) 证明交越频率（crossover frequency）由 $\omega_c^2 = 1/LC$ 确定。交越频率是每个扬声器接收总功率的一半时的频率。

54.4 (a) 证明图54-3所示的电路中，从 a 点到 b 点的电势差的幅值与频率无关。

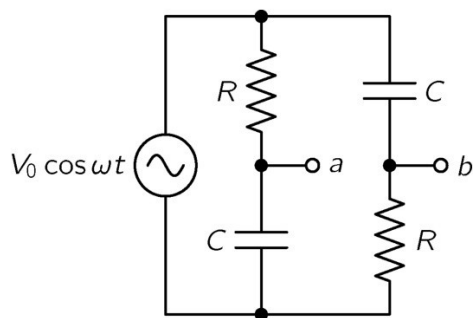


图 54-3

- (b) 大致画出电势差的相位关于频率的函数图。
- (c) 如果电源内阻为 $R/10$ ，将对 a 、 b 间电压的幅值和相位有什么影响？

54.5 一简单并联电路如图54-4所示。

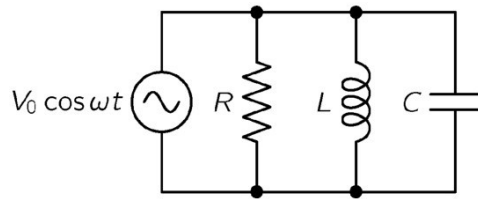


图 54-4

- (a) 对于选定的 L ， C 和 R ，画一草图来表示电流 I 的幅值关于频率的函数关系。
- (b) 如果 $R \gg \sqrt{LC}$ ，计算电路的品质因子，并于 $R \ll \sqrt{LC}$ 时，同样的元件 L ， C ， R 组成的并联电路的品质因子比较。特别考虑 $R = K \sqrt{L/C}$ 时的并联电路和 $R = \frac{1}{K} \sqrt{L/C}$ 时的串联电路。

54.6 图54-5所示是用于测量电感的电桥。发电机具有频率为 ω 的电动势。当电桥处于平衡时，没有电流通过检测器 R_D 。以 R 和 C 来表示 L 。

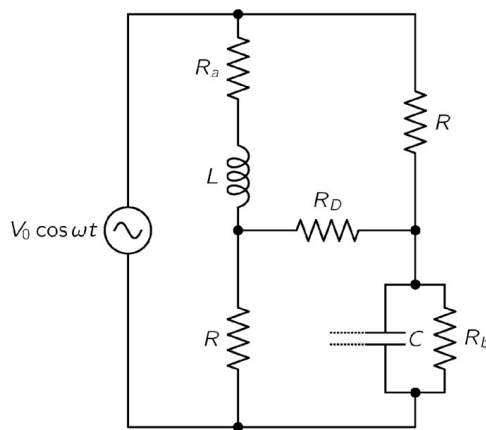


图 54-5

54.7 图54-6所示是维恩桥，常用于 RC 振荡器。当没有电流通过检测器 R_D 时，我们说桥处于平衡。证明：平衡时，需要同时满足以下方程：

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}。$$

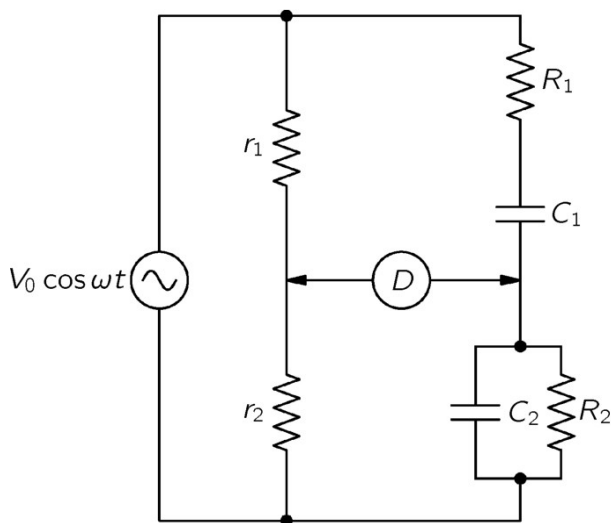


图 54-6

54.8 电压源 $V(t) = V_0 \cos \omega t$ 施加在图54-7所示的电路。

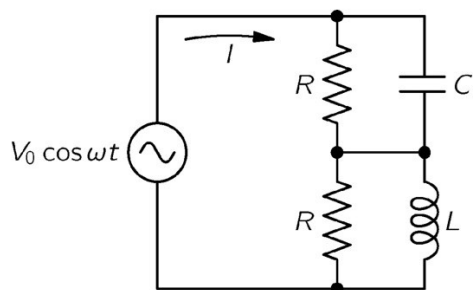


图 54-7

(a) 证明：如果 R ， L 和 C 的选择满足 $RC = L/R$ ，则电流 I 与频率无关。

(b) 电源电压与 RC 端电压的相位差 ϕ 是多少？

54.9 图54-8所示电路设计成 P_3 除触头可以连接到 P_0 ， P_1 ， P_2 ， $\dots$ ， P_n 中任一点。

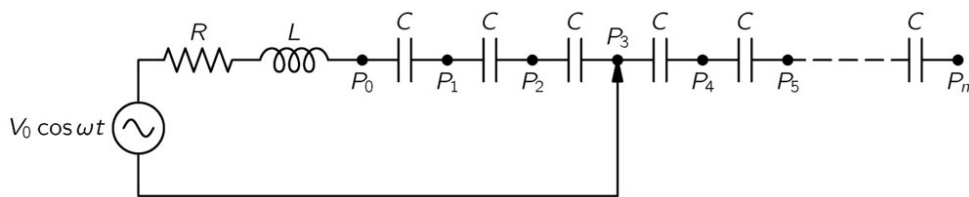


图 54-8

(a) 如果触头在 P_m ($0 < m < n$) 上，求电阻 R 上消耗的平均功率 $\langle P \rangle$ 的表达式。

(b) 如果 $R = 1\,000\Omega$ ， $L = 10\text{H}$ ， $C = 20\mu\text{F}$ ， $\omega = 100\text{rad s}^{-1}$ ，则

(1) m 为何值时，功率取最大值？

- (2) 当 $m=2$, $V_0=100\text{V}$ 时, P_0 和 P_2 之间以及 R 两端的最大瞬时电压 $(V_{P_0P_2})_{\max}$ 和 $(V_R)_{\max}$ 分别是多少?

补充资料：晶体管

理想晶体管的小信号等价电路如图54-9 (a) 所示。源 I 是理想电流源, α 是晶体管的一特征常数。“小信号等价电路”意味着, 只有电压和电流围绕晶体管的直流工作电压和电流作小变化时, 此电路才与晶体管等效。这样一个电路没有提供我们关于晶体管工作的合适直流电压的任何信息。出于简单的考虑, 电阻器 (确定直流电压的关键) 在这份补充材料和下面的习题中被忽略。

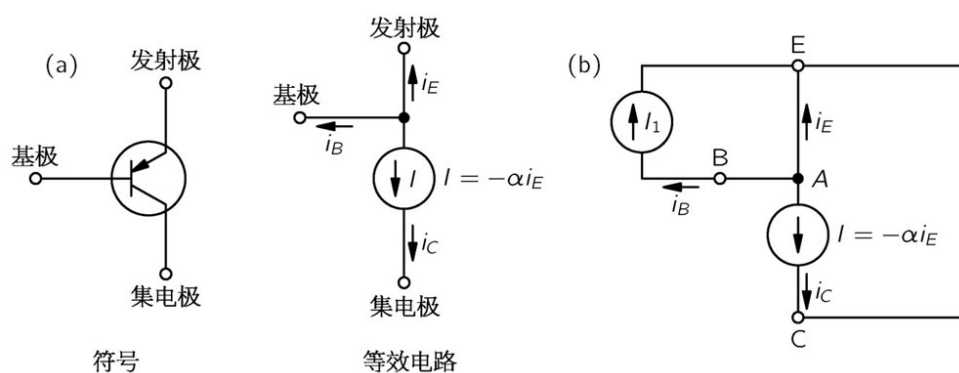


图 54-9

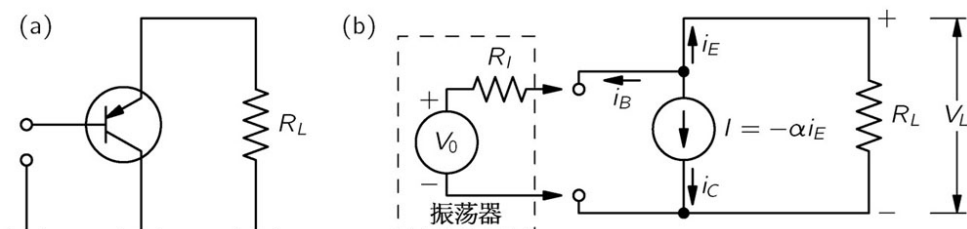


图 54-10

首先，我们将说明：晶体管本质上是电流放大器。让我们在基极和发射极间连接一电流源，并计算集电极上的电流，如图54-9（b）所示。通过坚持 A 点，我们得到 $i_E + i_B + i_C = 0$ ，又由于 $i_C = -\alpha i_E$ ，我们有 $-i_C/\alpha + i_B + i_C = 0$ ，或

$$\frac{i_C}{i_B} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}。$$

因此，量 $\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ 是集电极和基极间的电流增益。通常， α 大约为 $0.98 \sim 0.99$ ，因此 β 位于50和100之间。由于 α 如此接近1，我们将采取如下近似：

$$\beta \approx \frac{1}{1 - \alpha}。$$

54.10 射极输出器构型（emitter follower configuration）如54-10（a）所示，其等效电路如（b）所示。 R_L 表示射极输出器驱动的负载。

（a）如果一正弦振荡器（由电压 $V_0 \cos \omega t$ 和串联电阻 R_I 表示）连接在基极和集电极之间，计算负载两端的电压 V_L 。

（b）证明：如果 $\frac{R_I}{R_L} \ll \beta$ ，则 $\frac{V_L}{V_0} = 1$ ，与 β 无关。

(c) 当振荡器直接接在 R_L 两端时, 计算 $\frac{V_L'}{V_0'}$ 。已知 $R_I=100\Omega$, $R_L=10\Omega$, $\beta=100$ 。比较 $\frac{V_L}{V_0}$ 和 $\frac{V_L'}{V_0'}$ 。

(d) 以电容 C_L 替换 R_L , 当振荡器通过射极输出器与 C_L 相连时, 求 $\left|\frac{V_L}{V_0}\right|$ 关于频率的函数, 并通过取点画出函数图; 当振荡器直接与 C_L 相连时, 求 $\left|\frac{V_L'}{V_0'}\right|$ 关于频率的函数, 并通过取点画出函数图。(在同一张图上画函数图, 取 $\beta\approx 10$ 。)

54.11 共发射极构型 (common emitter configuration) 及其等效电路如图54-11 (a) 所示。

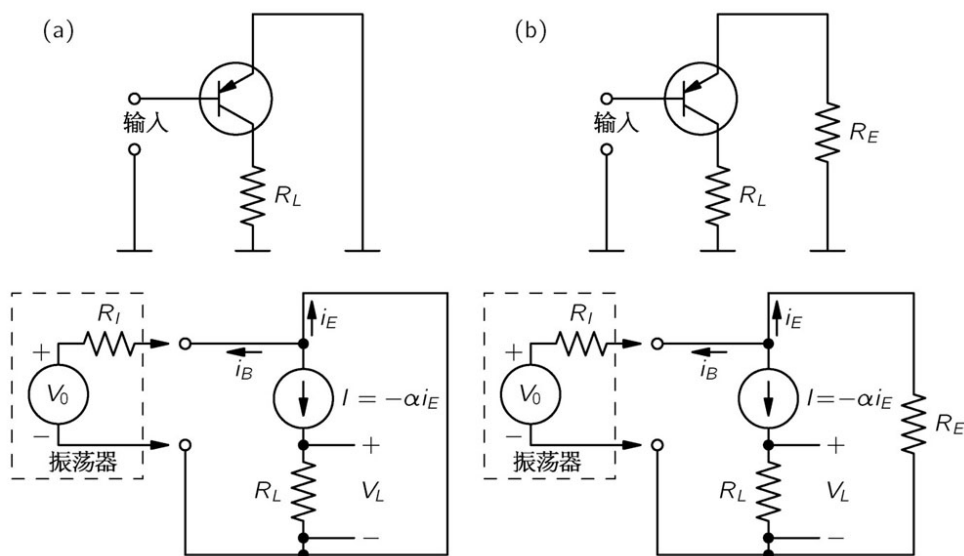


图 54-11

(a) 计算 $\frac{V_L}{V_0}$ 。

(b) 你将看到： $\frac{V_L}{V_0}$ 与 β 成正比。由于 β 与温度有很强的相关性，且对于不同的晶体管，其值变化很大，因此电路性能不稳定。如图 (b) 所示，加上一个电阻 R_E ，与发射极串联，以损失增益为代价，降低了对 β 的依赖性。证明事情果真如此，并证明 $\frac{V_L}{V_0}$ 与 β 相当独立的条件是 $\frac{R_I}{R_E} \ll \beta$ 。[注意： $\alpha = 1/(1+1/\beta) \approx 1$ ，因此 α 对 β 的依赖性很弱。可见对于晶体管， α 是一个稳定的参数。]

54.12 共基极构型 (common base configuration) 如图54-12所示。

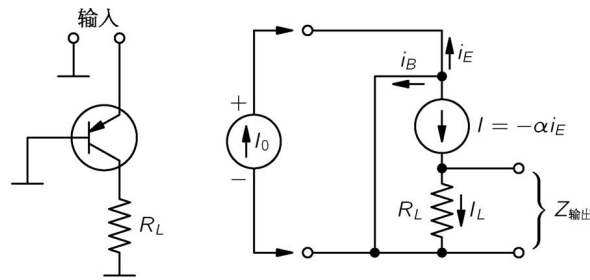


图 54-12

当要有一单位电流增益且增加源的阻抗时，这一电路是很有用处的。

(a) 计算电流增益 $\frac{I_L}{I_0}$ 。

(b) 计算 R_L 所看到的阻抗 $Z_{\text{输出}}$ ，即移掉 R_L ，计算 $\frac{V_L}{I_L}$ 。

(c) 如果电路由习题54.10中的正弦振荡器驱动，给出 R_L 所看到的等效电路，如图54-13所示，并计算源值，以 V_0 ， R_I ， α 来表示。

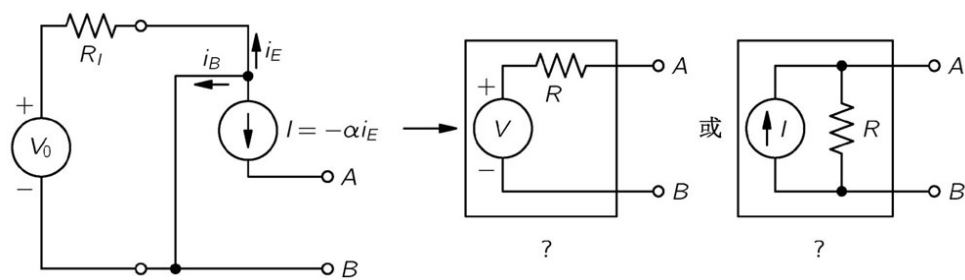


图 54-13

总结：三种基本晶体管构型的特征总结如下：

构型	电压增益	电流增益	$Z_{\text{输出}}/Z_{\text{输入}}$
射极输出器	≈ 1	通常 >1	<1
共发射极	通常 >1	通常 >1	
共基极	通常 >1	≈ 1	通常 >1

54.13 一旦被激发，图54-14中（a）所示电路将以其共振频率永远振荡下去。然而，由于导线的电阻以及电磁辐射，总会有能量损失。一个物理上的真实电路看起来更像图（b）所示。由于电阻 R 的存在，在这样的电路中，振荡将不能一直维持。另一方面，如果我们在电路中增加一个“负电阻” $-R$ ，与 R 串联，如图（c）所示，则振荡将维持下去。负电阻提供了电阻 R 上的能量耗散。《费曼物理学讲义（第2卷）》22-8章节提到，电路可以由电阻（以及其他设备，如隧道二极管等）制成而其有效阻抗的实部是负的。对于制作振荡器，这些电路是有用的。图

(d) 展示了一个电路，其端点 A 和 B 能提供负电阻。（这个变压器是一个理想变压器，其匝比是 $1:n$ 。输入和输出电压由 $V_{\text{输出}} = nV_{\text{输入}}$ 和 $i_{\text{输出}} = \frac{i_{\text{输入}}}{n}$ 给定。）

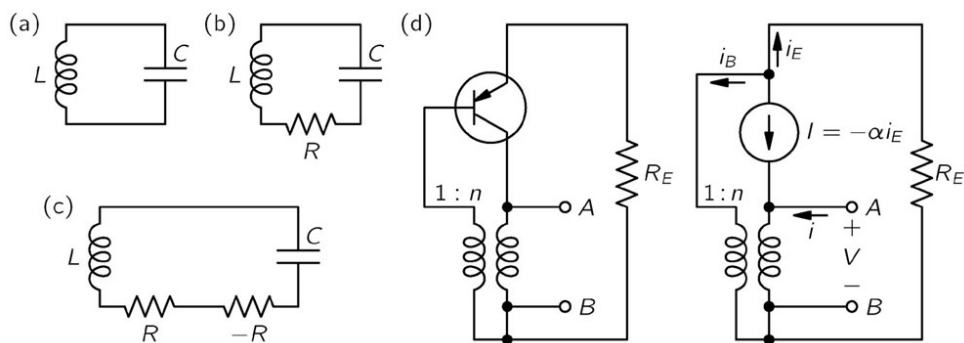


图 54-14

(a) 计算 A 、 B 间的阻抗 Z_{AB} 。

(b) 给出 A 、 B 间电阻是负的条件，并标示变压器的极性。

55 空腔共振器

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第23章。

55.1 (a) 求图55-1所示的空腔的近似谐振频率 ω 。假设 $d \ll a$ ， $d \ll (b-a)$ 。

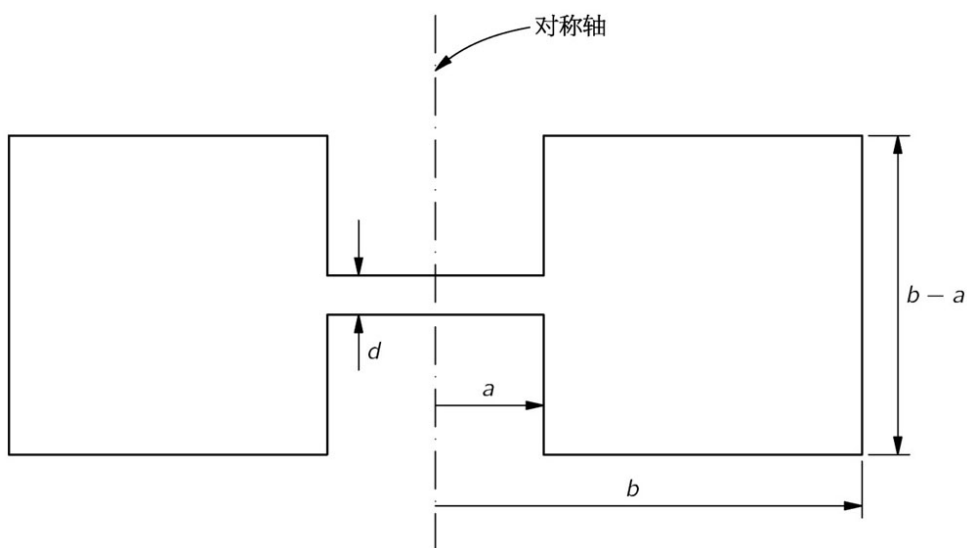


图55-1

(b) 在(a)中，你忽略了什么主要效应？

(c) 如果空腔被均匀地冷却（即整个空腔处于相同的温度），那么由于热胀冷缩效应，谐振频率将增加、减小还是不变？

56 波导

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第24章。

56.1 一传输线单位长度的电感是 L_0 ，单位长度的电容是 C_0 。如果电压和电流缓慢变化，则

(a) 证明控制方程是

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}.\end{aligned}$$

(b) 进一步证明 I 和 V 都满足波动方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\end{aligned}$$

其中

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

56.2 传输线的特性阻抗是 $z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ ，其中 L_0 是单位长度的电感， C_0 是单位长度的电容。证明：宽度为 b ，相距为 a ($a \ll b$) 的两薄带组成的传输线的特性阻抗是

$$z_0 \approx \frac{1}{\epsilon_0 c} \frac{a}{b}。$$

56.3 一空腔按如下方法制成：用导体平板把长为 l 的圆柱形共轴缆线（中心的导体半径为 a ）的两端封住。

（a）求电场一直沿径向情况的最低模的频率 ω_1 。

（b）给出电场 $\mathbf{E}$ 的第 n 模的表达式。

（c）将 ω_1 和 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 比较。

56.4 一矩形波导由边长为 a 和 b 的理想导体材料制成，如图56-1所示。一段长 l 的波导的两端被导体板覆盖，即该波导等效地是一谐振腔。电场由下式的实部表示：

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0(x, z) e^{i\omega t} \mathbf{e}_y,$$

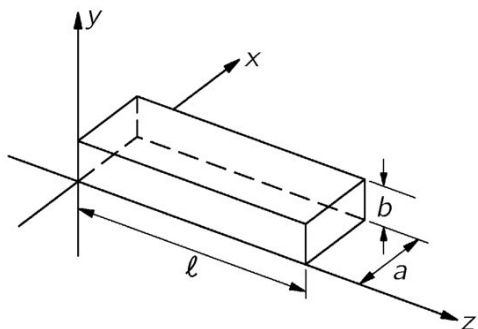


图 56-1

- (a) 求具有最低谐振频率的空腔模式的 $E_0(x, z)$ 。
- (b) 求空腔的最低谐振频率 ω_0 。

56.5 一共轴电缆由两同心的导体圆筒组成。电缆的一端 ($x=0$) 与电压发生器连接, 该电压发生器能提供电压 $V(t) = V_0 \cos \omega t$ 。电缆的另一端 ($x=l$) 被导体板覆盖。单位长度的电感是 L_0 , 电容是 C_0 。电缆的长度是 $\frac{5\pi c}{2\omega}$, 其中 c 是光速。

- (a) 大致画出导体间电压关于距离 x 的函数图。
- (b) 求电压最大时的 x 值。
- (c) 写出构成导体间电压的前进行波和反射行波的表达式 $V_f(x, t)$ 和 $V_r(x, t)$ 。
- (d) 在 $x=0$, $x=\frac{l}{2}$, $x=l$ 处, 求电流 $I(x, t)$ 。

- (e) 如果电压源是理想电压生成器，它的轴以角速度 ω 转动，则必须施加在电压生成器上的平均转矩 $\langle \tau \rangle$ 是多少？

56.6 一传输线在 $x=l$ 的终端与一阻抗 Z_T 相连，如图56-2所示。

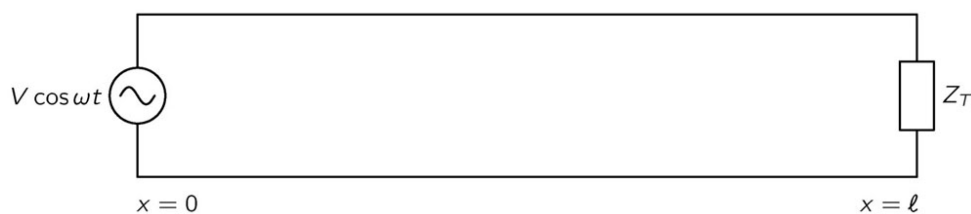


图56-2

- (a) 证明“发送端”阻抗 ($x=0$) 为

$$Z_S = i Z_0 \frac{\tan(\omega l \sqrt{LC}) - i(Z_T/Z_0)}{1 + i(Z_T/Z_0)\tan(\omega l \sqrt{LC})}$$

其中， $Z_0 = \sqrt{L/C}$ 是传输线的特性阻抗。

- (b) 当 $Z_T=0$ 时，求 Z_S 。

- (c) 当 $Z_T=\infty$ 时，求 Z_S 。

- (d) 当 $Z_T=Z_0$ 时，求 Z_S 。

56.7 一特性阻抗为 Z_1 的传输线和一特性阻抗为 Z_2 的传输线相连。如果系统被电压 V_λ （来自和第一传输线连接的电压发生器）所驱动，证明：“反射系数”是

$$\frac{V_{\text{反}}}{V_{\text{入}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

“透射系数”是

$$\frac{V_{\text{透}}}{V_{\text{入}}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}。$$

56.8 在喷气推进实验室（Jet Propulsion Laboratory, JPL）的戈尔德斯通跟踪站（Goldstone Tracking Station），“电子学笼”和85ft接收器天线之间是40ft的波导。波导的内部尺寸是5.75in×11.5in。如果采用960MHz的载波，比较信号在波导中的速度 v_g 与在自由空间中的速度 c 。

56.9 《费曼物理学讲义（第2卷）》第24章中描述的波导中的电场具有如下性质：电场在传播方向上的分量为零，即电场是横波。〔这种传播模式因此被叫作TE型，或横向电场型（transverse electric modes）。〕同样也有一种TM型传播模式：磁场在传播方向上的分量为零。对于《费曼物理学讲义（第2卷）》中图24-3和24-4所示的矩形波导，TM模的矢势是

$$A = e_2 \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)},$$

其中

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}。$$

(a) 确认由此得到的磁场确实是横向的。

(b) 证明电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 满足波动方程，并写出适当的边界条件。

提示：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A},\end{aligned}$$

其中

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}。$$

(c) 证明在下述条件下， mn 模不能传播，

$$\omega < c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

57 用相对论符号表示的电动力学

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第25章。

在以下习题中，取 $c = 1$ 。

57.1 以四元矢量形式写出下式：

(a) $(\phi^2 - \mathbf{A}^2)$ 。

(b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \rho\phi)$ 。

57.2 在康普顿效应中，一静止电子被光子撞击，引起两者的动量变化，如图57-1所示。求散射光子的能量 E_{γ^2} （以入射光子的能量 E_{γ^1} 来表示）以及偏离原路径的角度 θ 。

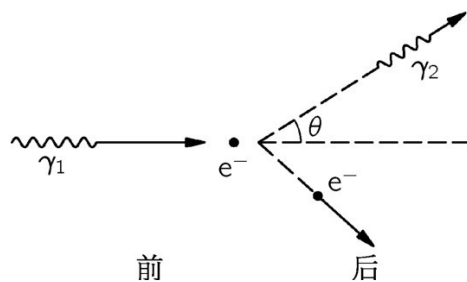


图 57-1

57.3 一个正电子 (e^+) 可以通过光子 (γ) 轰击稳定的电子 (e^-) 而得到。

$$\gamma + e^- \longrightarrow e^- + e^+ + e^-。$$

求最小光子能量 E_γ 。

57.4 一电子-正电子对可通过光子的如下反应得到

$$\gamma + e^- \longrightarrow e^- + (e^+ + e^-)。$$

然而，反应

$$\gamma \longrightarrow e^+ + e^-$$

却不可能发生，即使光子的能量大于两倍电子静质量，且满足电荷守恒。用四元矢量证明这是正确的。

57.5 一质量为 m_a 的静止粒子被一质量为 m_b ，动量为 p_b 的粒子撞击。在发生完全非弹性碰撞后，两粒子形成一个单独的新粒子。

(a) 求新粒子的质量 m_c 和速度 v_c 。

(b) 与非相对论下的结果作比较。

58 场的洛伦兹变换

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第26章。在以下习题中取 $c=1$ 。

58.1 对于电磁张量 $F_{\mu\nu}$ ，写出

$$\nabla_{\mu} F_{\mu\nu}。$$

58.2 (a) 有一四维矢量，其三维矢量部分是

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}。$$

求此四维矢量 f_{μ} 。

(b) 这个四维矢量的时间分量和空间分量的意义分别是什么？

58.3 (a) 证明 $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ 和 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ 在洛伦兹变换下是不变量。

(b) 对于哪种重要的物理现象，这两个不变量都为零。

58.4 如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是在一给定参照系中空间某一点的电场和磁场，有另一参照系，在其中，电场和磁场平行，请确定这一参照系相对于原参照系的速度。具有这一性质（电场和磁场平行）的参照系有很多——只要我们找到了一个这样的参照系，例如参

照系1，那么所有相对于参照系1的运动速度平行于电场和磁场的共同方向的参照系都符合要求。

58.5 在《费曼物理学讲义（第2卷）》第26章，通过将静止电荷的势变换到运动参照系，得到了匀速运动的带电粒子的场。电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 按通常的方式由 A_μ 得来。现在，从静止电荷的场出发，利用场的变换定律来求运动电荷的电场和磁场。

58.6 证明：以匀速 $\mathbf{v}$ 运动的电荷的电场和磁场可以写成

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$
$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

其中 $\mathbf{r}$ 是由粒子现在的位置指向观察者的矢径， θ 是 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 的夹角。

58.7 一根长直导线，电流为 I ，电流源于速度为 $\mathbf{v}$ 的电子的运动。静止的正离子使得总电荷密度为零。

(a) 在相对于导线静止的参照系中，求导线外的场。

(b) 把这些场变换到随电子运动的参照系中。

58.8 如图58-1所示，两个电子以相同的速度 $\mathbf{v}$ 并肩运动，相隔距离为 a 。在它们中间是一带有固定正电荷的无限大薄片，表面电

荷密度为 σ 。

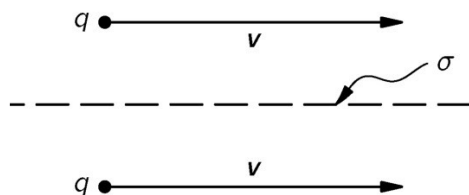


图 58-1

(a) 为了使距离保持为 a ， σ 必须多大？

(b) 比较能量为500MeV的电子所需的电荷密度 σ_h 和低速电子所需的电荷密度 σ_l 。

58.9 如果 f_μ 是作用于粒子的四维力矢量， u_μ 是四维速度矢量，证明

$$f_\mu u_\mu = 0。$$

58.10 电荷为 q 的粒子在 xy 平面以恒定速率 v 沿图58-2所示轨道运动。（在原点被散射。）速率一直没变。在 $t=t_1$ 时刻，粒子位于 $x=a$ ， $y=0$ 处。

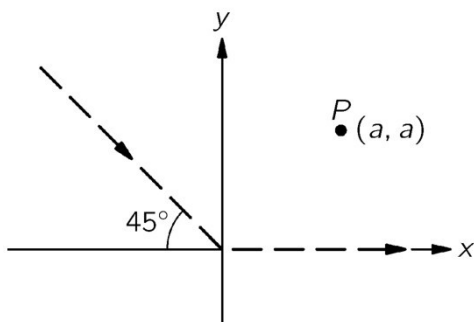


图58-2

- (a) P 点位于 $x=y=a$ 处。求 t_1 时刻, P 点的电场。 $v/c=0.5$ 。
- (b) 如果在散射前, 粒子的轨道沿 y 轴下移, 结果将如何?

59 场的能量和场的动量

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第27章。

59.1 运用推导《费曼物理学讲义（第2卷）》公式（27.11）的技巧，求下式

(a) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(b) $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

59.2 地面外的地球磁场贮藏着多少能量？假设地球磁场是一偶极子，在赤道处，强度为 $2/3\text{gauss}$ 。

59.3 一长直导线单位长度的电阻为 R 。当导线中电流为 I 时，计算在导体表面上坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 的通量。

59.4 一长的同轴电缆有半径分别为 a 和 b （ $a < b$ ）的两理想同心导体圆柱组成。电缆一端接在端电压为 V 的电池上，另一端接在电阻 R 上，这样电流为 $I = V/R$ 。用坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 计算能流率 dU/dt 。

59.5 广播电台的辐射平均功率为 10kW 。

(a) 求地面上 10km 处的平均坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 的大小。

(b) 求电场和磁场的最大值。

59.6 《费曼物理学讲义（第2卷）》图24-3所示矩形波导的最低TE模的场为

$$\mathbf{E} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{B} = -E_0 \frac{k_z}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_x - E_0 \frac{\pi}{\omega a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_z。$$

(a) 证明上面给出的解满足问题的边界条件。

(b) 计算坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 和能量密度 u 。

(c) 求穿过垂直于 z 轴的任意平面的平均能流率。

(d) 计算波导中的平均能量密度。

(e) 利用 (c) 和 (d) 的结果计算能量传播的平均速度。

59.7 (a) 求来自偶极矩为 $\mathbf{p} \cos \omega t$ 的振荡偶极子的单位面积能流率。

(b) 通过面积分，证明平均辐射功率为

$$\langle P \rangle = \frac{1}{3} \frac{p^2}{(4\pi\epsilon_0 c^2)} \frac{\omega^4}{c}。$$

59.8 一平面光波入射到一自由电子上。在电场的影响下，电子振荡。计算电子平均辐射功率和入射光波的平均能流密度之比。

59.9 太阳系中的尘埃粒子受到两种力：太阳的引力，太阳光的辐射力。由于引力正比于粒子的体积，辐射力正比于粒子的横截面积，会有一种粒子尺寸能使得粒子受力平衡。

(a) 假设粒子是球形的，密度约为 10^3 kg m^{-3} ，可以吸收所有入射的辐射能量，求能使力平衡的粒子半径 a 。

(b) 彗星尾巴为什么总是偏离太阳？一种解释便是基于上述现象，并假设彗星尾巴由大量小粒子，甚至气体分子组成。这个解释合理吗？

59.10 一空心环形螺线管，平均半径为 R ，横截面积为 πr^2 ，缠绕导线匝数为 N 。（ $r \ll R$ ）电流 $I(t) = Kt$ ，在 $t=0$ 时刻开启。

(a) 直接从磁场出发，计算储存在磁场中的能量。

(b) 求螺线管内一点的坡印亭矢量 $\mathbf{S}(t)$ 。

(c) 利用坡印亭矢量，求螺线管中场能量变化率。

59.11 《费曼物理学讲义（第2卷）》17-4章节提出的与法拉第定律有关的“佯谬”引起很大兴趣。通过选择一简单几何，你能很清晰地解决它。考虑均匀带电的非导体球壳，在其中心有一偶极矩为 μ 的磁偶极子。

(a) 如果球面电势为 V ，证明电流关闭后球具有角动量

$$\mathbf{L} = \frac{2}{3} \frac{\mu V}{c^2} \mathbf{\hat{z}}.$$

(b) 将 (a) 中结果与电流关闭前储存在场里的角动量比较。

(c) 你认为这种实验对于大二学生时候可行？

(d) 如果是金属球呢？

60 电磁质量

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第28章。

60.1 如果电子的静止质量等于其电荷的静电能，且假设电荷均匀分布在球体内，计算半径 a 。

60.2 已经知道，电子除了有电荷和质量之外，还有角动量（自旋）和磁矩，相互关系为

$$\frac{\text{角动量}}{\text{磁矩}} = \frac{m_e}{q_e}。$$

这一关系的精确度约为0.1%。假设质量由《费曼物理学讲义（第2卷）》公式（28.4）给出

$$m_e = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2},$$

其中

$$e^2 = q_e^2 / 4\pi\epsilon_0。$$

(a) 取一半径为 a ，电荷为 q 的球壳，电荷在其上均匀分布。
在球心放一磁矩为 μ 的磁偶极子，证明电磁场的角动量

为

$$L = \frac{2}{3} \frac{q\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{a}。$$

(b) 求角动量和磁矩之比，并与 m/q 比较。

(c) 已知电子的 μ_z 等于 $\frac{\hbar q_e}{2 m_e}$ ，计算为了达到这一数值，旋转电子的最大表面速度是多少？你有什么评论吗？

61 电荷在电场和磁场中的运动

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第29章。

61.1 一带电粒子（电荷 q ，质量 m ）初始时静止在原点。它受到 x 轴方向一恒定电场的作用。

（a）计算粒子的速度和位置关于时间的函数关系（相对论性）。

（b）如果初始时，粒子在 y 轴方向有一速度 v_0 ，你将如何修正你的答案？

61.2 在质子加速器中，质子在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中作圆周运动。

（a）求“回旋频率” ω ，以及低能情况下，质子的角速度关于电荷、质量、磁场大小的函数关系。

（b）当总能量增加时， ω 如何变化？

（c）动能 T 达到什么值时， ω 变化1%？

61.3 在 $t=0$ 时，质量为 m ，电荷为 q 的粒子静止在原点。有一沿 y 轴方向的均匀电场 $\mathbf{E}$ 和一沿 z 轴方向的均匀磁场 $\mathbf{B}$ 。

（a）求解粒子的运动。假设是非相对论性运动。这意味这对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 有什么限制？

(b) 你能提出相对论性运动应如何吗？当 $E/B > c$ 时，将发生什么？

(c) 如果我们在 $y=0$ 处，即 xz 平面放一平板，在 $y=d$ 处，放与第一个平板平行的另一平板。两板间电势差为 $V_0 = Ed$ 。还有一平行于两板的磁场。这就是所谓的“磁控管”。如果电子从阴极由静止发射，为了让电子无法到达阳极，磁场 B 应多大？

61.4 交变梯度聚焦原理可以用图61-1所示的光学类比来说明。即使两个透镜焦距相同，在特定情况下，它们的组合仍会有会聚作用。

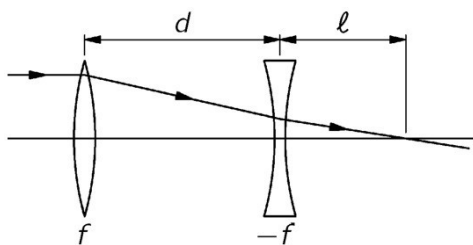


图 61-1

(a) 对于平行入射光，确定 l 关于 d 的函数关系。

(b) 在什么条件下，像是实的或虚的？

62 稠密材料的折射率

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第32章。

- 62.1** 证明：在非极性物质中，低频下折射率的平方等于介电常数。
- 62.2** 在约6MHz的频率，电离层变得透明。运用自由电子模型，估算电离层的电子密度。
- 62.3** 电场长时间作用于金属上，然后突然撤去。利用金属的自由电子模型，证明弛豫时间等于 2τ ，其中 τ 是电子两次碰撞的平均间隔时间。
- 62.4** 在金属中，麦克斯韦方程组有如下形式的平面波解

$$\mathbf{E}_x = E_0 \mathbf{e}^{i(\omega t - kz)},$$

其中， k 是复数。对于低频

$$k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2\epsilon_0 c^2}},$$

其中， σ 是金属电导率。

(a) 写出与这种波相应的磁场 $\mathbf{B}$ 的表达式。

(b) 求 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的夹角 θ 。

(c) 对任一给定的 z ，求 $\mathbf{B}$ 的峰值和 $\mathbf{E}$ 的峰值之比。

(d) 求 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的相位差 ϕ 。

62.5 《费曼物理学讲义（第2卷）》中的方程（32.50）表明，金属的紫外截止频率是很尖锐的。实验显示，截止频率并非那么明确。通过对 n^2 进行更好近似来证明实验结果与理论实际上是相符的。

63 表面反射

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第33章。

63.1 (a) 一平面电磁波穿过图63-1所示的三种介质，求透射系数 I_t/I_i 。

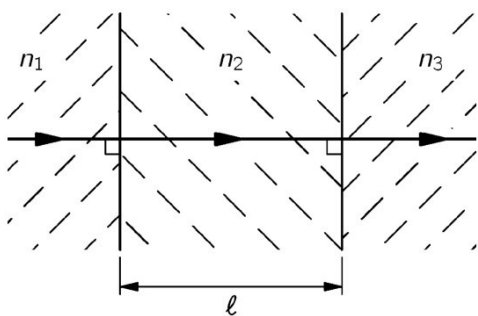


图 63-1

(b) 证明：当 $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ ， $l = \lambda_2/4$ 时，透射率为1。

(c) 用于普通白光（平均波长为 $\lambda_1 = 5500\text{\AA}$ ）的双目镜，镀膜厚度 l 应为多少？

(d) 如果只能在透镜一面镀膜，在哪面？为什么？

63.2 波长为 $4500\text{\AA}$ （真空中）的一束光入射到一棱镜上，发生 90° 的全反射，如图63-2所示。棱镜的折射率是1.6。

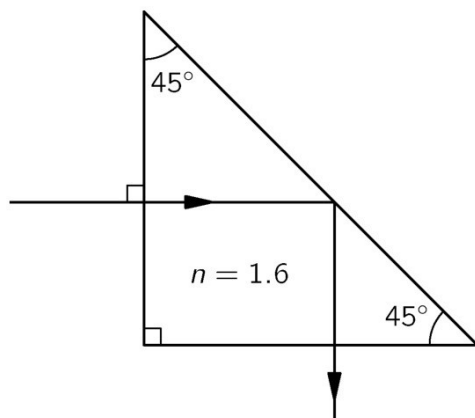


图 63-2

- (a) 在棱镜的长边之外 d 距离处，电场强度减小至表面处场强的 $1/e$ 。求 d 。假设光是偏振光， $\mathbf{E}$ 垂直于入射面。
- (b) 如果 $\mathbf{E}$ 在入射面内，你的答案改变吗？

64 物质的磁性

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第34章。

64.1 一质量为 m 的带电粒子在垂直于均匀磁场 $\mathbf{B}$ 的平面内运动。

(a) 证明：如果 $\mathbf{B}$ 随时间缓慢变化，则由于轨道运动而产生的磁矩 μ 保持不变。

(b) 在 (a) 中所说的“缓慢”到底是什么意思？

65 顺磁性与磁共振

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第35章。

- 65.1** 在低能回旋加速器中，质子绕圆轨道运动一周的时间 T 大约为 $0.13\mu\text{s}$ 。在同样的磁场中进行的质子核磁共振实验显示，共振频率为 21MHz 。从这些数据中，求质子的 g 值。
- 65.2** 按书中所说方法推导《费曼物理学讲义（第2卷）》公式（35.9）。在第34章证明了：严格按照经典物理，不可能存在顺磁性。你能把这两个结论协调起来吗？
- 65.3** 一顺磁性盐每立方厘米含 10^{22} 个离子。每个离子具有一个波尔磁子的磁矩。将其放于磁感应强度为 $10\,000\text{gauss}$ 的均匀磁场中。在室温（ 300K ）和液氮温度（ 4.2K ）下，计算 $(N_{\text{up}} - N_{\text{down}})/N$ 。 N_{up} 为自旋向上的离子数， N_{down} 为自旋向下的离子数， N 为离子总数。
- 65.4** 按照《费曼物理学讲义（第2卷）》第35章对自旋 $1/2$ 的推导方法，推导对于自旋为 1 的粒子的量子力学顺磁性方程。

66 铁磁性

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第36章。

66.1 一均匀磁化球，其总磁矩为 $\mu = \frac{4\pi a^3}{3}M$ ，其中 a 是半径， M 是磁化强度。

(a) 仅对外部效果而言，计算这个磁化球的单位长度等效面电流 $\mathbf{K}$ 。

(b) 证明这种电流分布具有相同的总磁矩。

66.2 图66-1所示的磁体框架绕有2 150匝线圈，线圈电流为5A。铁芯具有28cm的均匀厚度。 B - H 曲线见图66-1 (b)。

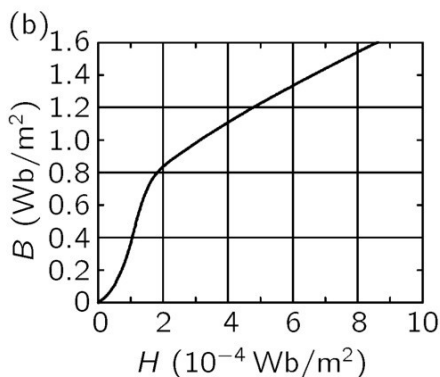
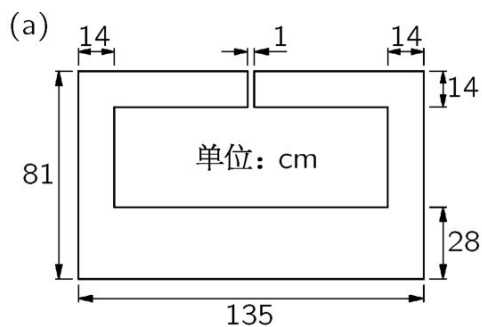


图 66-1

(a) 估算在空气间隙中的磁场有多大？

(b) 你忽略了什么重要效应？

66.3 利用一个永磁性材料制作的棒和软铁的极部，可以在空气中产生磁通，如图66-2 (a) 所示。永磁性材料的特性曲线见图 (b)。在外线圈中通很大的电流，使得该材料磁化至 P 点。假设软铁具有无限大的磁导率，并且忽略磁通的边缘效应，求电流断开后，间隙中的磁通密度。

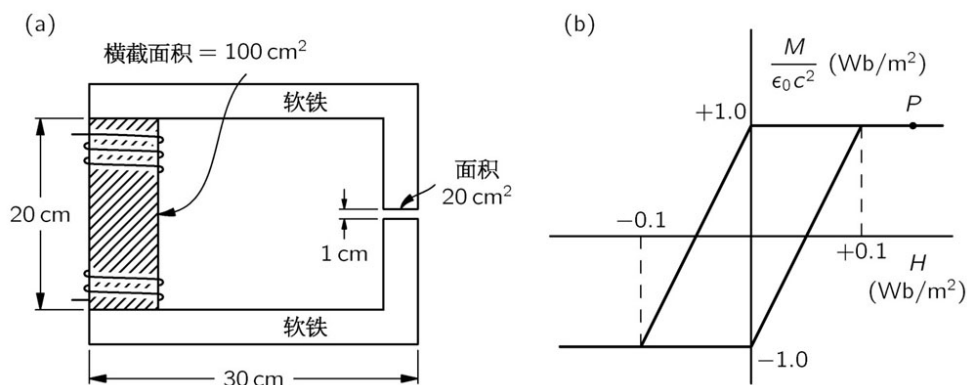


图 66-2

66.4 一很长的圆柱形铁棒被永久磁化，磁化强度均匀，为 M 。 M 的指向沿圆柱体的轴。

(a) 忽略边缘效应，求铁中的 B 和 H 。

(b) 如果有一沿轴线的细长型空腔，求空腔中心的 B 和 H 。

67 弹性

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第38章。

利用以下数据：

	比重	杨氏模量 (10^{11} dyn/cm ²)
钢	7.83	20.01
铝	2.71	6.96

67.1 在空间技术的很多应用中，使用强度-重量比最大的材料至关重要。

(a) 实心圆形铝柱和钢珠，长度相等，都为 L ；劲度相等。
比较两者的半径。

(b) 比较两者的质量。

67.2 一长度为 L 、横截面为正方形的铝杆，一端被固定在墙上，如图67-1所示。质量为 m 的物体挂在其自由端。求该系统振动的固有频率。假设杆的横截面是边长为 a 的正方形，杆的质量远小于 m ，物体可看作是质点。

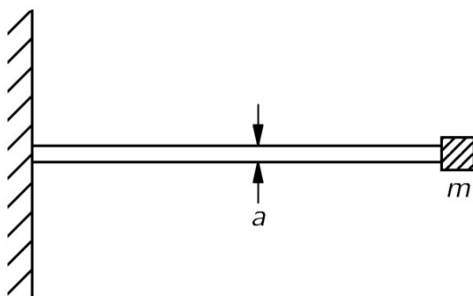


图 67-1

67.3 在《费曼物理学讲义（第1卷）》第47章中，用压力随密度的变化率来表示流体中的声速。

(a) 证明：对于固体中的纵波，相速度为

$$V_{\text{long}}^2 = \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)\rho},$$

其中， ρ ， Y ， σ 分别是密度、杨氏模量和泊松比。

(b) 你认为障碍物尺度何时，上式适用？

67.4 如图67-2所示，一长12"，宽1/2"，厚1/32"的钢尺挤进相距11 1/2"的两物体间。忽略尺子的重量。

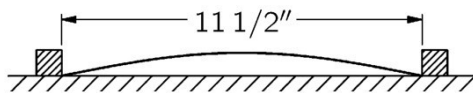


图 67-2

(a) 尺子弯成什么样的曲线？

(b) 求作用在物体上的力。

67.5 如图67-3所示，有一长度为 L ，杨氏模量为 Y 的杆，一端被固定，一端自由。求杆能承受的重量？杆的横截面是厚度为 t ，宽度为 w 的矩形。

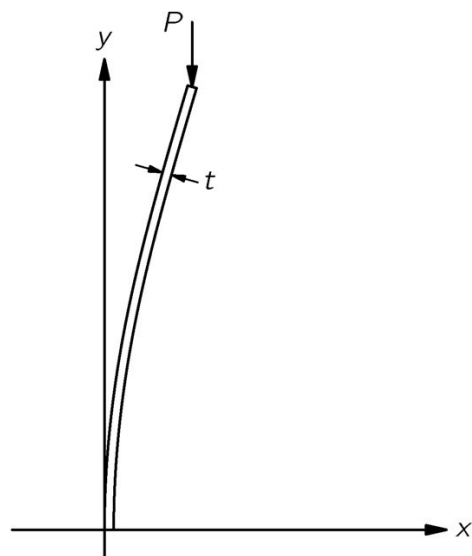


图 67-3

68 干水的流动

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第40章。

68.1 (a) 在《费曼物理学讲义（第2卷）》第40章，有如下论断：如果流体不能承受剪应力，则压力在任何方向上相同。自己证明之。

(b) 证明

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}),$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v})$ 。

68.2 圆筒中的液体以恒定角速度 ω 绕轴转动。到轴距离为 r 的点转动速率为 $v = \omega r$ 。

(a) 求液体上表面的形状。

(b) 证明：单位面积的环流，即 $\nabla \times \mathbf{v}$ ，是该点液体角速度的2倍。

68.3 一半径为 a ，质量为 m 的球以恒定速度 v 通过“干”水。

(a) 证明：球和干水的总动能为

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) v^2,$$

其中 M 是被球移去的流体的质量。

(b) 求球和干水的总动量。

69 湿水的流动

参阅《费曼物理学讲义（第2卷）》第41章。

69.1 半径为 a 的小球以恒定速度 v 穿过黏性流体，受到流体的阻力。小球速度足够慢，液流呈片状。作用在球上的牵力是液体黏性的一种度量。虽然可以严格计算出这个力，但通过量纲分析来寻找该力的形式、与各参量的关系将会很有趣。

69.2 如果黏性流体流过细管道，液流可以看作是片状。对于半径为 a 的管道，横贯管道的速度剖面如图69-1所示。

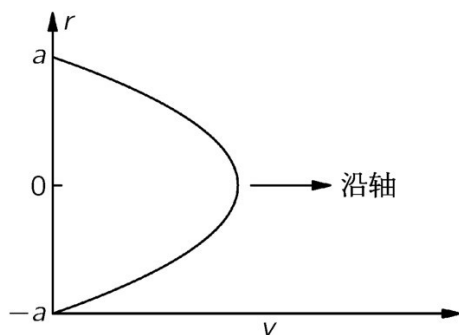


图 69-1

(a) 证明：如果 r 是到管道中心的距离， η 是流体的黏度，单位长度的压降是 $(P_1 - P_2)/L$ ，则速度为

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} (a^2 - r^2)。$$

与欧姆定律完全相似，从管中单位时间流出的流体与压强差 $\Delta P = (P_1 - P_2)$ 满足关系

$$\Delta P = QR,$$

其中 R 是管道的“电阻”。

(b) 求半径为 a ，长度为 L 的管道的“电阻” R 。

(c) 什么对应“电容”？

(d) 这种类比有什么用处？

69.3 一个很大的浅盘，部分面积装有水。一薄而平的木板浮在水上，底面距盘底为 d 。木板以速度 v 沿水平方向缓慢移动。求靠近木板中部，单位体积水的能量耗散率。

第3卷

导言

本卷习题集为《费曼物理学讲义（第3卷）》而设计。和前两卷一样，这一卷也源于加州理工学院1963—1964学年所使用的家庭作业和测验试题。同时，在每一章内我尽力按由易到难的次序进行了排列。

比前两卷更明显，本卷并非最终的面貌，随着课程的进展，一定会更加完善。一个事实是，在《费曼物理学讲义（第3卷）》以最终面貌出现前，本卷习题集中的习题已经被打印出了。因此，习题集和讲义在符号使用上的一些差异在所难免，我希望读者能把这看作是这些习题原本面貌的痕迹。

大部分习题由桑兹、费曼、派恩（J. Pine）和我本人写就。大约四分之三习题的想法由费曼提出。这些习题早先的编辑由威尔茨（C. H. Wilts）和我在1963年夏天完成。这一版本最后的审阅和修正由塔玛鲁（I. Tammaru）完成。

我要再一次感谢沃伦女士，她完成了本卷各个阶段的打字工作。

纽格鲍尔

70 概率幅

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第3章。

70.1 《费曼物理学讲义（第3卷）》第3章所描述的电子干涉实验如图70-1所示。从图中显示的干涉图样 P_{12} ，可以估算出与概率幅 ϕ_1 和 ϕ_2 相关的波长 λ 。记两狭缝的中心之间的距离为 a ，墙到后面挡板的距离为 L 。令 x 为从挡板中心到 P_{12} 第一个极小值的距离。其他需要的尺寸从图中测量。

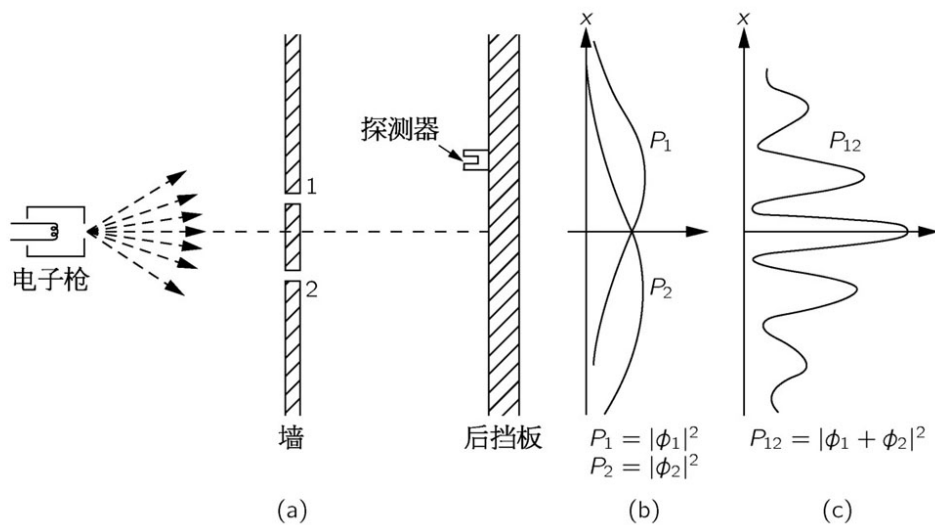


图 70-1

(a) 如果 $L \gg d$ ，你认为 λ 应是多少？

(b) 根据图中给的 P_1 和 P_2 ，计算在图样中央，离开中央的第一个极大值处，前两个极小值处 P_{12} 的值。与给出的 P_{12} 图比较。

70.2 考虑习题70.1中的双缝电子干涉实验，并假定从电子枪到狭缝的距离，从狭缝到后挡板的距离与两缝之间距离比，都很大。同样假设狭缝的宽度远小于两缝的间隔。尽可能定量地回答下列问题：

(a) 如果电子枪向上移 D ， P_{12} 将如何变化？

(b) 如果两缝间距离加倍， P_{12} 将如何变化？

(c) 如果狭缝1的宽度是狭缝2的两倍， P_{12} 将如何变化？

70.3 竖直偏振的单色光入射到一偏振片上，偏振片允许光透射过去的轴与竖直方向成 θ 角。经典考虑，透射强度和入射强度之比是多少？对于单个入射光子来说，偏振片起什么作用？

70.4 一束20 000eV的电子，穿过一多晶金薄膜，然后射向照相底板。底板上显示出以电子束轴为中心的同心黑圆环。为什么？对于金薄膜和照相底板间距离为10cm的情况，预测圆环半径。

70.5 如果考虑习题70.1的标准双缝衍射实验，则从电子在两个狭缝处的概率幅的知识，可以推断出屏上的全部图样。

(a) 如果 a_1 和 a_2 是两个复数，给出在狭缝1处和狭缝2处找到电子的概率幅，那么屏上相对强度分布 $I(x)$ 是什么？

么？ x 表示到中点的距离。采取如下近似：相对于缝和屏之间的距离 L ， x 以及两缝间距离 d 都很小。

- (b) 如果图样仅依赖于缝1和缝2处的概率幅，那么电子如何“知道”在狭缝后采用什么波长来决定图样？

70.6 在图70-2所示的衍射实验中，源发射动量为 p_0 ，质量为 m ，速度为 v 的粒子。

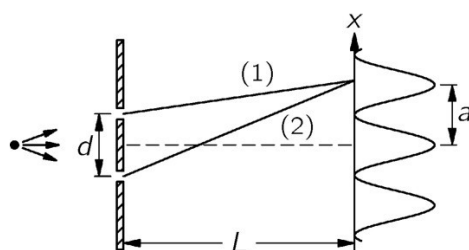


图 70-2

- (a) 中央极大值和相邻极大值之间的间距 a 是多少？假设 $L \gg d$ ， $L \gg a$ 。
- (b) 如果某种影响使上方路径的相位改变了 $\delta\phi_1$ ，证明中央极大值移动的距离 S 为

$$S = +(\delta\phi_1 - \delta\phi_2) \frac{L}{d} \frac{\hbar}{p_0}。$$

于是，如果 $(\delta\phi_1 - \delta\phi_2)$ 对于导致干涉图样的所有路径都一样，那么整个图样偏移，我们可以说粒子在向上移 S 处被观测到。

(c) 假定在区域 A ，粒子具有小势能，且这个势能仅是竖直位置的函数。那么，中心线上方 x 处的粒子动量 $p(x)$ 将轻微地与中心线上的粒子动量 $p(0)$ 不同。证明

$$p(x) = p(0) + \frac{m}{p(0)}[V(0) - V(x)],$$

或，对于 $V(x)$ 缓慢变化的情况，

$$p(x) = p(0) + \frac{Fx}{v},$$

其中 F 是势能梯度的负值。

(d) 在(c)的条件下，路径(1)和路径(2)的动量将不同。波长也是。

(1) 证明：上、下路径的相位差是

$$(\delta\phi_1 - \delta\phi_2) = \frac{d}{2v} \frac{F}{\hbar} L.$$

(2) 证明：图样向上移动 $\frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$ ，其中 t 是从狭缝到屏所需的经典时间。

70.7 电子（自旋1/2）从源 S 射出， S 位于一具有两狭缝的屏前方，如图70-3所示。假定当一个电子到达一个狭缝时，自旋“不翻转”通过的概率幅是 α ，自旋“翻转”通过的概率幅是 β 。进一步假定，区分电子从哪个缝通过是不可能的。

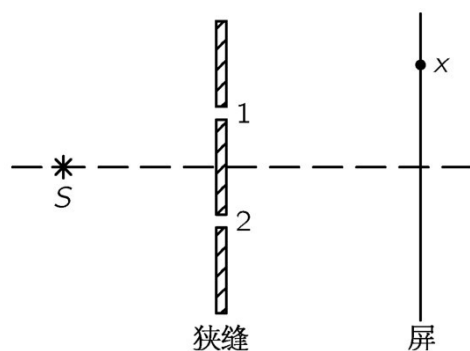


图 70-3

- (a) 如果所有电子被发射出时都是自旋向上，计算在屏上 x 点的强度分布 P ，以 α ， β 和诸如 $\langle 1 | S \rangle$ 和 $\langle x | 1 \rangle$ 的概率幅来表示。
- (b) 如果所有电子被发射出时都是自旋向下，其他条件相同，分布有何不同？
- (c) 如果所有电子被发射出时都是自旋随机向上或向下，其他条件相同，分布有何不同？

70.8 令人惊讶的是，即便发生干涉的两个概率中的一个很小，不太可能发生，仍然有显著的干涉效应。在双孔衍射实验中，如果一个孔不断缩小，使得通过它的概率是原来的1/100，证明：到达图样极大值处的概率仍比到达极小值处的概率高50%。

70.9 距离我们最近的一些恒星，其直径太小了，即使用最好的望远镜也无法“看”清（张角小于望远镜的分辨率）。这些恒星的半径由迈克尔孙用光学干涉仪首次测量出。这一方法仅仅对最近的那些恒星有效。在《自然》杂志 [*Nature* 178 ,

1046 (1956)] 上，布朗和特威斯提出了一个新方法，称为“强度相关”方法，并针对天狼星检测了他们的方法。他们采用了两个抛物型反射面（旧探照灯镜子），在每个反射面的焦点上装有一个光电倍增管。光电倍增管的输出通过同轴电缆输入到一个电路，该电路可以测量两个电流乘积的平均值（一个所谓的“相关器”）。从乘积随两镜间隔的变化，他们确定了恒星的张角。

在那时，有很多物理学家认为这种方法绝不可行。论据是：光是以光子的形式传播的，光子或者到达这个镜面，或者到达那个镜面，在两个电流中，不会存在关联。通过下面的理想实验，你能证明这种论据是错误的。有两个小光源 A 和 B （比如灯泡），将它们放在远离两个光电倍增管 a 和 b 的地方，摆放的几何关系如图70-4所示。两个计数器分别连接到探测器 a 和 b 上，用来测量每秒钟到达计数器的光子数 p_1 和 p_2 。计数器 a 和 b 同样连接到一个“巧合”电路上，该电路可以测量两个光电子同时出现（在某短时间 τ 内）的计数率。

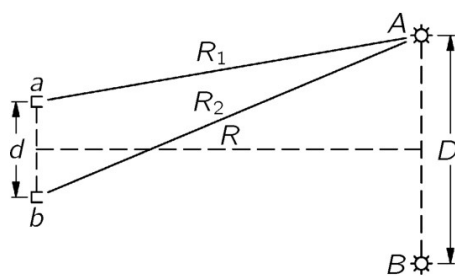


图 70-4

令 $\langle a | A \rangle$ 表示在任一特定的可分辨时间间隔内光子从 A 到达 a 的概率幅。于是， $\langle a | A \rangle$ 是 $c e^{i\alpha_1}$ ，其中 c 是复常

数， α_1 是 k 乘以从 A 到 a 的距离 R 。类似， $\langle b | A \rangle = c e^{i\alpha_2}$ ，其中 $\alpha_2 = kR_2$ ， R_2 是从 A 到 b 的距离。

(a) 证明：“巧合”计数率 p_{12} 正比于

$$2 + \cos 2k(R_1 - R_2)。$$

(b) 如果 R 已知，如何利用以上结果测量恒星直径 D ？忽略以下事实：因为光来自恒星表面的所有面积，并非来自两个点，因此实际情况必须通过对各种上述模型进行叠加。

71 全同粒子

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第4章。

71.1 广播发射机以功率1 000kW辐射，频率为1.0MHz。

- (a) 求辐射的每个量子的能量，以eV为单位。
- (b) 在电磁场的每个振动周期，多少个量子被发射？

71.2 在黑体中，频率在 ω 到 $\omega + \Delta\omega$ 之间，单位体积的辐射能量 $E(\omega)$ 由普朗克辐射公式（Planck's Radiation Formula）给出

$$\Delta E(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)} \Delta\omega。$$

- (a) 对于小 ω 和大 ω ， $E(\omega)$ 有何性质？
- (b) 频率为何值时，每单位频率间隔具有的能量最大？
- (c) 波长为何值时，每单位波长间隔具有的能量最大？
- (d) 假设太阳最大的能量辐射发生在可见光谱的中部，据此估计太阳的温度 T 。

71.3 估算为了使氦原子中两个电子的自旋以同方向排列，需要的磁场 B 多大？

71.4 在某体系中，假定“跃迁”只能在特定的能级间发生，如图71-1所示。即，我们假定能级上的原子数随着放出或吸收量子而变化。已知，当系统处在频率 $\hbar\omega = \Delta E$ 为的辐射中时，两个激发态和基态相互达到热平衡。能量为 $2\Delta E$ 的直接跃迁是不被允许的。

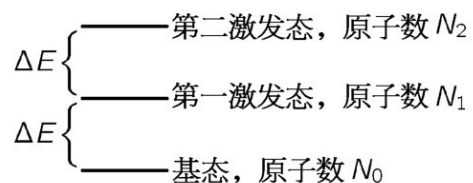


图 71-1

(a) 以量子数 $n(\omega)$ 来表示 N_1/N_0 和 N_2/N_1 。

(b) 推出 $n(\omega)$ 的一个简单关系，仅与 $\Delta E/kT$ 有关。

(c) 对于以下条件，求 $n(\omega)$ 的近似表达式。

$$(1) \quad \hbar\omega \gg kT.$$

$$(2) \quad \hbar\omega \ll kT.$$

71.5 在中子被发现之前，原子核被认为由质子和电子组成。证明 N^{14} 原子 (N^{14} 原子核质量接近质子的14倍) 是一个波色子。实验 (N_2 分子光谱实验) 显示，该原子是一个费米子。这是新的核子 (中子) 存在的首个实验迹象。说明中子假设如何解决这一困境。

71.6 在激光器中，大量相同原子被提升到激发态。少量的某种光的作用便会导致受激辐射，直至所有原子像雪崩一样贡献、产生很多光子，每个光子具有严格一样的波长和方向。

(a) 解释原子怎么能被“训练”成以相同方向发射光子的？

(b) 你能期望未来有一天人们发展出对于中微子（自旋为 $1/2$ 的无质量粒子）的类似装置吗？

71.7 (a) 如果两个非全同粒子间无相互作用，则一个粒子从 a 到 b ，而另一粒子从 c 到 d 的概率是 $P_{ac \rightarrow bd} = P_{a \rightarrow b} P_{c \rightarrow d}$ ，其中 $P_{a \rightarrow b}$ 是当第二个粒子不存在时，第一个粒子从 a 到 b 的概率， $P_{c \rightarrow d}$ 是当第一个粒子不存在时，第二个粒子从 c 到 d 的概率。

(b) 在(a)中，非全同粒子的限制是必须的吗？

71.8 氘是自旋为1的波色子；因此，一束氘核可以处于+1, 0, -1三种状态之一。进行一个实验，让氘核和氘核碰撞。在质心系中，求探测到氘核的概率 $P(\theta)$ 关于入射氘核和靶氘核之间夹角 θ 的函数关系。假设：入射氘核是非极化的；在散射过程中，氘核不破裂也不聚集一起；在散射中，自旋不发生变化； $f(\theta)$ 是偏转角 θ 的概率幅。

71.9 令 $f_1(\theta)$ 表示 π 介子被质子散射的概率幅， $f_2(\theta)$ 表示 π 介子被中子散射的概率幅。那么你认为 π 介子被氦核以角 θ 散射

的概率是多少？以 π 介子被质子和中子散射的概率 P_1 和 P_2 来表示。（假设一个 π 介子只和一个核子发生散射，即高阶散射过程被忽略。）考虑两种情况：

(a) 散射后，质子或中子的反冲打破了核。

(b) 反冲很小，核未被打破。

(c) 哪种情况导致更多散射？

71.10 在中子散射实验中，一束中子入射到中子靶上。安置一探测器，用来探测在质心系中以角度 θ 散射的中子。入射束中，粒子自旋不发生改变地散射到探测器的概率幅是 f ；粒子自旋发生翻转（和靶粒子交换自旋方向）地散射到探测器的概率幅是 g 。如果假设 f 和 g 都不依赖于 θ ，对于下面情况，求探测器中的计数概率。

(a) 入射中子和靶中子的自旋都沿 $+z$ 方向。

(b) 入射中子的自旋沿 $+z$ 方向，靶中子的自旋沿 $-z$ 方向。

(c) 入射束非极化，靶中子的自旋沿 $+z$ 方向。

(d) 入射中子和靶中子都是非极化的。

(e) 如果靶是极化质子，且中子-质子散射概率幅等于中子-中子散射概率幅，则(a)中答案将如何改变？假设探测器对中子和质子的探测效率一样。

提示：自旋交换的概率幅 g 只有在初始自旋不同时才有作用。

71.11 一束非相对论性质子穿过液氢的薄层靶子，如图71-2所示，对与入射方向成 α 角的散射质子进行计数。可以在图示的质心系中对散射过程进行分析。两个质子 p_1 和 p_2 以相同速率靠近；碰撞后，两个质子 p'_1 和 p'_2 偏转 θ 角分开。如果我们定义 z 轴垂直于散射所在的平面，则每个质子的 J_z （自旋角动量的 z 分量）是 $+\hbar/2$ 或 $-\hbar/2$ 。我们称这两种自旋为“上”自旋和“下”自旋。假设两个质子自旋都向上， p_1 以 θ 角散射进探测器的概率幅是 $f(\theta)$ 。由于我们不能说哪个粒子被探测到，所以一质子出现在 θ 角的概率幅是 $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ 。负号的出现源于质子是费米子。于是，我们可以说：一个质子在探测器中被观测到的概率是

$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2。$$

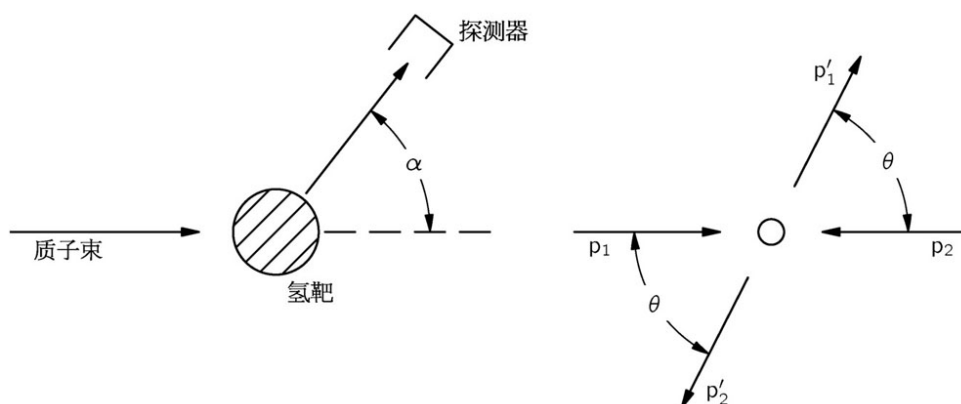


图 71-2

现在假设： p_1 自旋向上， p_2 自旋向下； p_1 自旋不变地散射到探测器的概率幅为 $f'(\theta)$ ，自旋翻转地散射到探测器的概

率幅为 $g(\theta)$ (散射概率幅与相对自旋取向有关)。在这里, “上”自旋粒子到达探测器的概率幅为 $f(\theta) - g(\pi - \theta)$ 。

(a) 求 θ 和 α 的关系。

(b) 在“上”自旋-“下”自旋的例子中, 求一个以“下”自旋状态进入探测器的质子的散射概率幅。

(c) 假设一束“自然”的非极化质子被“自然”(非极化)的靶散射, 且探测器无法区分两种自旋取向。求在 θ 角上的散射概率。

(d) 证明: 如果 $f' = f$, $g = 0$, 则自旋随机的质子的散射等同于概率幅为 $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ 的“纯费米子”的散射和概率幅为 $f(\theta) + f(\pi - \theta)$ 的“纯波色子”的散射的混合:

$$P(\theta) = A |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + B |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2。$$

(e) 求 (d) 中的 A 和 B 。

7.12 假定 N 个电子处于体积为 V 的大盒子里, 系统处在最低可能能量状态。

(a) 如果忽视电子间相互作用, 证明盒子的每个模式正好被两个电子占据, 倘若模式的动量 $\hbar k$ 小于 $p_{\max}$, 其中 $p_{\max}$ 由下式确定

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{\max}} V \cdot 2 \cdot 4\pi p^2 dp.$$

(b) 求全部电子的总能量 U 。

(c) 求这种“简并电子”气所施加的压强。证明压强-体积关系是 $PV^\gamma=c$ ，其中 c 为常量。

(d) 求 γ 。

71.13 白矮星的物质被高度压缩，以至于习题71.12中的理论可以对其应用。如果 ρ 是物质密度， $\rho/2M_p$ 是每立方米的质子数，其中 M_p 是质子质量，且我们假定核中的质子和中子一样多。

(因此，在习题71.12的公式中 $\frac{N}{V} = \rho/2M_p$ 。)

这样一种由于引力而物质压缩在一起的星体的平衡方程，在一本天体物理学书上是：

$$P = A\rho^{5/3},$$

$$dP/dr = -G\rho M(r)/r^2,$$

$$dM(r)/dr = 4\pi\rho r^2,$$

其中 r 是到星体中心的径向距离， $M(r)$ 是半径 r 内的球体质量， P 是压强， A 是常数。

(a) 你能对这些方程的原因进行解释吗？

(b) 你能对常数 A 提供一个公式或数值吗?

你可以假设全部压强来自简并电子, 核不起作用。(为什么?)

72 自旋1

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第5章。

72.1 证明《费曼物理学讲义（第3卷）》5—6章节的论述：如果施特恩-格拉赫装置（Stern-Gerlach apparatus） C 可以分成 A 和 B 两部分，则

$$\langle x | c | \phi \rangle = \sum_k \langle x | B | k \rangle \langle k | A | \phi \rangle$$

其中， $k = -, 0, +$ 是自旋1的基态。

72.2 三个“改进型”施特恩-格拉赫装置〔如《费曼物理学讲义（第3卷）》第5章所描述，改进版装置按照自旋的 z 分量分离粒子束，但使粒子束在空间上合在一起〕依次串联在一排。让自旋1的粒子通过这三个装置。第一个和第三个装置以相同的取向排列，中间的装置与它们有一任意偏转角。用第5章的符号，可写成图72-1的样子。

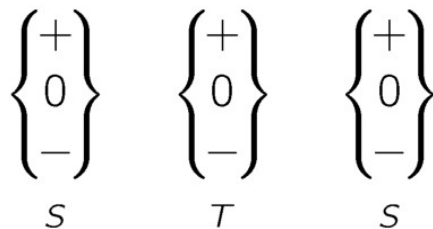


图 72-1

- (a) 如果 T 中的一个缝是“开”的，在最后的 S 系统的三个状态中，粒子束出现的比例是否依赖于输入态，即是否取决于粒子束在 $+S$ ， $0S$ ， $-S$ 中的比例分布。为什么？
- (b) 如果 T 中的两个缝是“开”的呢？
- (c) 如果 T 中的三个缝是“开”的呢？

72.3 三个“改进型”施特恩-格拉赫实验组成的系列被用来测试自旋1的粒子，如图72-2所示。三个装置沿一直线排列，但 T 装置相对于两个 S 装置绕该直线转动 90° 角。一束自旋1的粒子从左方进入装置。离开第一个 S 装置的粒子束强度是每秒 N_1 个粒子。

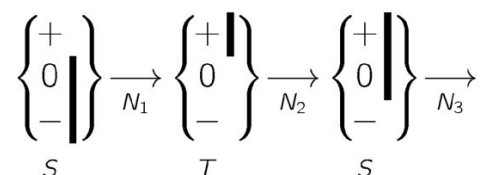


图 72-2

- (a) 求离开 T 装置的粒子束强度 N_2 。
- (b) 求离开最后的 S 装置的粒子束强度 N_3 。
- (c) 如果所有的“挡板”都从 T 装置取下， N_2 和 N_3 将如何？

72.4 考虑一系列改装后的应用于自旋1粒子的施特恩-格拉赫装置 S ， T ， S' ，如图72-3所示。（ T 相对于 S 旋转 90° 。假设入射粒子

束是非极化的。)

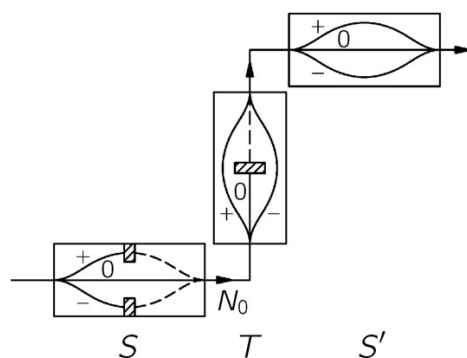


图 72-3

- (a) 从 S 装置出来的粒子数是 N_0 ，求从 S' 射出的 $|+S'\rangle$ 态和 $|0S'\rangle$ 态的粒子数 $N_{+S'}$ 和 $N_{0S'}$ 。
- (b) 假设我们有一个“透明探测器”，可以被放进 T 装置的 + 和 - 态中。令这些探测器具有如下性质：当粒子通过其中一个探测器时，生成一个信号，自旋状态不发生变化。此外，粒子的动能没有明显变化（通过 T 装置的粒子轨道可看作和没探测器时一样）。探测器置于 T 的 + 和 - 态（0 态仍然关闭），如果从 S 发出的粒子数为 N_0 ，求 N_{+T} 、 N_{-T} 、 $N_{+S'}$ 和 $N_{0S'}$ 。
- (c) 在 (b) 描述的实验中，如果实验结束后发现，由于来自探测器的信号没有被记录， N_{+T} 、 N_{-T} 没有计数，则 $N_{+S'}$ 将如何变化？
- (d) 如果每个探测器的效率只有 50%（即，50% 的时间内，粒子和探测器没有相互作用）， $N_{+S'}$ 和 $N_{0S'}$ 将如何变

化？

- (e) 如果 S 的+和-态上的挡板被移除， N_0 个粒子进入 S ，求 $N_{+S'}$ 和 $N_{0S'}$ 。（ T 上的探测器也移除）

73 自旋1/2

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第6章。

73.1 设想自旋1/2粒子被一组由两个施特恩-格拉赫装置组成的系统过滤。人们认为每个装置只允许一束粒子通过，如图73-1所示。考虑有 N 个非极化原子进入 P ，对于（a）—（h）所示的8种排列方式，求到达 Q 的原子数期望值。

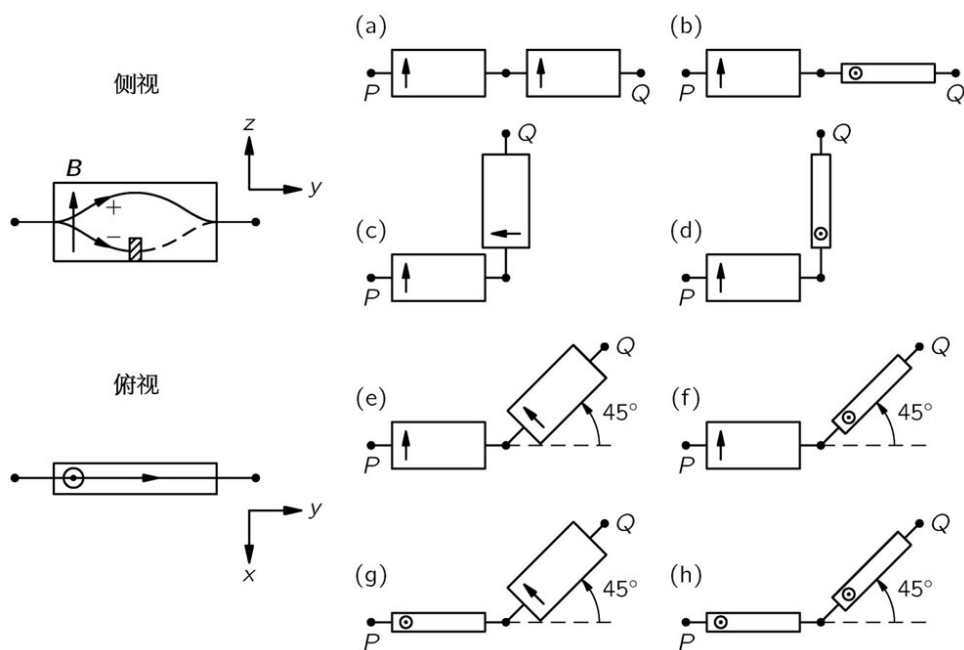


图 73-1

73.2 自旋1/2粒子进入某装置，沿 z 轴方向自旋向上和向下的粒子的概率幅分别为 a 和 b 。

（a）说明粒子到达装置上任一给定点的概率都有 $|aX+bY|^2$ 的形式，其中 X 、 Y 是表示装置特征的复数。

对于 (b) 和 (c) 的情况，求到达给定点的概率，以 X 、 Y 表示。

(b) 沿 z 轴，入射粒子自旋向上。向下呢？

(c) 沿 x 轴，入射粒子自旋向上。向下呢？

(d) 沿极化角为 θ ， ϕ 的轴，入射粒子自旋向上。

有下列几种方式，可以认为入射粒子是“随机”自旋态：

(I) 在有些实验中粒子自旋沿 z 轴向上，在另一些实验中，沿 z 轴向下。

(II) 在有些实验中粒子自旋沿 x 轴向上，在另一些实验中，沿 x 轴向下。

(III) 每个粒子具有确定的 θ ， ϕ 角，但所有方向随机选择。

对于以上每一种“随机”情况：

(e) 求粒子到达装置的平均概率 $\langle P \rangle$ ，并证明所有情况下结果一样。

(f) 如果自旋 $1/2$ 粒子从一个孔中射出，粒子在孔的一边有 (I) (II) (III) 中的一种方法制备。你在孔的另一边，你能设想出什么方法在你这边就能识别粒子是由哪种方法制备的？

73.3 用于自旋1/2的三个改进型施特恩-格拉赫装置 S ， T ， U 如图73-2（a）所示的位置摆放。

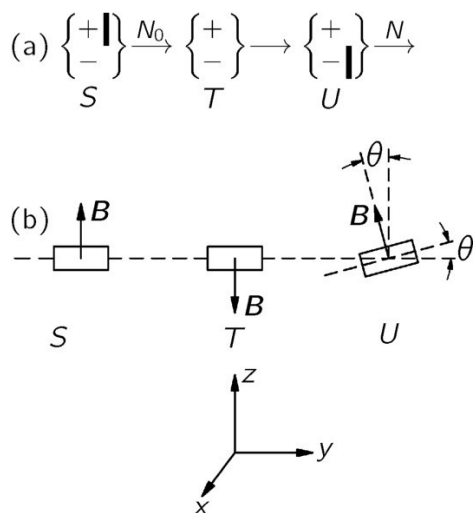


图 73-2

(a) 以由 S 射出的粒子数 N_0 和 $\langle +T \mid +U \rangle$ 之类项表示从 U 射出的自旋1/2粒子数 N 。

现在考虑和上面相同的装置，但磁场 B 方向如（b）图所示。特别地， T 的磁场方向旋转至与 S 的磁场方向反平行； U 的磁场方向旋转至与 z 轴成 θ 角。

(b) 明确求 $\langle +T \mid -S \rangle$ 和 $\langle -T \mid -S \rangle$ 。

(c) 仅使用绕 z 轴和 y 轴的旋转的变换表来明确表示 $\langle +U \mid -S \rangle$ 。

(d) 对于

(1) $\theta=0$

$$(2) \theta = \pi$$

求 (c) 中结果的极限形式。

(e) 将 (d) 中 $\theta = \pi$ 的结果和 (b) 中 $\langle +T | -S \rangle$ 结果比较，并作出解释。

73.4 以片方解石把一束光（沿 z 方向传播）分裂成两部分，对应 x 偏振和 y 偏振。进入方解石 S 的单个光子有一在 x 束或 y 束的概率幅。可以用一片同样的方解石使两束光再会合在一起，正如施特恩-格拉赫装置一样。另有一方解石 T ，其轴在 xy 平面有一倾斜角 θ ，将光束分成 x' 态和 y' 态，或记为 xT 、 yT 。从你关于偏振光的经典理论的知识，求概率幅 $\langle xT | xS \rangle$ 和 $\langle yT | yS \rangle$ 。由于光不能静止，仅考虑绕传播轴 z 的旋转。（关于其他轴的旋转可以用它们在传播方向的效应来描述，而非对偏振的效应。在这方面，光子和电子虽同为两态系统，但它们的转换性质很不同。）

73.5 求 $\langle j | A | i \rangle$ 的所有4个元素，其中 i, j 是下面装置的 x, y 。

(a) 一 x - y 方解石分束器和 y 轴光束被遮挡的恢复器。

(b) 一 x - y 方解石分束器和以 θ 角放置且 y 轴光束被遮挡的恢复器。

(c) x 轴向透光的偏振片。

- (d) x - y 平面的 θ 轴透光的偏振片。
- (e) 一 x - y 方解石分束器和具有使 x 束相位滞后 θ 的遮挡玻璃的恢复器。
- (f) 一 x - y 方解石分束器和具有使 x 、 y 束相位滞后 θ 的遮挡玻璃的恢复器。
- (g) 一 x - y 方解石分束器和以 45° 角放置且具有使 x 束相位滞后 90° 的遮挡玻璃的恢复器。
- (h) 一四分之一波片。
- (i) 位于 x 轴上的双折射材料。
- (j) 使偏振面向右旋转 θ 角的糖溶液。
- (k) 某一装置，该装置可以将光束分为 x 、 y 束，把 x 束变成 y 方向，再将两束光合在一起。
- (l) 证明：你可以利用 (k) 中的仪器进行永恒运动。

73.6 在某种核衰变中，根据 β 衰变理论（核不发生角动量或宇称变化，称为“费米允许”），沿 z 轴以速度 v 运动的电子自旋沿 z 向上被发射出的概率幅是 $\sqrt{1 - v/c} \sin \theta / 2$ ，沿 z 向下被发射出的概率幅是 $\sqrt{1 + v/c} \cos \theta / 2$ 。（这里 θ 是反中微子发射方向偏离 z 轴的角度，如图73-3所示。巧合的是，反中微子的自旋总沿着其运动方向。）

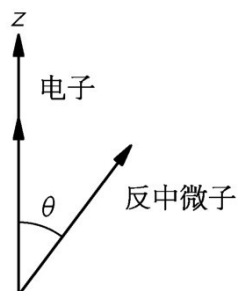


图 73-3

- (a) 求自旋沿 z 轴向上的概率？向下的呢？
- (b) 求自旋在 $+x$ 方向的概率？在 $-x$ 方向的呢？
- (c) 求自旋在 $\pm y$ 方向的概率。
- (d) 如果，如通常那样，没有观测到中微子（对所有反中微子的方向取平均），那么（a）中的答案将如何？

73.7 在习题73.6中，作一洛伦兹变换，将沿 z 轴以速度 v 运动的电子变为静止电子，这不会改变沿该轴自旋向上或向下的概率幅。（你能解释为什么可以如此吗？）然而，反中微子的表观方向当然要改变。证明：在习题73.6中的概率幅意味着在电子静止的参照系中，电子的自旋方向和反中微子的运动方向（也是自旋方向）相反排列。

74 概率幅对时间的依赖关系

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第7章。

74.1 在 z 方向的磁场 $\mathbf{B}$ 中的自旋1粒子有三个态（记为 $+$, 0 , $-$ ），相应能量分别为 μB , 0 , $-\mu B$ 。

（a）用量子力学证明，非均匀磁场中的一束这种粒子将分裂成三束，并求有关偏转 $\Delta\theta$ 的定律（以磁场的长度 L ，粒子的初始动量 p_0 等表示）。假定偏转很小。

（b）用量子力学证明：这样的粒子将发生“进动”。[利用《费曼物理学讲义（第3卷）》5—7章节的系数，进行类似7-5章节的讨论。]

（c）提出至少两个独立实验来测量出 μ 。

75 哈密顿矩阵

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第8章。

75.1 将一束自旋 $1/2$ 、磁矩为 μ 的粒子进入施特恩-格拉赫滤波器，该滤波器只允许相对于 z 轴的 $|+\rangle$ 态粒子通过。然后，这些粒子在平行于 x 轴的均匀磁场 $\mathbf{B}_0$ 中经历时间 T 。离开均匀磁场后，粒子进入第二个施特恩-格拉赫滤波器，这一滤波器只允许相对于 z 轴的 $|-\rangle$ 态粒子通过。

(a) 能使所有粒子通过第二个滤波器的 $\mathbf{B}_0$ 最小值是多少？

(b) 如果粒子只在磁场中停留了原时间的一半，则有多少粒子通过第二个滤波器？

75.2 将一束自旋 $1/2$ 、磁矩为 μ 的粒子进入施特恩-格拉赫滤波器，该滤波器只允许相对于 z 轴的 $|+\rangle$ 态粒子通过。然后，粒子束进入与 z 轴成 45° 角且位于 xz 平面内的磁场中。经过时间 t 后，具有 $J_x = \hbar/2$ 或 $J_y = \hbar/2$ 的粒子被发现的概率 $P_{+x}(t)$ 和 $P_{+y}(t)$ 分别是多少？

75.3 一自旋 $1/2$ 粒子，在 $t=0$ 时刻其自旋指向 $+x$ 方向。粒子处于一装置中，该装置能使单位时间内从 $+z$ 态到 $-z$ 态的概率幅与从 $-z$ 态到 $+z$ 态的概率幅相等，且都等于 i 乘以某正常数 $\frac{A}{\hbar}$ ，即 $H_{12} = H_{21} = -A$ 。进一步， $H_{11} = H_{22}$ ，并可以取为零。

- (a) 在 $t > 0$ 时, 发现处于 $+z$ 态粒子的概率 $P_{+z}(t)$ 是多少?
- (b) 给出处于 $+z$ 态的概率幅和处于 $-z$ 态的概率幅的两种组合。这些态的能量是多少?
- (c) 在任意时间 t , 存在一轴, 沿该轴自旋向上的概率为1。这个轴在什么方向?
- (d) 你能想到一个具有这种效应的物理装置吗?

76 氨微波激光器

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第9章。

76.1 在《费曼物理学讲义（第3卷）》第9章中，计算过微波照射氨分子时，氨分子从 $|II\rangle$ 态到 $|I\rangle$ 态跃迁的概率。 $|II\rangle$ 态的能量低于 $|I\rangle$ 态，因此是从微波辐射中吸收能量。

(a) 重新发展想法，求每单位时间氨分子从 $|I\rangle$ 态到 $|II\rangle$ 态跃迁的概率 $P(I \rightarrow II)$ 。

(b) 吸收概率 $P(II \rightarrow I)$ 和发射概率 $P(I \rightarrow II)$ 相比如何？

(c) 求氨分子的自发辐射率 $A_{I, II}$ 。

77 其他双态系统

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第10章。

77.1 水样本中的质子（磁矩为 μ ）暴露在一均匀磁场中。现在虽然磁场 $\mathbf{B}$ 的大小不变，但其方向在核磁共振（nuclear magnetic resonance, NMR）实验中随时间改变方向：

$$B_x = B \sin\theta \cos\omega t$$

$$B_y = -B \sin\theta \sin\omega t$$

$$B_z = B \cos\theta$$

初始时（ $t=0$ ），质子自旋沿磁场方向，处于 $+\frac{1}{2}$ 态。假设在球坐标系中，偏离 z 轴的角度 θ 很小。

（a）共振时， ω 须为何值？

（b）对于共振 ω ，在 t 时刻，粒子沿 z 轴自旋向下的概率 $P_{-z}(t)$ 是多少？

77.2 一自旋 $1/2$ 粒子（磁矩为 μ ）位于强磁场 $\mathbf{B}_0$ 中。一振荡磁场 $2\mathbf{B}_n \cos\omega t$ 与 $\mathbf{B}_0$ 垂直，其大小远小于 $\mathbf{B}_0$ 。如果粒子的自旋初始时沿 $-\mathbf{B}_0$ 方向排列，经过 t 时间，自旋平行 $\mathbf{B}_0$ 的概率 $P_{\parallel}(t)$ 是多少？

78 再论双态系统

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第11章。

78.1 (a) 证明：泡利自旋矩阵可以看作是矢量 σ 的分量， σ 遵循以下规则：

$$\sigma \times \sigma = 2i\sigma$$

$$\sigma \cdot \sigma = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 求 $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ 。

78.2 二氧化碳分子是一种线性分子（OCO），它容易得到一个额外电子而成为负离子。设想，如果电子附于氧原子上，电子要有能量 E_O ，而附于碳原子上，电子要有能量 E_C 。然而，稳态不需要这些能量，因为电子有小的机会在氧原子和碳原子间跳跃。（假设直接从氧原子跳到氧原子的机会可以忽略。）

(a) 求二氧化碳粒子的可能能级，以 E_O 、 E_C 以及另一参数表示。

(b) 在 E_O 和 E_C 相等时，给出每个稳态的物理描述。

78.3 如图78-1所示，间距相等的6个原子围成一圈。加一额外电子，并定义基态 $|1\rangle$, $|2\rangle$, ..., $|6\rangle$ 。其中， $|1\rangle$ 表示额外电子在原子1上， $|2\rangle$ 表示额外电子在原子2上，以此类推。假设额外电子从任一原子出发，跳到两个最邻近原子中的任一个的单位时间概率幅确定，是 $-iA/\hbar$ ；而跳到更远原子的概率幅为零。

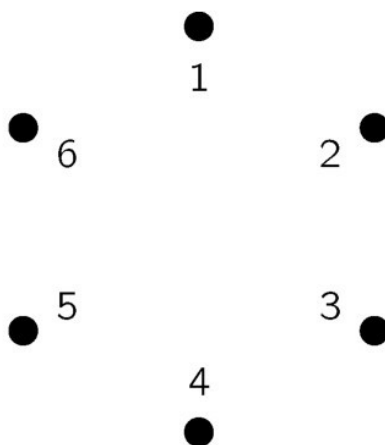


图 78-1

(a) 证明：如果概率幅 $C_k = \langle k | I \rangle$ 全部等于 $\frac{1}{\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_I t\right)$ ，其中 $|k\rangle$ 是第 k 个基态，则 $|I\rangle$ 是稳态。

(b) 求 (a) 中的 E_I 。

(c) 有其他几个稳态？

可以证明，如果 ψ 是稳态，只要选择适当的 δ ，则概率幅 $C_k = \langle k | \psi \rangle$ 有以下关系：

$$C_2 = C_1 e^{i\delta}$$

$$C_3 = C_2 e^{i\delta}$$

$$C_4 = C_3 e^{i\delta}$$

$$C_5 = C_4 e^{i\delta}$$

$$C_6 = C_5 e^{i\delta}$$

(d) 求 δ 的允许值。

(e) 求系统的能级图，给出能级间隔。

78.4 一分子由位于等边三角形顶点的三个相同原子组成。在这一原子的负离子中，额外电子可以从三个原子中任意一个跳到另一个上。

(a) 取从任一原子跳到另一原子的哈密顿矩阵元等于 $-A$ ，计算离子的能级间隔。

(b) 一电场施加在离子上，电场位于离子平面内，指向三角形的一个顶点，如图78-2所示。如果场强使得该顶点的电子的势能比另外两个顶点上电子的势能高 $\epsilon A = 0.01A$ ，则能级间隔变化多少？如何变化？

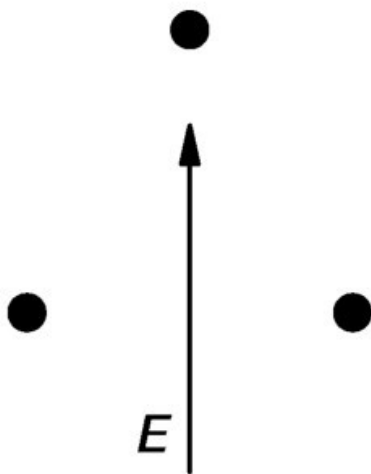


图 78-2

79 氢的超精细分裂

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第12章。

79.1 就以下情况计算氢原子 $j=1$ 能级的分裂。

(a) 氢原子位于星际空间的磁场中，磁场大约 10^{-5} gauss 量级。

(b) 氢原子位于地球表面，磁场大约 $1/2$ gauss。

(c) 在实验室产生的强磁场中，磁场大约 10^5 gauss 量级。

将你的结果以频率和波长表示。

80 在晶格中的传播

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第13章。

80.1 考虑具有等间距 b 的无限长原子列，并假设电子能以两种构型 i 和 j （能量分别为 E_i 和 E_j ）附于一给定原子上，即假定以适当的基态组是：

$$\left| \begin{array}{c} \text{电子位于原子 } x_n \\ \text{构型 } i \end{array} \right\rangle = |x_n, i\rangle,$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{电子位于原子 } x_n \\ \text{构型 } j \end{array} \right\rangle = |x_n, j\rangle。$$

进一步假设，电子从一原子跳到最近邻原子的概率幅是：

$$-\frac{A_{ii}}{i\hbar} \quad \text{从 } |x_n, i\rangle \text{ 到 } |x_{n+1}, i\rangle \text{ 或 } |x_{n-1}, i\rangle,$$

$$-\frac{A_{jj}}{i\hbar} \quad \text{从 } |x_n, j\rangle \text{ 到 } |x_{n+1}, j\rangle \text{ 或 } |x_{n-1}, j\rangle,$$

$$-\frac{A_{ji}}{i\hbar} \quad \text{从 } |x_n, i\rangle \text{ 到 } |x_{n+1}, j\rangle \text{ 或 } |x_{n-1}, j\rangle,$$

$$-\frac{A_{ij}}{i\hbar} \quad \text{从 } |x_n, j\rangle \text{ 到 } |x_{n+1}, i\rangle \text{ 或 } |x_{n-1}, i\rangle。$$

考虑 $A_{ij}=A_{ji}=-A$ ， $A_{jj}=A_{ii}=-B$ 的情况。

(a) 求系统的能量允许值。

(b) 对于 $|E_i - E_j| \ll 2B$ 和 $|E_i - E_j| \gg 2B$ 情况，描述能带结构。

对照《费曼物理学讲义（第3卷）》第13章检查你的结果。

80.2 考虑图80-1所示由“a”型和“b”型原子组成的无限长序列。令在第 n 个“a”型原子上找到电子的概率幅是 C_n^a ，在第 n 个“b”型原子上找到电子的概率幅是 C_n^b 。假设“a”型原子上电子的能量为 $E_0 + \Delta E$ ，“b”型原子上电子的能量为 $E_0 - \Delta E$ 。进一步假设，跳向最近邻原子的哈密顿矩阵元等于 $-A$ 。原子间距是 b 。

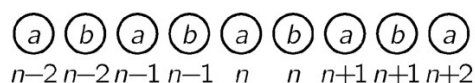


图 80-1

(a) 计算并通过取点粗略画出稳态的能量关于电子波数 k 的函数关系。（对于一给定的 k ，有两个能量值。）

(b) 为了使每个态仅出现一次，对 k 如何限制？

80.3 来自杂质的散射：参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》13-6章节，令 $n=0$ 态的电子有所不同。令 $H_{00} = E_0$ ， $H_{01} = H_{10} = H_{0(-1)} = H_{(-1)0} = -B$ ，其中 $B \neq A$ 。

(a) 求透射振幅 γ ，反射振幅 β 。

(b) 证明：

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1。$$

80.4 对于习题80.3和《费曼物理学讲义（第3卷）》13-6章节， $\gamma = 1 + \beta$ 。容易证明，一般情况下， $\gamma = 1 + \beta$ 。于是，对于一维的一般散射，“粒子数守恒”给出

$$|\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1。$$

(a) 证明这要求 $\text{Re}\left[\frac{\beta}{1 + \beta}\right] = 0$ 。

(b) 证明 β 可以写成

$$\beta = ie^{i\eta} \sin\eta，$$

其中 η 是实数。

量 η 被称为“散射相移”，给出了反射波的相位和幅度。

（在三维情况同样正确。）

80.5 考虑一个界面（在此处，无限长晶体的性质发生改变）的一维模拟，如图80-2所示。令粒子从左边射入，正如《费曼物理学讲义（第3卷）》第13章中一样。在区域I，有参数： E_0 ， $-A$ ， b ；在区域II，有参数： E'_0 ， $-A'$ ， b' 。类似于 A 和 A' 的应用于界面处 $n=0$ 和 $n=+1$ 原子间的概率幅是 B 。（假设 A 、 A' 和 B 是实数。）

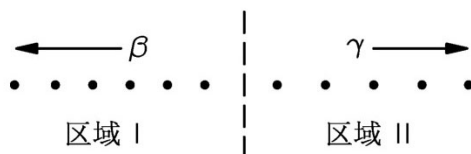


图 80-2

- (a) 证明：界面处 $n=0$ 和 $n=+1$ 原子间 $\gamma = (B/A') (1+\beta)$ 。
- (b) 求 β ，以 A 、 A' 、 B 、 kb 、 $k'b'$ 表示。
- (c) 证明：如果 $k'b'$ 是虚数，则 $|\beta| = 1$ 。其物理意义是什么？
- (d) 通过证明下述表达式来证明粒子数守恒：

$$|\beta|^2 + \frac{v_g'/b'}{v_g/b} |\gamma|^2 = 1,$$

其中 v_g 和 v_g' 是两个区域内的群速度。你能对 $|\gamma|^2$ 进行解释吗？

81 半导体

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第14章。

81.1 回旋共振实验通常如图81-1所示。 $B=B_0$ ，是 z 方向的静磁场； $E_{\text{rf}}=E_0 \cos \omega t$ ，沿 x 轴。在回旋共振频率 ω_c 处的共振通过 E_{rf} 场吸收功率的变化来测得。从均匀磁场中粒子轨道出发，得到

$$\omega_c = \frac{qB}{m^*},$$

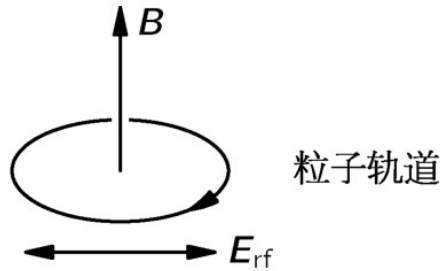


图81-1

其中， m^* 是有效质量。自始至终假设 m^* 与粒子运动方向无关。半导体中电子（或空穴）的运动方程是

$$m^* \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

其中， τ 是两次碰撞间的平均时间。〔见《费曼物理学讲义（第2卷）》32-1和32-6章节。〕

(a) 令 $v_x = v_0 e^{i\omega t}$, $E_x = E_0 e^{i\omega t}$, 证明

$$\frac{v_x}{E_x} = \frac{q\tau}{m^*} \left[\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} \right]^\circ$$

(b) 解释吸收功率为何与 $\text{Re} \left[\frac{v_x}{E_x} \right]$ 成正比？

(c) 描述怎样从回旋共振数据求得 τ 和 m^* 。

(d) 注意，共振的测定要求 $\omega_\tau c > 1$ ，这有什么物理意义？

81.2 当不施加外电压时，在典型的“ p - n ”结（如二极管）内，空穴的能级图如图81-2（a）所示。在平衡状态，从 n 区域扩散到 p 区域的“热生”空穴电流 I_g 正好等于从 p 区域到 n 区域的空穴“复合”电流 I_r 。当施加“反向电压”时，能级图如（b）所示，当施加“正向偏压”时，能级图如（c）所示。

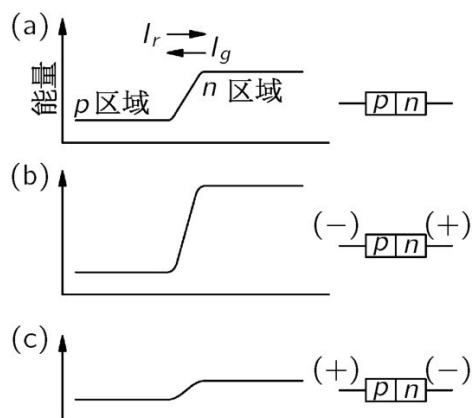


图 81-2

- (a) 先考虑平衡时的电流，再考虑偏压下的电流，据此证明：净空穴电流有如下形式：

$$I(\text{空穴}) = I_g (e^{qV_e/kT} - 1)$$

- (b) 求总电流。

82 独立粒子近似

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第15章。

82.1 丁二烯的结构如图82-1所示。如果我们移除（理论上）双键上的4个电子，然后分别将它们再加上去，那么我们便可以以独立粒子模型来处理这个问题。现在我们考虑一个具有一般能量 E_0 和哈密顿元- A 的四孔系统。

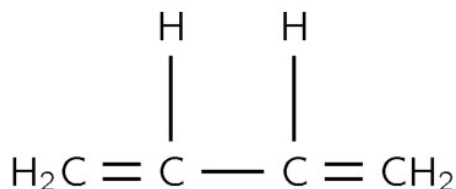
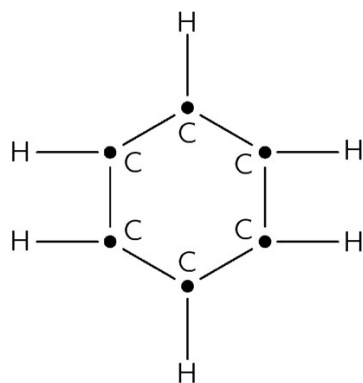


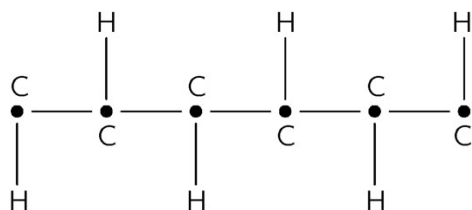
图 82-1

- (a) 当丁二烯分子由第一激发态跃迁到基态时，发射多少波长 λ 的辐射？假设 $A = 1\text{eV}$ 。
- (b) 单电离的丁二烯，在其双键上只有三个电子，问这些电子如何分布？

82.2 用分子轨道理论（采取独立粒子近似）计算图82-2中（a）和（b）两构型的能量差 ΔE ，并进一步估计破坏苯环所需的能量。利用苯从第一激发态跃迁到基态产生约 $2\,000\text{\AA}$ 波长的辐射这一事实。



(a)



(b)

图82-2

82.3 在极低温下，铁磁材料可以按照与《费曼物理学讲义（第3卷）》第15章中所讨论的自旋波相类似的方法进行探讨。特别是对于 $E_k \approx Ab^2 K^2$ 的任何模式 K ，有一个基于热力学的概率分布，据此可以找到铁磁体中有0个、1个、2个、3个等自旋向下的概率（在零度时，自旋全部向上）。

（a）证明：对于模式 K ，自旋向下的原子数正比于

$$\frac{1}{e^{E_k/kt} - 1}.$$

(b) 如果推广至三维，则 $E_k \approx A b^2 (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)$ ，单位体积内，自旋向下的原子平均数为

$$\int \frac{d^3 K / (2\pi)^3}{e^{E_k / kT} - 1}。$$

(c) 在 T 趋于零的极限情况，磁化强度趋于饱和磁化强度 M_{sat} 。证明：在低温下，磁化强度和饱和磁化强度之比是

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_{\text{sat}}} &= 1 - \text{const } T^{3/2} \\ &= 1 - \left(\frac{kT}{4\pi A} \right)^{3/2} \left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} \right]。 \end{aligned}$$

(d) 将 (c) 中被积函数级数展开，估算积分值。

83 振幅对位置的依赖关系

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第16章。

83.1 考虑图83-1所示的一维方势阱中的质量为 m 的粒子的运动。方势阱为

$$V = \begin{cases} V_0, & x < 0 \text{ or } x > a \\ 0, & 0 < x < a. \end{cases}$$

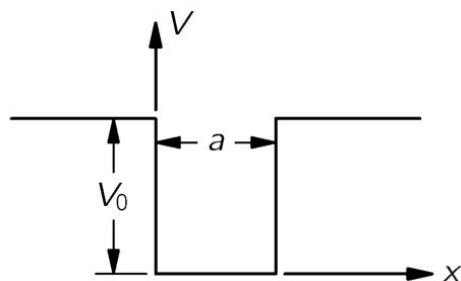


图 83-1

注：为简单起见，令 $V_0 \rightarrow \infty$ 。

(a) 对于最低能量 E_0 的定态，

$$\psi_0(x, t) = u_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar}$$

对于势阱的外部（刚刚处于外部），我们必须有 $u_0(x) = 0$ 。

- (b) 在 (a) 中条件下, 求解势阱内的薛定谔方程。
- (c) 求 E_0 , 画出 $u_0(x)$ (不需归一化) 的草图。
- (d) 求最低能态和第一激发态的能量差。
- (e) 对于最低能态, 大致画出 dp 范围内, 找到动量为 p 的粒子的概率分布。

83.2 考虑图83-2所示的一维势阱中的质量为 m 的粒子的运动。势阱为

$$V = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ V_0, & x > a \end{cases}$$

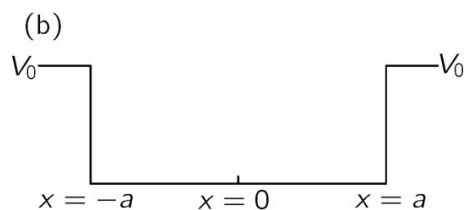
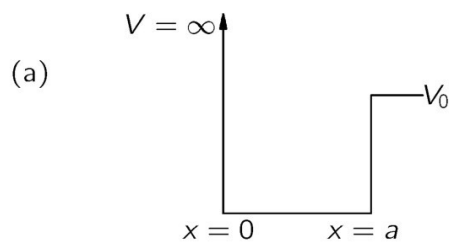


图 83-2

(a) 求 V_0 值，该值使得势阱中粒子的最低能态的能量比 $V_0 \rightarrow \infty$ 时小约10%。

(b) V_0 取 (a) 中的值。(b) 图中的势阱为

$$V = \begin{cases} V_0, & x < -a \\ 0, & -a < x < a \\ V_0, & x > a \end{cases}$$

不进行细致计算，给出在此势阱中第一激发态的能量。

83.3 考虑束缚在以下势阱中的质量为 m 的粒子的一维运动：

$$V = \begin{cases} V_0, & |x| > a \\ 0, & |x| < a \end{cases}$$

(a) 由薛定谔方程和边界条件可得：

$$\alpha \cot(\alpha a) = -\beta,$$

或

$$\alpha \tan(\alpha a) = +\beta,$$

其中

$$\alpha = +\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

$$\beta = +\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

(b) 如果 $V_0 a^2 = 4 \hbar^2 / 2m$ ，估算基态和第一激发态的能量。画出这些态的波函数草图。

(c) 如果 $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$ ，有多少束缚态？

83.4 《费曼物理学讲义（第3卷）》第16章中，与高斯型波函数相联系的动量扩展已被求出。一般情况，空间宽度并非保持恒定，而是随时间扩展：

$$\psi(x) = K e^{-[a(t)x^2 + c(t)]}。$$

(a) 利用薛定谔方程证明：对于自由粒子，

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m}t，$$

其中， $a_0 = a(0)$ 。

(b) $c(t)$ 是什么？

(c) 如果波函数描述了初始时被束缚在 $1.0\text{\AA}$ 宽度区域里的电子，那么1秒钟后，将扩展多远？

(d) 把波函数 $\psi(x)$ 变换到动量空间 $\phi(p)$ ，求发现具有确定动量 p 的粒子的概率。

(e) 动量概率函数的宽度 Δp 如何随时间变化？

(f) 证明：这里得到的动量扩展和直接从空间波函数关于时间的关系求得的“速度扩展”一致。

84 角动量

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第18章。

84.1 一原子的某激发态具有自旋1，并能以发射光子的形式损失能量而进入自旋0态。考虑一被激发原子，其角动量沿某 z 轴的分量为零，令 $A(\theta)$ 表示在与 z 轴成 θ 角的方位上的小立体角 $\Delta\Omega$ 内发射一右旋光子（ rhc ）[注：左旋为 lhc]的概率幅。问 $A(\theta)$ 如何依赖于 θ ？

84.2 X 是一自旋1/2的偶宇称粒子，其衰变机制为

$$X \rightarrow Y + \gamma,$$

其中， Y 是自旋1/2的偶宇称粒子。如果 X 沿 $+z$ 轴自旋向上被激化，则衰变产物可以沿 z 轴以8种方式运动，概率幅分别为 $a \sim h$ ，如图84-1所示（波浪箭头表示以箭头方向运动的电子， Y 上的箭头表示自旋方向）。假设 X 的极化方向和 Y 的动量的夹角是 θ 。

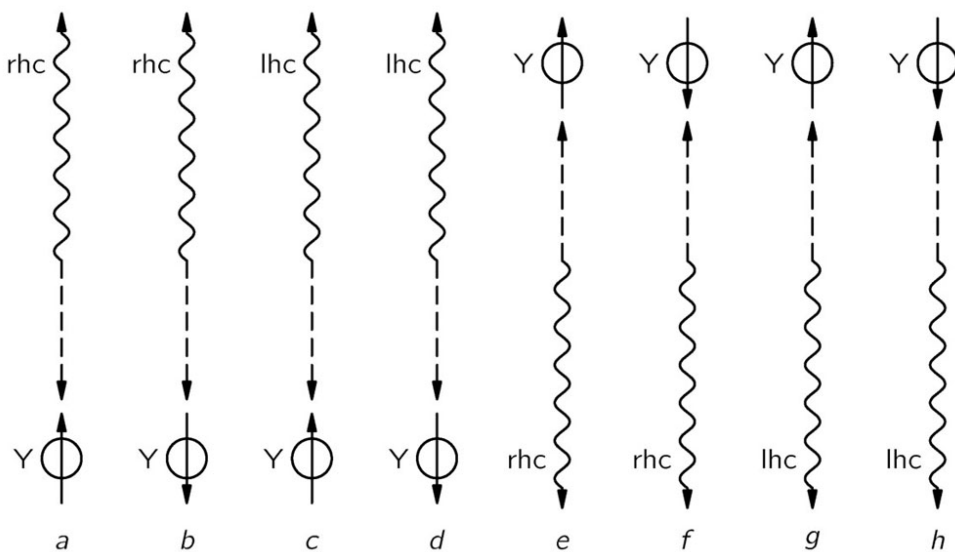
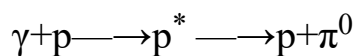


图 84-1

- (a) 概率幅 $a \sim h$ 中，哪个必须为零？
- (b) 当一群沿 z 轴自旋向上的 X 粒子衰变时，计算自旋沿其运动方向（“正螺旋”）的 Y 粒子的角分布 $f^+(\theta)$ 。
- (c) 当一群沿 z 轴自旋向上的 X 粒子衰变时，不管自旋如何，计算所有 Y 粒子的角分布 $f(\theta)$ 。
- (d) 仔细的实验未发现任何与均匀角分布的偏离。其物理原因是什么？

84.3 反应



常常在同步加速器上被研究。在这个反应中， p^* 是质子的一个激发态，它能衰变为一个质子和一个 π^0 。在光子能量的一

特定范围内， p^* 具有总角动量 $j = \frac{3}{2}$ 。假设一束右旋偏振光的能量正好能产生 $j = \frac{3}{2}$ 的 p^* ，其沿+z 方向入射到非极化质子上。这个反应的角分布可如下分析：光子加质子，形成 $|j = \frac{3}{2}, m = +\frac{1}{2}\rangle$ 态 p^* 的概率幅为 a ，形成 $|j = \frac{3}{2}, m = +\frac{3}{2}\rangle$ 态 p^* 的概率幅为 b 。质子激发态 p^* 衰变成一个自旋为零的中性 π 介子和沿相反方向运动的质子。令 c 为质子沿+z 轴自旋向上的概率幅， d 为质子沿+z 轴自旋向下的概率幅。

(a) 解释为什么对于 p^* ，只有 $m = +\frac{3}{2}$ 和 $m = +\frac{1}{2}$ 被允许？对于最终态，只有 $m' = +\frac{1}{2}$ 和 $m' = -\frac{1}{2}$ 被允许？

(b) 预测 π^0 的角分布，以 a ， b ， c 和 θ 表示。

84.4 考虑一被非极化质子弹性散射的 π^+ 介子。（介子自旋为零；宇称守恒。）假设散射由如下过程主导：质子吸收介子而被激发到 $j = \frac{3}{2}$ 态（ $j = \frac{3}{2}$ 由质子自旋和介子-质子轨道角动量组合而得）。然后，介子重新被发射出，质子回归到基态。证明：这种假说预言的散射介子的角分布正比于 $(1+3\cos^2 \theta)$ 。

84.5 一原子的基态具有零自旋和偶宇称。第一激发态具有自旋1和未知宇称。假设有一些第一激发态原子，且在 z 方向都有 $m = +1$ ；原子跃迁到基态时发射光子。

(a) 如果对光子的探测不涉及其自旋情况，则角分布能否用来确定第一激发态原子的宇称？

(b) 证明：对 x' 和 y' 偏振光子的测量能确定未知的宇称。
(取 z' 轴沿光子发射方向。)

85 氢原子与周期表

参阅《费曼物理学讲义（第3卷）》第19章。

85.1 处于 $3d$ 态的氢可以通过辐射而衰变到基态。描述这一辐射的发射光谱。

85.2 (a) 利用经典的论述来证明：在基态氢原子中，核与电子的距离 r 不能超过 $R = 2 r_B$ ($r_B = \hbar^2 / m e^2$ 是波尔半径)。

(b) 利用量子力学，求基态氢原子中，于 $R = 2r_B$ 之外发现电子的概率 $P(r > R)$ 。

85.3 慢 μ 子与物质的相互作用被描述为包含三步：首先，由于静电吸引， μ 子进入围绕核的波尔半径（被称为“ μ 原子”）。其次，由于辐射， μ 子轨道衰变直至 μ 原子处于基态。最后，通过与核的弱相互作用， μ 子衰变。

考虑一镭的 μ 原子G：

(a) 求基态能量 E_0 。

(b) 求在第一激发态到基态的跃迁中所发射的光子的波长 $\lambda_1 \rightarrow 0$ 。

(c) 求基态的 μ 轨道的特征半径 r'_B 。

(d) 求基态 μ 原子中，在 $r < R$ 范围内发现 μ 子的概率 P ($r < R$) 的近似表达式。

(e) 比较电子和 μ 子位于核“内部”的概率。

85.4 一学生让从炽热氢气中发出的光通过一衍射光栅，导致一些分立光谱线的出现。

(a) 其中一条线波长为 $4\,430\text{\AA}$ ，线展宽 $150\text{\AA}$ 。对应的能量以及不确定度为 $E = (2.80 \pm 0.09) \text{ eV}$ 。氢能级中的哪个跃迁可以产生这样的光谱线？把氢原子由基态激发到可以产生上述跃迁的能态，需要多少能量？

(b) (a) 中的线是巴耳末系 (Balmer series) 中的一员。巴耳末系是从更高能级向 $n=2$ 态跃迁所产生的光谱线。巴耳末系中的最短波长和最长波长分别是多少？

(c) 在很多天体物理的应用中，例如恒星大气的光谱吸收线，氢谱线被发现和其他元素的谱线相伴。其中一组谱线属于单电离氦原子。问单电离氦的基态能量是多少？

(d) 单电离氦向 $n=4$ 态的跃迁所产生的光谱线中最短的波长是多少？与巴耳末系中的最短波长相比如何？

附录

A 单位和量纲

单 位 和 量 纲	符 号	值	
质量[M] 千克 克 磅	kg g lb	1 kg 10^{-3} kg 0.453 6 kg	SI 单位 cgs 单位
长度[L] 米 厘米 毫米 微米 埃 千米 英寸 英尺 英里 天文单位 光年 秒差距	m cm mm μm $\text{\AA}$ km in ft mi AU ly pc	1 m 10^{-2} m 10^{-3} m 10^{-6} m 10^{-10} m 10^3 m 2.54 cm 0.304 8 m 1.609 3 km 1.497×10^8 km 9.5×10^{12} km 206 265 AU	SI 单位 cgs 单位 精确 精确 太阳-地球距离 3.263 ly or 31×10^{12} km
时间[T] 秒 毫秒 微秒 纳秒 分 小时 天 年	s ms μs ns ^m or min ^h or h ^d or d ^y or y	1 s 10^{-3} s 10^{-6} s 10^{-9} s 60 s 3 600 s 8.64×10^4 s 3.16×10^7 s	SI and cgs 单位 $1^{\text{m}} = 60^{\text{s}}$ $1^{\text{h}} = 60^{\text{m}}$ $1^{\text{d}} = 86\,400^{\text{s}}$ $1^{\text{y}} = 365.25^{\text{d}}$
速度[LT ⁻¹] m s^{-1} mi h^{-1}	m s^{-1} mi h^{-1}	1 m s^{-1} (22/15) ft s^{-1}	SI 单位 mph
加速度[LT ⁻²] m s^{-2}	m s^{-2}	1 m s^{-2}	SI 单位

续 表

单 位 和 量 纲	符 号	值	
力[MLT^{-2}] 牛顿 达因	N dyn	1 kg m s^{-2} 10^{-5} N	SI 单位 cgs 单位
动量/冲量[MLT^{-1}] kg m s^{-1}	kg m s^{-1}	1 N s	SI 单位
能量/功[ML^2T^{-2}] 焦耳 erg 电子伏	J erg eV	$1 \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$ 10^{-7} J $1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$	SI 单位 cgs 单位
功率[ML^2T^{-3}] watt	W	1 J s^{-1} or 1 V A	SI 单位
电荷[Q] 库仑 电子电荷	C q_e	1 A s $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	SI 单位
电流[QT^{-1}] 安培 毫安 微安	A mA μA	1 A 10^{-3} A 10^{-6} A	SI 单位
势[$\text{ML}^2\text{T}^{-2}\text{Q}^{-1}$] 伏特	V	1 J C^{-1}	SI 单位
电场[$\text{MLT}^{-2}\text{Q}^{-1}$] 伏每米	V m^{-1}	1 N C^{-1}	SI 单位
磁场[$\text{MT}^{-1}\text{Q}^{-1}$] 特斯拉 韦伯每米 ² 高斯	T Wb m^{-2} gauss γ	$1 \text{ N s m}^{-1} \text{ C}^{-1}$ 1 T 10^{-4} T 10^{-9} T	SI 单位
电阻[$\text{ML}^2\text{T}^{-1}\text{Q}^{-2}$] 欧姆	Ω	1 V A^{-1}	SI 单位
电感[ML^2Q^{-2}] 亨利	H	1 V s A^{-1}	SI 单位
电容[$\text{M}^{-1}\text{L}^{-2}\text{T}^2\text{Q}^2$] 法拉第 毫法 皮法	F μF pF or $\mu\mu\text{F}$	1 C V^{-1} 10^{-6} F 10^{-12} F	SI 单位

B 物理学常数、常量

参见：C.W. Allen, *Astrophysical Quantities*, The Athlone Press, 1963. E.R. Cohen, *Il Nuovo Cimento Series 10*, **6**, 110 (1957). *Physics Today* **17**, 48 (1964).

1. 天体物理和地球物理

太阳：

质量 m_{S}	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ $= 3.33 \times 10^5 m_{\text{E}}$
赤道半径	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
平均密度	1.41 g cm^{-3}

地球：

质量 m_{E}	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
赤道半径	$6.38 \times 10^6 \text{ m}$
平均密度	5.52 g cm^{-3}
角速度	$7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
平均轨道速度	29.77 km s^{-1}
陆地面积	$1.48 \times 10^{14} \text{ m}^2$ $\approx \text{地球表面积的 } 29\%$
海洋面积	$3.63 \times 10^{14} \text{ m}^2$ $\approx \text{地球表面积的 } 71\%$
海洋平均深度	$3\,770 \text{ m}$

月球：

质量 m_{M}	$7.34 \times 10^{22} \text{ kg}$ $= (1/81.31)m_{\text{E}}$
-------------------	---

赤道半径	$1.74 \times 10^6 \text{ m}$
平均密度	3.34 g cm^{-3}
太阳-地球 距离:	
平均	$1.50 \times 10^{11} \text{ m} = 1 \text{ AU}$
r_P	$1.47 \times 10^{11} \text{ m}$
r_A	$1.52 \times 10^{11} \text{ m}$
地球-月球 距离:	
平均	$3.84 \times 10^8 \text{ m}$
r_P	$3.63 \times 10^8 \text{ m}$
r_A	$4.06 \times 10^8 \text{ m}$
光速:	$c = 2.997\,9 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
引力常量:	$G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
太阳常量(1 AU):	$1\,347 \text{ W m}^{-2}$
重力加速度:	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

2. 原子物理、核物理

普朗克常量:	$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ $= 4.135 \times 10^{-15} \text{ eV s}$ $\frac{h}{2\pi} = \hbar = 1.054\,4 \times 10^{-34} \text{ J s}$ $= 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s}$
波尔半径:	$\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e q_e^2} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = a_0 = 5.29 \times 10^{-9} \text{ cm}$ $= 0.529 \text{ \AA}$
经典电子半径:	$\frac{e^2}{m_e c^2} = \alpha^2 a_0 = r_0 = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}$ $= 2.82 \text{ fermi}$
精细结构常数:	$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}$
氢原子- E_0 :	$\frac{e^2}{2a_0} = 13.6 \text{ eV}$
核“半径”:	$\approx 1.3 \times 10^{-13} \text{ cm } A^{1/3}$

原子“半径”:	$\approx 1.3 \times 10^{-5} \text{ \AA} A^{1/3}$
分子“半径”:	$\approx 1 \text{ \AA}$
电子静止质量:	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
	$m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$
质子静止质量:	$m_p = 1.672\,52 \times 10^{-27} \text{ kg}$
	$= 1\,836 m_e$
	$m_p c^2 = 938.26 \text{ MeV}$
中子静止质量:	$m_n = 1.674\,82 \times 10^{-27} \text{ kg}$
	$m_n c^2 = 939.55 \text{ MeV}$
原子质量单位($\equiv \frac{1}{12} \text{C}^{12}$ 质量):	$1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$
	$(1 \text{ amu}) \times c^2 = 931 \text{ MeV}$
电子康普顿波长:	$\frac{h}{m_e c} = 2\pi\alpha a_0 = \lambda_C = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$
自由电子散射截面:	$\frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$

3. 宏观

ϵ_0	$8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
$1/4\pi\epsilon_0$	$9.00 \times 10^9 \text{ m F}^{-1}$
μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
$\mu_0 \epsilon_0 c^2$	1
$1/\epsilon_0 c$	$377 \text{ } \Omega$
铜 电阻:	$\approx 10^{-8} \text{ } \Omega \text{ cm}$
折射率:	
$n_{\text{水}}$	1.33
$n_{\text{玻璃}}$	≈ 1.5
$n_{\text{空气}}$	1.000 3
声速(STP):	331 ms^{-1}
空气密度(STP):	1.293 kg m^{-3}
	$\approx 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$

标准大气压：

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

$$= 760 \text{ mmHg}$$

$$\approx 14.7 \text{ lbs in}^{-2}$$

水密度(20℃)：

$$1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

阿伏伽德罗常量：

$$N_0 = 6.025 \times 10^{23} \text{ molecules/mol}$$

玻尔兹曼常量：

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$= 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$$

气体常量：

$$R = 8.31 \text{ J/(mol K)}$$

摩尔体积：

$$22.41 \times 10^3 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

斯特藩-玻尔兹曼常量：

$$\frac{\pi^2}{60} \frac{k^4}{\hbar^3 c^2} = \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

$$kT = 1 \text{ eV} \quad (T = 11\,600 \text{ K})$$

$$\approx \frac{1}{40} \text{ eV (室温)}$$

$$1 \text{ eV/atom} = 9.652 \times 10^4 \text{ J/mol} = 23.1 \text{ kcal/mol}$$

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

4. 常数

$$1^\circ = 1.745 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$1' = 2.908\,9 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$1'' = 4.848\,1 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$e = 2.718\,28 \dots$$

$$\pi = 3.141\,59 \dots$$

$$\log_{10} e = 0.434$$

$$\ln 2 = 0.693$$

C 答案

1 原子的运动

- 1.9 (a) $n_G \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $n_L \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$
 (b) $m \approx 10^{-23} \text{ g}$
 (c) $l \approx 10^{-5} \text{ cm}$
 (d) $P \approx 10^{-7} \text{ atm}$
- 1.10 $A \approx 1.4 \times 10^{-14} \text{ cm}^2$
- 1.11 $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- 1.12 (a) $N_H \approx 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$
 (b) $N_A \approx 6.1 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- 1.13 $N_A \approx 10^{24} \text{ mol}^{-1}$
- 1.14 $N_g \approx 0.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$

2 能量守恒, 静力学

- 2.5 $W = (3/\sqrt{2}) \text{ kg} - \text{wt}$
- 2.6 $F_w = (\tan \alpha) \text{ kg} - \text{wt}$,
 $F_p = (1/\cos \alpha) \text{ kg} - \text{wt}$
- 2.7 $W_2 = 0.25 \text{ kg} - \text{wt}$
- 2.8 $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \text{ kg} - \text{wt}$,
 $B = \sqrt{3/2} \text{ kg} - \text{wt}$
- 2.9 $T_1 = T_2 = (50/\sqrt{2}) \text{ lb} - \text{wt}$
- 2.10 (a) W 向下运动
 (b) $F = W(y/x)$, 张力
- 2.11 $F = W\sqrt{h(2R-h)/(R-h)}$

- 2.12 (a) $F_B = 0$ (除重力)
 (b) $\tau_O = FD$
 (c) $\tau_P = FD$
- 2.13 $F = 20.7 \text{ N}$, 方位角 45° , O 点左方
 0.34 m 处
- 2.14 $v = \sqrt{2gD \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \sin \theta}$
- 2.15 $v = \sqrt{gD(\sin \phi - \sin \theta)}$
- 2.16 (a) $a = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{2})g$
 (b) M_2 将向下运动
 (c) $t_1 = \sqrt{H/a}$
 (d) M_1 不会碰到滑轮
- 2.17 $T = \frac{L}{x} \left(W + \frac{w}{2} \right) \tan \theta$
- 2.18 (a) $F_R = 45 \text{ lb} - \text{wt}$
 (b) $F_h = 45 \text{ lb} - \text{wt}$, $F_v = 90 \text{ lb} - \text{wt}$
- 2.19 $\theta = 30^\circ$
- 2.20 $\alpha = 30^\circ$
- 2.21 $F = 0.6W$
- 2.22 $T = 2 \text{ ton} - \text{wt}$
- 2.23 $T = 265 \text{ g} - \text{wt}$, $\alpha = 79.1^\circ$
- 2.24 $T = \sqrt{3}W/4$
- 2.25 $\theta = 30^\circ$

- 2.26 $T = Wh/2\pi r$
 2.27 $W = 4w/\sin\theta$
 2.28 $F_1 = W/3, F_2 = 2W/3, F_{DF} = 4W/3\sqrt{3}$
 2.29 (a) AC, CE, EG, BC, EF, ED
 (b) $F_{BD} = W/2, F_{DE} = 5W/12$
 2.30 $W = 3w/4$
 2.31 $v = 196 \text{ cm s}^{-1}$
 2.32 $v = \sqrt{2gH}$
 2.33 $\theta = \arctan(1/3\sqrt{3}) \approx 10.9^\circ$
 2.34 $W = wr/(R-r)$
 2.35 $A = 5 \text{ m}, B = 11 \text{ m},$
 $T_{\max} \approx 34 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{wt}$
 2.36 (a) $F = WL/h$
 (b) $F_A = W\sqrt{1 + (L/h)^2},$
 方位角 $\arctan(h/L)$

3 开普勒定律与引力

- 3.2 $T \approx 1.6 \text{ h}$
 3.3 $v_{\max}/v_{\min} = 1.033$
 3.4 $g_M = 1.6 \text{ m s}^{-2} \approx g_E/6$
 3.5 (a) $r_s \approx 35.2 \text{ AU}$
 (b) $v_{\max}/v_{\min} = 59$
 3.6 $r \approx 5.9r_E$
 3.8 (a) $\lambda = 0$
 (b) $r_s = r_{E-M}/9$
 3.9 (a) $m_S/m_E = 3.33 \times 10^5$
 (b) $m_J/m_E = 318$
 3.10 $m_a + m_b = (R^3/T^2)m_S$
 3.11 开普勒第二定律不变。开普勒第三定律
 变为 $T^2 \propto R^{(3+\alpha)}$
 注意: $T^2 = (4\pi^2/GM)R^{(3+\alpha)}$

- 3.12 $\Delta g/g = 7 \times 10^{-6}$
 3.13 $M = (1.02 \times 10^{-7} \text{ d}^{-1} \text{ km}^{-3} \text{ s}^3)TV^3m_S$
 3.14 (a) $R_c = 1.88 \times 10^6 \text{ km}$
 (b) $a = r_p^2/(2r_p - R_c) = 8.33 \times 10^6 \text{ km}$
 (c) $T_c = 2\pi a^{3/2}R_c/vr_p \approx 4.8 \text{ d}$
 3.15 $T^2 = \frac{4\pi^2(R+r)^3}{G(M+m)}$
 3.17 (a) $M \approx 3.1m_S$

4 运动学

- 4.5 (a) $t = 1843.8 \text{ s}$
 (b) $v \approx 1385 \text{ ft s}^{-1}$
 4.6 $t \approx 155 \text{ s}$
 4.7 时间更长
 4.8 (a) $v \approx 465 \text{ m s}^{-1}$
 (b) $\omega \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
 (c) $a/g \approx 3.5 \times 10^{-2}$
 4.9 (b) $H_{\max} = 46 \text{ mi}$
 (c) $T = 2.7 \times 10^2 \text{ s}$
 4.10 $e \approx 0.98$
 4.11 (a) $H_{\max} = (v_0^2/2g)\sin^2\theta,$
 $R = (v_0^2/g)\sin 2\theta$
 (b) $\theta = \pi/4$
 4.12 $V = \frac{L}{\cos\theta} \sqrt{\frac{g}{2(L\tan\theta - h)}}$
 4.13 (a) $v \approx 48 \text{ ft s}^{-1}$
 (b) $R \approx 8.5 \text{ ft}$
 4.14 (a) $x = Vt - R\sin\frac{Vt}{R},$
 $y = R\left(1 - \cos\frac{Vt}{R}\right)$
 (b) $v_x = V\left(1 - \cos\frac{Vt}{R}\right), v_y = V\sin\frac{Vt}{R}$

$$(c) a_x = \frac{V^2}{R} \sin \frac{Vt}{R}, a_y = \frac{V^2}{R} \cos \frac{Vt}{R}$$

$$4.15 \quad v = 14.8 \text{ m s}^{-1}$$

$$4.16 \quad (a) \theta = \arctan 3$$

$$(b) x = 14 \text{ m}$$

$$(c) V = 19.8 \text{ m s}^{-1}$$

$$4.17 \quad d \approx 202 \text{ ft}$$

$$4.18 \quad (a) v = 52.5 \text{ mi h}^{-1}$$

$$(b) a = 2.75 \text{ ft s}^{-2}$$

$$4.19 \quad a_I/a_R = 8/9$$

5 牛顿定律

$$5.1 \quad (b) a = 2g/5$$

$$(c) T_1 = (2/5)\text{kg} - \text{wt},$$

$$T_2 = (6/5)\text{kg} - \text{wt}$$

$$5.2 \quad T = 8.8 \text{ m N}$$

$$5.3 \quad T = 25 \text{ N}$$

$$5.4 \quad F = \frac{M_2}{M_1}(M + M_1 + M_2)g$$

$$5.5 \quad F = 392 \text{ N}$$

$$5.6 \quad a = g/9 \text{ 向上}, T = 222 \text{ g} - \text{wt}$$

$$5.7 \quad (a) M_{\max} = \frac{(M_A + M_B)D - 2M_B L \cos \theta}{4L \cos \theta - D}$$

$$(b) t = \sqrt{\frac{8L \sin \theta}{g}}$$

$$5.8 \quad g = \frac{v^2(2M + m)}{2mh}$$

$$5.9 \quad (a) a_0 = \frac{F - (M_1 + M_2)g}{M_1 + M_2}$$

$$(b) T = \frac{M_1}{M_1 + M_2}F$$

$$(c) a = g - F/M_2, a' = g$$

$$(d) t = \sqrt{2M_2 s/F}$$

$$5.10 \quad \Delta t = 0.9 \text{ s}$$

$$5.11 \quad W = 2.7 \text{ kg} - \text{wt}$$

$$5.12 \quad (a) a = g/3 \text{ 向上}$$

$$(b) F = 280 \text{ lb} - \text{wt}$$

$$5.13 \quad m_B \approx 5.8 \text{ kg}$$

$$5.14 \quad x_{\max} = 1$$

$$5.17 \quad h_{\max} \approx 5 \times 10^3 \text{ ft}, R \approx 1.6 \times 10^4 \text{ ft}$$

6 动量守恒

$$6.5 \quad m_2/m_1 = 3$$

$$6.6 \quad E' = 0.71E$$

$$6.7 \quad (a) v_E = 8.4 \times 10^{-22} \text{ m s}^{-1}$$

$$(b) T_E/T_p = 1.7 \times 10^{-24}$$

$$6.8 \quad V_F = 3.66 \text{ m s}^{-1}$$

$$6.9 \quad \text{平台向北移动}, v = 5 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

$$6.10 \quad a(t) = \frac{(m_1 - m_0)g + r_0(v_0 + gt)}{m_1 + m_0 - r_0 t} \text{ 向}$$

$$\text{下, 对于 } 0 < t < \frac{m_0}{r_0}.$$

$$6.11 \quad a = 4.0 \text{ m s}^{-2}$$

$$6.12 \quad F = \mu v(v + gt)$$

$$6.13 \quad V = x \left(\frac{m + M}{m} \right) \sqrt{\frac{9}{L}}$$

$$6.14 \quad (b) \tau_0 = 2L \sqrt{\frac{Mm}{2T(M + m)}}$$

$$6.15 \quad \Delta v \approx vf/4$$

$$6.16 \quad (a) a = r_0 V_0 / M_0$$

$$(b) r_0 = 490 \text{ kg s}^{-1}$$

$$(c) v = -V_0 \int_{M_0}^M \frac{dm}{m}$$

$$6.17 \quad (a) F_R = 5.1 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$(b) F_R \propto v^2$$

7 矢量

$$7.5 \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

$$7.6 \quad (\text{a}) 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$(\text{b}) \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$(\text{c}) 3$$

$$(\text{d}) 3$$

$$(\text{e}) 3$$

$$(\text{f}) 15\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

$$7.7 \quad (\text{c}) R(1) \approx 4.6 \text{ m}$$

$$7.8 \quad (\text{a}) \text{北偏西 } 14.5^\circ.$$

$$(\text{b}) T = 53.9 \text{ min}$$

$$7.9 \quad (\text{a}) \text{东偏北 } 40.5^\circ.$$

$$(\text{b}) \text{东偏南 } 35.6^\circ.$$

$$7.10 \quad \text{方法(2)更快, 快 } 4.0 \text{ 分}.$$

$$7.11 \quad (\text{a}) t_v/t_A = V/\sqrt{V^2 - R^2}$$

$$(\text{b}) t_A/t_L = t_v/t_A$$

$$7.12 \quad D = r_E \arccos [\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\phi_1 - \phi_2)]$$

$$7.13 \quad (\text{a}) \mathbf{a} \approx 3.2 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}, \text{ 指向太阳}.$$

$$(\text{b}) \mathbf{a} \approx 7.2 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}, \text{ 方位角 } \approx 24^\circ.$$

$$(\text{c}) \mathbf{a} \approx 8.5 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}, \text{ 指向太阳}.$$

$$7.14 \quad (\text{a}) \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{g}, \text{ 向右}.$$

$$(\text{b}) \mathbf{a} = \sqrt{2}\mathbf{g}, \text{ 方位角 } 45^\circ$$

$$(\text{c}) F_2 = 272 \text{ kg} \cdot \text{wt}$$

$$7.15 \quad T = 2\pi\sqrt{H/g}$$

$$7.16 \quad \text{For } t \leq 3,$$

$$\mathbf{r}_a(t) = (7 + 7t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4.9(1 - t^2)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_b(t) = (49 - 7t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4.9(1 - t^2)\mathbf{k}.$$

$$\text{For } t \geq 3,$$

$$\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}_b(t) = 28\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4.9(1 - t^2)\mathbf{k}.$$

$$7.17 \quad (\text{a}) \text{正北}.$$

$$(\text{b}) T = 0.17 \text{ h}$$

8 三维空间中的非相对论性两体碰撞

$$8.3 \quad \theta_{\max} = \arcsin(m/M)$$

$$8.4 \quad \theta_1 = \arctan 3, v'_1 = v\sqrt{10}/4, v'_2 = v\sqrt{2}/4$$

$$8.5 \quad \alpha = 120^\circ$$

$$8.6 \quad (\text{a}) \mathbf{v}_{\text{CM}} = (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \text{ m s}^{-1}$$

$$(\text{b}) u_1 = u_2 = 5 \text{ m s}^{-1}$$

$$(\text{c}) \mathbf{v}'_1 = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m s}^{-1}$$

$$8.7 \quad \mathbf{v}'_1 = \sqrt{3}v_0/2 \text{ 方位角 } -30^\circ,$$

$$\mathbf{v}'_2 = v_0/2 \text{ 方位角 } +60^\circ$$

$$8.8 \quad (\text{a}) v_2 = \sqrt{3} \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

$$(\text{b}) \mathbf{v}'_1 = \sqrt{73} \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \text{ 方位角 } 113^\circ$$

$$(\text{c}) \mathbf{u}'_1 = 9 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \text{ 方位角 } 120^\circ$$

$$8.9 \quad \mathbf{v}_1 = 50\sqrt{7} \text{ cm s}^{-1}, \text{ 方位角}$$

$$\arctan(-\sqrt{3}/2) = -41^\circ, \mathbf{v}_2 =$$

$$50 \text{ cm s}^{-1}, \text{ 方位角 } +60^\circ$$

$$8.10 \quad \left| \frac{\Delta T}{T} \right|_{\text{lab}} = \frac{(1 - \alpha^2)m_2}{m_1 + m_2}$$

$$8.11 \quad (\text{a}) \theta = \arctan \sqrt{\frac{M - m}{M + m}}$$

$$(\text{b}) \theta = \arctan \sqrt{\frac{\alpha^2 M^2 - m^2}{(M + m)^2}}$$

$$8.12 \quad M = 9m_p$$

$$8.13 \quad (\text{a}) \mathbf{v}'_2 = \sqrt{5} \text{ m s}^{-1}, \text{ 方位角 } \arctan \frac{1}{2}$$

$$(\text{b}) \alpha = 3/4$$

$$(\text{c}) \theta = 90^\circ$$

$$8.14 \quad (\text{a}) \mathbf{v} = (2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ m s}^{-1}$$

$$(\text{b}) T_{\text{CM}} = 30 \text{ J}$$

9 力

- 9.2 $\mathbf{F} = -108\mathbf{e}_x \text{ N}$
- 9.3 $\mathbf{a} = g/8$ 向下
- 9.4 见习题 9.1。
- 9.5 $x = \mu h$
- 9.6 $X = 32 \text{ cm}$
- 9.7 $\mu_{\min} = t \frac{1}{2} (\cot \theta - 1)$
- 9.8 (a) $\Delta T = \mu T \Delta \theta$
(b) $T_2/T_1 = e^{\mu \theta}$
- 9.9 $v_0 = 595 \text{ m s}^{-1}$
- 9.10 $v = 51.8 \text{ mph}$
- 9.11 $t = 2.2 \text{ s}$
- 9.12 (a) $d = 0.68 \text{ m}$
(b) $t = 1.1 \text{ s}$
(c) $\Delta E = 2.3 \text{ J}$
- 9.13 (a) $a = 75 \text{ cm s}^{-2}$
(b) $F = 200 \text{ g-wt}$
- 9.14 对于 $0 \leq x < x_0$, $v(x) = v_0$ 。对于
 $x_0 \leq x < x_0 + L$, $v(x) = v_0 - \frac{k}{m}(x - x_0)$ 。对于 $x \geq x_0 + L$, 当 $v_0 > kL/m$,
 $v(x) = v_0 - \frac{k}{m}L$ 。
- 9.15 $\epsilon = (R/4)\Delta P$, $|\sigma/\epsilon| = 1$
- 9.16 以 $(g/\sqrt{3}) \text{ m s}^{-2}$ 加速。
- 9.17 (b) $R = mv/qB$
(c) $T = 2\pi m/qB$
- 9.18 (a) $W = 600 \text{ g-wt}$
(b) $T = 800 \text{ g-wt}$
(c) $\theta = 90^\circ$
- 9.19 $F = mg(1 + \mu)/(1 - \mu)$
- 9.20 (a) $H_{\min} = \sqrt{3}W \sin \alpha$

(b) $\phi = 60^\circ$

- 9.21 $R = 4.9 \times 10^{-5} \text{ cm}$
- 9.22 (a) $F_x = qv_y B_z$, $F_y = q(E_y - v_x)B_z$,
 $F_z = 0$
(b) $F'_x = qv'_y B_z$, $F'_y = -qv'_x B_z$
(c) 做摆线运动。

10 势与场

- 10.1 $x = x_0 - v_0 \sqrt{m/k}$
- 10.3 行星内部处处平衡。
- 10.4 $v \approx v_\infty = 3.9 \text{ mi s}^{-1}$
- 10.5 $\phi = 1.4 \times 10^3 \text{ V}$
- 10.6 $Q = 5.6 \times 10^{-5} \text{ C}$
- 10.7 $\phi = 310 \text{ kV}$
- 10.8 (a) $v = 3.0 \text{ m s}^{-1}$, $a = 2.5 \text{ m s}^{-2}$,
 $P = 45 \text{ W}$
(b) $v = 4.5 \text{ m s}^{-1}$, $a = 2.5 \text{ m s}^{-2}$,
 $P = 67.5 \text{ W}$
- 10.9 (a) $\mathbf{F} = (4.5\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 2.6\mathbf{k}) \text{ N}$
(b) $\mathbf{a} = (4.5\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 2.6\mathbf{k}) \text{ m s}^{-2}$
(c) $T = 2.5 \text{ J}$
(d) $dT/dt = 21.4 \text{ W}$
- 10.10 (a) $\mathbf{r} = (2.00\mathbf{i} + 3.02\mathbf{j} + 0.1\mathbf{k}) \text{ m}$
(b) $\mathbf{v} = (0.045\mathbf{i} + 2.12\mathbf{j} + 0.97\mathbf{k}) \text{ m s}^{-1}$
(c) $T = 2.71 \text{ J}$
- 10.11 (a) $W = 0$
(b) $W = 0$, 是保守力。
- 10.12 $H = R/2$
- 10.13 (a) $x = H \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta - R \cos^3 \theta$
(b) $F = mg(2H/R + 1)$
- 10.14 $d = mg/k - R/5$

$$10.15 \quad v = \sqrt{gL/2}$$

$$10.16 \quad d = R/3$$

$$10.17 \quad \theta = \arcsin 0.27$$

$$10.18 \quad a = 7.2 \text{ m s}^{-2}$$

$$10.19 \quad W_{\text{shots}} \approx 625 \text{ J}, W_{\text{disc}} \approx 570 \text{ J}, W_{\text{jav}} \approx 330 \text{ J}$$

$$10.20 \quad \phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) & \text{for } r \leq R \\ -\frac{GM}{r} & \text{for } r > R \end{cases}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{R^3}\mathbf{r} & \text{for } r \leq R \\ -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} & \text{for } r > R \end{cases}$$

$$10.21 \quad \mathbf{a} = -\frac{4\pi}{3}\rho G \left(\frac{R^3}{(R+x)^2} - \frac{(R/4)^3}{(5R/4+x)^2} \right)$$

$$10.22 \quad F_x = F_z = 0 \text{ and}$$

$$F_y = \begin{cases} m(-2\pi\rho dG + 4\pi r^3\rho G/3y^2) & y > d/2, \\ m(-4\pi\rho Gy + 4\pi r^3\rho G/3y^2) & d/2 > y > r, \\ m(-4\pi\rho Gy + 4\pi\rho Gy/3) & r > y \geq 0. \end{cases}$$

$$10.23 \quad E = -GmM/2a$$

$$10.24 \quad (\text{a}) \quad T^2 = 4\pi^2 a^3/GM$$

$$(\text{b}) \quad T^2 = \pi^2 G^2 M^2 / 2(E/m)^3$$

$$10.26 \quad H_{\min} = 19.2 \text{ cm}$$

$$10.27 \quad P = 25 \text{ kW}$$

$$10.28 \quad P = 4.60 \times 10^4 \text{ atm}$$

$$10.29 \quad W_{\min} = G M m' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{D-r} \right) +$$

$$G m m' \left(\frac{1}{D-R} - \frac{1}{r} \right)$$

$$10.30 \quad \text{卫星沿抛物线轨道逃脱。}$$

$$10.31 \quad (\text{a}) \quad v_{\min} = 11.8 \text{ mi s}^{-1}$$

$$(\text{b}) \quad v_{\max} = 47.1 \text{ mi s}^{-1}$$

$$10.32 \quad v_0 = 40.8 \text{ km s}^{-1}, \alpha = 40.9^\circ$$

11 单位和量纲

$$11.1 \quad (\text{a}) \quad M T^{-2}$$

$$(\text{b}) \quad M L^2 T^{-2}$$

$$(\text{c}) \quad M L^2 T^{-2}$$

$$(\text{d}) \quad M T^{-2}$$

$$(\text{e}) \quad 1(\text{无量纲})$$

$$(\text{f}) \quad M L^{-1} T^{-1}$$

$$(\text{g}) \quad L T^{-2}$$

$$(\text{h}) \quad M L T^{-2} Q^{-1}$$

$$(\text{i}) \quad M T^{-1} Q^{-1}$$

$$(\text{j}) \quad L T^{-1}$$

$$11.2 \quad (\epsilon_0 c)^{-1} = 377 \quad \Omega$$

$$11.3 \quad v' = \frac{\lambda}{T} v$$

$$a' = \frac{\lambda}{\tau^2} a$$

$$F' = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} F$$

$$E' = \frac{\mu \lambda^2}{\tau^2} E$$

$$11.4 \quad T \propto \sqrt{l/g}$$

$$11.5 \quad GM = 4\pi^2$$

$$11.6 \quad T \text{ 与 } k \text{ 无关。}$$

$$11.7 \quad T \propto \sqrt{m/k}$$

$$11.8 \quad T \propto m v^2 / l, a \propto v^2 / l$$

$$11.9 \quad R \propto (v^2/g)f(\theta), T \propto (v/g)f'(\theta),$$

其中函数 f, f' 只与 θ 有关。

$$11.10 \quad T \propto \sqrt{m/\sigma}$$

$$11.11 \quad \omega \propto (1/l) \sqrt{T/\sigma}$$

$$11.12 \quad v \propto \sqrt{g\lambda}$$

$$11.13 \quad p \propto f(N) m v^2 / V, \text{ 函数 } f \text{ 只取决于 } N.$$

$$11.14 \quad GM \text{ 是常量, 其单位是 } L^3 T^{-2}. \text{ 在问题中, 仅有的长度量纲和时间量纲是径向半径 } r \text{ 和轨道周期 } t. \text{ 于是, } r^3/t^2 = \text{ 常量.}$$

12 相对论性运动学和动力学, 质量和静止能量等效性

$$12.1 \quad x = \gamma(x' + \beta ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma(t' + \beta x'/c)$$

$$\text{其中 } \beta = V/c, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}.$$

$$12.2 \quad v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \beta v'_x/c}$$

$$v_y = \frac{v'_y/\gamma}{1 + \beta v'_x/c}$$

$$12.3 \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}$$

$$a'_x = \frac{a_x/\gamma^3}{(1 - \beta v_x/c)^3}$$

$$12.4 \quad L' \approx 4.5 \text{ m}, \theta' \approx 33.7^\circ$$

$$12.5 \quad (a) \Delta t = 16.8 \mu\text{s}, \Delta t' = 2.37 \mu\text{s}$$

$$(b) L' = 0.71 \text{ km}$$

$$12.7 \quad F = mc^2/b$$

$$12.8 \quad (a) M \approx 42 \text{ kg}$$

$$(b) H \approx 2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$12.9 \quad H \approx 6.3 \times 10^8 \text{ t s}^{-1}$$

$$12.10 \quad (a) g = 1.03 \text{ ly y}^{-2}$$

$$(b) x = 4.15 \text{ ly}, v = 0.982c$$

13 相对论性能量和动量

$$13.2 \quad (a) pc = T\sqrt{1 + 2mc^2/T}$$

$$(b) v/c = \sqrt{3}/2$$

$$13.3 \quad \Delta t = 5 \text{ min}$$

$$13.4 \quad (a) pc = 3 \times 10^{-2} \text{ BRZ}$$

$$(b) R = 6.8 \times 10^3 \text{ km}$$

$$13.5 \quad (a) R_{\min} = 1.8 \text{ m}$$

$$(b) f = 15 \text{ MHz}$$

$$(c) \Delta f/f = 0.14$$

$$13.6 \quad T_1 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M} c^2$$

$$T_2 = \frac{(M - m_2)^2 - m_1^2}{2M} c^2$$

$$13.7 \quad T_p = 4.1 \text{ MeV}$$

$$T_v = 29.7 \text{ MeV}$$

$$p_p = p_v = 29.7 \text{ MeV}/c$$

$$13.8 \quad E_\gamma = \Delta E(1 - \Delta E/2mc^2)$$

$$13.9 \quad (a) V = c/2$$

$$(b) M = (4/\sqrt{3})m$$

$$13.10 \quad T = 6m_p c^2 = 5.6 \text{ GeV}$$

$$13.11 \quad T_e = 4.004 \text{ GeV}$$

$$13.12 \quad E_\gamma = 4m_p c^2 = 3.8 \text{ GeV}$$

$$13.13 \quad (a) T_p \approx 2m_\pi c^2 = 279 \text{ MeV}$$

$$(b) T_\pi \approx m_\pi^2 c^2 / 2m_p = 10.4 \text{ MeV}$$

$$13.14 \quad \text{记 } \beta = v/c,$$

$$(a) E_\gamma = \frac{m_\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta \cos \theta)}$$

$$(b) E_{\max} = \frac{m_\pi c^2 (1+\beta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{当 } \theta = 0,$$

$$E_{\min} = \frac{m_\pi c^2 (1-\beta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{当 } \theta = \pi$$

$$(c) \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2}(E_{\max}+E_{\min})=\frac{m_{\pi}c^2}{2}$$

$$(=E_{\gamma}, \text{ 当 } v=0)$$

14 二维转动, 质心

$$14.4 \quad (a) \tau=140 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$(b) l=2.8 \text{ m}$$

$$(c) F_{\perp}=14 \text{ N}$$

$$14.6 \quad \lambda \approx 66.6^{\circ}$$

$$14.7 \quad V=2\pi^2 R^3$$

$$14.8 \quad T=M\omega^2 R^2/3$$

$$14.9 \quad (a) x=(2R^2/L)\sin(L/2R), y=0$$

$$(b) x=(4R/3\alpha)\sin(\alpha/2)$$

$$14.10 \quad x=1.7 \text{ cm}, y=0$$

$$14.11 \quad y=x/2$$

$$14.12 \quad (a) F=8.1 \text{ N}$$

$$(b) x=(3\sqrt{3}/2)\text{cm}$$

$$14.13 \quad \alpha=\arctan(1/6\sqrt{3})$$

$$14.14 \quad \overline{OP}=1.5'$$

$$14.15 \quad h=a(3-\sqrt{3})/2$$

$$14.16 \quad x=M_1 L/(M_1+M_2)$$

$$14.17 \quad P=16m\mu\pi^3 f^3 r^2$$

$$14.18 \quad n=a$$

$$14.19 \quad M=4.0 \text{ lb}$$

$$14.20 \quad (a) \Delta L=M\omega^2 L/(2k-M\omega^2)$$

(b) 仅当 $M\omega^2/k < 2$ 时, 稳定平衡才可能。

15 角动量, 转动惯量

$$15.3 \quad I=ML^2/12$$

$$15.4 \quad \omega=\sqrt{3g/l}$$

$$15.5 \quad a=mg/(m+M/2)$$

$$15.6 \quad I=22Ma^2$$

$$15.7 \quad (a) I=mL^2/3$$

$$(b) I=mL^2/12$$

$$(c) I=mr^2$$

$$(d) I=mr^2/2$$

$$15.8 \quad F=Mg/4$$

$$15.9 \quad W=6mL^2\omega_0^2$$

$$15.10 \quad (a) V_0=r\sqrt{2Mgh/(I+Mr^2)}$$

15.11 传送带以 $2g\sin\theta$ 加速。

$$15.13 \quad I=\frac{8}{15}\pi\rho(R^5-r^5)=\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$$

$$15.14 \quad \mu_0=(2/7)\tan\theta$$

$$15.15 \quad (b) a=g/(1+R^2/2r^2)$$

$$15.16 \quad h=3d/2-3r$$

$$15.17 \quad (a) v_2=(r_1/r_2)v_1$$

$$(b) W=\frac{1}{2}mv_1^2(r_1^2/r_2^2-1)$$

$$(c) F=mv^2/r$$

$$15.18 \quad (a) a=FR(R\cos\alpha-r)/(I+MR^2)$$

$$15.19 \quad h/r=7/5$$

$$15.20 \quad r_3^2+r_1^2=r_2^2$$

$$15.21 \quad \alpha_{\max}=(2g/R)\cos\theta$$

$$15.22 \quad t=2l\omega_0/3\mu g$$

$$15.23 \quad (a) D=12V_0^2/49\mu g$$

$$(b) V=(5/7)V_0$$

$$15.24 \quad (a) V_0=(2/5)R\omega_0$$

$$(b) V_0=(1/4)R\omega_0$$

$$15.25 \quad l=R(\sqrt{1+M/4m}-1)$$

$$15.26 \quad (a) F'_x=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta+2m\omega\dot{y}'+m\omega^2x'$$

$$F_y' = F_y \cos \theta - F_x \sin \theta - 2m\omega \dot{x}' + m\omega^2 y'$$

16 三维转动

16.6 $V = 406 \text{ m}^3$

16.9 (c)

16.10 (a) 在放开小球前。

(b) 两物体的质心以速度 $l\omega_0/2$ 运动，
物体绕质心以角速度 ω_0 转动。

16.11 $v_{AC}/v_{AB} = -7/2$

16.12 $v = \frac{1}{2}(M/m - 1)V - L^2\omega^2/24V$

$a = \omega L^2/12V$

16.13 (a) $V_{CM} = v/2$

(b) $L = mvR/2$

(c) $\omega = v/3R$

(d) $T_{\text{before}} = mv^2/2, T_{\text{after}} = mv^2/3$

16.14 物质心的速度为 $v_0/6$ ，物体绕质心以角速度 $2v_0/15a$ 转动。

16.15 (a) $V_O = J/M$

(b) $\omega = 12Jr/ML^2$

(c) $V_A = (J/M)(1 - 6r/L)$

(d) $\overline{AP} = 2L/3$

16.16 (a) 都是 $V_{CM} = v/2$ 。

(b) $L = MvL/4$

(c) $\omega = 6v/5L$

(d) 20%

16.17 $V_t = V/2, \omega_t = 6V/7L$

16.18 $V = \sqrt{8gL}$

16.19 (a) $v_t = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{L} \frac{m+M}{2(m/4+M/3)}}$

16.20 (a) $J = I_0\omega_0$

(b) $F = mR^2\omega_0^2/[R - (1 + 20\pi)r]$

16.21 $\tau_{\max} = ml^2\omega^2$

16.22 (a) $\theta = 45^\circ$

(b) $\tau = (Ml^2/24)\omega^2$

16.23 $F = 89.8 \text{ N}$

16.24 $\omega_1 = I_2\omega_2/(I_1 + I_2 + M_2r^2)$

16.25 (a) $r = V/2\omega$

(b) $\theta \approx 2\omega R/V$

16.26 卫星绕与其长度垂直的轴(过其质心)转动,角速度为 $2\omega_0/13$ 。

16.27 $\Delta T \approx 1 \text{ ms}$

16.28 $\tau \approx (2GMm/R^3)r^2 \sin(2\theta)$

16.30 $J = M\sqrt{\pi gLn/3}, n \in \mathbb{Z}$ 。

16.31 (a) $\omega = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}\omega_0$

(c) $\dot{r} = \omega_0 \sqrt{\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}}(R^2 - r^2)$

16.32 (a) $F = \frac{M\omega^2 ab(a^2 - b^2)}{12(a^2 + b^2)^{3/2}}$

(b) $T = \frac{M\omega^2 a^2 b^2}{12(a^2 + b^2)}$

16.33 $\tau \approx 27 \text{ N m}$

16.34 (a) $L_x/L_z = 4mv_0/MR\omega_0$

(b) $\omega_x/\omega_0 = 8mv_0/MR\omega_0$

16.35 (a) $\mathbf{L} = (20\mathbf{e}_x + 0.0119\mathbf{e}_y) \text{ J s}$

$\Omega_n = 154 \text{ s}^{-1}$

$r = 1.77 \times 10^{-2} \text{ cm}$

(b) $\Omega_p = 1.47 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$L_p = 1.91 \times 10^{-4} \text{ J s}$

$T_p = 1.40 \times 10^{-7} \text{ J}$

$\Delta E \approx 2.8 \times 10^{-7} \text{ J}$

$$16.36 \quad \tau_M \approx 2.2\tau_s$$

$$16.37 \quad (a) I_E = 8.11 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

$$(b) L_E = 5.91 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$(c) T_E = 2.16 \times 10^{29} \text{ J}$$

$$(d) T = 25\,725 \text{ y}$$

17 简谐振子, 线性微分方程

$$17.3 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2LM}{3gM + 2L(k_1 + k_2)}}$$

$$17.4 \quad x = A/\sqrt{2}$$

$$17.5 \quad (a) \Delta x = 2.18 \text{ cm}$$

$$(b) V = -49.4 \text{ cm s}^{-1}$$

$$17.6 \quad T = \pi \sqrt{2L/g}$$

$$17.8 \quad T = \pi \sqrt{MR^2/K}$$

$$17.9 \quad T \approx 1.4 \text{ s}$$

$$17.10 \quad (a) T_A = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}},$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_c + Md^2}{Mgd}}$$

$$(b) \ddot{\theta}_A = -\frac{g}{d} \sin \theta_0,$$

$$\ddot{\theta}_B = -\frac{Mgd}{I_c + Md^2} \sin \theta_0$$

$$(c) \dot{\theta}_A = \sqrt{\frac{2g}{d}(1 - \cos \theta_0)},$$

$$\dot{\theta}_B = \sqrt{\frac{2Mgd}{I_c + Md^2}(1 - \cos \theta_0)}$$

$$17.11 \quad \omega_0 = 28 \text{ s}^{-1}$$

$$17.12 \quad (a) \theta_0 = \arctan(1/3)$$

$$(b) \theta(t) = \theta_0 - \frac{J}{M\sqrt{gl}} \sqrt{\frac{288}{125}}$$

$$\sin \left[\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{9}{10}} t \right]$$

$$17.13 \quad T \approx 42 \text{ min}$$

$$17.14 \quad (b) T_A = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)},$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{m(k_1 + k_2)/k_1 k_2}$$

$$17.15 \quad A = (v/4) \sqrt{M/2k}, T = 2\pi \sqrt{M/2k}$$

$$17.16 \quad (a) x = d$$

$$(b) V_{CM} = (d/3) \sqrt{k/m}, A = d \sqrt{2/3}$$

$$17.17 \quad v_1 = v_0 - X \sqrt{\frac{K}{M_1(1 + M_1/M_2)}}$$

$$v_2 = v_0 + X \sqrt{\frac{K}{M_2(1 + M_2/M_1)}}$$

$$17.18 \quad x_{\max} = (m + M)\mu g/k$$

$$17.19 \quad (a) E = 10^6 \text{ ergs}$$

$$(b) k = 7.8 \times 10^3 \text{ g s}^{-2}$$

$$(c) x = 16 \text{ cm}$$

$$17.20 \quad (a) \nu = (1/2\pi) \sqrt{k(1/I_1 + 1/I_2)}$$

$$(b) A_1/A_2 = -I_2/I_1$$

$$17.22 \quad (a) T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

$$(b) T = (2\pi L/\sqrt{3}d) \sqrt{l/g}$$

$$17.23 \quad T = \pi \sqrt{29a/g}$$

$$17.24 \quad m = KR/2g$$

$$17.25 \quad (a) T = 2\pi \sqrt{m_1 m_2 / k(m_1 + m_2)}$$

$$(b) \text{约化质量。}$$

$$(c) E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$(d) E_1/E_2 = m_2/m_1$$

$$17.26 \quad T \approx 5.3 \text{ s}$$

$$17.27 \quad \theta'_0 = \sqrt{I/(I + ma^2)} \theta_0$$

$$17.29 \quad T = 2\pi \sqrt{2A/g}, a = A\sqrt{2},$$

$$H = A(\sqrt{2} - 1)$$

$$17.30 \quad z = 49 \text{ cm}$$

18 代数

$$18.8 \quad y = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n), \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$18.11 \quad \log_{11} 2 = 0.289, \log_{11} 7 = 0.811$$

19 受迫阻尼振荡

$$19.2 \quad f = 10^4 / 2\pi \text{ Hz}$$

$$19.3 \quad Z \approx 377\sqrt{2} \Omega$$

$$19.4 \quad L \approx 71 \text{ mH}$$

$$19.5 \quad C \approx 3.3 \times 10^{-3} \mu\text{F}$$

$$19.6 \quad (a) \dot{Z} = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$(b) \dot{Z} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$19.7 \quad (a) C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$$

$$(b) C = C_1 + C_2$$

$$19.8 \quad (a) L = L_1 + L_2$$

$$(b) L = L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$$

$$19.9 \quad (a) \omega_0 = 1/\sqrt{3LC}$$

$$(b) \omega_0 = 1/\sqrt{3LC}$$

$$19.10 \quad T = L/R$$

$$19.11 \quad Q \approx 10^4$$

$$19.12 \quad (c) x = A e^{-(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t} + B e^{-(\gamma/2 - \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t}$$

$$(d) A = x_0$$

$$B = \frac{2v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$19.13 \quad (b) v(t) = v_0 e^{-(\gamma/m)t}$$

$$v(x) = v_0 - \frac{\gamma}{m}(x - x_0)$$

$$19.14 \quad (a) v_\infty = g \sin(\theta)/\gamma$$

$$(b) v(t) = v_\infty [1 - e^{-\gamma t}]$$

$$(c) x(t) = v_\infty [t + (e^{-\gamma t} - 1)/\gamma]$$

$$19.15 \quad d = 42.8 \text{ m}$$

$$19.16 \quad A = 5.75 \text{ cm}$$

$$19.17 \quad (a) 5d^2 x/dt^2 + 0.693dx/dt + 20\pi^2 x = 0$$

$$(b) T = 1.00006 \text{ s}$$

$$(c) (1) N = 20; (2) N = 33$$

$$(d) P \approx 1.1 \text{ W}$$

$$19.18 \quad V = V_0 e^{-t/RC}$$

$$19.19 \quad \text{提示: 无阻尼, 阻尼, 过阻尼振荡。}$$

$$19.20 \quad (b) (1) Z_L = i\omega L; (2) Z_C = 1/i\omega C$$

$$19.23 \quad (a) I_0 = (1/16) \text{ A}$$

$$(b) \delta = 0$$

$$19.24 \quad (a) I_R = 0$$

$$(b) I_{L, \max} = V_0 \sqrt{C/L}$$

$$19.25 \quad (a) C_1 = 1/\omega^2 L$$

$$(b) C_2 = C_1 / (1 - \omega R C_1)$$

$$(c) I_1/I_2 = \sqrt{2}$$

$$19.26 \quad (a) \Delta E = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2$$

$$(b) V_1 = V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0$$

$$19.27 \quad (a) t \approx 16.1 \text{ s}$$

$$(b) I_0 = 0$$

$$19.28 \quad V_{\max} = (V_0/R) \sqrt{L/C}$$

$$19.29 \quad V_{\max} = 10\sqrt{2} \text{ V}$$

$$19.30 \quad V'_{\text{DC}} = V_{\text{DC}}, \quad |V'_{\text{AC}}| \approx |V_{\text{AC}}|/7.6$$

$$19.31 \quad (a) A = h / (2 - 8\pi^2 L / g T^2)$$

$$(b) A = 1.3 \text{ ft}$$

$$(c) D = 106.3 \text{ ft}$$

$$19.32 \quad (a) \omega_0 = \sqrt{k/M}$$

$$(b) x = e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$(c) \omega_{cr} = \omega_0$$

$$(d) \omega'_{cr} = \omega_0$$

$$19.33 \quad (a) \text{ 记 } \omega_0 = \sqrt{k/m}, \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4},$$

$$(1) x = \frac{F_0}{k} + \left(x_0 - \frac{F_0}{k} \right) e^{-\gamma t/2} \times \\ \left(\cos \omega_\gamma t + \frac{\gamma}{2\omega_\gamma} \sin \omega_\gamma t \right)$$

$$(2) x = \frac{J}{m\omega_\gamma} e^{-\gamma t/2} \sin \omega_\gamma t$$

$$(3) x = \frac{F_0}{\gamma \sqrt{k m}} \sin \omega_0 t + e^{-\gamma t/2} \\ \left[x_0 \cos \omega_\gamma t - \frac{1}{\omega_\gamma} \left(\frac{F_0}{m\gamma} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\gamma}{2} x_0 \right) \sin \omega_\gamma t \right]$$

$$(b) \omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

$$19.34 \quad (a) \text{ 在 } 0 < t < \pi \sqrt{m/k} \text{ 的运动方程是}$$

$$m\ddot{x} + kx - mg\mu = 0, \text{ 其解为 } x = \\ (A - d) \cos(\omega t) + d, \text{ 其中 } \omega^2 = \\ k/m, d = mg\mu/k.$$

$$(b) (1) 0 \leq B \leq d; (2) A = B + 2Nd, \\ \text{or } A = 2(N+1)d - B$$

$$19.35 \quad A = \frac{qE_0}{\omega^2 \sqrt{m^2 + \alpha^2 \omega^2}}$$

$$\delta = \pi + \arctan \frac{\alpha \omega}{m}$$

$$19.36 \quad f \approx 7.2 \text{ Hz}$$

$$19.40 \quad (a) I = 2 \text{ A}$$

$$(b) V_{\max} = 16.9 \text{ kV}$$

$$(c) t = 35 \mu\text{s}$$

$$19.41 \quad V = 46.5 \text{ mph}$$

20 几何光学

$$20.2 \quad (a) \overline{AK} = 50 \text{ ft}$$

$$(b) t_{\min} = 60.0 \text{ s}$$

$$(c) t = 60.1 \text{ s}$$

$$20.3 \quad (a) \overline{PP'} = 0.0387 \text{ m}$$

$$(b) \Delta t = 0.11 t_0$$

$$20.4 \quad \theta \approx 11.2^\circ$$

$$20.8 \quad (a) X_0 = R/2$$

$$(b) \Delta X_0 / X_0 = -0.02$$

$$20.9 \quad x = 200 \text{ cm}, D = 1.86 \text{ cm}$$

$$20.10 \quad (a) x = 6.7 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$(b) x = 8.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$20.11 \quad (a) y = \pm \sqrt{2Fx(1-1/n) - x^2(1-1/n^2)}$$

$$20.12 \quad d = d'/n$$

$$20.13 \quad \text{离中心 } 4 \text{ cm 处。}$$

$$20.14 \quad y = 1.92R$$

$$20.15 \quad d = 2.0 \text{ cm}$$

$$20.16 \quad M = F/f$$

$$20.17 \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - \frac{D}{ff'}$$

$$\Delta = \frac{fD}{f+f'-D}$$

$$\Delta' = \frac{f'D}{f+f'-D}$$

$$20.18 \quad (a) 4.167 \text{ cm} < d < 5 \text{ cm}$$

$$(b) M(4.167 \text{ cm}) = 6, M(5 \text{ cm}) = 5$$

$$20.19 \quad (a) x = 5.2 \text{ cm}$$

20.20 $r = 1.6 \text{ cm}$

20.21 (a) $d_2 > d_1$

(b) 屏幕必须移离透镜。

(c) $f = L_1 d_1 / (D + d_1)$
 $= L_2 d_2 / (D + d_2)$

20.22 记 P 为原点, x 水平, 沿焦点轴, y 竖直,

(a) (双曲线)

$$y^2 = \frac{4Dd}{(D-d)^2} \left[\left(x - \frac{D+d}{2} \right)^2 - \frac{(D-d)^2}{4} \right]$$

(b) (椭圆)

$$(2d+D)^2 y^2 + 4d(d+D) \left(x - \frac{D}{2} \right)^2 = 4d(d+D) \left[(d+D)d - \frac{D^2}{4} \right]$$

20.23 (b) $f = g/2\omega^2$

21 电磁辐射: 干涉

21.2

(a) $E(t) = \frac{qa\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} [\cos(\omega(t-R/c))e_x + \sin(\omega(t-R/c))\cos\theta e_y]$

(b) $I_{(0)} = \left(\frac{qa\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \right)^2, I(\pi/2) = I(0)/2$

21.3 (a) $P = \frac{3}{8\pi} \frac{\sin^2\theta}{R^2} P_{\text{total}}$

(b) $P = 2.4 \times 10^{-11} \text{ W m}^{-2}$

21.4 $I = \begin{cases} 5.8I_0 & \text{E, W} \\ 0.17I_0 & \text{N, S} \\ 3.0I_0 & \text{图中其他方向} \end{cases}$

21.5 $I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2[\pi(1+\sin\theta)]}{\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(1+\sin\theta)\right]}$

21.6 (a) $I(\theta) = 2I_0[1 + \cos(\pi\sin\theta)]$

(c) $I(\theta) = 2I_0[1 + \cos(\pi/2 + \pi\sin\theta)]$

21.7 $a = 2\lambda, b = 2\lambda/\sqrt{3}$

21.8 (a) $E(t) = 0$

(b) $E(t) = \frac{\sqrt{2}q\omega^2 d}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \sin(\omega(t-R/c))$

21.9 $d\alpha/dt = -(1/120)\cos\theta \text{ Hz}$

21.10 $C: I = 5I_A, \mathbf{E}$ 方位角 26.5°

$D: I = I_A, \mathbf{E}$ 左旋极化

$E: I = I_A, \mathbf{E}$ 垂直于 xy 平面

21.11 $I(\theta) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos\theta)\right) \right] \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi}{2}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}$

21.12 $E(t) = \frac{qa\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \cos(\omega(t-R/c))\sin\theta,$

其中 q 是振荡电子的总电荷。

22 电磁辐射: 衍射

22.2 $Q \approx 5.5 \times 10^6$

22.4 (a) $d = 9.1 \text{ km}$

22.5 $x = 1.6 \text{ mm}$

22.6 $r_1 = \sqrt{(z-d)^2 + D^2},$

$r_2 = \sqrt{(z+d)^2 + D^2}, \frac{I(z)}{I_0} = \frac{1}{r_1^2} +$

$\frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1 r_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right).$

22.7 (a) $r = \sqrt{10.25}\lambda$

$$(b) I/I_{\max} \approx 1/4$$

$$22.8 \quad (a) \frac{I(\theta)}{I_{\max}} = \frac{\sin^2(2\pi \sin \theta)(1 + \cos(8\pi \sin \theta))}{8\pi^2 \sin^2 \theta}$$

(b) 有 6 级主极大, θ 值见答案(c)。

$$(c) \frac{\theta(\text{rad})}{I(\theta)/I_{\max}} \begin{vmatrix} 0 & 0.23 & 0.44 & 0.60 & 0.84 & 1.20 \\ 1 & 0.44 & 0.01 & 0.006 & 0.045 & 0.002 \end{vmatrix}$$

$$22.10 \quad \frac{I_i}{I_o} = \frac{T^4}{1 - 2R^2 \cos(4\pi D/\lambda) + R^4} \\ = \frac{T^4}{2R^2(1 - \cos(4\pi D/\lambda)) + T^4}$$

$$22.11 \quad (a) h' = h \frac{F_2}{F_1} \\ (b) \lambda_m = \frac{10^7 \text{ \AA}}{mN} |\sin \theta_i - \sin \theta_d|$$

$$(c) D = 10^{-7} \text{ mm} \frac{mNF_2}{\cos \theta_d}$$

$$(d) w' = w \frac{F_2}{F_1} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_d}$$

$$22.12 \quad (a) \theta = 51.9^\circ \\ (b) \lambda = 3750 \text{ \AA}, 4370 \text{ \AA}, 6560 \text{ \AA} \\ (c) d = 5.6 \text{ mm } \text{\AA}^{-1} \\ (d) \min \Delta\lambda = 7 \times 10^{-3} \text{ \AA}$$

23 电磁辐射: 折射, 色散, 吸收

$$23.2 \quad n = 0.9999916$$

$$23.3 \quad \rho \approx 10^7 \text{ cm}^{-3}$$

$$23.4 \quad (b) I = I_o e^{-Nq^2/\epsilon_0 m \gamma c}, \text{ 其中 } I_o \text{ 是 } \lambda \text{ 射光强。}$$

$$23.5 \quad (a) P = q_e^2 \omega^4 x_o^2 / 12\pi\epsilon_0 c^3$$

$$(b) \gamma_R = q_e^2 \omega^2 / 6\pi\epsilon_0 m c^3$$

$$(c) \Delta\lambda = (2\pi c/\omega^2) \gamma_R = 1.2 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

24 电磁辐射: 辐射阻尼, 散射

$$24.4 \quad N_e \approx 10^7 \text{ cm}^{-3}$$

$$24.5 \quad (a) f = 1.5\%$$

$$(b) f = 9\%$$

$$24.6 \quad (a) \sigma_{\max} = \frac{N^2 \chi^2 q_e^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4} \left(\frac{E_{\parallel}}{E_o} \right)^2$$

$$(b) \sigma(\theta) = \sigma_{\max} \cos^2 \theta$$

25 电磁辐射: 偏振

$$25.3 \quad I_i = (I_o/8) \sin^2 2\theta$$

25.4 关于强度, 见习题 21.2(b)。沿圆形的轴, 辐射是圆偏振的; 在圆所在平面内, 是线偏振的。

$$25.5 \quad I_i/I_o = \frac{1}{2}(\alpha^4 + \epsilon^4) \cos^2 \theta + \alpha^2 \epsilon^2 \sin^2 \theta$$

$$25.6 \quad I_R/I_m \approx 34.5\%, \text{ 女朋友将厌恶地离开。}$$

$$25.8 \quad (a) f = 17\%$$

$$(b) \beta = 67.4^\circ$$

$$25.9 \quad (a) I_i = I_o \cos^{2n}(\theta/n)$$

$$25.10 \quad I_{\max}/I_{\min} = \cot^2 \theta$$

$$25.12 \quad (a) d = 1.67 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

(b) E 椭圆偏振

$$E_x = E_o \cos \phi \cos \omega t,$$

$$E_y = E_o \sin \phi \cos(\omega t + 1.4\pi),$$

其中 ϕ 是入射光的偏振方向。

26 电磁辐射: 相对论效应

$$26.7 \quad R = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$$

$$26.9 \quad (a) \tan \theta_1 = 0.75$$

$$(b) \nu_1 = 1.67\nu_o$$

$$26.10 \quad v/c = (\nu_o - \nu)/(\nu_o + \nu)$$

$$26.11 \quad v/c = 7.6 \times 10^{-6}$$

$$26.12 \quad v = 510 \text{ km s}^{-1}, \text{ 靠向观测者。}$$

$$26.13 \quad v/c \approx 0.8$$

$$26.14 \quad (a) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{v^2 x}{R^2} \frac{1 + vR/cx}{(1 + vx/cR)^3}$$

$$(b) \quad \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{(1 + v/c)^4}{(1 - v/c)^4}$$

$$26.15 \quad E(t, R_0) = -\frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0}$$

$$\frac{a \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \mathbf{e}_x, \text{ 对于 } t \geq R_0/c.$$

$$26.16 \quad (a) \quad F = I_0 A/c$$

$$(b) \quad F \approx 0.16(I_0 A/c)[1 - \cos(6\pi d/\lambda)]$$

$$(c) \quad F = (I_0 A/c)[1 - e^{-4\pi n^2 d/\lambda}]$$

$$26.17 \quad F = 1.3 \times 10^{-2} \text{ N}$$

$$26.18 \quad (b) \quad dR/dt = 360 \text{ m s}^{-1}$$

$$26.19 \quad (b) \quad R \approx (6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-2})/\rho$$

27 量子行为：波、粒子以及光子

$$27.2 \quad \theta \approx \arcsin(h/p_0 W)$$

$$27.3 \quad (a) \quad \lambda = 1.8 \text{ \AA}$$

$$(b) \quad (1) \quad \lambda = 0.39 \text{ \AA};$$

$$(2) \quad \lambda = 8.7 \times 10^{-3} \text{ \AA}$$

$$(c) \quad \lambda = 1.3 \times 10^{-25} \text{ \AA}$$

$$(d) \quad \text{X 射线。}$$

$$27.4 \quad \lambda_{\max} = 6150 \text{ \AA}$$

$$27.5 \quad (a) \quad \lambda = 910 \text{ \AA}$$

$$(b) \quad \text{紫外光区域。}$$

$$27.6 \quad R \approx 2.6 \times 10^{-3} \text{ \AA}$$

$$27.7 \quad E_{\min} = h\sqrt{\beta/m}$$

$$27.8 \quad \tau \approx 8 \times 10^{-10} \text{ s}$$

$$27.9 \quad T \approx 620 \text{ MeV}$$

$$27.10 \quad R \approx 5 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

$$27.13 \quad (a) \quad T = 11.3 \text{ eV}$$

$$(b) \quad f_{\min} = 3.3 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$27.14 \quad (a) \quad \theta_{\min} = 7.1^\circ$$

$$(b) \quad d_{\max} = 21.6 \text{ m}$$

$$(c) \quad d = 1.9 \text{ m}, 2.7 \text{ m}, 3.3 \text{ m}, 4.3 \text{ m}$$

$$27.15 \quad (b) \quad \theta = 15.7^\circ, 22.2^\circ, 27.4^\circ, 32.2^\circ, 36.5^\circ$$

$$27.16 \quad \lambda = 6560 \text{ \AA}, 4860 \text{ \AA}, 18840 \text{ \AA}$$

$$27.17 \quad T = 33 \text{ eV}$$

$$27.18 \quad (a) \quad \theta \approx \pi/4$$

$$(b) \quad E_e = 2.1 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$27.19 \quad (a) \quad \theta_1 = 3^\circ, \theta_{11} = 0.3^\circ$$

$$27.20 \quad (a) \quad \Delta\lambda = 8.3 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

$$(b) \quad w = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$(c) \quad E_1 - E_0 = 2.46 \text{ eV}$$

$$27.21 \quad (a) \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m e^2}$$

$$\omega_n = \frac{m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^3 \hbar^3}$$

$$(b) \quad T_n = \frac{m e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$$

$$U_n = -2T_n$$

$$E_n = -T_n$$

$$(c) \quad \Delta E \propto \left[\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right]$$

28 气体分子动理论

$$28.2 \quad (a) \quad P^{r-1}/T^r = \text{常量}$$

$$(b) \quad TV^{r-1} = \text{常量}$$

$$28.3 \quad (a) \quad P_A = 3.17P_0, P_B = 2.64P_0$$

$$(b) \quad W_A/W_B = 1.1$$

$$28.4 \quad P_f = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

$$T_f = \frac{T_1 T_2 (P_1 + P_2)}{T_1 P_2 + T_2 P_1}$$

$$28.5 \quad (b) \quad P = P_0 e^{-\mu g h / RT}$$

$$28.6 \quad W = 1.82 \times 10^5 \text{ J}$$

$$28.7 \quad T = 173 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$28.8 \quad P = 200 \text{ mmHg}$$

$$28.9 \quad P = 842 \text{ mmHg}$$

$$28.10 \quad (a) \quad T_2 = 1\,740 \text{ K}$$

$$(b) \quad V_2/V_1 = 5.8$$

$$28.11 \quad (a) \quad T_f = T_0, \quad P_f = P_0/2$$

$$(b) \quad T_f = T_0/2^{2/3}, \quad P_f = P_0/2^{5/3}$$

$$28.12 \quad (a) \quad \frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R}, \text{ 其中 } \mu \text{ 是大}$$

气气体的平均摩尔质量, R 是理想
气体常量。

$$(b) \quad \text{On Earth,}$$

$$dT/dh \approx -0.01 \text{ K m}^{-1}$$

$$28.13 \quad \omega = \sqrt{(P_0 A / L_0 + K)/m}$$

$$28.14 \quad f_d = 31\%$$

29 统计力学原理

$$29.3 \quad C_V = \frac{5}{2}R$$

$$29.4 \quad (a) \quad C_{V,m} = \frac{3}{2}R$$

$$(b) \quad C_{V,m} = \frac{5}{2}R$$

$$29.5 \quad h_M = 8.8 \text{ km}, \quad h_S = 113 \text{ km}$$

$$29.6 \quad P(h=0) = \frac{Nmg}{A} \frac{e^{mgL/kT}}{e^{mgL/kT} - 1}$$

$$P(h=L) = \frac{Nmg}{A} \frac{1}{e^{mgL/kT} - 1}$$

$$29.7 \quad (a) \quad f_1(h) = m_1/(m_1 + m_2 e^{-(m_1+m_2)gh/kT})$$

$$(c) \quad f = 1 - e^{-m_1/m_2}$$

$$29.9 \quad F(E)dE = A \sqrt{2E/m^3} e^{-E/kT} dE$$

$$29.10 \quad (a) \quad k = 2N/V^2$$

$$(b) \quad \langle v \rangle = 2V/3, \quad v_{rms} = V/\sqrt{2}$$

$$29.11 \quad (a) \quad f = 0.55$$

$$(b) \quad f = 0.06$$

$$29.12 \quad P_1/P_2 = \sqrt{T_1/T_2}$$

$$29.13 \quad (a) \quad dn = A \frac{n}{4} v f(v) dv, \text{ 其中}$$

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

$$(b) \quad v_{rms}^{(e)} = \sqrt{4kT/m}, \quad v_{rms}^{(i)} = \sqrt{3kT/m}$$

$$29.14 \quad \Delta\lambda \approx 0.012 \text{ }^\circ\text{A}$$

$$29.15 \quad T = 1.2 \times 10^5 \text{ K}$$

$$29.16 \quad N_0/N_1 \approx 10^{-9}$$

$$29.17 \quad F \approx (W/3) \sqrt{2\pi m/kT} \text{ (与采取的近似有关)}$$

$$29.18 \quad (a) \quad \text{记 } P \text{ 为进气 / 排气压强, } \gamma \text{ 是空气的热容比,}$$

$$(1) \quad v' = -\frac{P}{(\gamma-1)\rho v} +$$

$$\sqrt{\left(\frac{P}{(\gamma-1)\rho v} + v \right)^2 + \frac{2W}{\rho v A}}$$

$$(2) \quad T' = (v'/v)T$$

$$(3) \quad F = \rho v A (v' - v)$$

$$(b) \quad F \approx 5.3 \times 10^4 \text{ N}$$

30 分子动理论的应用：均分定理

- 30.1 (a) $T = 11\,600\text{ K}$
 (b) $kT = (1/40)\text{ eV}$
 (c) $\lambda = 12\,400\text{ Å}$
- 30.2 $96\,520\text{ J mol}^{-1} = 1\text{ eV/atom}$
- 30.3 误差接近 100% !
- 30.4 $I_1/I_2 \approx 10^{-5}$
- 30.7 (a) $C_V = \frac{3N_0 k (\Delta E/kT)^2 e^{\Delta E/kT}}{(3 + e^{\Delta E/kT})^2}$

31 分子动理论的应用：输运现象

- 31.2 $l = 1.8 \times 10^3\text{ cm}$
- 31.3 $l \approx 10^{-7}\text{ m}$, $\tau \approx 0.2 \times 10^{-9}\text{ s}$
- 31.4 (a) $P = 11 \times 10^{-4}\text{ mmHg}$
 (b) $\kappa_1/\kappa_2 = 1$
- 31.5 $\mu = \mu_a \mu_b / (\mu_a + \mu_b)$
- 31.8 记单位体积的气体分子数为 n_0 , 分子平均速度为 v , 质量为 m , 气体热容比为 γ ,
- (a) $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4} \frac{n_0 v k \Delta T}{\gamma - 1}$
- (b) $\frac{F}{A} = \frac{1}{4} n_0 v m \Delta U$
- 31.9 $L \approx 56l$
- 31.12 (a) 清除电压为

$$V_{\text{clear}}(m) = \frac{d^2}{lcq_e} \frac{\sqrt{3mc^2 kT}}{t},$$

其中 l 是气体的平均自由程。

(1) $V_D = V_{\text{clear}}(m_e)$,

(2) $V_D = V_{\text{clear}}(m_{\text{Ne}})$ 。

(b) 完全清除电子所需时间约为 $0.4 \times$

10^{-6} s , 完全清除氮离子所需时间为 $8 \times 10^{-5}\text{ s}$ 左右, 两者比较, 可见对于火花的形成是必要的。

32 热力学

- 32.1 $E = 1.4\text{ J}$
- 32.2 $W_{\text{min}} = (1/9)\text{ J}$
- 32.3 氮热机。
- 32.4 $\epsilon_{\text{max}} = 66\%$
- 32.5 (a) $W = (P + Mg/A)V_1$
 (b) $\Delta Q = \frac{5}{2}W$
 (c) $\Delta U = \frac{3}{2}W$
 (d) $T_i = 4W/NR$, $T_f = 2T_i$
- 32.6 (b) $W = 101\text{ J}$
 (c) $T_{\text{max}} = 1\,200\text{ K}$
 (d) $\Delta Q = 102.3\text{ J} \cdot (2\gamma + 1)/(\gamma - 1)$
 (e) $\Delta S = 0.23\text{ J K}^{-1} \cdot (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$
- 32.7 (a) $W = 1.1 \times 10^3\text{ J}$
 (b) $T_B = 600\text{ K}$
 (c) $\Delta Q_{A \rightarrow B} = 6.8 \times 10^3\text{ J}$
 (d) $\Delta Q_{B \rightarrow C} = 9.1 \times 10^3\text{ J}$
 (e) $\epsilon_{\text{max}} = 7\%$
 (f) $\epsilon_{\text{max}} = 66\%$
- 32.8 (b) $\Delta S = 27.8\text{ J K}^{-1}$
- 32.9 (a) $V_b = 8.8\text{ L}$
 (b) $V_d = 12.3\text{ L}$
 (c) $\Delta Q_{a \rightarrow b} = 1.25 \times 10^3\text{ J}$
 (d) $\Delta Q_{c \rightarrow d} = 0.95 \times 10^3\text{ J}$
 (e) $\epsilon = 25\%$
 (f) $\Delta S = 0.11\text{ J K}^{-1}\text{ g}^{-1}$

32.10 (a) $\gamma = 1.57$

(b) $\Delta S = -1.4 \text{ cal K}^{-1}$

32.11 $W = P_0 V_0 \left(\frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} - \ln 2 \right)$

32.13 $P_{\text{day}} = 10.9 \text{ kW}$, $P_{\text{night}} = 24.6 \text{ kW}$

32.14 (b) $W = C_p (T_1 + T_2 - 2T_f)$

32.15 $\Delta S = 11 \times 10^3 \text{ J K}^{-1}$

32.16 (a) $\dot{W} = \dot{N} R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_c + T_A - T_c p^{-(1-1/\gamma)} - T_A p^{-(1-1/\gamma)})$

(b) $p_m = \left(\frac{T_c}{T_A} \right)^{\gamma/2(\gamma-1)}$

(c) $\dot{W}_m = \dot{N} R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\sqrt{T_c} - \sqrt{T_A})^2$

(d) $\epsilon_m = 1 - \sqrt{T_A/T_c}$

(e) $\dot{V}_A = 2.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

(f) $\epsilon_e = 50\%$

(g) $p_e = 11.3$

(b) $\Delta S = 0$

(c) $\Delta S = 0$

33.9 (a) $(\Delta S)_T = (16\sigma/3c) T^3 (V_2 - V_1)$

(b) $(\Delta S)_V = (16\sigma/3c) V (T_2^3 - T_1^3)$

(c) $S(V, T) = S(V_0, T_0) + (16\sigma/3c)(VT^3 - V_0 T_0^3)$

33.10 $T = 122 \text{ C}$

33.11 $T = 270 \text{ K}$

33.12 $f = 1$

33.13 $T = T_0 e^{-(3A\epsilon/16R)t}$

33.14 (a) $f = 64$

(b) 变大。

33.15 $f = 4$

33.16 (a) $dE/dt = 1.95 \times 10^{-1} \text{ J s}^{-1}$

(b) $dT/dt = 0.06 \text{ K s}^{-1}$

33.17 $P_G = 1.7 \times 10^{16} \text{ Pa}$, $P_R = 7.2 \times 10^{-12} \text{ Pa}$

33.21 $f = R^2/(R^2 + r^2)$

33 热力学示例

33.3 $C_V = (16\sigma/c) VT^3$, 其中 σ 是斯特藩-玻尔兹曼常数。

33.4 (a) $dS_R/dt = 0.85 \text{ cal K}^{-1} \text{ s}^{-1}$

(b) $dS_U/dt = dS_R/dt$

33.6 $dT/dz = -2.9 \text{ K km}^{-1}$

33.7 (a) $dz/dt = (\kappa/L\rho)(\Delta T/z)$, 其中 ρ 是冰的密度。

(b) $z(t=1 \text{ h}) = 2.1 \text{ cm}$

33.8 (1) (a) $\Delta S \approx 16 \text{ J K}^{-1}$

(b) $\Delta S = 0$

(c) 与(a)相同。

(2) (a) $\Delta S = 0$

34 波动方程, 声

34.1 $v \propto \sqrt{M/\rho}$, 其中 ρ 是液体密度。

34.2 $v_1/v_2 = 1/\sqrt{2}$

34.3 $v_{\text{He}}/v_{\text{H}} = 0.77$

34.4 $T = 99 \text{ C}$

34.6 (a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

(b) $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$

34.7 (a) $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{m} \frac{1}{x(l-x)}}$

(b) $y(t) = A \cos(2\pi\nu t)$

(c) $\nu_{\text{max}} = \infty$

$$\nu_{\min} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T}{ml}}$$

$$34.8 \quad (a) P(x, t) = P_0 - (\omega^2 \xi_m / k) \sin(\omega t - kx)$$

$$(b) T = \frac{1}{4} \rho_0 A \lambda \omega^2 \xi_m^2$$

$$34.9 \quad (a) \chi_m = 1.05 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$(b) \Delta T = 2.18 \times 10^{-2} \text{ K}$$

$$34.10 \quad (a) f = 2.95$$

$$34.12 \quad (a) \rho_e = 8.7 \times 10^{-7} \text{ kg m}^{-3}$$

$$(b) \chi_m = 3.6 \times 10^{-8} \text{ m}$$

$$(c) I = 1.1 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$$

35 线性波系统：拍，模

$$35.1 \quad v_{\text{ph}} = v_g = c$$

$$35.3 \quad (b) v_g = 19.7 \text{ m s}^{-1}, v_{\text{ph}} = 39.5 \text{ m s}^{-1}$$

$$35.4 \quad 6 \text{ 个}。$$

$$35.5 \quad u(x, y, t) = A e^{i\omega t} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right),$$

$$\omega = c \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

$$35.7 \quad v_g = \frac{1}{2} \left(v_{\text{ph}} + \frac{4\pi T / \rho \lambda}{v_{\text{ph}}} \right)$$

$$35.8 \quad (a) v_{\text{ph}} = 24.4 \text{ cm s}^{-1}$$

$$(b) v_{\text{ph}} = 18.3 \text{ cm s}^{-1}$$

$$35.9 \quad (a) \lambda = 1.7 \text{ cm}$$

$$(b) \nu = 13.6 \text{ Hz}$$

$$35.10 \quad (a) 1.6 \text{ 拍每秒}。$$

$$(b) \Delta t = 0.03 \text{ s}$$

$$(c) v = 363 \text{ m s}^{-1}$$

$$35.11 \quad (a) 10 \text{ 拍每秒}。$$

$$(b) \text{ 与货车司机相同}。$$

$$35.12 \quad (d) \omega_0 = (7/6)(v\pi/a)$$

$$35.13 \quad (a) \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + k(x-y)/m_1 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y + k(y-x)/m_2 = 0$$

$$(b) (1) \omega^2 = \omega_0^2, A/B = 1$$

$$(2) \omega^2 = \omega_0^2 + k/m_1 + k/m_2,$$

$$A/B = -m_2/m_1$$

$$35.14 \quad (1) \omega = \sqrt{g/l}, x_1 = x_2 = x_3$$

$$(2) \omega = \sqrt{g/l + k/m},$$

$$x_1 = -x_3, x_2 = 0$$

$$(3) \omega = \sqrt{g/l + 2k/m},$$

$$x_1 = x_3, x_2 = -x_3$$

$$35.15 \quad 2 \text{ 种, 分别是: } (1) T = T_0 / \sqrt{2.62};$$

$$(2) T = T_0 / \sqrt{0.38}, \text{ 其中 } T_0 = 2\pi\sqrt{I/K}。$$

$$35.16 \quad 2 \text{ 种正则模式, 频率分别是: } (1) \omega = \omega_0 \sqrt{0.38}; (2) \omega = \omega_0 \sqrt{2.62}, \text{ 其中}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}。$$

$$35.17 \quad (a) \text{ 两种基波模式:}$$

$$(1) \omega = \omega_0 \sqrt{2};$$

$$(2) \omega = \omega_0 \sqrt{6}, \text{ 其中 } \omega_0 = \sqrt{k/m}。$$

$$35.18 \quad E = \frac{1}{4} \sigma \omega^2 A^2 \lambda$$

$$35.19 \quad (a) T_{\min} \approx h^2 / 2mL^2$$

$$(b) T_{\min} = h^2 / 8mL^2$$

$$(c) \langle p \rangle = 0$$

36 波的傅里叶分析

$$36.3 \quad (a) \quad g(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$$

$$36.5 \quad A_1/A_0 = 1, A_2/A_0 = 0, A_3/A_0 = 1/9$$

$$36.6 \quad h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$$

$$36.7 \quad (a) \quad T = 2L \sqrt{\sigma/S}$$

$$(b) \quad y(x, t = T/2) = -y(x, t = 0)$$

$$36.8 \quad (a) \quad \langle V \rangle = 2V_0/\pi$$

$$(b) \quad A_2 = 4V_0/15\pi$$

$$36.9 \quad (a) \quad V_{\text{out}} = (1 + 3\epsilon/4) \sin x - (\epsilon/4) \sin 3x$$

37 电磁学

$$37.1 \quad (a) \quad M = 1.9 \times 10^{-9} \text{ kg}$$

$$= 1.1 \times 10^{18} \cdot m_p$$

$$(b) \quad F = 9.9 \times 10^{13} \text{ N}$$

$$\approx 1.1 \times 10^{10} \text{ ton-wt}$$

37.2 有 2 种模型可以用来估算所需能量：
一、把两个“半核”看作两个半球；
二、把它们看作两个邻近的球。两种情况下，电荷中心间的距离是不同的，将导致结果差一个约 1.5 的因子。我们用第二种模型，假设电荷处于两个相等的球的中心。

$$(a) \quad W_U = 4.1 \times 10^{-11} \text{ J/atom}$$

$$= 1.3 \times 10^7 \text{ kWh lb}^{-1}$$

$$(b) \quad W_{\text{He}} = 7.6 \times 10^{-14} \text{ J/atom}$$

$$= 1.4 \times 10^6 \text{ kWh lb}^{-1}$$

$$37.3 \quad \langle v \rangle = 1.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1},$$

$$\langle v \rangle^2 / c^2 = 2.2 \times 10^{-25}$$

$$37.4 \quad (a) \quad B = 10^{-2} \text{ Wb m}^{-2} = 100 \text{ gauss}$$

(b) 不能。因为随着电荷 + 与 - 的变化，电力和磁力的方向都改变。

$$37.5 \quad (a) \quad \text{粒子运动路径是圆，半径为 } R = mv/qB_0.$$

(c) 根据麦克斯韦方程组，围绕任意封闭路径的 $\mathbf{B}$ 的环流是零。假设 $\mathbf{B}$ 充满一原点附近的一有限体积，考虑一矩形路径。该矩形的一个顶点位于原点，与之相对的另一顶点位于 $(\Delta x, 0, \Delta z)$ 。 $\mathbf{B}$ 围绕矩形的环流是 $(B_0 + a\Delta x)\Delta z - B_0\Delta z = a\Delta x\Delta z \neq 0$ 。

$$37.6 \quad (a) \quad B_0 = \frac{mv_0}{aq} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2 v_0}$$

(b) 磁力总垂直于 $\mathbf{v}$ ，大小不变。电场可以由势推导而来，因此因电场力而发生的动能改变只取决于电荷间

距离 r 。动能改变为 $\frac{1}{2}mv^2 -$

$\frac{1}{2}mv_0^2$ ，所以 v 只取决于 r 。

38 矢量场的微分学

38.1 (a) ∇T 径向对称，方向向内。在柱坐标系内，

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r = -\frac{(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{e}_r}{r},$$

其中 $\mathbf{e}_r$ 是单位径矢。

$$(b) \quad T_1 - T_2 = 1.2 \text{ K}$$

$$38.3 \quad \mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

$$(a) \quad \nabla \cdot \mathbf{R} = \partial x / \partial x + \partial y / \partial y + \partial z / \partial z \\ = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(b) \quad \nabla \times \mathbf{R} = (\partial z / \partial y - \partial y / \partial z)\mathbf{e}_x + \\ (\partial x / \partial z - \partial z / \partial x)\mathbf{e}_y + (\partial y / \partial x - \\ \partial x / \partial y)\mathbf{e}_z = 0$$

$$(c) \quad \nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{R^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{R^3} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{R^3} = \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5} \right) + \\ \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3y^2}{R^5} \right) + \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right) = \\ \frac{3}{R^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{R^5} = \frac{3}{R^3} - \\ \frac{3R^2}{R^5} = 0$$

$$(d) \quad \nabla \times (\mathbf{R}/R^3) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{R^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{R^3} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{R^3} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{R^3} \right) \mathbf{e}_y \\ + \dots = \left(\frac{3yz}{R^5} - \frac{3yz}{R^5} \right) \mathbf{e}_x + \dots = 0$$

$$(e) \quad \nabla (1/R) = \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{e}_x \\ + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \mathbf{e}_z = -\frac{1}{2} \\ \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{R^3} - \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{R^3} = -\frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{R^3} \\ = -\mathbf{R}/R^3$$

$$(f) \quad \varphi = R^2/2 + \text{const}$$

$$38.4 \quad (a) \quad \text{对方程(2)两边取散度,}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

由于旋度的散度恒为零。因此左边为零。与方程(3)不矛盾。

$$(b) \quad \text{对方程(4)的左边取散度,}$$

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla \times \mathbf{B}) = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ = 0。$$

方程右边的散度也应为零,

$$0 = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0} \\ = \frac{\partial}{\partial t} (\rho/\epsilon_0) + \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0}。$$

$$(c) \quad \text{方程(2)左边的旋度是}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}。$$

方程右边的旋度与之相等:

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \right)。$$

已利用真空条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$,

$\mathbf{j} = 0$ 。

$$(d) \quad \text{当 } \mathbf{j} = 0, \text{ 由方程(4)的旋度可得}$$

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})。$$

应用《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(2.59e)到上式与方程(2)。

$$c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}。$$

但由方程(3), $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \nabla \times \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ = -\nabla \times (\nabla \phi) - \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ = \nabla \times \mathbf{E}。 \end{aligned}$$

(f) 方程(3)告诉我们 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。由《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(2.51)可知, $\mathbf{B}$ 可以写成 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的形式。

38.5 令 z 为旋转轴,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v \left[-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{e}_y \right] \\ &= \omega (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) \text{ (当 } \mathbf{r} \text{ 恒定时)} \end{aligned}$$

$$\text{(a)} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \omega \left[-\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + (\omega - (-\omega))\mathbf{e}_z \\ &= 2\omega\mathbf{e}_z。 \end{aligned}$$

38.6 (a) With $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$ and

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{R} = (zA_y - yA_z)\mathbf{e}_x + (xA_z -$$

$$zA_x)\mathbf{e}_y + (yA_x - xA_y)\mathbf{e}_z$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = \left[\frac{\partial}{\partial y} (A \times \mathbf{R})_z - \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (A \times \mathbf{R})_y \right] \mathbf{e}_x + \cdots = [A_x - (-A_x)] \mathbf{e}_x + \cdots = 2[A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z] = 2\mathbf{A}。$$

(b) $\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}$

的证明要求

$$A_x(B_x C_x) = C_x(A_x B_x) \text{ 但 } A_x$$

$$(\partial x / \partial x) \neq x(\partial A_x / \partial x)。 \text{ 正确的公式是}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \\ &(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}。 \end{aligned}$$

38.7 (b) $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 最大值在 B 点;在 D 点, 其绝对值最大。

(c) 5 点全部 $\nabla \times \mathbf{h} = 0$ 。

39 矢量积分学

39.1 (b) 在由 S 包围的体积 V 内对方程两边积分, 并利用高斯定理, 得:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV,$$

即离开 V 的静电流 = 体积 V 内总电荷的变化率的负数。这便是“电荷守恒”。

39.2 否。

39.3 (a)

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi K$$

(b) 提示: 为了避免 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的奇性, 以“等效”的均匀带电球代替点电荷, 再对求半径 r 取极限 $r \rightarrow \infty$ 。

(c) $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 关于原点反对称, 因此在关于原点对称的线部分的积分相互抵消, 于是有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0。$$

另一方面, 利用斯托克斯定理, 对于由路径 Γ 决定的任意曲面 S ,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} da,$$

但在静电学中, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 因此线积分为零。

39.4 (a) $V = \frac{1}{3} \int_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} da$, 其中 $\mathbf{n}$ 是面积元的 da 的单位法向量。

(b) (1) 对于半径为 r 的球面, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = r$, 因此

$$V = \frac{r}{3} \int_S da = \frac{r}{3} (4\pi r^2) = \frac{4}{3} \pi r^3。$$

(2) 对于一个边为 L_1, L_2, L_3 的长方体, 考虑 L_1 和 L_2 决定的面, 在该面内 $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = L_3/2$ 。

因此, (a) 中的积分是 $\frac{1}{3}$

$$\frac{L_3}{2} (L_1 L_2) = L_1 L_2 L_3 / 6。$$

由对称性可知积分对于 6 个面结果一样。因此, $V = L_1 L_2 L_3$ 。

40 静电学

$$40.1 \quad (a) \phi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{l_2 + \sqrt{r^2 + l_2^2}}{-l_1 + \sqrt{r^2 + l_1^2}} \right)$$

(b) For $r \gg (l_1 + l_2)$,

$$\begin{aligned} \phi(P) &\approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r + l_2}{r - l_1} \right) \\ &\approx \frac{\lambda(l_1 + l_2)}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \end{aligned}$$

其中 q 是总电荷。

(c) 由于 P 很靠近线带电体 (但不靠近线的两端), 对称性要求: 近似地, 场应该是径向的。于是, 对于 $r \ll (L_1 + L_2)$,

$$\begin{aligned} \phi(P) &\approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2l_2}{r^2/2l_1} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{4l_1 l_2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E}(P) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r。$$

取一围绕着线带电体中长度为 Δz 的一段圆柱面, 对其应用高斯定律,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da \approx 2\pi r \Delta z E_r = \frac{\lambda \Delta z}{\epsilon_0}。$$

于是, $\mathbf{E}(P) \approx (\lambda/2\pi\epsilon_0 r) \mathbf{e}_r$ 。

$$40.2 \quad \mathbf{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right) \mathbf{e}_r$$

$$40.3 \quad (a) \text{ Use } E_r = \begin{cases} 0 & \text{for } r < r_a \\ q'/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{for } r_a < r < r_b \\ 0 & \text{for } r_b < r < r_c \\ (q' + q)/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{for } r > r_c \end{cases}$$

$$(c) \phi(r_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(q + q')}{r_c} - q' \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \right]$$

41 高斯定律的应用

- 41.1 以半径为 r 的球 S 的中心为原点, 使用球坐标 (r, θ, ψ) ,

$$\begin{aligned} \langle \phi(r) \rangle_s &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \phi(r, \theta, \psi) da \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \phi(r, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi \end{aligned}$$

由于在球内部没有电荷, 所以

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \phi(r) \rangle_s}{dr} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta d\theta d\psi \\ &= -\frac{1}{4\pi r^2} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 0, \end{aligned}$$

于是, $\langle \phi(r) \rangle_s = c = \lim_{r \rightarrow 0} \langle \phi(r) \rangle_s = \phi(0)$, 其中 c 是常量。

- 41.2 在离圆柱体轴径向距离 r 处, $\mathbf{E}(r) = (\rho r/2\epsilon_0) \mathbf{e}_r$ 。对于球体, 在离球心径向距离 r 处, $\mathbf{E}(r) = (\rho r/3\epsilon_0) \mathbf{e}_r$ 。

$$41.3 \quad \mathbf{E}_1 = (2\sigma/3\epsilon_0) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_2 = -(\sigma/3\epsilon_0) \mathbf{e}_z。$$

$$41.4 \quad E_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\rho(\xi) d\xi}{2\epsilon_0} - \int_x^{\infty} \frac{\rho(\xi) d\xi}{2\epsilon_0}$$

- 41.5 (a) $\sigma_e = 0$

$$(b) \sigma_e = \frac{4}{3} k\epsilon_0 d^{1/3}$$

$$(c) \rho(x) = -\frac{4}{9} \epsilon_0 k x^{-2/3}$$

$$41.8 \quad (a) \omega = 1.7 \times 10^{22} \text{ s}^{-1} (f = \omega/2\pi = 2.7 \times 10^{21} \text{ Hz})$$

$$(b) \hbar \omega = 1.8 \times 10^{-12} \text{ J} = 11 \text{ MeV}$$

$$41.7 \quad (a) N_e/N_a \approx 1/3000$$

$$(b) F_e/F_s \approx 1/6000$$

- 41.9 (a) 隧道中的物体 m , 在距离地球球心 r 处所收到的力是:

$$F = \frac{GMmr^3/R^3}{r^2} = \frac{mg}{R} r$$

其中, M 是地球质量, R 是地球半径。根据方程 $m\ddot{r} = -(mg/R)r$, 物体作谐振动, 角频率为 $\omega = \sqrt{g/R}$ 。贴地球表面绕地球转动的卫星的角频率由 $m\omega^2 R = mg$ 决定, 因此同样 $\omega = \sqrt{g/R}$ 。

- 41.10 这个模型预测地球表面的温度是 -50000°C , 远远低于实际情况。

$$41.11 \quad (a) (1) \text{ 对于 } r_2 \leq r \leq r_3, \mathbf{E}(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r; (2) \mathbf{E}(r_1) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r_4} \mathbf{e}_r。$$

$$(b) \Delta\phi = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_3}{r_2}。$$

- (c) (1) 场和势不变。(2) 对于 $r < r_2$, 场等于零; 对于 $r > r_2$, 场不变。 $\Delta\phi$ 减小。(3) 球内的场为零。圆柱间的场被扭曲(电场线必须保持和两个表面都垂直)。 $r > r_3$ 处, 场不变。

42 在各种情况下的电场

42.1 力是吸引力。

$$F_x = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4a^2} - \frac{a}{4(a^2 + b^2)^{3/2}} \right]$$

$$F_y = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4b^2} - \frac{b}{4(a^2 + b^2)^{3/2}} \right]$$

42.2 (a) $K.E. = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$

(b) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 动能变得无限大, 这是非物理性的。在 x 很小时, 由于表面结构, 公式不适用。

(c) 3.6 eV 。

42.4 $2.6 \times 10^6 \text{ s}$, 约一个月。

42.5 (a) $C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}$

(b) C_l 将减小。

42.6 (a) $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}$

(b) $\sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{ab} - \frac{b^2 - a^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} \right]$

(c) $F = \frac{a}{b^2} qV - \frac{ab}{(b^2 - a^2)^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$

42.8 (a) $E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos\theta$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta$$

(b) 通过偶极子点的任意一给定直线上的点具有相同的 θ 和 φ (只有 r 变化)。电场方向由 $\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan\theta$ 决定, 因此对于线上的所有点, 电场方向不变。

(c) E 和 p 的夹角依次为 $0, \arctan 3,$

π 。相对强度为: $4 : \sqrt{10} : 2$ 。

42.9 (a) 利用叠加原理。取偶极子和场的方向为 x 方向, 则在 (x, y, z) 处的总势是

$$\phi = -E_0 x + \frac{p x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

令 $\phi = 0$, 得到:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{2/3}$$

这是球方程。

(b) $p = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$

(d) 场不变。

(e) $\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$

(f) $p = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$

(g) 任何具有类似“势”的问题可以类似地解决。

42.10 (a) (1) $\mathbf{F} \approx (\rho\lambda/2\pi\epsilon_0 r^2) \mathbf{e}_r, \boldsymbol{\tau} = 0$ 。

(2) $\mathbf{F} = 0, \boldsymbol{\tau} = \rho\lambda/2\pi\epsilon_0 r, \boldsymbol{\tau}$ 方向垂直于导线和粒子所在平面。

(b) 令 $\mathbf{r}$ 是指向偶极子的负电荷的矢径; $\mathbf{d}$ 是从负电荷到正电荷的偏离量。那么, 在电场 $\mathbf{E}$ 中, 偶极子受到的总力是 $\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})]$ 。对于小偏离 $\mathbf{d}$, $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$ 。于是, $\mathbf{F} = q\nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = \nabla(q\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ 。

42.11 由于正、负电荷的效果相互抵消, 在层面之外, 电场为零, 因此势是常量 (与 r 无关)。取层中间的势为零势, 则在层两边的势分别为 $\phi = Np/2\epsilon_0$ 和 $\phi = -Np/2\epsilon_0$ 。

$$42.12 \quad (a) \phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{x} \right)$$

$$(b) \mathbf{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right) \mathbf{e}_x$$

$$(c) \text{ For } x \gg a, \mathbf{E} \approx -\frac{3qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^4} \mathbf{e}_x.$$

$$42.13 \quad (a) t_1 = 1.000 \text{ s}$$

$$(b) V = 1.5 \text{ V}$$

$$(c) t_1 = 500 \text{ s}$$

$$(d) \text{ 不变。}$$

$$42.14 \quad (a) \begin{array}{c|cccc} y(\text{cm}) & 0 & 0.5 & 1.0 & 2.0 \\ \hline E(\text{V/m}) & 0 & \frac{(0.005)^3}{2\epsilon_0} & \frac{(0.01)^3}{2\epsilon_0} & \frac{(0.01)^3}{4\epsilon_0} \end{array}$$

$$(b) \phi(0, 0, 0) \approx \frac{(0.01)^4}{8\epsilon_0} (3 + 8 \ln 10) \text{ V}$$

(这是上界。)

$$(c) \phi(0.5, 0, 0) < \phi(0, 0, 0)$$

43 在各种情况下的电场(续)

$$43.1 \quad (a) \text{ 设电荷密度为 } \pm\lambda \text{ 的两条线平行于 } z \text{ 轴, 与 } x \text{ 轴分别相交于 } x \pm d. \text{ 来自}$$

电荷密度为 λ 的线的势为 $-\lambda/2\pi\epsilon_0 \ln r$. 因此, 在 xy 平面内上一点的总的势为

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right].$$

等势面的方程表达式必须满足

$$(x-d/2)^2 + y^2 = c((x+d/2)^2 + y^2)$$

其中, c 为常数。整理得:

$$\left(x - \left(\frac{1+c}{1-c} \right) \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{cd^2}{(1-c)^2}$$

这是圆方程。

$$(b) C_l \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r)}$$

(c) 对于 $x, y \gg d$,

$$\frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + xd}{x^2 + y^2 - xd}}$$

$$\approx \sqrt{1 + \frac{2xd}{x^2 + y^2}}.$$

对上式右边取对数,

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2xd}{x^2 + y^2} \right) \approx \frac{xd}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{注意 } \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x+iy},$$

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right]$$

$$\approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{xd}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right).$$

44 静电能

44.1 你应该同意。

$$44.2 \quad (a) V_l = 3.000 \text{ V}$$

$$(b) W = 4.05 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$44.3 \quad (a) \Delta U = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2(C_1 + C_2)} - \left(\frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \left(\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} \right)^2 < 0$$

(b) 当电荷重新分布, 电流产生热, 大部分能量损失便是由于这些热(一小部分以辐射的形式被发射出去)。

(c) $V_1 = V_2$, 其中 $V_1 = Q_1 / C_1$, $V_2 = Q_2 / C_2$ 。

44.4 (a) 令 $\mathbf{r}$ 为指向偶极子的负电荷 $-q$ 的矢径, $d\mathbf{e}_z$ 是从偶极子负电荷到正电荷的偏移, 因此 $\mathbf{p} = q d\mathbf{e}_z$ 。令无穷远处的电势为零。那么, 把偶极子从无穷远处移动过来需要做功 $U = -q\phi(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r} + d\mathbf{e}_z) \approx q \left(d \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = (qd)(-E_z) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ 。

(b) $\boldsymbol{\tau} = q \left(\frac{d}{2} \right) \times \mathbf{E} + (-q) \left(-\frac{d}{2} \right) \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = pE \sin \theta$, 其中 θ 是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{p}$ 的夹角。另一方面, $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta$ 。所以, $\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$ 。

(c) 不一样。相差 $-q^2 / 4\pi\epsilon_0 d$ 。

44.5 电容器的能量是 $U = \frac{Q^2}{2C}$, 电容是 $C = \frac{\epsilon_0 A}{x}$, 其中 x 是平板间距。于是, $U = \left(\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \right) x$ 。平板上的力为 $F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-Q^2}{2\epsilon_0 A}$, 负号表明是吸引力。

44.6 $r_n \approx 2 \times 10^{-14}$ cm

$$44.7 \quad (a) W_a = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$(b) W_b = W_a + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

45 电介质

45.1 (a) 忽略边缘效应, 平板间的电场是均匀的, 垂直于两个平板, 因此总电容

$$是 C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2, 其中$$

Q_1 和 Q_2 是每个“半平板”上的电荷, C_1 和 C_2 是每个“半平板”上的电容, V 是平板间的电势。每个“半平板”的面积是 $A/2$, 因此 $C_1 = \kappa_1 \epsilon_0 (A/2) / d$, $C_2 = \kappa_2 \epsilon_0 (A/2) / d$ 。所以, $C = C_1 + C_2 =$

$$\left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right)。$$

(b) 如果平板间电势差保持为 V , 则

$$\begin{aligned} V = \phi_{\text{下}} - \phi_{\text{上}} &= - \int_{\text{上}}^{\text{下}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ &= E_1 d = E_2 d。 \end{aligned}$$

如果现在我们建立起电场(大小 V/d)和平板上的表面电荷的关系, 我们便能计算总电荷 Q , 进而得到总电容 C 。为此, 我们借助《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(10.26), $\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \rho_{\text{自由}} / \epsilon_0$, 得到:

$$\int_S \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} dV$$

$$= \frac{Q_{\text{自由}}}{\epsilon_0}。$$

在金属中, $E=0$, 因此 $\kappa_1 E_1 da = (\sigma_1)_{\text{自由}}/\epsilon_0 da$ 。于是, $(Q_1)_{\text{自由}} = (\sigma_1)_{\text{自由}} \left(\frac{A}{2}\right) = \epsilon_0 \kappa_1 E_1 \left(\frac{A}{2}\right) = \left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right) (\kappa_1/2)V$ 。所以, $C = \frac{[(Q_1)_{\text{自由}} + (Q_2)_{\text{自由}}]}{V} = (\epsilon_0 A/d) (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ 。

45.2 (a) $F = 7.1 \times 10^{-8} \text{ N}$

(b) $P = 1.1 \times 10^{-8} \text{ C m}^{-2}$

(c) 小于。

45.3 如果平板间的空区域处电场为 E_0 , 则电介质处为 $E_d = E_0/\kappa$ 。平板间的电压是穿过空区域和电介质区域的电压之和: $V = E_0(d-t) + E_d t$ 。因此, 平板上的电荷是 $Q = CV = C[E_0(d-t) + (E_0/\kappa)t]$ 。然而, 如果电介质被移除, 则平板间电压变为 $V_0 = E_0 d$, $Q = C_0 V_0 = C_0 E_0 d$ 。于是, $C_0 E_0 d = C[E_0(d-t) + (E_0/\kappa)t]$ 。

45.4 (a) 内表面: $\sigma_{\text{pol}} = -\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right) \frac{Q}{4\pi a^2}$

外表面: $\sigma_{\text{pol}} = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right) \frac{Q}{4\pi b^2}$

(b) $\rho_{\text{pol}} = 0$

45.5 (a) 如果在电势 V 下, 电池向电容注入电荷 Δq , 则所做功为 $W_{\text{batt}} = \Delta q V$ 。电介质插入前, 电容是 $C = \frac{q}{V} = \epsilon_0 A/d$, 其中 d 是平板间距

离。电介质插入后, 电容变为 $C' =$

$$\frac{q'}{V} = \kappa \epsilon_0 A/d, \text{ 因此 } q' = \kappa q。 \text{ 于}$$

是, $W_{\text{batt}} = (q' - q)V = qV(\kappa - 1)$ 。

(b) $W_{\text{mech}} = -\frac{1}{2}qV(\kappa - 1)$, 作用于插入者。

(c) $W_{\text{batt}} = -2W_{\text{mech}}$

45.6 当达到平衡时, 电场可以没影响地断开, 因此我们只考虑电力做的功 ΔU_e 和引力做的功 ΔU_g : $\Delta U_g = -\Delta U_e$ 。上升的油的质心的高度是 $H/2$, 因此, 当油的顶部有一小移动 ΔH 时, 引力所做的功是 $\Delta U_g = \Delta\left(\frac{mgH}{2}\right) = \pi(b^2 - a^2)H\rho g\Delta H$ 。由于管道上的电荷 Q 保持恒定, 当电容随着管道间的油的注入而变化时, 电力所做的功为 $\Delta U_e = \Delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = -\left[\frac{Q^2}{2C^2}\right]\Delta C = -(V^2/2)\Delta C$ 。两同轴金属管间(中间注入了油)单位长度的电容是: $C_l = 2\pi\epsilon_0\kappa/\ln(b/a)$ (习题 42.5), 因此 $\Delta C = 2\pi\epsilon_0(\kappa - 1)\Delta H/\ln(b/a)$ 。综合以上,

$$\begin{aligned} & \pi(b^2 - a^2)H\rho\Delta H \\ & = \frac{\left(\frac{V^2}{2}\right)2\pi\epsilon_0(\kappa - 1)\Delta H}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \end{aligned}$$

求解 H 得证。

46 在电介质内部

- 46.1 取球所在位置为原点, $\mathbf{P}$ 方向为 $+z$ 方向。

$$\mathbf{E}_{\text{outside}} = \frac{a^3 P}{3\epsilon_0 r^3} (3xz\mathbf{e}_x + 3yz\mathbf{e}_y + (3z^2 - r^2)\mathbf{e}_z),$$

$$\mathbf{E}_{\text{inside}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}\mathbf{e}_z,$$

其中 r 是球心到 (x, y, z) 的距离。

46.2 $\rho = 2.44 \times 10^{-39} \text{ C m}$

46.3 (a) Use $\alpha = (\kappa - 1)kT/P$

(b) $\rho_0 = 6.4 \times 10^{-30} \text{ C m}$

46.4 (a) $\alpha = 2\pi a^3$

(b) $\alpha_T \approx \frac{2.62a^3 - \alpha_0}{1 + 18.33\alpha_0/a^3}$

46.5 $\kappa = 1 + \pi/54$

47 静电模拟

47.1 $T_0 = \frac{W}{4\pi K} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) + T_R$

47.2 $a \approx 6250 \text{ km}$

47.3 (a) $n=1$ 和 $n=-2$

(b) $n=1$ 和 $n=-1$

47.4 $T_p \approx 20.53^\circ\text{C}$

48 静磁学

- 48.1 取 x 水平, y 竖直。

(a) $\mathbf{B} = (8 \times 10^{-5})\mathbf{e}_y \text{ Wb m}^{-2}$

(b) $\mathbf{F} = (-6\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y)10^{-4} \text{ N m}^{-1}$

48.2 $\mathbf{B} = 0$

- 48.3 半径 r 处的 $\mathbf{B}$ 与半径为 r 的圆相切, 沿逆时针方向, 其大小为:

(a) $B = \frac{Ir}{2\pi\epsilon_0 c^2 a^2} \quad r < a,$

(b) $B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad a < r < b,$

(c) $B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \quad b < r < c,$

(d) $B = 0 \quad r > c.$

48.4 (a) $\mathbf{F}_{\text{loop}} = \frac{I_1 I_2}{2\pi\epsilon_0 c^2} l \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+w} \right),$

向上。

(b) $\mathbf{F}_{\text{wire}} = -\mathbf{F}_{\text{loop}}$

(c) $\tau_{\text{loop}} = 0$

48.5 (a) $B \approx 7.9 \times 10^{-3} \text{ Wb m}^{-2}$

(b) $nI \approx 1.6 \times 10^4 \text{ ampere-turns}$

48.6 $\mathbf{B} = d\mathbf{j}/2\epsilon_0 c^2$

49 在各种不同情况下的磁场

- 49.1 以 P 为原点, 取 v 方向为 y 方向, z 垂直于薄膜层向上。

(a) $\mathbf{A} = -\frac{\sigma v z}{2\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_y$

(b) $\mathbf{B} = \frac{\sigma v}{2\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_x$

49.2 (a) 0

(b) $I/4\pi\epsilon_0 c^2$

(c) $I/4\pi\epsilon_0 c^2$

- 49.3 令 $+x$ 方向向右。

(a) $\mathbf{B}(x) = \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2}$

$$\left[\frac{1}{(a^2 + (b/2 - x)^2)^{3/2}} + \right]$$

$$\frac{1}{(a^2 + (b/2 + x)^2)^{3/2}} \Big] \mathbf{e}_x$$

(b) With $r^2 = a^2 + b^2/4$

$$\mathbf{B}(x) \approx \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{2}{r^3} + \left(\frac{15b^2}{4r^7} - \frac{3}{r^5} \right) x^2 \right] \mathbf{e}_x$$

(c) $a = b$ 。

(d) $r = \sqrt{5}a/2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{2}{r^3} \right] \mathbf{e}_x \\ &= \frac{Ia^2}{\epsilon_0 c^2 (\sqrt{5}a/2)^3} \mathbf{e}_x \\ &= \frac{8I}{5^{3/2} a \epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

49.5 取原点位于环的中心, z 沿环的对称轴,

$$\mathbf{B}(z) = \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

50 矢势

50.1 (a) $\mathbf{B}$ 的法向分量为零。

(b) 在超导体外部区域必须满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$, 以及边界条件: 在超导体表面, $\mathbf{B}_n = 0$ 。为求超导体外部区域的场, 我们在超导体内表面以下 d 处放一“虚偶极子”。其方向偏离竖直方向 $(\pi - \theta)$ 。边界条件 $\mathbf{B}_n = 0$ 于是自动满足。在超导体外部区域, 虚偶极子不起作用, $\nabla \times \mathbf{B}_{\text{虚}} = \nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{虚}} = 0$ 。综上, 超导体外部区域的场等于虚偶极子的场加上原偶极子的场。

(c) 取 y 轴垂直于 μ , 平行于超导体层

面, 指向纸内,

$$\tau = -\frac{\mu^2 \sin 2\theta}{64\pi\epsilon_0 c^2 d^3} \mathbf{e}_y$$

(d) 稳定平衡: $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 。非稳定平衡: $\theta = 0, \pi$ 。

(d) 方向离开超导体。

$$F = \frac{3\mu^2}{64\pi\epsilon_0 c^2 d^4} (3 + \cos 2\theta)$$

51 感应定律

51.1 $P_1: 4.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$, 向右。

$P_2: 0$ 。

$P_3: 4.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$, 向左。

51.2 (a) $V_0 = \pi^2 r^2 f B$, $\omega_V = 2\pi f$

(b) $I_0 = V_0/R_m$, $\omega_I = \omega_V$

51.3 $\epsilon = \frac{\pi a^4 I \omega}{2\epsilon_0 c^2 R^3} \sin \omega t$

51.4 (a) $v(t) = \frac{IBd}{m} t$

(b) $v(t) = \frac{\epsilon}{Bd} (1 - e^{-B^2 d^2 t / m R})$,

$$v = \frac{\epsilon}{Bd}$$

(c) $I = 0$

51.5 (a) $L = L_1 + L_2 - 2M$

(b) $L = L_1 + L_2 + 2M$

51.6 电缆单位长度的能量是 $U = LI^2/2$, 其中 L 是单位长度的电感。因此, $L = (2/I^2)U$ 。导线和导体圆筒之间的磁场正是导线的场, 其大小为 $B = I/(2\pi\epsilon_0 c^2 r)$, 其他地方的场是 0。电缆

的总能量是 $\left(\frac{\epsilon_0 c^2}{2}\right) \int B^2 da$ (在空间上

积分), 因此单位长度的能量是

$\left(\frac{\epsilon_0 c^2}{2}\right) \int B^2 da$ (在垂直于导体的面上

积分)。于是(r 为电缆半径),

$$L = \left(\frac{2}{I^2}\right) \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 2\pi r dr$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}。$$

$$(b) L = \frac{\ln(b/a) + 1/4}{2\pi\epsilon_0 c^2}。$$

51.7 (a) 令 I 为螺线管绕线中的电流, 考虑一垂直于螺线管对称轴且距离其

$a < r < b$ 的圆形路径 s 。如果 B 是

沿此路径的磁场, 那么 $\int B ds =$

$2\pi r B = NI/\epsilon_0 c^2$ 。于是, $B =$

$NI/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ 。螺线管中的总磁能

U 是 $\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV$ (在其体积上的积

分)。所以,

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} 2\pi a \int_b^{b+a} \left(\frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 r dr$$

$$= \frac{N^2 I^2 a}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)。$$

另一方面, 自感为 L 、电流为 I 的线

圈中的能量是 $U = \frac{L I^2}{2}$ 。结合上

述两式求解 L , 得证。

$$(b) M = \frac{Na}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

$$(c) \frac{L}{M} = N$$

$$51.8 (a) M = \frac{A^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 r^3} [3\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

$$(b) \mathbf{F} = -(3M/r) I^2 \mathbf{e}_r$$

(c) 当且仅当电流之一反向时, $\mathbf{F}$ 反向。

$$51.9 M_{12} = M_{21} = \frac{N\pi r_1^2}{\epsilon_0 c^2 l \sqrt{1 + 4r_2^2/l^2}}$$

$$51.10 (a) I = 1.0 \text{ mA}$$

(b) 感生电流将增加。

(c) 感生电流不变。

(d) 减小。

$$51.11 (a) \tau = 0$$

(c) $\mathbf{F}$ 沿线圈轴; 回路(2)被回路(1)排斥。

(d) 力减小, 力矩仍为零。

(e) 回路(2)中没有感生电流, 没有力和力矩作用在回路(2)上。

52 麦克斯韦方程组在自由空间中的解

52.1 令 $\mathbf{E}_0 = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$, 考虑

$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}\right) \mathbf{E}$ 的 x 分量,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_x e^{i(\omega t - kx)}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_x e^{i(\omega t - kx)}$$

$$= \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x e^{i(\omega t - kx)}。$$

当 $k^2 = \omega^2/c^2$, 这是波函数的解。y 分

量和 z 分量同样如此。

(b) 如果 $k > 0$, 传播方向为 $+x$; 如果 $k < 0$, 传播方向为 $-x$ 。

(c) 有定义知, $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ 。如果场不含 y 分量和 z 分量, 则 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x}$ 。如果场分量的形式为 $A e^{-ikx}$, 则 $\nabla A e^{-ikx} = \mathbf{e}_x \frac{\partial(A e^{-ikx})}{\partial x} = -ik A e^{-ikx} \mathbf{e}_x$, 所以 $\nabla = -ik \mathbf{e}_x$ 。

(d) $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$

(e) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \rightarrow -ik E_x = \rho/\epsilon_0$
 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow B_x = 0$
 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow k \mathbf{e}_x \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$
 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow -ik c^2 \mathbf{e}_x \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 + i\omega \mathbf{E}$

k 和 ω 的关系取决于 $\mathbf{j}$ 与 ρ 。在自由空间, $\mathbf{j} = \rho = 0$, $k = \pm \omega/c$ 。

(f) 以上所有解中, $k \rightarrow -k$ 。

52.2 (a) $\omega' = \omega(1 - v/c)/(1 + v/c)$

53 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解

53.1 使用习题 53.2 中的记号和变量, 并以 μ 替代 p , 其中 $\mu = \pi a^2$ 是偶极子的磁矩。

$$B_\varphi = 0,$$

$$B_\theta = \frac{1}{c^2} (E_\theta \text{ 电偶极子}),$$

$$B_r = \frac{1}{c^2} (E_r \text{ 电偶极子}),$$

$$E_\varphi = -(B_\varphi \text{ 电偶极子}),$$

$$E_\theta = E_r = 0.$$

53.4 (c) 偶极子产生的场是

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{Q_0 d \omega^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \cos \omega(t - r/c) \mathbf{e}_\theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} \\ &= -\frac{Q_0 d \omega^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \cos \omega(t - r/c) \mathbf{e}_\varphi + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

这一结果和习题 53.2 ($p = Q_0 d$) 一致。

53.5 (a) 考虑长度为 Δz 的一小段导线为习题 53.4 类型的偶极子, 偶极子每个端点的电荷是 $q = \int i dt$, 因此偶极矩是

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left(\int -i_0 \sin \omega t \cos \frac{2\pi z}{\lambda} dt \right) \Delta z \\ &= \left(\frac{i_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \right) \Delta z. \end{aligned}$$

(c) 天线的总偶极矩是 $p = \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \Delta p / \Delta z dz = (2 i_0 c / \omega^2) \cos \omega t$ 。具有此偶极矩的单个偶极子产生的场为

$$\mathbf{E}' = -\frac{i_0}{2\pi \epsilon_0 c r} \sin \theta \cos \omega(t -$$

$$r/c)\mathbf{e}_\theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right)。$$

比较 $f(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)/\sin\theta$ 和

$g(\theta) = \sin\theta$:

	θ	0°	30°	60°	90°
半波天线	$f(\theta)$	0	0.418	0.816	1
单个偶极子	$g(\theta)$	0	0.500	0.867	1

注意: $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta)/g(\theta) = \pi/4。$

$$53.6 \quad (a) \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$(b) \mathbf{A} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \left(\sin\frac{v}{c} \mathbf{e}_x + \cos\frac{v}{c} \mathbf{e}_y \right)$$

$$(c) \mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos\frac{v}{c} + \frac{v}{c} \sin\frac{v}{c} \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{v}{c} \cos\frac{v}{c} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin\frac{v}{c} \right] \mathbf{e}_y \right)$$

$$\mathbf{B} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a^2} \mathbf{e}_z$$

54 交流电路

$$54.1 \quad \text{相邻接线柱间 } R = \frac{7}{12}\Omega; \text{面对角间 } R = \frac{3}{4}\Omega; \text{体对角间 } R = \frac{5}{6}\Omega。$$

$$54.2 \quad (a) I = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L [2 - \omega^2 LC]} V_0 \sin \omega t$$

$$(b) I = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega (L \pm m) [2 - \omega^2 (L \mp m) C]} V_0 \sin \omega t$$

$$54.5 \quad (a) \text{ Use } |I| =$$

$$E_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{(\omega^2 LC - 1)^2}{\omega^2 L^2}}。$$

(b) 都是 $Q = 2K。$

$$54.6 \quad L = R^2 C$$

$$54.8 \quad (a) \hat{I} = \hat{V} / [Z_{RC} + Z_{RL}]$$

$$= \hat{V} / \left[\frac{1}{1/R + i\omega C} + \frac{1}{1/R + 1/(i\omega L)} \right]$$

$$= \frac{\hat{V}}{R} \left[\frac{1 + R(i\omega C + 1/(i\omega L)) + R^2 C/L}{2 + R(i\omega C + 1/(i\omega L))} \right]$$

清楚地, 如 $R^2 C/L = 1$, 那么 $\hat{I} = \hat{V}/R$, 无关于 $\omega。$

$$(b) \phi = -\arctan(\omega RC)$$

$$54.9 \quad (a) \langle P \rangle = \frac{(V_0^2 R)/2}{R^2 + (\omega L - m/\omega C)^2}$$

$$(b) (1) m = 2$$

$$(2) (V_{P_0 P_2})_{\max} = 2V_0/(\omega RC), \text{ and}$$

$$(V_R)_{\max} = V_0$$

55 空腔共振器

$$55.1 \quad (a) \omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{2d}{(b-a)\ln(b/a)}}$$

(c) 减小。

56 波导

56.2 对于长度 Δx , 电容是 $C_0 \Delta x \approx \epsilon_0 (b \Delta x)/a$, 于是 $C_0 \approx \epsilon_0 b/a$ 。我们已知知道 $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$, 所以 $z_0 = \sqrt{L_0/C_0} = \sqrt{L_0 C_0 / (C_0)^2} = 1/(c C_0) \approx a/\epsilon_0 c b。$

$$56.3 \quad (a) \omega_1 = \pi c/l$$

(b)

$$\mathbf{E} = E_0 \frac{a}{r} \sin(k_y z) e^{i\omega_y t} \mathbf{e}_r,$$

其中 $k_y = n\pi/l$, $\omega_y = n\pi c/l。$

$$(c) \omega_1/\omega_2 \approx \pi$$

$$56.4 \quad (a) E_0(x, z) = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$(b) \omega_0 = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}$$

$$56.5 \quad (b) x = 0, 2l/5, 4l/5$$

$$(c) V_l(x, t) = \frac{1}{2} V_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$V_r(x, t) = \frac{1}{2} V_0 \cos(\omega t + kx)$$

$$(d) I(0, t) = 0$$

$$I(l/2, t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_0}{z_0} \sin(\omega t)$$

$$I(l, t) = \frac{V_0}{z_0} \sin(\omega t)$$

$$\text{其中 } z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$$

$$(e) \langle \tau \rangle = 0$$

$$56.6 \quad (b) Z_S = i Z_0 \tan(\omega l \sqrt{LC})$$

$$(c) Z_S = -i Z_0 \cot(\omega l \sqrt{LC})$$

$$(d) Z_S = Z_0$$

$$56.8 \quad v_R/c \approx 0.845$$

$$56.9 \quad (a) \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} \right] \mathbf{e}_x -$$

$$\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{e}_y. \text{ 所以, } \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = 0.$$

57 用相对论符号表示的电动力学

$$57.1 \quad (a) A_\mu A_\mu$$

$$(b) -A_\mu j_\mu$$

$$57.2 \quad E^{\gamma 2} = \frac{E^{\gamma 1}}{1 + (E^{\gamma 1}/m_e)(1 - \cos \theta)}$$

$$57.3 \quad E^\gamma = 4m_e$$

$$57.5 \quad (a)$$

$$m_c = \sqrt{m_a^2 + 2m_a E_b + m_b^2}$$

$$v_c = \frac{p_b}{m_a + E_b}$$

$$(b)$$

$$m_c = m_a + m_b$$

$$v_c = \frac{p_b}{m_a + m_b}$$

58 场的洛伦兹变换

58.1 利用洛伦兹规范 $\nabla_\mu A_\mu = 0$, 以及《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(25.22),

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\mu \\ &= \square^2 A_\nu - \nabla_\nu (\nabla_\mu A_\mu) \\ &= \frac{j_\nu}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

$$58.2 \quad (a)$$

$$f_\mu = j_\nu F_{\mu\nu} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}).$$

(b) 时间分量: 场作用在电荷上的单位体积的功率; 空间分量: 场作用在电荷上的单位体积的力。

58.3 (a) 令 $F_{\mu\nu}$ 为对应于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的电磁场。于是, $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = (1/2) F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = F_{xt} F_{zy} + F_{yt} F_{xz} + F_{zt} F_{yx} = (1/8) \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}$ 。两个都是四维矢量的标量积, 具有洛伦兹不变性。

(b) 自由空间传播的电磁波。

$$58.4 \quad \frac{v}{1+v^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}$$

58.7 取 z 平行于 v , 在导线内,

$$(a) \mathbf{E} = 0,$$

$$\mathbf{B} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\phi,$$

$$(b)$$

$$E'_z = B'_z = 0,$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma v I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{B}' = \frac{\gamma I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\phi,$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ 。

$$58.8 \quad (a) \quad \sigma = (q_r/2\pi a^2) \sqrt{1-v^2}$$

$$(b) \quad \sigma_h/\sigma_l \approx 1/1\,000$$

$$58.9 \quad u_p = \gamma(1, \mathbf{v}) \text{ 和 } f_p = \gamma(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{F}).$$

$$\begin{aligned} f_p u_p &= f_l u_l - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \\ &= \gamma^2(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

$$58.10 \quad (a) \quad \mathbf{E} = \frac{q}{2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_y$$

(b) 不变。

59 场的能量和场的动量

$$59.3 \quad \mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -(I^2 R/2\pi a) \mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned} 59.4 \quad dU/dt &= \int_a^b |\mathbf{S}| 2\pi r dr \\ &= (IV/\ln(b/a)) \int_a^b 1/r dr \\ &= IV. \end{aligned}$$

$$59.5 \quad (a) \quad |\langle \mathbf{S} \rangle| = 2.6 \times 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$$

$$(b) \quad |\mathbf{E}_{\max}| = 0.14 \text{ V m}^{-1},$$

$$|\mathbf{B}_{\max}| = 5 \times 10^{-10} \text{ Wb m}^{-2}$$

59.6 (a) 边界条件是: $\mathbf{B}$ 的法向分量和 $\mathbf{E}$ 的切向分量为零。由于在 $x=0$ 和 $x=a$ 处, $\sin(\pi x/a)=0$, 这些条件成立。

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathbf{S} &= \epsilon_0 c^2 E_0^2 \left(\frac{k_z}{\omega} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{4\omega a} \sin \frac{2\pi x}{a} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \sin 2(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_x \right)$$

$$\begin{aligned} u &= \epsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_z z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2 c^2}{4\omega^2 a^2} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos 2(\omega t - k_z z) \right) \right) \end{aligned}$$

$$(c) \quad \langle dU/dt \rangle = \epsilon_0 c^2 E_0^2 \frac{k_z}{\omega} \frac{ab}{4}$$

$$(d) \quad \langle u \rangle_{\text{time avg}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi^2 c^2}{2\omega^2 a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \right)$$

$$(e) \quad v_R = \frac{\langle dU/dt \rangle}{\int_0^b \int_0^a \langle u \rangle_{\text{time avg}} dx dy} = \frac{c^2 k_z}{\omega}$$

由于 $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$, 所以 $v_R =$

$c\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}$, 其中 $\omega_c = \pi c/a$ 。

59.7 设 p 位于原点, 方向沿 z 轴, 并且使用球坐标,

$$\mathbf{S} = \frac{p^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \omega(t-r/c) \mathbf{e}_r.$$

$$(a) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{p^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \omega(t-r/c)$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \langle P \rangle &= 2\pi r^2 \int_0^\pi \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{e}_r \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi \left[\frac{p^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \frac{1}{2} \mathbf{e}_r \right] \cdot \\ &\quad \mathbf{e}_r \sin \theta d\theta \\ &= \frac{p^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{p^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \end{aligned}$$

$$59.8 \quad \frac{\langle P_{\text{辐射}} \rangle}{\langle P_{\text{入射}} \rangle} = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{e^2}{m_e c^2} \right]^2, \text{ 其中 } e^2 = q_e^2 / 4\pi\epsilon_0$$

$$59.9 \quad (a) a \approx 6\,000 \text{ \AA}$$

$$59.10 \quad (a) U_B(t) = (N^2 K^2 r^2 / 4\epsilon_0 c^2 R) t^2$$

$$(b) S(t) = -(N^2 K^2 r / 8 \pi^2 \epsilon_0 c^2 R^2) t \mathbf{e}_r$$

$$(c) \frac{dU}{dt} = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = 4 \pi^2 R r S(t)$$

$$= (N^2 K^2 r^2 / 2\epsilon_0 c^2 R) t$$

60 电磁质量

$$60.1 \quad a = \frac{1}{2} e^2 / (m c^2) \approx 1.4 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$60.2 \quad (b) \frac{L}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{a} = \frac{m_e}{q_e}$$

$$(c) v = \frac{3}{2} \hbar / (ma). \text{ 然而, 如果把习题}$$

$$60.1 \text{ 的 } a = \frac{1}{2} e^2 / (m c^2) \text{ 代入, 则}$$

$$v = 3 \hbar c^2 / e^2 \approx 3 \times 137c, \text{ 即大约光速的 } 400 \text{ 倍。}$$

61 电荷在电场和磁场中的运动

$$61.1 \quad \alpha = (qE/mc), \beta = (\alpha/\gamma),$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-v_0^2/c^2},$$

$$(a) v_x = \frac{\alpha c t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}},$$

$$v_y = v_z = 0$$

$$x = \frac{c}{\alpha} (\sqrt{1+\alpha^2 t^2} - 1),$$

$$y = z = 0$$

$$(b) v_x = \frac{\beta c t}{\sqrt{1+\beta^2 t^2}},$$

$$v_y = \frac{v_0}{\sqrt{1+\beta^2 t^2}},$$

$$v_z = 0$$

$$x = \frac{c}{\beta} (\sqrt{1+\beta^2 t^2} - 1),$$

$$y = \frac{v_0}{\beta} \ln(\beta t + \sqrt{1+\beta^2 t^2}),$$

$$z = 0$$

$$61.2 \quad (a) \text{ 在低能下, } \omega \approx q_p B / m_p.$$

$$(b) \text{ 减小。}$$

$$(c) T = m_p c^2 / 100 \approx 9.4 \text{ MeV}$$

$$61.3 \quad (a) x = \frac{E}{B} t - \frac{E}{B \omega_c} \sin \omega_c t,$$

$$y = \frac{E}{B \omega_c} (1 - \cos \omega_c t),$$

$$z = 0,$$

其中, $\omega_c = qB/m$ 。这个解只有当

$$\frac{E}{B} \ll c \text{ 时有效。}$$

$$(b) \text{ 对于 } \frac{E}{B} < c \text{ 的情况, 运动路径是摆}$$

线, 在(a)的基础上, x 方向被拉伸

$$\text{一个因子 } \gamma = 1/\sqrt{1-(E/Bc)^2}.$$

对于 $\frac{E}{B} > c$ 的情况, 解由习题

61.1(b) 给出, 只要转换到沿 $+x$

方向以 $V = Bc^2/E$ 运动的坐标系 S'

中, 从而使得 $B' = 0$, 然后把习题

61.1 中的 $-y$ 轴看作 $+x$ 轴, $+x$

轴看作 $+y$ 轴, 从而使得粒子的初

速度为 $v_0 = -Bc^2/E$ 。

$$(c) \text{ 相对论性地,}$$

$$B = \frac{\sqrt{2mV_0/q + (V_0/c)^2}}{d}$$

非相对论性地(令 $c \rightarrow \infty$),

$$B = \frac{\sqrt{2mV_0/q}}{d}$$

61.4 (a) $l = f(f-d)/d$

(b) $l > 0$ 时, 实像; $l < 0$ 时, 虚像。

62 稠密材料的折射率

62.1 由定义知 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$ 。于是, $\kappa = (E + P/\epsilon_0)/E$ 。对于角频率为 ω 、波数为 k 、沿 z 方向传播的横波,《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(32.23)给出 $-k^2 E + (\omega^2/c^2)E = -(\omega^2/\epsilon_0 c^2)P$, 重新整理得 $n^2 = (E + P/\epsilon_0)/E$, 其中折射率为 $n = kc/\omega$ 。于是, $n^2 = \kappa$ 。

62.2 $\rho \approx 4.5 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$

62.3 对于 $E = 0, \gamma = \frac{1}{\tau}, \omega_0 = 0$ (自由电子

模型),《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(32.1)变为 $0 = m(\dot{v} + v/\tau)$, 其解为 $v = v_0 e^{-t/\tau}$; 弛豫时间是 τ 。然而, 当 $E \neq 0$ (忽略 B), 作用于电子的力为 $q_e E = m(\dot{v} + v/\tau)$, 或进一步关于 t 求导, $\ddot{v} + \frac{\dot{v}}{\tau} = (q_e/m) \dot{E}$ 。由于我们取

$$B = 0, c^2 (\nabla \times B) = \frac{j}{\epsilon_0} + \dot{E} = 0。于是, \dot{E}$$

$$= -\frac{j}{\epsilon_0} = -N q_e v / \epsilon_0。所以, \ddot{v} + \frac{\dot{v}}{\tau} =$$

$$\left(\frac{q_e}{m}\right) \left(-\frac{N q_e v}{\epsilon_0}\right) = -\omega_p^2 v, \text{ 其中 } \omega_p \text{ 是}$$

等离子体频率。于是, $\ddot{v} + \frac{\dot{v}}{\tau} + \omega_p^2 v = 0。$

设 $v = v_0 e^{i\omega t}$, 得 $-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_p^2 = 0$, 其

解为 $\omega = i/2\tau \pm \sqrt{\omega_p^2 - (1/2\tau)^2}$ 。弛豫

时间是 ω 虚部的倒数, 即 2τ 。

62.4 (a) $\mathbf{B} = (kE_x/\omega)\mathbf{e}_y$

(b) $\theta = 90^\circ$

(c) $|\mathbf{B}|_{\max}/|\mathbf{E}|_{\max} = \sqrt{\sigma/\omega\epsilon_0 c^2}$

(d) $\phi = 45^\circ$

62.5 由《费曼物理学讲义(第2卷)》公式(32.42)得:

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)} \\ &= 1 - \frac{\sigma/\epsilon_0}{\omega^2\tau(1-i/\omega\tau)} \\ &\approx 1 - \frac{\sigma/\epsilon_0}{\omega^2\tau}(1+i/\omega\tau) \\ &= 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - i\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^3\tau}\right), \end{aligned}$$

其中, ω_p 是等离子体频率。因此, 当 ω 围绕 ω_p 变化超过 $1/\tau$ 时, n 从实部变成虚部。

63 表面反射

63.1 (a) $\frac{I_i}{I_i} =$

$$\frac{1 + (r_{12}r_{23})^2 - r_{12}^2 - r_{23}^2}{1 + (r_{12}r_{23})^2 + 2r_{12}r_{23}\cos(4\pi l/\lambda_2)},$$

$$\text{其中 } r_{ij} = (n_i - n_j)/(n_i + n_j)。$$

(c) $l \approx 1100 \text{ \AA}$

(d) 对于平透镜, 没有区别。

63.2 (a) $d \approx 1350 \text{ \AA}$

(b) 不改变。

64 物质的磁性

64.1 (b)

$$|dB/dt| \ll qB^2/2\pi m。$$

65 顺磁性与磁共振

65.1 $g = 5.5$

65.3 室温下约为 0.22%；液氮温度下约为 16%。

66 铁磁性

66.1 取球心为原点，采用球坐标系。

(a) $\mathbf{K} = M \sin \theta \mathbf{e}_\theta$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \mu &= \int_0^\pi K \pi (a \sin \theta)^2 a \, d\theta \\ &= \int_0^\pi M \pi a^3 \sin^3 \theta \, d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 M_s. \end{aligned}$$

66.2 (a) 约 $1.2 \, \text{Wb m}^{-2}$ 。

(b) 忽略了边缘效应。

66.3 约 $0.80 \, \text{Wb m}^{-2}$ 。

66.4 (a) $\mathbf{B} = \mathbf{M}/\epsilon_0 c^2$, $\mathbf{H} = 0$

(b) $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} = 0$

67 弹性

67.1 (a) 铝和钢半径之比为 1.30 : 1。

(b) 铝和钢质量之比为 0.59 : 1。

67.2 $\omega = (1.32 \times 10^5) \cdot a^2 / \sqrt{mL^3}$

67.4 (a) 尺子被弯曲成波长约 23'' 的正弦函数图的半波。

(b) 约 $2.8 \, \text{lb}_s$ 。

67.5 $P = \frac{\pi^2}{48} \frac{Y \omega t^3}{L^2}$

68 干水的流动

68.2 取 z 为圆筒的轴。

(a) $z = (\omega^2/2g) r^2$

(b) 速度场为 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 其中 $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$ 。于是 $\mathbf{v} =$

$\omega(-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y)$ 。所以,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \\ &= \omega \mathbf{e}_z (1+1) = 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

68.3 (b) $m\mathbf{v}$

69 湿水的流动

69.2 (b) $R = 8\eta L/\pi a^4$

69.3 $dU/dt = \eta v^2/d^2$

70 概率幅

70.1 (a) $\lambda = 2dx/L$

70.2 (a) 向下移动 $D(L/L')$, 其中 L 是墙和后挡板的距离, L' 是电子枪和墙的距离。

(b) 图样极大值和极小值间距离减半。

(c) P_{12} 将不对称。

70.3 经典考虑, 透射强度和入射强度之比是 $\cos^2 \theta$ 。量子考虑, 对于一个电子, 其被透射的概率是 $\cos^2 \theta$, 被吸收的概率是 $\sin^2 \theta$ 。

70.4 最内圆环半径约为 0.36 cm, 下一个圆环半径约为 0.72 cm。

70.5 (a)

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{L^2} (|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1| \\ &\quad |a_2| \cos \left[\frac{kdx}{L} + (\phi_1 - \phi_2) \right]). \end{aligned}$$

70.6 (a) $a = \frac{\lambda L}{d} = \frac{h l}{p_0 d}$

(c) 粒子的总能量必须守恒, 所以 $\frac{p^2(x)}{2m}$

$$+V(x) = \frac{p^2(0)}{2m} + V(0), \text{ 或 } p(x) =$$

$\sqrt{p^2(0) + 2m[V(0) - V(x)]}$ 。当 $V(x)$ 缓慢变化时, $V(x) - V(0)$ 将比较小, 因此 $p(x) \approx p(0) + [m/p(0)][V(0) - V(x)]$; 进一步, $V(x) - V(0) \approx \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)x = -Fx$ 。于是, $p(x) \approx p(0) + [m/p(0)]Fx$ 。由于粒子初始速度为 $v = p(0)/m$, 所以 $p(x) \approx p(0) + Fx/v$ 。

- (d) (1) 两路径长度近似为 L , 相位差近似为 $\Delta\phi \approx \Delta k L = (\Delta p/\hbar)L$, 其中 Δk 是波数差, Δp 是相应的动量差。两狭缝高度的平均差是 $d/2$, 于是, 利用(c)的结论, $\langle \Delta p \rangle = F(d/2)/v$ 。所以, $\Delta\phi \approx (dF/2v\hbar)L$ 。

(2)

$$S = + (dF/2v\hbar)L \frac{L}{d} \frac{\hbar}{mv} \\ = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \left(\frac{L}{v}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2。$$

- 70.7 令粒子从 S 到 x 的概率幅为 $\phi = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | S \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | S \rangle$ 。令电子通过一条狭缝的总概率为 $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 。记在 x 处, 自旋向上和自旋向下电子的强度分别为 P_+ 和 P_- , 因此在 x 处, 电子的总强度为 $P = P_+ + P_-$ 。

$$(a) P_+ = \alpha^2 \phi^2, P_- = \beta^2 \phi^2, P = \gamma^2 \phi^2。$$

$$(b) P_+ = \beta^2 \phi^2, P_- = \alpha^2 \phi^2,$$

$$P = \gamma^2 \phi^2。$$

$$(c) P_+ = P_- = \frac{1}{2} \gamma^2 \phi^2, P = \gamma^2 \phi^2。$$

- 70.8 当概率减小至原来的 $1/100$, 相应的概率幅应减小为原来的 $1/10$ 。于是, 通过缩小的孔到达屏上某处的概率幅减小为原来的 $1/10$ 。如果通过未缩小的孔到达屏上某处的概率幅为 $ae^{i\phi_1}$, 则通过缩小的孔到达屏上某处的概率幅为 $0.1ae^{i\phi_2}$ 。最大值和最小值分别对应于两概率幅同相位和反相位。所以, 到达图样极大值处的概率与到达图样极小值处的概率之比为 $|a + 0.1a|^2 / |a - 0.1a|^2 = 1.21/0.81 \approx 1.49$ 。

- 70.9 “巧合”计数率 p_{12} 有 4 种来源: 一个光子由源 A 到计数器 a , 而另一个光子由源 B 到计数器 b ; 一个光子由源 A 到计数器 b , 而另一个光子由源 B 到计数器 a ; 两个光子由源 A 到计数器; 两个光子由源 B 到计数器。前两种方式不可区分, 因此它们的概率幅相加; 后两种方式可区分, 因此它们的概率相加。所以,

$$P = |\langle a | A \rangle \langle b | B \rangle + \langle b | A \rangle \langle a | B \rangle|^2 \\ + |\langle a | A \rangle \langle b | A \rangle|^2 \\ + |\langle a | B \rangle \langle b | B \rangle|^2。$$

已知, $\langle a | A \rangle = c e^{ikR_1}$, $\langle b | A \rangle = c e^{ikR_2}$ 。由对称性可知, $\langle b | B \rangle = \langle a | A \rangle$, $\langle a | B \rangle = \langle b | A \rangle$ 。所以,

$$P = 2|c|^4 (2 + \cos 2k(R_2 - R_1))。$$

- (b) 如果 R 已知, 可以通过测量 p_{12} 关于 d 的变化来得到 D 。

71 全同粒子

$$71.1 (a) E = 4.14 \times 10^{-9} \text{ eV}$$

- (b) $N = 1.51 \times 10^{27}$
- 71.2 (a) $\frac{\Delta E(\omega)}{\Delta \omega} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 + O(\omega^3)$ (对于小 ω)
- $$\frac{\Delta E(\omega)}{\Delta \omega} \approx \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar \omega / kT} \quad (\text{对于大 } \omega)$$
- (b) $\omega_{E_{\max}} = (3.69 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}) \cdot T$
- (c) $\lambda_{E_{\max}} = (2.9 \times 10^7 \text{ Å K}) / T$
- (d) $T = 5800 \text{ K}$
- 71.3 $B = 2.12 \times 10^8 \text{ gauss}$
- 71.4 (a) $N_1/N_0 = N_2/N_1 = n(\omega)/(n(\omega) + 1)$
- (b) $n(\omega) = 1/(e^{\Delta E/kT} - 1)$
- (c) (1) $n(\omega) \approx e^{-\Delta E/kT}$;
(2) $n(\omega) \approx kT/\Delta E$
- 71.5 质子、中子和电子都是费米子。对于仅由这些粒子构成的原子,如果粒子数为偶数,则是玻色子;如果粒子数为奇数,则是费米子。 N^{11} 原子核电荷为+7,有7个轨道电子围绕着核。如果核仅包含质子和电子的话,则核内需要有14个质子和7个电子(为了得到所需的质量和电荷)。加上轨道电子,原子共包含28个费米子,因此是玻色子。另一猜测,如果核内仅含质子和中子,则两者各7个。加上轨道电子,原子共包含21个费米子,因此是费米子。
- 71.6 (a) 如果一个原子被激发,对应于任意状态(频率,方向,极化)的光子发射的跃迁都有一定的概率发生。如果已经存在 n 个某状态的光子,则此状态的光子的发射率被增加 $n+1$ 倍。这解释了“雪崩”效应。(并非

原子被“训练”成以相同方向发射光子,而是周围的某状态光子“海”放大了这种光子的发射率。)

- (b) 中微子是费米子,不可能有两个费米子处于相同状态,因此中微子“激光”不可能存在。

- 71.7 (a) $P_{a \rightarrow b} = |\langle b | a \rangle|^2$, $P_{c \rightarrow d} = |\langle d | c \rangle|^2$ 。对于非全同粒子,联合事件($a \rightarrow b$ 且 $c \rightarrow d$)的概率幅是两事件概率幅之积: $\langle bd | ac \rangle = \langle b | a \rangle \langle d | c \rangle$ 。所以,
 $P_{a \rightarrow b, c \rightarrow d} = |\langle bd | ac \rangle|^2 = |\langle b | a \rangle|^2 |\langle d | c \rangle|^2 = P_{a \rightarrow b} P_{c \rightarrow d}$ 。
- (b) 必须。

71.8 $P(\theta) = |f(\theta)|^2 + \frac{2}{3} \text{Re}[f(\theta)^* f(\pi - \theta)] + |f(\pi - \theta)|^2$

- 71.9 (a) $P(\theta) = 4P_1(\theta) + 4P_2(\theta)$
- (b) $P(\theta) = 4P_1(\theta) + 4P_2(\theta) + 8\text{Re}[f_1^*(\theta)f_2(\theta)]$

- (c) 答案取决于 f_1 和 f_2 的相对相位。当 f_1 和 f_2 相位相同或相近时, (b) 导致更多散射。

- 71.10 (a) 0
- (b) $2|f - g|^2$
- (c) $|f - g|^2$
- (d) $|f - g|^2$
- (e) $2|f|^2$
- 71.11 (a) $\alpha \approx \theta/2$
- (b) $g(\theta) - f'(\pi - \theta)$
- (c) $P(\theta) = \frac{1}{2} |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{2} |f'(\theta) - g(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{2}$

$$|g(\theta) - f'(\pi - \theta)|^2$$

$$(e) A = 3/4, B = 1/4$$

$$71.12 (b) U = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_e} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$$

$$(c) P = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

$$(d) \gamma = 5/3$$

$$71.13 (b) A = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} (2M_p)^{-5/3}$$

72 自旋 1

$$72.2 (a) \text{ 否}$$

$$(b) \text{ 是}$$

$$(c) \text{ 是}$$

$$72.3 (a) N_z = \frac{3}{4} N_1$$

$$(b) N_3 = \frac{1}{16} N_1$$

$$(c) N_z = N_1, N_3 = 0$$

$$72.4 (a) N_{+S'} = N_{-S'} = 0, N_{0S'} = N_0$$

$$(b) N_{+T} = N_{-T} = \frac{1}{2} N_0,$$

$$N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{4} N_0,$$

$$N_{0S'} = \frac{1}{2} N_0$$

$$(c) \text{ 没变化。}$$

$$(d) N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{8} N_0,$$

$$N_{0S'} = \frac{3}{4} N_0$$

$$(e) N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{6} N_0,$$

$$N_{0S'} = \frac{1}{3} N_0$$

73 自旋 1/2

$$73.1 (a) N/2$$

$$(b) N/4$$

$$(c) N/4$$

$$(d) N/4$$

$$(e) (N/4)(1 + 1/\sqrt{2})$$

$$(f) N/4$$

$$(g) (N/4)(1 + 1/\sqrt{2})$$

$$(h) N/2$$

$$73.2 (a) \text{ 令 } X \text{ 和 } Y \text{ 分别为自旋向上和自旋向下粒子到达给定点的概率幅, 则粒子到达该点的总概率幅是 } aX + bY, \text{ 所以概率是 } |aX + bY|^2.$$

$$(b) \text{ 自旋向上: } P = |X|^2; \text{ 自旋向下: } P = |Y|^2.$$

$$(c) \text{ 自旋向上: } P = \frac{1}{2} |X + Y|^2; \text{ 自旋}$$

$$\text{向下: } P = \frac{1}{2} |X - Y|^2.$$

$$(d) P = \left| \cos \frac{\theta}{2} X - i e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} Y \right|^2.$$

$$(e) \langle P \rangle = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

$$73.3 (a) N = N_0 | \langle +U | -S \rangle |^2$$

$$(b) \langle +T | -S \rangle = 1, \langle -T | -S \rangle = 0$$

$$(c) \langle +U | -S \rangle = i \sin \theta / 2$$

$$(d) (1) i \sin 0 / 2 = 0; (2) i \sin \pi / 2 = i$$

$$(e) \text{ 概率幅 } 1 \text{ 和 } i \text{ 的差别是不相干因子, 所有的概率一样。}$$

$$73.5 \text{ 令 } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

(c) 同(a)。

(d) 同(b)。

$$(e) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f) e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$(h) \text{ 同(e), 其中 } \theta = \pi/2: \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(i) \begin{pmatrix} e^{i\omega t n_x / c} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t n_y / c} \end{pmatrix},$$

其中, ω 是入射光频率, n_x 和 n_y 是沿 x 轴和 y 轴的折射率, t 是材料厚度。

$$(j) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(k) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$73.6 (a) P_{+z} = (1 - v/c) \sin^2 \theta / 2,$$

$$P_{-z} = (1 + v/c) \cos^2 \theta / 2$$

$$(b) P_{\pm z} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \pm \sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta \right)$$

$$(c) P_{\pm y} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

$$(d) P_{\pm z} = \frac{1}{2} (1 \mp v/c)。$$

74 概率幅对时间的依赖关系

74.1 (a)

$$\Delta \theta \approx \frac{m \mu_z}{p_0^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} L,$$

其中, m 是粒子质量, μ_z 量子化, 其值可

取 $+\mu, 0, -\mu$ 。

75 哈密顿矩阵

$$75.1 (a) B_0 = \pi \hbar / 2 \mu T$$

$$(b) P = 1/2$$

$$75.2 P_{+x}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\mu B}{\hbar} t \right)$$

$$P_{+y}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{2\mu B}{\hbar} t \right)$$

$$75.3 (a) P_{+z}(t) = \cos^2 (At / \hbar)$$

$$(b) C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{+z} + C_{-z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+iAt/\hbar},$$

$$E = -A$$

$$C_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{+z} - C_{-z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iAt/\hbar},$$

$$E = +A$$

$$(c) \alpha = 2At / \hbar, \beta = \pi, \gamma \text{ 任意。}$$

76 氨微波激射器

76.1 令 $g(\omega_0)$ 为在共振频率 ω_0 的辐射强度,

μ 是氨分子的电偶极矩。

$$(a) P(I \rightarrow II) = (\pi \mu^2 / \epsilon_0 \hbar^2 c) g(\omega_0)$$

(b) 相等。

$$(c) A_{I,II} = \left[\frac{\hbar \omega_0^3}{\pi^2 c^2} \right] P(I \rightarrow II) / g(\omega_0)。$$

77 其他双态系统

$$77.1 (a) \omega = (2\mu B / \hbar) \cos \theta$$

$$(b) P_{-z}(t) = \sin^2 [(\mu B / \hbar) \sin \theta t]$$

$$77.2 \omega_0 = 2\mu B_0 / \hbar, \omega_n = 2\mu B_n / \hbar,$$

$$P_{||}(t) = \frac{\omega_n^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2} \right)。$$

78 再论双态系统

78.1 (a) 提示: 利用《费曼物理学讲义(第3卷)》表 11-2。

$$(b) \sigma_x \sigma_y \sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

78.2 (a) $E = E_0$ 或 $E = \frac{1}{2}(E_0 + E_C \pm \sqrt{(E_0 - E_C)^2 + 8A^2})$, 其中 $-iA/\hbar$ 是单位时间电子在 O 和 C 原子间跳跃的概率幅。

78.3 (b) $E_I = E_0 + 2A$, 其中 E_0 是额外电子在任一原子上时的能量。

(c) 6。

(d) $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ 。

(e) 能级间隔: $A, 2A, 3A, 4A$ 。

79 氢的超精细分裂

79.1 (a) $f_{I, II} = 28 \text{ Hz}$, $\lambda_{I, II} = 10^9 \text{ cm}$;

$$f_{I, III} = 14 \text{ Hz}, \lambda_{I, III} = 2 \times 10^9 \text{ cm}$$

(b) $f_{I, II} = 1.4 \text{ MHz}$, $\lambda_{I, II} = 2 \times 10^4 \text{ cm}$; $f_{III, II} = 0.7 \text{ MHz}$, $\lambda_{III, II} = 4 \times 10^4 \text{ cm}$

(c) $f_{I, II} = 2.8 \times 10^5 \text{ MHz}$, $\lambda_{I, II} = 10^{-1} \text{ cm}$; $f_{I, III} = 1.130 \text{ MHz}$, $\lambda_{I, III} = 27 \text{ cm}$

80 在晶格中的传播

80.1 (a) 令概率幅对两种构型 i 和 j 的空间依赖关系分别是 $e^{ik_1 x}$ 和 $e^{ik_2 x}$ 。

$$E = \frac{1}{2}[E(i) + E(j)] \pm \frac{1}{2}\sqrt{[E(i) - E(j)]^2 + 16A^2 \cos k_i b \cos k_j b}$$

其中,

$$E(i) = E_0 - 2B \cos k_i b,$$

$$E(j) = E_0 - 2B \cos k_j b.$$

80.2 (a) $E = E_0 \pm \sqrt{(\Delta E)^2 + 4A^2 \cos^2 kb}$

(b) $-\pi/2b < k \leq \pi/2b$

80.3 (a) $\beta = -\frac{G}{G - iB^2 \sin kb}$, 其中 $G = (A^2 - B^2) \cos kb$
 $\gamma = 1 + \beta$

(b) $\beta = -d/(d - ie)$, 其中 d 和 e 是实数。于是, $|\beta|^2 = d^2/(d^2 + e^2)$
 and $|\gamma|^2 = |1 + \beta|^2 = |(d - ie - d)/(d - ie)|^2 = e^2/(d^2 + e^2)$. 于是, $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

80.4 (a) $1 = |\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1 + 2|\beta|^2 + 2\text{Re}[\beta]$, so $|\beta|^2 + \text{Re}[\beta] = 0$.
 于是,

$$\begin{aligned} \text{Re}\left[\frac{\beta}{1 + \beta}\right] &= \text{Re}\left[\frac{\beta(1 + \beta^*)}{|1 + \beta|^2}\right] \\ &= \frac{\text{Re}[\beta] + |\beta|^2}{|1 + \beta|^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) 令 $\beta = ce^{i\delta}$ 其中 c 和 δ 是实数。

$$|\beta|^2 + \text{Re}[\beta] = 0 \rightarrow c^2 + c \cos \delta = 0,$$

所以 $c = -\cos \delta$. 令 $\eta = \delta - \pi/2$.

所以 $c = -\cos(\eta + \pi/2) = \sin \eta$,

$e^{i\delta} = e^{i(\eta + \pi/2)} = ie^{i\eta}$. 所以 $\beta = i \sin \eta e^{i\eta}$.

80.5 (b) $\beta = -\frac{P - e^{ikb}}{P - e^{-ikb}}$,

其中, $P = \frac{B^2}{AA'} e^{ik'b'}$

81 半导体

81.1 (b)

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[q E_x^* v_x] \\ &= \frac{1}{2} q \operatorname{Re} \left[E_x^* E_x \frac{v_x}{E_x} \right] \\ &= \frac{1}{2} q E_0^2 \operatorname{Re} \left[\frac{v_x}{E_x} \right].\end{aligned}$$

81.2 (b) $I_{\text{总}} = I_0 (e^{qV_x/kT} - 1)$, 其中 I_0 是在“反向电压”下, 流经“ $p-n$ ”结的最大电流。

82 独立粒子近似

82.1 $\lambda \approx 10^{-6} \text{ m}$

82.2 $\Delta E \approx 3.1 \text{ eV mol}^{-1}$

82.3 (a) 如果在模式 K 发现无自旋向下的概率是 C , 则发现 n 个自旋向下的概率为 $C e^{-nE_K/kT}$ 。在模式 K , 自旋向下原子的平均数为

$$\begin{aligned}n_K &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n C e^{-nE_K/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} C e^{-nE_K/kT}} \\ &= \frac{C e^{E_K/kT} / (e^{E_K/kT} - 1)^2}{C e^{E_K/kT} / (e^{E_K/kT} - 1)} \\ &= \frac{1}{e^{E_K/kT} - 1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(d)} \quad \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx^2} dx \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \zeta(3/2) \approx 2.61\end{aligned}$$

83 振幅对位置的依赖关系

83.1 (a) 对于 $\psi(x, t) = u_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar}$, 薛定

谔方程给出 $\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E_0] u_0(x)$ 。在 $V(x) = V_0 (V_0 \rightarrow \infty)$ 区域, $|u_0(x)|$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时变得无限大, 不能描述束缚粒子。

$$\text{(b)} \quad u_n(x) = A \sin \left[\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} x \right]$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n+1)^2$$

其中, A 是常数, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{(c)} \quad E_0 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2,$$

$$u_0(x) = \begin{cases} A \sin(\pi x/a) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x < 0 \text{ 或 } x > a \end{cases}$$

$$\text{(d)} \quad E_1 - E_0 = 3\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$$

$$83.2 \quad \text{(a)} \quad V_0 \approx 35 \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$$

$$83.3 \quad \text{(b)} \quad E_0 \approx 0.27 V_0, \quad E_1 \approx 0.90 V_0$$

(c) 1。

83.4 应用薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

至 $\psi(x) = K e^{-[a(t)x^2 + c(t)]}$, 整理得

$$\begin{aligned}& -i\hbar \left(\frac{da}{dt} x^2 + \frac{dc}{dt} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} (-2a + 4a^2 x^2).\end{aligned}$$

这必须适用于所有 x , 所以 x 相同次方的系数方程两边相同。

$$-i\hbar \frac{da}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} 4a^2,$$

求解得

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m}t,$$

$$(b) c(t) = c_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{a_0}{a(t)}, \text{ 其中 } c_0 =$$

$$c(0)。$$

$$(c) \text{ 约 } 2\,300 \text{ km}。$$

$$(d) |\phi(\rho)|^2 = K^2 \frac{\pi}{a_0} e^{-2c_0 - \rho^2/2\hbar^2 a_0}$$

$$(e) \text{ 不随时间变化。}$$

84 角动量

$$84.1 \quad A(\theta) \propto \sin \theta$$

$$84.2 \quad (a) a = c = d = e = f = g = 0$$

$$(b) f^+(\theta) = |b|^2 \sin^2(\theta/2)$$

$$(c) f(\theta) = |b|^2 \sin^2(\theta/2) + |h|^2 \cos^2(\theta/2)$$

$$(d) \text{ 宇称守恒意味着 } b = \pm h, \text{ 所以 } f(\theta) = |b|^2。$$

$$84.3 \quad (b)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} |c|^2 \left(\frac{3}{4} (|b|^2 - |a|^2) \sin^2 \theta + |a|^2 \right)。$$

$$84.5 \quad (a) \text{ 不能。}$$

$$(b) \text{ 如果初始态为偶宇称, } x' \text{ 偏振光子的角分布是各向同性的; 如果初始态为奇宇称, 角分布正比于 } \cos \theta。$$

85 氢原子与周期表

$$85.1 \quad \text{发射谱有两条强度相同的谱线, 波长分别为 } 1\,210 \text{ \AA} \text{ 和 } 6\,560 \text{ \AA}。$$

$$85.2 \quad (a) \text{ 基态能量为里德伯能量: } E =$$

$$-\frac{m e^4}{2 \hbar^2} = -\frac{e^2}{2 r_B}。 \text{ 经典地, 电}$$

$$\text{子的最可能半径 } R \text{ 是动能为零的地方, 即势能等于总能量, } -\frac{e^2}{R}$$

$$= -\frac{e^2}{2 r_B}, \text{ 所以, } R = 2 r_B。$$

$$(b) 0.238$$

$$85.3 \quad (a) E_0 = 18.9 \text{ MeV}$$

$$(b) \lambda_{1 \rightarrow 0} = 8.7 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

$$(c) r_B' = 3.1 \times 10^{-5} \text{ \AA}$$

$$(d) P(r \leq R) = 1 - (1 + 2s + 2s^2)e^{-2s},$$

$$\text{其中 } s = R/r_B'。$$

$$(e) P(e) \approx 1.8 \times 10^{-6};$$

$$P(\mu) \approx 0.83。$$

$$85.4 \quad (a) n=5 \rightarrow n=2 \text{ 跃迁; } 13.06 \text{ eV}。$$

$$(b) \text{ 最短波长: } 3\,650 \text{ \AA}; \text{ 最长波长: } 6\,560 \text{ \AA}。$$

$$(c) -54.4 \text{ eV}。$$

$$(d) 3\,650 \text{ \AA}。 \text{ 与巴耳末系中的最短波长一样。}$$